

S. FINIKOFF

Déformation à réseau conjugué persistant et problèmes géométriques qui s'y rattachent

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 96 (1939)

http://www.numdam.org/item?id=MSM_1939__96__1_0

© Gauthier-Villars, 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémorial des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

BSM 3636

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

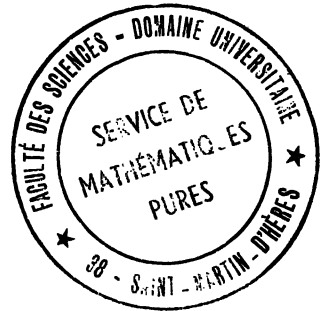
Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,

Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE XCVI

Déformation à réseau conjugué persistant
et problèmes géométriques qui s'y rattachent

Par M. S. FINIKOFF



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55.

1939

**Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.**

DÉFORMATION
A
RÉSEAU CONJUGUÉ PERSISTANT
ET
PROBLÈMES GÉOMÉTRIQUES QUI S'Y RATTACHENT

Par M. S. FINIKOFF.

CHAPITRE I.

RÉSEAU CONJUGUÉ PERSISTANT D'UNE SURFACE.

I. — Réseau conjugué commun à deux surfaces.

1. S et S' étant deux surfaces quelconques en correspondance ponctuelle biunivoque, il existe sur S un réseau conjugué correspondant à un réseau conjugué de S'. Ce réseau, en général unique, est indéterminé si la correspondance conserve les asymptotiques, et dans ce cas seulement [8, 10].

Si la correspondance est une applicabilité, et si S, S' ne sont ni égales ni symétriques, les asymptotiques ne se correspondent pas. Il existe donc un réseau conjugué et un seul, de l'une des deux surfaces, correspondant à un réseau conjugué de l'autre, défini par l'équation [8, 22]

$$(1) (DD'_1 - D_1D') du^2 + (DD''_1 - D_1D'') du dv + (D'D'_1 - D'_1D'') dv^2 = 0;$$

où D, D', . . . , D''₁ sont les coefficients des secondes formes quadra-

tiques de S, S' , et où u, v sont les paramètres définissant les couples de points homologues sur les deux surfaces.

Si S, S' sont réglées et si les génératrices rectilignes se correspondent, les courbes du réseau conjugué commun se réduisent, sur chaque surface, au système des génératrices rectilignes.

2. Commençons par étudier le problème suivant :
Étant donné la forme définie positive

$$(2) \quad ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

existe-t-il une surface S admettant cette forme pour élément linéaire et sur laquelle les courbes u, v constituent un réseau conjugué?

Si S existe, elle est intrinsèquement déterminée par sa seconde forme (1)

$$(3) \quad D du^2 + D' dv^2 \equiv -S dc dx$$

et le problème revient à chercher s'il existe des fonctions

$$(4) \quad \delta = \frac{D}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \delta' = \frac{D'}{\sqrt{EG - F^2}}$$

vérifiant les équations de *Gauss-Codazzi*

$$(5) \quad \frac{\partial \delta}{\partial v} = - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \delta - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \delta', \quad \frac{\partial \delta'}{\partial u} = - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \delta - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \delta', \quad \delta \delta'' = K,$$

où les symboles de Christoffel et la courbure totale K se rapportent à la forme (2).

La dernière équation (5) permet de poser

$$\delta = \sqrt{K} t, \quad \delta' = \sqrt{K} \frac{1}{t}, \quad (t = \text{fonction auxiliaire}).$$

(1) Dans la *Théorie des Surfaces* de Darboux, les coefficients D, D', D'' sont au contraire ceux qui donnent la relation

$$D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2 = -\sqrt{EG - F^2} (S dc dx).$$

Les deux premières équations s'écrivent alors

$$(6) \quad \frac{\partial \log t}{\partial u} = b_1 t^2 + a, \quad - \frac{\partial \log t}{\partial v} = \frac{b}{t'} + a_1,$$

avec

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} b = \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad b_1 = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad a = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \frac{\partial \log K}{\partial u}, \\ a_1 = \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \frac{\partial \log K}{\partial v}. \end{array} \right.$$

La condition d'intégrabilité de (6) est

$$(8) \quad t''(b_{1v} - 2a_1 b_1) + a_v + a_{1u} - 4bb_1 + \frac{1}{t^2}(b_u - 2ab) = 0.$$

Si t est une solution de (8) vérifiant (6) il en est de même de $-t$; ces deux solutions déterminent, intrinsèquement, deux surfaces symétriques satisfaisant aux conditions imposées.

A deux solutions essentiellement différentes de (8), vérifiant (6), correspondent deux surfaces applicables S, S' rapportées au réseau conjugué (u, v) commun.

S'il existe trois surfaces applicables avec le même réseau conjugué (u, v) , il existe trois solutions de (8) vérifiant (6); l'équation (8) disparaît identiquement et l'on a

$$(9) \quad b_{1v} = 2a_1 b_1, \quad b_u = 2ab, \quad a_v + a_{1u} = 4bb_1.$$

Le système (6) est alors complètement intégrable et détermine t avec une constante arbitraire : *il existe donc une famille de ∞^1 surfaces applicables S sur lesquelles les courbes u, v forment un réseau conjugué [8, 10]. Le réseau (u, v) est dit réseau conjugué persistant ou permanent ou encore base principale de la déformation qui fait passer de l'une quelconque des ∞^1 surfaces S ci-dessus à toutes les autres.*

3. Une surface étant rapportée à un réseau conjugué, la permanence du réseau est caractérisée par les équations suivantes, obtenues [77] en portant les expressions (7) dans les relations (9)

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}}{K}, \quad \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}}{K}, \\ \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = 8 \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}. \end{array} \right.$$

Les équations (10) supposent $\left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$ et $\left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \neq 0$. La condition $\left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 0$ exprime que les u sont géodésiques; alors (8) est linéaire en t^2 , et l'on peut dire [130] :

S'il existe deux surfaces applicables à réseau (u, v) conjugué, les courbes u étant géodésiques sur les deux surfaces, il existe ∞^1 surfaces applicables sur les premières jouissant des mêmes propriétés.

Dans le cas où $\left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$ est nul, le système (10) est à remplacer par

$$(11) \quad \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 0, \quad \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}}{K}, \quad \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}}{\partial v} + \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}}{\partial u} + \frac{\partial^2 \log K}{\partial u \partial v} = 0.$$

Si les lignes conjuguées u, v sont géodésiques [le réseau (u, v) est alors dit *de Voss*] [14], (8) est réduite à un seul terme. Il en résulte qu'un réseau de Voss persiste dans une déformation continue [3, 31] (10) est ici à remplacer par

$$(12) \quad \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 0, \quad \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}}{\partial v} + \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}}{\partial u} + \frac{\partial^2 \log K}{\partial u \partial v} = 0.$$

Les raisonnements précédents se modifient si, au lieu de se donner un élément linéaire, on se donne une surface S sur laquelle le réseau coordonné est conjugué. La connaissance des deux formes fondamentales de S entraîne alors celle d'une solution t des équations (6) vérifiant (8). Il en résulte que la condition d'intégrabilité complète de (6), assurant la permanence du réseau coordonné, se réduit aux deux premières équations (10). Le résultat subsiste dans les cas (11) et (12).

La dernière équation (10) est de forme classique et s'intègre.

En prenant (2) sous la forme

$$ds^2 = A^2 du^2 + 2 AC \cos \Omega du dv + C^2 dv^2,$$

et en choisissant convenablement u, v , (10) peut s'écrire

$$(10') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{A^{\circ}K}{b} = 2 \frac{C}{A} b \cos \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{C^{\circ}K}{b_1} = 2 \frac{A}{C} b_1 \cos \Omega, \quad bb_1 = \frac{1}{4(u+v)^2}, \\ \frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial C \cos \Omega}{\partial u} + b \frac{C^{\circ}}{A} \sin^2 \Omega = 0, \\ \frac{\partial C}{\partial u} - \frac{\partial A \cos \Omega}{\partial v} + b_1 \frac{A^{\circ}}{C} \sin^2 \Omega = 0, \\ \frac{\partial^{\circ} \Omega}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial u} \left(b_1 \frac{A}{C} \sin \Omega \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(b \frac{C}{A} \sin \Omega \right) = KAC \sin \Omega, \end{array} \right.$$

et prouve que les surfaces ayant un réseau persistant dépendent de six fonctions arbitraires d'un argument; mais sur une telle surface, les réseaux dépendent de deux constantes au plus [151].

De même (11) et (12) s'écrivent sous les formes

$$(11') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial C \cos \Omega}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{C}{A b_1} \right) = \cos \Omega, \\ \frac{\partial C}{\partial u} - \frac{\partial A \cos \Omega}{\partial v} + b_1 \frac{A^{\circ}}{C} \sin^{\circ} \Omega = 0, \\ \frac{\partial^{\circ} \Omega}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial u} \left(b_1 \frac{A}{C} \sin \Omega \right) - \frac{C}{A b_1} \sin \Omega = 0; \end{array} \right.$$

$$(12') \quad \frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial C \cos \Omega}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial u} - \frac{\partial A \cos \Omega}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial^{\circ} \Omega}{\partial u \partial v} = \sin \Omega;$$

qui prouvent que les réseaux conjugués persistants contenant une famille de géodésiques et les réseaux de Voss dépendent, respectivement, de cinq et quatre fonctions arbitraires d'un argument.

4. Il est remarquable que les réseaux conjugués persistants puissent être caractérisés par une propriété de leur image sphérique.

Soit S une surface douée d'un réseau conjugué persistant et rapportée à ce réseau. Les symboles de Christoffel accentués se rapportant à la représentation sphérique de S, on sait que l'on a les formules [Weingarten (1)]

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 11 \\ 1 \end{array} \right\} = \frac{\partial \log D}{\partial u} - \left\{ \begin{array}{l} 11 \\ 1 \end{array} \right\}', \quad \left\{ \begin{array}{l} 22 \\ 2 \end{array} \right\} = \frac{\partial \log D''}{\partial v} - \left\{ \begin{array}{l} 22 \\ 2 \end{array} \right\}', \\ \left\{ \begin{array}{l} 11 \\ 2 \end{array} \right\} = -\frac{D}{D''} \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 1 \end{array} \right\}', \quad \left\{ \begin{array}{l} 22 \\ 1 \end{array} \right\} = -\frac{D''}{D} \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 2 \end{array} \right\}'. \end{array} \right.$$

(1) Voir, par exemple. L. BIANCHI, *Geometria differenziale*, 3^e édit., t. 1, p. 252.

En portant les expressions précédentes des $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right\}^j$ dans les équations (10), et eu égard aux identités

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}' + \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}' &= \frac{1}{2} \frac{\partial \log K}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial \log DD''}{\partial u}, \\ \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}' + \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}' &= \frac{1}{2} \frac{\partial \log K}{\partial v} + \frac{1}{2} \frac{\partial \log DD''}{\partial v}, \end{aligned}$$

on obtient les deux équations indépendantes

$$(14) \quad \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}'}{\partial u} = \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}'}{\partial v} = 2 \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}' \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}',$$

qui caractérisent l'image sphérique d'un réseau conjugué persistant, et dont l'ensemble constitue la *condition de Cosserat* [23, 24, 33].

Les relations (14) subsistent si $\left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}'$ ou $\left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}' = 0$.

L'égalité obtenue en ne conservant que les deux premières expressions (14) exprime que les courbes u, v de la sphère unité sont les images des asymptotiques d'une certaine surface ou encore que les coordonnées c, c', c'' du point de la sphère vérifient une équation de Laplace à invariants égaux.

5. Les équations (14) s'intègrent

$$(15) \quad \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}' = -\frac{V'}{2(U+V)}, \quad \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}' = -\frac{U'}{2(U+V)}.$$

Ici, et dans la suite, U, V désignent des fonctions de u ou v

$$\left[U' = \frac{dU}{du}, \dots, V' = \frac{dV}{dv}, \dots \right],$$

que l'on peut (sauf si elles sont constantes) prendre pour variables indépendantes.

Si V est une constante, on peut l'annuler en ajoutant la même constante à U . Les courbes u du réseau sont alors géodésiques,

et l'image sphérique est déterminée par le système

$$(16) \quad \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}' = 0, \quad \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}' = -\frac{U'}{2U}.$$

Si U et V sont constantes, le réseau est géodésique.

Pour donner une application supposons le réseau (u, v) orthogonal (réseau de courbure). Les équations (15) s'intègrent et conduisent à la forme suivante de l'élément linéaire sphérique

$$(17) \quad ds'^2 = \frac{U_1 du^2 + V_1 dv^2}{U + V}.$$

Si l'on exprime que la courbure de la forme (17) est égale à un , on constate que l'une des deux fonctions U ou V doit être constante et, moyennant un choix convenable des paramètres, on obtient

$$(18) \quad ds'^2 = \frac{U''}{\alpha^2 - U''} du^2 + (\alpha^2 - U'') dv^2.$$

Les équations finies de la surface portant le réseau sont

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{U}{\alpha} \cos \alpha v + \int V \sin \alpha v \, dv, \quad y = -\frac{U}{\alpha} \sin \alpha v + \int V \cos \alpha v \, dv, \\ z = \int \sqrt{1 - \frac{U'^2}{\alpha^2}} \, du. \end{array} \right.$$

U et V sont des fonctions arbitraires et α le paramètre de déformation. La surface est une surface moulure dans le cas général [2, 3, 6, 13, 25, 34, 143], et se réduit à une surface de révolution si $V = 0$ [5].

6. Étant donné un réseau conjugué persistant, tout réseau de même représentation sphérique jouit de la même propriété. Il en résulte une méthode de transformation des réseaux conjugués persistants, que Peterson [8, 10] a obtenue comme il suit :

Soient (M) et (M^*) deux surfaces dont les réseaux coordonnés sont parallèles (les tangentes homologues sont parallèles). Si M et M^*

sont les rayons vecteurs des points M et M^* , la condition de parallélisme se traduit par les équations

$$(20) \quad \mathbf{M}_u^* = \lambda \mathbf{M}_u, \quad \mathbf{M}_v^* = \mu \mathbf{M}_v,$$

où λ et μ sont des facteurs scalaires et où les indices désignent des dérivations.

En éliminant M^* on obtient

$$(21) \quad \lambda_v \mathbf{M}_u + \lambda \mathbf{M}_{uv} = \mu_u \mathbf{M}_v + \mu \mathbf{M}_{uv}.$$

Si $\lambda = \mu$, (21) montre que $\lambda_v = \mu_u = 0$; λ est constant et la surface (M^*) est homothétique de (M).

Dans le cas général ($\lambda \neq \mu$), multiplions (21) par le vecteur \mathbf{n} normal à (M); nous obtenons

$$(22) \quad \lambda \mathbf{n} \mathbf{M}_{uv} = \mu \mathbf{n} \mathbf{M}_{uv};$$

d'où l'on déduit l'égalité $\mathbf{n} \mathbf{M}_{uv} = 0$, qui prouve que le réseau (u, v) est conjugué sur (M) et, par analogie, sur (M^*).

En multipliant (21) par \mathbf{M}_u , puis par \mathbf{M}_v , on obtient

$$(23) \quad \begin{cases} \lambda_v \mathcal{E} - \mu_u \mathcal{F} = \frac{\mu - \lambda}{2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v}, \\ \lambda_v \mathcal{F} - \mu_u \mathcal{G} = \frac{\mu - \lambda}{2} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial u}, \end{cases}$$

où \mathcal{E} , \mathcal{F} , \mathcal{G} sont les coefficients de l'élément linéaire de (M).

Le réseau (M) étant donné, le système (23) détermine λ , μ avec deux fonctions arbitraires d'un argument, et les (20) déterminent (M^*) transformé de Peterson de (M).

L'élément linéaire de (M^*) est

$$dt^{*2} = \lambda^2 \mathcal{E} du^2 + 2\mu\lambda \mathcal{F} dudv + \mu^2 \mathcal{G} dv^2.$$

λ et μ ne dépendant que de l'élément linéaire de (M), on voit que si (M) se déforme sur le réseaux (u, v) comme base, il en est de même de (M^*). La transformation de Peterson transforme bien un réseau conjugué persistant en un réseau analogue.

**II. — Réseaux conjugués persistants d'une surface
ou d'un élément linéaire.**

7. La méthode du paragraphe 1 peut être généralisée. Étudions le problème suivant [86, 131] :

Étant donné la forme (2) et deux équations différentielles

$$(24) \quad \frac{du}{dv} = \varphi(u, v), \quad \frac{dv}{du} = \psi(u, v),$$

existe-t-il une surface S, d'élément linéaire (2), sur laquelle les (24) définissent les deux familles de courbes d'un réseau conjugué?

Il s'agit de voir s'il existe trois fonctions

$$(25) \quad \delta = \frac{D}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \delta' = \frac{D'}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \delta'' = \frac{D''}{\sqrt{EG - F^2}}$$

satisfaisant aux deux équations de Codazzi et aux deux autres

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta \varphi \psi + \delta'(\varphi + \psi) + \delta'' = 0, \\ \delta \delta'' - \delta'^2 = -\frac{1}{r^2}, \end{array} \right.$$

dont la première exprime que les lignes (24) sont conjuguées sur S. et la deuxième que la courbure totale de S est la courbure $-\frac{1}{r^2}$ de la forme (2).

Introduisons une fonction auxiliaire τ par les équations

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta = \frac{1}{r\sqrt{\varphi\psi}} \frac{(\varphi + \psi)\text{sh}\tau + (\varphi - \psi)\text{ch}\tau}{\varphi - \psi}, \\ \delta' = -\frac{2\sqrt{\varphi\psi}}{r(\varphi - \psi)} \text{sh}\tau, \\ \delta'' = \frac{\sqrt{\varphi\psi}}{r} \frac{(\varphi + \psi)\text{sh}\tau - (\varphi - \psi)\text{ch}\tau}{\varphi - \psi}. \end{array} \right.$$

Les expressions (27) vérifient les équations finies (26), et donnent

aux équations de Codazzi les formes

$$(28) \quad \begin{cases} \frac{\partial 2\tau}{\partial u} = \mathcal{M} \operatorname{sh} 2\tau + \mathcal{N} \operatorname{ch} 2\tau + \mathcal{X}, \\ \frac{\partial 2\tau}{\partial v} = \mathcal{M}_1 \operatorname{sh} 2\tau + \mathcal{N}_1 \operatorname{ch} 2\tau + \mathcal{X}_1. \end{cases}$$

Si $\Theta(t)$ représente le premier membre de l'équation des géodésiques

$$\begin{aligned} \Theta(t) \equiv t \frac{\partial \log t}{\partial u} + \frac{\partial \log t}{\partial v} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} t^2 + \left[\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} - 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right] t \\ - \left[\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} - 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right] + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{1}{t}, \end{aligned}$$

les expressions des coefficients \mathcal{M} , \mathcal{N} , \mathcal{X} sont

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{-2}{(\varphi - \psi)^2} [\psi \Theta(\varphi) + \varphi \Theta(\psi)], & \mathcal{N} &= \frac{2}{(\varphi - \psi)^2} [\psi \Theta(\varphi) - \varphi \Theta(\psi)], \\ \mathcal{X} &= \frac{\partial \log \varphi}{\partial u} \left[1 - \frac{2\psi^2}{(\varphi - \psi)^2} \right] - \frac{\partial \log \psi}{\partial u} \left[1 - \frac{2\varphi^2}{(\varphi - \psi)^2} \right] \\ &\quad - \frac{\partial \log \varphi}{\partial v} \frac{2\varphi}{(\varphi - \psi)} + \frac{\partial \log \psi}{\partial v} \frac{2\psi}{(\varphi - \psi)^2} - \frac{2\varphi\psi}{\varphi - \psi} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \\ &\quad + 2 \frac{\varphi + \psi}{\varphi - \psi} \left[\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} - \frac{\partial \log r}{\partial u} \right] + \frac{2}{\varphi - \psi} \left[\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} + 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} - 2 \frac{\partial \log r}{\partial v} \right]; \end{aligned} \right.$$

on obtient \mathcal{M}_1 , \mathcal{N}_1 , \mathcal{X}_1 , en changeant u en v et φ, ψ en $\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\psi}$.

La condition d'intégrabilité du système (28) a la forme

$$(30) \quad \mathcal{A} \operatorname{sh} 2\tau + \mathcal{B} \operatorname{ch} 2\tau + \mathcal{L} = 0.$$

Toute solution τ de (30) vérifiant (28), donne une surface S répondant à la question. *S'il existe trois surfaces d'élément linéaire (2), admettant le réseau conjugué (24), (30) est identiquement vérifiée; le système (28) est alors complètement intégrable, et donne ∞^1 surfaces applicables S admettant le réseau (24) pour réseau conjugué persistant.*

Les réseaux conjugués persistants relatifs à un ds^2 donné sont

déterminés par les équations obtenues en annulant \mathcal{A} , \mathcal{H} , \mathcal{P} , à savoir

$$(31) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial v} - \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial u} + \mathcal{N} \mathcal{X}_1 - \mathcal{N}_1 \mathcal{X} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial v} - \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial u} + \mathcal{N} \mathcal{X}_1 - \mathcal{N}_1 \mathcal{X} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial v} - \frac{\partial \mathcal{X}_1}{\partial u} + \mathcal{N} \mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_1 \mathcal{N} = 0. \end{cases}$$

On a deux fonctions inconnues φ , ψ et trois équations; l'élément linéaire général n'admet pas de réseau conjugué persistant [77, 83, 87, 86, 131], car M. Lusin a donné des exemples d'élément linéaire privé de réseau persistant [151].

8. Si les lignes $\frac{du}{dv} = \varphi$ sont géodésiques, le système (31) se simplifie beaucoup et donne

$$(32) \quad \begin{cases} \theta(\varphi) = 0, & \mathcal{N} = \mathcal{N}_1 = -\frac{2\varphi\theta(\psi)}{(\varphi - \psi)^2}, & \mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_1 = \frac{2\varphi\psi\theta(\psi)}{(\varphi - \psi)^2}; \\ \theta(\varphi) = 0, & \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial v} - \frac{\partial \mathcal{X}_1}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial v} - \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial u} + \mathcal{N} \mathcal{X}_1 - \mathcal{N}_1 \mathcal{X} = 0. \end{cases}$$

Si les $\frac{du}{dv} = \psi$ sont aussi géodésiques, (31) devient

$$(33) \quad \theta(\varphi) = 0, \quad \theta(\psi) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial v} - \frac{\partial \mathcal{X}_1}{\partial u} = 0.$$

9. Posons-nous maintenant le problème de la recherche des réseaux conjugués persistants d'une surface S_1 donnée. On connaît alors une solution τ_1 des équations (28), et les conditions (31) se réduisent aux deux premières équations

$$(34) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial v} - \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial u} + \mathcal{N} \mathcal{X}_1 - \mathcal{N}_1 \mathcal{X} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial v} - \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial u} + \mathcal{N} \mathcal{X}_1 - \mathcal{N}_1 \mathcal{X} = 0. \end{cases}$$

Les réseaux persistants avec une ou deux familles de géodésiques sont respectivement déterminés par les systèmes

$$(35) \quad \theta(\varphi) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial v} - \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial u} + \mathcal{N} \mathcal{X}_1 - \mathcal{N}_1 \mathcal{X} = 0,$$

$$(36) \quad \theta(\varphi) = 0, \quad \theta(\psi) = 0.$$

Pour donner au système (34) une forme aussi simple que possible, rapportons la surface à ses asymptotiques ; on a alors $\varphi = -\psi$, et (34) prend la forme [78, 86, 131]

$$(37) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial u \partial v} &= 2 \frac{\partial \log \varphi}{\partial u} \varphi \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} + 2 \frac{\partial \log \varphi}{\partial v} \frac{1}{\varphi^2} \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ &+ \varphi \frac{\partial \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}}{\partial u} - \frac{1}{\varphi^2} \frac{\partial \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial u^2} \varphi^2 + \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial v^2} &= \frac{\partial \log \varphi}{\partial u} \left[\varphi^2 \left(\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \right) + 3 \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \right] \\ &+ \frac{\partial \log \varphi}{\partial v} \left[\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} + 3 \varphi^2 \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial v} \left(\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ &+ \varphi^2 \left[\frac{\partial}{\partial v} \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial u} \left(\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \right) \right] \\ &- \left[\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} + \varphi^2 \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \right]^2 \\ &+ \left[\varphi \left(\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \right) + \frac{1}{\varphi} \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \right]^2. \end{aligned} \right.$$

Pour les réseaux persistants avec une famille de géodésiques, la deuxième équation (37) est conséquence de la première et de l'équation des géodésiques.

10. Transformons (34) en introduisant la représentation sphérique de S_1 . Au moyen des formules de Weingarten (1)

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} D + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} D' + \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}' D + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}' D' &= \frac{\partial D}{\partial u}, \\ \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} D' + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} D'' + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' D + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' D' &= \frac{\partial D'}{\partial u}, \end{aligned}$$

et les analogues, et compte tenu des (27), (28), on obtient

$$(38) \quad \theta(\varphi) = -\theta(\varphi) [\operatorname{ch} 2\tau_1 + \operatorname{sh} 2\tau_1],$$

où

$$(39) \quad \begin{aligned} \theta(\varphi) &= \frac{\partial \log \psi}{\partial u} \varphi + \frac{\partial \log \psi}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}' \varphi - \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' \frac{\varphi + \psi}{\psi} \\ &- \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' (\varphi + \psi) - \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}' \varphi \psi + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}' \frac{1}{\psi}. \end{aligned}$$

(1) Voir, par exemple, L. BIANCHI, *Lezioni*, 2^e édit. t] 1, p. 230.

Le tableau (29) prend la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= n \operatorname{sh} 2\tau_1 - m \operatorname{ch} 2\tau_1, & \mathcal{N} &= m \operatorname{sh} 2\tau_1 - n \operatorname{ch} 2\tau_1, \\ \mathcal{M}_1 &= n_1 \operatorname{sh} 2\tau_1 - m_1 \operatorname{ch} 2\tau_1, & \mathcal{N}_1 &= m_1 \operatorname{sh} 2\tau_1 - n_1 \operatorname{ch} 2\tau_1, \end{aligned}$$

où m, n, m_1, n_1 sont construits avec le symbole θ comme $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{M}_1, \mathcal{N}_1$ avec Θ . En substituant dans (34), on obtient le système transformé

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial v} - \frac{\partial m_1}{\partial u} &= 0, \\ \frac{\partial n}{\partial v} - \frac{\partial n_1}{\partial u} + m n_1 - m_1 n &= 0. \end{aligned} \right.$$

Le système (40), où φ, ψ sont liées par la relation spéciale aux lignes conjuguées, détermine tous les réseaux persistants de S_1 .

Pour les réseaux contenant une ou deux familles de géodésiques, on obtient les systèmes respectifs

$$(41) \quad \theta(\varphi) = 0, \quad \frac{\partial m}{\partial v} - \frac{\partial m_1}{\partial u} = 0,$$

$$(42) \quad \theta(\varphi) = 0, \quad \theta(\psi) = 0.$$

Les équations obtenues ne dépendant que de l'image sphérique, on peut intégrer (40) sans connaître S_1 . L'intégrale générale donne toutes les images sphériques des réseaux conjugués persistants [86, 87, 131].

III. — Applications.

11. *Sphère.* — Pour une sphère rapportée à ses génératrices rectilignes, les deux formes fondamentales sont

$$ds^2 = - \frac{4}{(u+v)^2} du dv, \quad \frac{4 du dv}{(u+v)^2}.$$

Les équations (37) prennent ici les formes

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial u \partial v} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial u^2} \varphi^2 + \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial v^2} &= - \frac{2 \varphi^2}{u+v} \frac{\partial \log \varphi}{\partial u} - \frac{2}{u+v} \frac{\partial \log \varphi}{\partial v} - \frac{2}{(u+v)^2} + \frac{2 \varphi^2}{(u+v)^2}. \end{aligned}$$

La première donne $\varphi^2 = e^{U-V}$, et la seconde devient

$$(u+v)^2 (U'' e^U - V'' e^V) + 2(u+v)(U' e^U - V' e^V) + 4(e^V - e^U) = 0.$$

Cette dernière équation a trois types de solutions :

$$\varphi = \pm \frac{u^2 + h}{\nu + h} \quad (h = \text{const.}), \quad \varphi = \pm \frac{u}{\nu}, \quad \varphi = \pm 1.$$

Les deux premiers types donnent le système des méridiens et des parallèles, le troisième un système imaginaire [131].

12. *Quadriques.* — Pour une quadrique rapportée à ses génératrices, on a $\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$, et la première (37) donne

$$\varphi^2 = \frac{U}{V}.$$

Prenons une quadrique à centre

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1,$$

d'équations paramétriques

$$x = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{1 + u\nu}{u + \nu}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{b}} \frac{u - \nu}{u + \nu}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{1 - u\nu}{u + \nu}.$$

La seconde équation (37) prend la forme

$$U_1 + \nu U_2 + \nu^2 U_3 = V_1 + u V_2 + u^2 V_3,$$

où U_i, V_i dépendent de U, V et de leurs dérivées. L'examen de cette équation montre que U, V sont certains carrés parfaits et donne, pour la quadrique à centre à axes tous différents, les trois réseaux persistants

$$(43) \quad \varphi = \pm \frac{u}{\nu}, \quad \varphi = \pm \frac{u^2 + 1}{\nu^2 + 1}, \quad \varphi = \pm \frac{u^2 - 1}{\nu^2 - 1}.$$

Si la quadrique est de révolution ($a = b$), on a en outre

$$\varphi = \pm \frac{u^2 + 2ku - 1}{\nu^2 - 2k\nu - 1} \quad (k = \text{const.}).$$

L'intégration des équations (43) fournit les trois réseaux doublement conjugués au sens de Kœnigs

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad & x = \text{const.}, & \frac{z}{y} &= \text{const.}, \\ \text{(B)} \quad & y = \text{const.}, & \frac{x}{z} &= \text{const.}, \\ \text{(C)} \quad & z = \text{const.}, & \frac{y}{x} &= \text{const.} \end{aligned}$$

Pour les quadriques de révolution on a en outre

$$(D) \quad y - k_1 x = \text{const.}, \quad \frac{x}{z} - k_1 \frac{y}{z} = \text{const.};$$

(A), (B), (D) sont identiques à une rotation près.

Pour le parabolöide

$$2z = ax^2 + by^2,$$

d'équations paramétriques

$$x = \frac{u + v}{\sqrt{a}}, \quad y = \frac{u - v}{\sqrt{-b}}, \quad z = 2uv,$$

on obtient deux réseaux $\varphi = \pm \frac{u}{v}$, $\varphi = \pm 1$, d'équations

$$(A) \quad z = \text{const.}, \quad \frac{x}{y} = \text{const.},$$

$$(B) \quad x = \text{const.}, \quad y = \text{const.}$$

Si le parabolöide est de révolution ($a = b$), $\varphi = \pm k$ donne en outre

$$(D) \quad x - k_1 y = \text{const.}, \quad y + k_1 x = \text{const.}$$

Les surfaces précédentes sont les seules dont nous connaissons tous les réseaux conjugués persistants [78, 131].

13. Étudions maintenant [87] les réseaux persistants d'un ds^2 de révolution

$$(44) \quad ds^2 = du^2 + U^2 dv^2.$$

Il s'agit d'intégrer (31) où $\mathcal{M}, \mathcal{U}, \dots$, dérivent de (44) au moyen des formules (29). Écartons d'abord les ds^2 portant ∞ réseaux persistants; les différentiations successives des équations (31) et l'élimination des dérivées de φ et ψ , conduisent à deux équations indépendantes entre φ, ψ, U et ses dérivées; φ, ψ sont donc des fonctions de u seul.

Une solution évidente du problème est $\varphi = 0, \frac{1}{\psi} = 0$; elle donne le réseau des méridiens et des parallèles d'une surface de révolution; nous laisserons de côté ce cas banal.

Si le système (28) admet une solution τ fonction de u seul, les

coefficients (27) ne dépendent que de u et la surface correspondante est hélicoïdale ou de révolution. En portant $\frac{\partial \tau}{\partial v} = 0$ dans la seconde (28), on obtient

$$(45) \quad \mathfrak{M}_1 \operatorname{sh} 2\tau + \mathfrak{X}_1 \operatorname{ch} 2\tau + \mathfrak{X}'_1 = 0,$$

équation que l'on peut écrire, en la regardant comme équation du second degré en $e^{2\tau}$:

$$(45') \quad (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{X}_1) e^{4\tau} + 2 \mathfrak{X}_1 e^{2\tau} + \mathfrak{X}'_1 - \mathfrak{M}_1 = 0.$$

On a ainsi deux valeurs de $e^{2\tau}$ correspondant chacune (sauf si $e^{2\tau}$ est nul ou infini) à un hélicoïde ou une surface de révolution; nous avons à distinguer les quatre cas suivants :

I. (45') *a deux solutions distinctes, finies et non nulles*

$$\mathfrak{M}_1^2 - \mathfrak{X}_1^2 \neq 0, \quad \mathfrak{M}_1^2 - \mathfrak{X}_1^2 + \mathfrak{X}'_1 \neq 0.$$

Parmi les ∞^1 surfaces applicables portant le réseau persistant, il y aura *deux hélicoïdes, et le réseau ne contient pas de géodésiques.*

Un hélicoïde d'élément linéaire (44) est défini par

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta = \frac{c_1^2 - U^3 U''}{U^3 \sqrt{c_3 U'' - U^2 U'' - c_1^2}}, \quad \delta = \frac{c_1}{U^2}, \\ \delta'' = \frac{\sqrt{c_3 U'' - U^2 U'' - c_1^2}}{U} \end{array} \right.$$

et les constantes c_3, c_4 donnent un deuxième hélicoïde.

En portant les (46) dans la première (26) on détermine φ, ψ , c'est-à-dire le réseau commun aux hélicoïdes considérés. Le système (28) admettant deux solutions évidentes [correspondant aux deux hélicoïdes (46)], la condition d'intégrabilité complète se réduit à une seule équation, la première (31) par exemple. En y portant φ, ψ , on obtient une équation différentielle du quatrième ordre en U . *Le réseau général du type actuel dépend de huit constantes arbitraires seulement.*

II a. (45') *a une solution double, finie et non nulle*

$$(47) \quad \mathfrak{M}_1^2 - \mathfrak{X}_1^2 \neq 0, \quad \mathfrak{M}_1^2 - \mathfrak{X}_1^2 + \mathfrak{X}'_1 = 0.$$

Le réseau ne contient pas de géodésiques, et il existe un héli-

coïdé parmi les ∞^1 surfaces applicables. Les (26), (47) et la première (31) déterminent φ , ψ , U . L'élimination de φ et ψ donne, en général, une équation du cinquième ordre pour U .

II b. (45') a deux solutions, l'une nulle (ou infinie), l'autre finie et non nulle : $\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{X}_1 = 0$, $\mathfrak{X}_1 \neq 0$.

La première équation donne, en vertu de (29),

$$(48) \quad \theta(\varphi) = 0;$$

La famille φ est géodésique, et il existe un hélicoïde (46) parmi les ∞^1 surfaces applicables. \mathfrak{N} et \mathfrak{X} étant égaux d'après (48), les deux premières (31) coïncident, et la troisième est vérifiée du fait que le réseau (φ, ψ) est conjugué sur la surface (46). Les premières équations (26) et (31), jointes à (48), déterminent φ , ψ et U .

III a. (45') a une solution double nulle (ou infinie)

$$(49) \quad \mathfrak{N}_1 - \mathfrak{X}_1 = 0, \quad \mathfrak{X}_1 = 0.$$

La famille φ est géodésique, et il n'y a pas d'hélicoïde parmi les ∞^1 surfaces applicables. $\mathfrak{N} = \mathfrak{X}$ et (31) se réduit à une seule équation. (49) et (31) déterminent φ , ψ et U avec cinq constantes arbitraires.

III b. (45') a deux solutions, l'une nulle, l'autre infinie :

$$\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{X}_1 = 0, \quad \mathfrak{N}_1 - \mathfrak{X}_1 = 0,$$

soit, en vertu de (29),

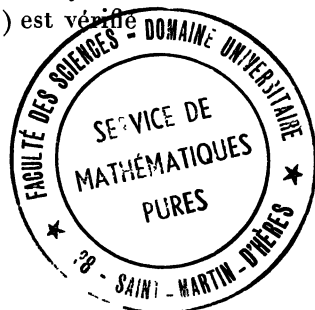
$$(50) \quad \theta(\varphi) = 0, \quad \theta(\psi) = 0.$$

φ et ψ sont géodésiques et il n'y a pas d'hélicoïde parmi les ∞^1 surfaces applicables. (31) se réduit à la dernière équation et détermine, avec (50), φ , ψ et U avec six constantes. Toutes les surfaces sont de Voss [109].

IV. L'équation (45) disparatt

$$(51) \quad \mathfrak{N}_1 = 0, \quad \mathfrak{X}_1 = 0, \quad \mathfrak{X}_1 = 0.$$

D'après la seconde (28) τ ne dépend que de u ; toutes les surfaces sont hélicoïdes et le réseau permanent est de Voss; (31) est vérifiée



et (51) détermine φ , ψ et U avec cinq constantes arbitraires. Ce cas à été étudié par Staeckel [35, 37] qui n'a pas observé que le réseau persistant est de Voss.

IV. — Surfaces avec ∞ réseaux persistants.

14. Les réseaux de Voss sur une surface S rapportée à ses asymptotiques, sont déterminés par le système (42), soit ici

$$(52) \quad \frac{\partial \log \varphi}{\partial u} = -a + \frac{c_1}{\varphi^2}, \quad \frac{\partial \log \varphi}{\partial v} = a_1 - c\varphi^0,$$

où l'on a posé

$$(53) \quad a = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}', \quad a_1 = \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}', \quad c = \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}', \quad c_1 = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}'.$$

La condition d'intégrabilité de (52) est

$$(54) \quad \varphi^2 \left(\frac{\partial c}{\partial u} - 2ac \right) - \frac{\partial a_1}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial v} + 4cc_1 + \frac{1}{\varphi^2} \left(\frac{\partial c_1}{\partial v} - 2a_1c_1 \right) = 0.$$

On voit que, si une surface admet plus de deux réseaux de Voss, elle en admet une infinité [51]. Cette circonstance se présente si (54) est identiquement vérifiée. On a alors

$$(55) \quad \frac{\partial c}{\partial u} = 2ac, \quad \frac{\partial a_1}{\partial u} + \frac{\partial a}{\partial v} = 4cc_1, \quad \frac{\partial c_1}{\partial v} = 2a_1c_1,$$

avec la condition de Dini

$$\frac{\partial a}{\partial v} = \frac{\partial a_1}{\partial u}.$$

Le système (52) donne $\frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial u \partial v} = 0$. Les réseaux sont isothermes conjugués. On peut, moyennant un choix convenable des paramètres u , v , réduire à l'unité une solution φ arbitraire du système complètement intégrable (52); (52) et (55) donnent alors

$$(55') \quad a = c_1, \quad a_1 = c, \quad \frac{\partial c}{\partial u} = \frac{\partial c_1}{\partial v} = 2cc_1.$$

Si l'on introduit les nouvelles coordonnées curvilignes $\alpha = u + v$, $\beta = u - v$, les deux premières (55') s'écrivent

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' = 0, \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' = 0,$$

et, en remplaçant α, β par $\alpha_1 = f_1(\alpha), \beta_1 = f_2(\beta)$, l'élément linéaire sphérique prend la forme caractéristique

$$ds'^2 = d\alpha_1^2 + 2 \cos \omega d\alpha_1 d\beta_1 + d\beta_1^2.$$

Les deux dernières (55') et l'équation de Gauss pour la sphère donnent

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \beta_1 = \beta, \quad \cos \omega = \mathcal{F}(\alpha \pm \beta).$$

En coordonnées u, v et avec le signe + dans \mathcal{F} , on a

$$ds'^2 = 2(du^2 + dv^2) + 2\mathcal{F}(u)(du^2 - dv^2).$$

Les asymptotiques sont orthogonales et la surface est minima. Les courbes $v = \text{const.}$ de la sphère sont géodésiques, donc planes et les asymptotiques u sont rectilignes. Il existe deux surfaces minima réglées: l'hélicoïde réel et l'hélicoïde algébrique de M. Gambier [114, 119]. Le premier

$$x = \text{sh } u \cos v, \quad y = \text{sh } u \sin v, \quad z = v$$

admet les réseaux de Voss

$$\lambda^2 du^2 - (\text{ch } u - \lambda^2) dv^2 = 0 \quad (\lambda = \text{const.});$$

l'autre

$$x = \frac{u^2 - v^2}{2}, \quad y + iz = v, \quad y - iz = u^2 v - \frac{v^3}{3}$$

admet les réseaux

$$\lambda^2 du^2 - (u^2 - \lambda^2) dv^2 = 0.$$

Pour d'autres développements voir [51, 15, 86, 131, 87, 114].

15. Les réseaux persistants contenant une famille de géodésiques sont déterminés par le système

$$(56) \quad \begin{cases} p\varphi + q + c\varphi^2 + a\varphi - a_1 - \frac{c_1}{\varphi} = 0, \\ \frac{\partial q}{\partial u} = -cp\varphi^2 - \frac{c_1 q}{\varphi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial c}{\partial u} \varphi^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial c_1}{\partial v} \frac{1}{\varphi^2}, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$p = \frac{\partial \log \varphi}{\partial u}, \quad q = \frac{\partial \log \varphi}{\partial v}.$$

La dérivation des équations (56) (la première deux fois en u ou v ,

la deuxième une fois), l'élimination des dérivées troisièmes et secondes de $\log \varphi$, et le remplacement de q par son expression tirée de (56), conduisent à l'équation

$$(57) \quad 4p^2(c\varphi^6 - c_1\varphi^3) + p(c^2\varphi^7 + \dots + 7c_1^2) - \frac{1}{2}c\frac{\partial c}{\partial u}\varphi^7 + \dots - \frac{\partial c_1^2}{\partial v} = 0.$$

Si $c = c_1 = 0$, les asymptotiques sont rectilignes et la surface est une quadrique. Ce cas écarté, (57) contient effectivement p .

Le système en p, q formé par (57) et la première (56) doit être complètement intégrable. Le premier membre de (57) est un trinôme en p ; désignons par $\mathcal{F}(p, \varphi)$, ce trinôme, ou le carré de l'un de ses facteurs de décomposition s'il est réductible dans le domaine des fonctions rationnelles de φ . Dérivons $\mathcal{F} = 0$ par rapport à u (ou v), et remplaçons dans le résultat p, q et leurs dérivées par leurs expressions tirées de (56). L'expression obtenue doit être nulle en vertu de $\mathcal{F} = 0$; $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v}$ doivent donc être divisibles par \mathcal{F} ; il en résulte

$$\mathcal{F}(p, \varphi) = (p\varphi' + a\varphi^2 - c_1)^2;$$

nous retrouvons les (52): *il n'y a pas de surface à ∞^1 réseaux persistants avec une seule famille de géodésiques* [86, 131].

16. La même méthode s'applique au système (40). La surface étant rapportée à ses asymptotiques, on a $n_1 = m\varphi$, $n = \frac{m_1}{\varphi}$, et le système (40) prend la forme

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial m}{\partial v} = \frac{\partial m_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial m}{\partial u}\varphi + m\varphi\left(\frac{c_1}{\varphi^2} - a\right) = \frac{\partial m_1}{\partial v}\frac{1}{\varphi} + \frac{m_1}{\varphi}(c\varphi^2 - a_1), \\ \frac{1}{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{c_1}{\varphi^2} - a + m, \quad \frac{1}{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial v} = -c\varphi^2 + a_1 - m_1. \end{array} \right.$$

Les équations (58) sont rationnelles en m, m_1, φ et leurs dérivées; en différentiant et éliminant pour compléter le système, on obtient des équations de même forme. Le système complet contient des équations finies en m, m_1, φ qui, le cas des quadriques exclu, ne disparaissent pas identiquement.

Pour obtenir le nombre maximum de réseaux, il faut que le système contienne une seule équation finie de la forme $\mathcal{F}(m, m_1, \varphi) = 0$, et alors si les autres équations déterminent $\frac{\partial m}{\partial u}, \frac{\partial m}{\partial v}$, la différentiation

de $\mathcal{F} = 0$ et l'élimination des dérivées de m , m_1 , φ , fournit une équation conséquence algébrique de $\mathcal{F} = 0$, donc divisible par \mathcal{F} si \mathcal{F} est irréductible. On retrouve ainsi les deux hélicoïdes minima déjà signalés. *Les ∞^2 réseaux persistants sont déterminés par le système [86, 131]*

$$(59) \quad \begin{cases} \frac{\partial \log \varphi}{\partial u} = \frac{c_1}{\varphi} - a + m, & \frac{\partial \log \varphi}{\partial v} = 0, \\ \frac{\partial \log m}{\partial u} = a - \frac{c_1}{\varphi^2}, & \frac{\partial m}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

CHAPITRE II.

SOLUTIONS QUADRATIQUES D'UNE ÉQUATION DE LAPLACE.

I. — Réseau conjugué persistant et solutions quadratiques de son équation tangentielle de Laplace.

17. En coordonnées tangentielles, un réseau persistant et sa surface support Σ , sont déterminés par quatre solutions d'une équation de Laplace

$$(1) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}' \frac{\partial W}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}' \frac{\partial W}{\partial v} - fW,$$

dont les trois premières vérifient la relation

$$(2) \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = 1.$$

Les $\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}'$ sont déterminés par les formules (15) du Chapitre I, et f est le coefficient moyen de l'élément linéaire de la sphère; (1) est à invariants égaux; en posant

$$(3) \quad \theta = W \sqrt{U + V},$$

on ramène (1) à la forme de Moutard

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \mathfrak{N} \theta, \quad \mathfrak{N} = -f - \frac{U'V'}{4(U+V)^2},$$

et la relation (2) prend la forme

$$(5) \quad \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = U + V.$$

Les solutions de (4) liées par (5) sont dites quadratiques [36]. Étant donné une équation de Moutard (4), quatre solutions $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, dont les trois premières sont quadratiques, déterminent un réseau conjugué persistant porté par la surface Σ enveloppe du plan

$$(6) \quad \theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z + \theta_4 = 0.$$

Il suffit, pour le voir, de remonter à (1), et d'observer que f est uniquement soumis à la condition d'appartenir à l'élément linéaire sphérique, ce qui a lieu d'après (2). Voir [36, 47, 59, 76].

Les trois solutions (5) déterminent (Lelievre) une surface S rapportée à ses asymptotiques, correspondant à Σ avec parallélisme des normales. S est une surface de Bianchi (voir Chap. V) associée à Σ .

18. Le coefficient \mathcal{M} d'une équation de Moutard à solutions quadratiques n'est pas arbitraire. Si le réseau ne contient pas de géodésique, on peut prendre U et V pour variables u, v . Introduisant alors [48] une fonction auxiliaire ψ par l'équation

$$(7) \quad f = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v},$$

et exprimant que l'élément linéaire sphérique qui, compte tenu des équations (15) du Chapitre I, a la forme

$$(8) \quad ds^2 = \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{du^2}{u+v} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{dv^2}{u+v},$$

admet la courbure unité, on obtient pour ψ une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre.

Si les courbes u sont géodésiques, on peut poser $U = 0, V = v$; l'élément linéaire sphérique s'écrit

$$(9) \quad ds^2 = e^v \left(du^2 + 2 \frac{\partial \psi}{\partial u} du dv + \psi dv^2 \right),$$

où ψ est une solution de l'équation de Gauss qui, avec les notations de Monge, prend la forme

$$(10) \quad \frac{\partial r}{\partial u} (\psi - p^2) + \left(r - \frac{1}{2} \right) \left(ps - \frac{1}{2} q \right) = e^v (\psi - p^2)^2.$$

Pour les réseaux de Voss on a

$$(11) \quad ds'^2 = du^2 - 2 \cos \omega \, du \, dv + dv^2,$$

$$(12) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \sin \omega.$$

M. Vasseur [130] a déduit les équations (8)-(10) de (5).

II. — Réseaux persistants contenant une ou deux familles de lignes planes ou coniques.

19. Le problème de la *déformation à réseau persistant se trouve ramené à la recherche des solutions quadratiques d'une équation de Moutard* de solution générale connue.

La plupart des résultats connus correspondent au type

$$\mathcal{E}(n) \equiv \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - \frac{n(n+1)}{(u+v)^2} \theta = 0 \quad (n = \text{const.}),$$

caractérisé par la propriété que la transformation de Moutard, effectuée à l'aide d'une solution particulière $[(u+v)^{n+1}]$, conserve le type de l'équation en augmentant n d'une unité [121].

Si n est entier on déduit la solution générale de celle de $\mathcal{E}(0)$.

20. La solution générale de $\mathcal{E}(0)$ est

$$\theta_i = U_i + V_i.$$

En portant ces expressions dans (5) on obtient

$$(a) \quad \sum_{i=1}^3 (U_i + V_i)^2 = U + V.$$

La différentiation par rapport à u et v donne

$$(b) \quad U'_1 V_1 + U'_2 V_2 + U'_3 V_3 = 0;$$

(b) est vérifiée pour V_i (ou U_i) = const.; la surface est alors développable.

Si, par exemple, U'_3 et V'_1 ne sont pas nuls, la dérivation en u et v du quotient de (b) par $U'_3 V'_1$ donne

$$\left(\frac{U'_2}{U'_3}\right)' \left(\frac{V'_2}{V'_1}\right)' = 0.$$

Le premier facteur fournit les solutions quadratiques

$$(13) \quad \theta_1 = aU_3 + V_1, \quad \theta_2 = bU_3 + V_2, \quad \theta_3 = U_3 - aV_1 - bV_2 \quad (a, b = \text{const.});$$

La surface correspondante est l'enveloppe des plans

$$(14) \quad (aU_3 + V_1)x + (bU_3 + V_2)y + (U_3 - aV_1 - bV_2)z + U_4 + V_4 = 0.$$

Les points caractéristiques sont déterminés par

$$(14a) \quad U_3'(ax + by + z) + U_4' = 0,$$

$$(14b) \quad V_1'(x - az) + V_2'(y - bz) + V_4' = 0,$$

qui prouvent que les *lignes u, v du réseau sont planes*. Les plans des *v* sont parallèles à $ax + by + z = 0$; en prenant ce plan pour plan (xy) on annule a, b .

21. L'arête de rebroussement de la développable circonscrite à la surface (14) le long d'une ligne u est déterminée par (14) et ses deux premières dérivées en u , qui, en coordonnées homogènes x_i , et supposant $a = b = 0$, s'écrivent

$$(15) \quad \begin{cases} V_1 x_1 + V_2 x_2 + U_3 x_3 + (U_4 + V_4) x_4 = 0, \\ U_3' x_3 + U_4' x_4 = 0, & U_3'' x_3 + U_4'' x_4 = 0. \end{cases}$$

Le cas où U_3' et U_4' sont proportionnelles doit être écarté, car la surface se réduirait alors à une courbe plane; donc les deux dernières (15) donnent $x_3 = x_4 = 0$; l'arête de rebroussement se réduit à un point à l'infini; *toutes les lignes u du réseau (13) sont cylindriques* (1)

De même, l'arête de rebroussement de la développable circonscrite le long d'une v est déterminée par (14) et

$$(16) \quad V_1' x_1 + V_2' x_2 + V_4' x_4 = 0, \quad V_1'' x_1 + V_2'' x_2 + V_4'' x_4 = 0.$$

L'arête se réduit au point $x_1 = x_2 = 0$, $U_3 x_3 + U_4 x_4 = 0$ si $V_4 = 0$; les lignes v sont alors *coniques*.

La surface $V_4 = 0$, dont on peut écrire les équations paramétriques sous la forme

$$(17) \quad x = u \varphi(v) \cos v, \quad y = u \varphi(v) \sin v, \quad z = f(u),$$

(1) Sur une surface, on appelle lignes cylindriques ou coniques, les courbes de contact de cylindres ou de cônes circonscrits. D'autre part nous appelons lignes u celles le long desquelles v est constant et u le seul paramètre variable.

est une *surface de Peterson*. Le réseau (u, ν) contient, une famille $(\nu = \text{const.})$ de lignes cylindriques situées dans des plans issus de Oz , et une famille $(u = \text{const.})$ de lignes coniques situées dans des plans perpendiculaires à Oz , les sommets des cônes étant sur Oz .

Si les V_i ne sont pas proportionnels, le système (16) détermine les rapports mutuels de x_1, x_2, x_4 , lesquels ne dépendent pas de ν si l'une des quantités V'_1, V'_2, V'_4 , est nulle.

Si $V'_4 = 0$, on obtient les surfaces de Peterson; si V'_2 (ou V'_1) = 0, on peut ramener V_2 à l'unité ($V_2 = 0$ doit être écarté) et l'on obtient une surface de translation

$$(18) \quad V_1 x + y + U_3 z + U_4 + V_4 = 0, \quad U_3 z + U_4 = 0, \quad V_1 x + V_4 = 0.$$

Soit en changeant les notations

$$(18') \quad x = \nu, \quad z = u, \quad y = f(u) + \varphi(\nu).$$

Les courbes génératrices (arbitraires) sont dans des plans rectangulaires. Les deux familles du réseau sont cylindriques.

Les surfaces minima offrent un exemple dans lequel les lignes du réseau sont minima.

Les surfaces de translation exclues, la surface générale (13) est une transformée de Peterson de (17)

$$(19) \quad \begin{cases} x = (u + V) \varphi(\nu) \cos \nu - \int V' \varphi(\nu) \cos \nu \, d\nu, \\ y = (u + V) \varphi(\nu) \sin \nu + \int V' \varphi(\nu) \sin \nu \, d\nu, \\ z = f(u). \end{cases}$$

Pour $\varphi(\nu) = 1$, on a la surface moulure générale.

22. La solution générale de $\mathcal{E}(1)$ se déduit de celle de $\mathcal{E}(0)$ par une transformation de Moutard faite à l'aide de la solution $u + \nu$; elle a la forme

$$(20) \quad \theta_i = 2 \frac{U_i + V_i}{u + \nu} - U'_i - V'_i,$$

où $\mathfrak{S}_i = U'_i - V'_i$ est la solution correspondante de $\mathcal{E}(0)$.

On constate sans peine que les fonctions

$$(21) \quad U_i + au^2 + bu + c, \quad V_i - av^2 + bv - c \quad (a, b, c = \text{const.})$$

donnent la même solution θ_i [76],

La remarque, presque évidente, suivante [Masloff, 121] simplifiera l'exposition des résultats ultérieurs :

Si la solution θ_i est transformée en \mathfrak{S}_i à l'aide de la solution particulière R, on a

$$(22) \quad \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} [R(\mathfrak{S}_i^2 - \theta_i^2)] = \mathfrak{M}_1 [R(\mathfrak{S}_i^2 - \theta_i^2)] - 2R \frac{\partial^2(\theta_i^2)}{\partial u \partial v},$$

où

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u \partial v} = \mathfrak{M}_1 \mathfrak{S}$$

est l'équation transformée.

Soient $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ trois solutions quadratiques de $\mathcal{E}(1)$, $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ les solutions correspondantes de $\mathcal{E}(0)$, $R = \frac{1}{u+v}$ la solution transformatrice. En ajoutant les trois équations (22) relatives à $i = 1, 2, 3$, on fait disparaître le dernier terme; $\frac{1}{u+v} (\Sigma \mathfrak{S}_i^2 - \Sigma \theta_i^2)$ vérifie $\mathcal{E}(0)$, et l'on a

$$\Sigma (U_i' - V_i')^2 - U - V = [\varphi(u) + f(v)](u + v);$$

d'où par différentiations successives

$$\Sigma U_i''' V_i''' = 0.$$

Cette équation, traitée comme l'équation (b) du n° 20, fournit deux solutions essentiellement distinctes :

1° *Tous les V_i''' sont nuls*; les V_i sont alors des polynomes du second degré que la transformation (21) réduit à zéro;

$$(23) \quad \theta_1 = 2 \frac{U_1}{u+v} - U_1', \quad \theta_2 = 2 \frac{U_2}{u+v} - U_2', \quad \theta_3 = 2 \frac{U_3}{u+v} - U_3'.$$

En portant ces expressions dans (5) on obtient une seule relation entre les fonctions arbitraires U_i

$$(24) \quad U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = 0;$$

2°

$$U_1'' = a U_3'', \quad U_2'' = b U_3'', \quad V_3'' = -a V_1'' - b V_2'' \quad (a, b = \text{const.}).$$

En intégrant, compte tenu de (21), on obtient

$$U_1 = a U_3, \quad U_2 = b U_3, \quad V_3 = -a V_1 - b V_2.$$

En changeant les coordonnées x, y, z , on annule a, b et l'on a

$$(25) \quad \theta_1 = 2 \frac{V_1}{u + v} - V'_1, \quad \theta_2 = 2 \frac{V_2}{u + v} - V'_2, \quad \theta_3 = 2 \frac{U_1}{u + v} - U'_3.$$

(5) et $\mathcal{E}(1)$ montrent que

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \theta_i}{\partial v} \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial u \partial v} = \frac{2}{(u + v)^2} \sum_{i=1}^3 \theta_i \frac{\partial \theta_i}{\partial v} = \frac{V'}{(u + v)^2};$$

d'où, après une intégration,

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial v} \right)^2 = -2 \frac{V'}{u + v} + V^*.$$

En portant dans cette relation l'expression (25), on trouve

$$(26) \quad U_3^2 = \mathcal{X}_4(u),$$

$\mathcal{X}_4(u)$ étant un polynôme du quatrième degré à coefficients constants. La relation (5) nous donne

$$(26') \quad V_1^2 + V_2^2 = -\mathcal{X}_4(-v).$$

Une homographie convenable sur u et v , respecte (4) et réduit $\mathcal{X}_4(u)$ au troisième degré [47, 76, 55, 75, 119, 134, 121].

23. En coordonnées homogènes x_i , l'arête de rebroussement de la développable circonscrite à la surface (23) le long d'une ligne $u = \text{const.}$, est définie par l'équation du plan tangent

$$(27) \quad [2U_1 - U'_1(u + v)]x_1 + [2U_2 - U'_2(u + v)]x_2 \\ + [2U_3 - U'_3(u + v)]x_3 + [2(U_4 + V_4) - (U'_4 + V'_4)(u + v)]x_4 = 0,$$

et ses deux dérivées successives par rapport à v

$$(27a) \quad U'_1 x_1 + U'_2 x_2 + U'_3 x_3 - [(V'_4 - U'_4) - V''_4(u + v)]x_4 = 0,$$

$$(27b) \quad V'''_4(u + v)x_4 = 0.$$

(27 b) montre (sauf si $V'''_4 = 0$, auquel cas la surface dégénère) que l'arête de rebroussement est dans le plan de l'infini; la développable

est donc un cylindre. Les équations (27), (27 a) prennent la forme

$$\begin{aligned} U_1 x_1 + U_2 x_2 + U_3 x_3 &= 0, \\ U'_1 x_1 + U'_2 x_2 + U'_3 x_3 &= 0, \end{aligned}$$

et (24) montre que la direction des génératrices est isotrope. La surface (23), (24) est imaginaire, avec un réseau persistant formé de lignes de longueur nulle ($v = \text{const.}$) et de lignes cylindriques ($u = \text{const.}$) [76].

24. L'arête de rebroussement d'une développable $v = \text{const.}$ de la surface (25), (26), (26') est définie par les équations

$$\begin{aligned} (28) \quad & [2V_1 - V'_1(u + v)]x + [2V_2 - V'_2(u + v)]y \\ & + [2U_3 - U'_3(u + v)]z + 2(U_4 + V_4) - (U'_4 + V'_4)(u + v) = 0, \\ (28a) \quad & -V'_1 x - V'_2 y + [U'_3 - U''_3(u + v)]z + U'_4 - V'_4 - U''_4(u + v) = 0, \\ (28b) \quad & U'''_3 z + U'''_4 = 0. \end{aligned}$$

Si $U_4 = 0$, le système prend la forme

$$V_1 x + V_2 y + V_4 = 0, \quad V'_1 x + V'_2 y + V'_4 = 0, \quad z = 0;$$

l'arête de rebroussement est un point du plan (xy) , et les développables $v = \text{const.}$ sont des cônes dont le lieu des sommets est une courbe plane. Inversement, si les lignes u du réseau sont coniques, la solution (x, y, z) des équations (28), (28 a), (28 b) doit être indépendante de u de sorte que (28 b) représente un plan fixe; si ce plan est (x, y) , on a $U'''_4 = 0$ et U_4 est un polynôme du deuxième degré réductible à zéro [69, 76].

La surface générale (25), (26), (26') est une transformée de Peterson des surfaces $U_4 = 0$.

25. Les lignes u sont coniques si $U_4 = 0$. Si les v le sont aussi, les arêtes de rebroussement des développables $u = \text{const.}$ se réduisent à des points: or, ces arêtes sont déterminées par (28) et ses deux dérivées successives

$$\begin{aligned} (29a) \quad & [V'_1 - V''_1(u + v)]x + [V'_2 - V''_2(u + v)]y - U'_3 z + V'_4 - V''_4(u + v) = 0, \\ (29b) \quad & V'''_1 x + V'''_2 y + V'''_4 = 0. \end{aligned}$$

Il faudra donc que le système (28), (29 a), (29 b) ait une solu-

tion $x = u_1$, $y = u_2$, $z = u_3$ ne dépendant que de u ; or la relation $V_1''' u_1 + V_2''' u_2 + V_3''' = 0$ exige qu'il y ait entre $(u_1, u_2, 1)$ p relations linéaires à coefficients constants ($p = 1, 2, 3$) et entre V_1''', V_2''', V_3''' ($3 p$) relations linéaires. Le cas $p = 1$ convient seul, le point (u_1, u_2, u_3) décrit un plan fixe que l'on peut choisir pour plan yz ; on a $V_2''' = V_3''' = 0$, et V_1, V_4 sont des polynomes du second degré [107, 109, 110, 111, 113, 129, 126] et l'on constate que la condition est suffisante.

26. Les recherches de MM. Gambier [119, 134] et Demoulin [92], sur les solutions quadratiques d'une $\mathcal{E}(n)$, ont montré que, pour n entier, il existe des groupes de solutions quadratiques, le nombre p des solutions des différents groupes pouvant être un nombre pair quelconque, ou un entier supérieur à $n + 2$; le nombre 3, qui correspondrait à notre problème, se trouve exclu.

Ergoroff [47] a indiqué que l'équation $\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$ conduit aux surfaces tétraédrales

$$(30) \quad \begin{cases} x = A(a + u)^{\frac{3}{2}}(a + v)^{\frac{3}{2}}, \\ y = B(b + u)^{\frac{2}{3}}(b + v)^{\frac{2}{3}}, \\ z = C(c + u)^{\frac{1}{2}}(c + v)^{\frac{1}{2}}, \\ (A, \dots, a \dots = \text{const.}). \end{cases}$$

L'élément linéaire ne contient évidemment les six constantes que par les cinq combinaisons $SA^2, SaA^2, \dots, Sa^4A^2$; ces combinaisons fixées, il reste une arbitraire dont la variation fournit la déformation de la surface conservant le réseau (u, v) [40, 46, 66, 44, 45, 47, 99, 106].

III. — Mécanismes déformables de M. Gambier.

27. *Les développables des congruences des tangentes aux courbes d'un réseau persistant, sont conservées dans la déformation de la surface support.* Il est donc naturel de chercher à caractériser un tel réseau par des propriétés de ses lignes et des développables circonscrites. La théorie des réseaux à lignes planes ou coniques se rattache à ce point de vue.

Soit Σ une surface portant le réseau (u, v) dont les lignes u sont

coniques. Les droites de la congruence des tangentes aux lignes ν se répartissent en ∞^1 cônes dont les sommets sont sur une courbe Σ_1 (deuxième nappe focale).

Les coordonnées ponctuelles de Σ vérifient une équation de Laplace

$$(31) \quad \theta_{uv} = a \theta_u + b \theta_v.$$

Les deux invariants de (31) sont $h = ab - \frac{\partial a}{\partial u}$ et $k = ab - \frac{\partial b}{\partial v}$.

Les coordonnées ponctuelles de Σ_1 se déduisent des coordonnées homologues de Σ par la transformation (de Laplace)

$$(32) \quad \theta_1 = \theta - \frac{1}{a} \theta_v.$$

Si les lignes u de Σ sont coniques, les θ_1 sont fonctions de ν seul, donc

$$(33) \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{1}{a} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = 0$$

et θ vérifie une équation de Laplace de premier invariant nul. Inversement, si le premier invariant d'une équation de Laplace est nul, trois solutions donnent un réseau à lignes u coniques.

Dualistiquement, si un réseau a ses lignes u (ou ν) planes, un invariant de son équation tangentielle de Laplace est nul.

L'équation tangentielle d'un réseau persistant est à invariants égaux, donc, *si les lignes u d'un tel réseau sont planes, il en est de même des ν [50, 69, 76, 124, 130].* La seule équation de Moutard, à invariants nuls est $\mathcal{E}(0)$, dont nous avons étudié les solutions quadratiques. *Les surfaces minima, de translation, de Peterson (et leurs transformées de Peterson) sont les seules donnant des réseaux persistants formés de lignes planes.*

28. Si les lignes ν de Σ sont planes, les droites de la congruence de leurs tangentes se répartissent en ∞^1 plans enveloppant la deuxième nappe focale Σ_1 ; Σ_1 est développable et ses lignes ν sont les génératrices rectilignes : *supposons d'abord que Σ_1 n'est ni un cône ni un cylindre*, de sorte que la seconde transformée de Laplace Σ_2 de Σ est une courbe (arête de rebroussement de Σ_1), et ses coor-

données ponctuelles sont fonction de u seul; supposons que l'équation ponctuelle relative à Σ_1 soit (31) et que les coordonnées ponctuelles de Σ_2 soient $(\theta - \frac{1}{a} \theta_\nu)$. On doit avoir

$$(34) \quad \theta_{\nu\nu} = \left(a + \frac{\partial \log a}{\partial \nu} \right) \theta_\nu,$$

et la condition de compatibilité de (31) et (34) est

$$(35) \quad \frac{\partial^2 \log a}{\partial u \partial \nu} + a_u - b_\nu - ab = 0.$$

Or, si l'on introduit les deux invariants de (31)

$$h = -\frac{\partial a}{\partial u} + ab, \quad k = -\frac{\partial b}{\partial \nu} + ab,$$

(35) prend les deux formes équivalentes

$$\frac{\partial^2 \log a}{\partial u \partial \nu} - a_u = 2h - k, \quad \frac{\partial \log a}{\partial \nu} - a = \frac{\partial \log h}{\partial \nu}.$$

Si l'on se rappelle que le premier invariant h_1 relatif à l'équation en θ_1 , transformée dans le sens ν de l'équation en θ , est

$$h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \log h}{\partial u \partial \nu},$$

on voit que les deux équations précédentes donnent $h_1 = 0$; l'équation (31) correspond à Σ_1 se ramène, par une opération de Laplace, à une équation avec un invariant nul; l'équation ponctuelle de Σ admet deux opérations de Laplace (est de rang 3 par rapport à ν).

Si, les lignes ν de Σ étant planes, la développable Σ_1 est un cône (ou un cylindre). Σ_2 est un point; l'équation de Σ_1 a elle-même son invariant h nul, et celle de Σ est de rang 2. Si Σ_1 est une droite, l'équation de Σ a son invariant h nul. Dualistiquement, si les u de Σ sont coniques, les sommets des cônes étant sur une courbe gauche, l'équation tangentielle du réseau (u, ν) admet une suite de Laplace se terminant dans les deux sens après deux opérations (rang 3). Si le lieu des sommets est plan, la suite se termine après une opération (rang 2); si c'est une droite, l'équation est à invariants nuls.

Les équations de Montard de rang 1 et 2 sont $\mathcal{E}(0)$ et $\mathcal{E}(1)$; leurs solutions quadratiques sont connues [69, 76]; il n'en est pas de même pour le rang 3 [124, 130]. Le cas où la courbe lieu des sommets est gauche n'est pas traité; celui des réseaux *doublement coniques* l'est complètement, grâce aux travaux de M. Gambier [93].

29. Soit M le rayon vecteur du point courant de Σ , M_1 celui du point homologue de sa transformée Σ_1 ; d'après (32) la longueur MM_1 vaut $\frac{1}{\alpha} \sqrt{g}$ où g et α , qui sont respectivement un coefficient de l'élément linéaire de Σ et le symbole $\left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}$ relatif à cet élément (voir 31), restent invariants par déformation de Σ ; MM_1 est donc invariable, de même d'ailleurs que MM_2 ($M_2 =$ transformé de Laplace de M dans le sens u). L'angle $\widehat{M_1 M M_2}$ des tangentes aux courbes u, v restant invariable pendant la déformation de Σ , il en est de même de $M_1 M_2$.

Si une surface Σ' roule sur une déformée Σ à réseau (u, v) persistant, le point de contact décrivant une courbe u , les développables circonscrites à Σ et Σ' le long des courbes u homologues roulent aussi l'une sur l'autre. Il en résulte que les courbes u de Σ_1, Σ'_1 se correspondent avec égalité des arcs et des courbures; si l'une se réduit à un point, il en est de même de l'autre; un réseau persistant contenant des lignes coniques (ou cylindriques) conserve cette propriété pendant la déformation [130].

Soit, sur Σ , un réseau persistant (u, v) à lignes toutes coniques. Les coordonnées courantes a_i, b_i des courbes $(a), (b)$ lieux des sommets des cônes, sont fonctions de u ou de v seul. Σ' étant une déformée de Σ sur la base (u, v) et $(A), (B)$ les lieux des sommets des cônes circonscrits, on a, quels que soient a, b et leurs homologues A, B ,

$$(36) \quad ab = AB.$$

Deux courbes $(a), (b)$ constituent, d'après M. Gambier [93], un *mécanisme transformable*, s'il existe un second couple $(A), (B)$ en correspondance ponctuelle biunivoque avec le premier et tel que, $(a, b), (A, B)$ désignant deux couples quelconques de points homologues, on ait $ab = AB$. $[(a), (b)]$ est un *mécanisme déformable*

s'il existe ∞^1 couples (A), (B) transformables parmi lesquels figure (a), (b).

La théorie des réseaux doublement coniques est intimement liée à celle des mécanismes déformables.

30. A un *couple* de surfaces applicables relatif à une base doublement conique correspond donc un mécanisme (a), (b) *transformable*, la réciproque n'étant pas nécessairement vraie. De même un mécanisme *déformable* connu peut ne donner que des *couples* de surfaces applicables, car les deux surfaces du couple peuvent dépendre *toutes les deux* des paramètres de déformation du mécanisme. Une discussion minutieuse de cette théorie a été effectuée par M. Vasseur [130] qui a introduit en même temps que le mécanisme (a, b) un nouveau mécanisme (\bar{a} , \bar{b}) en liaison étroite avec le premier système (a, b; \bar{a} , \bar{b}) formant un *mécanisme double*. Il est très remarquable de constater que la *discussion relative aux mécanismes se fait indépendamment de la recherche de l'équation de Moutard et de ses intégrales quadratiques*. Le seul mécanisme *déformable* qui puisse donner, soit des couples de surfaces applicables, soit une famille de ∞^1 surfaces applicables est constitué par une première courbe *plane* (a), lieu du point ($a_1, a_2, 0$) réunie à une seconde courbe *plane* (b) lieu du point ($b_1, 0, b_3$).

Le système (A, B) *déformé* de (a, b) est défini par un couple ($A_1, A_2, 0$) et ($B_1, 0, B_3$) avec

$$\begin{aligned} A_1 &= ha, & A_2 &= a_1^2(1-h^2) + a_2^2 + 2mha_1 - C, \\ B_1 &= \frac{b_1}{h_1} + m, & B_3 &= b_1^2\left(1 - \frac{1}{h^2}\right) + b_3^2 - 2m\frac{b_1}{h} + C - m^2, \end{aligned}$$

où les constantes arbitraires h, m, C sont trois paramètres de *déformation*.

31. L'étude de MM. Gambier et Vasseur ayant prouvé que les courbes lieux des sommets des cônes d'un réseau doublement conique sont nécessairement planes, *l'équation tangentielle correspondante de Laplace est donc de rang deux au plus* (1). Le

(1) Le géomètre Egoroff avait signalé ce résultat par un raisonnement qui a été repris par MM. Goursat et Vasseur.

résultat est évident pour les réseaux cylindro-coniques ou doublement cylindriques, car alors le lieu des sommets est dans le plan de l'infini.

Nous avons examiné les solutions quadratiques de $\mathcal{E}(0)$ et $\mathcal{E}(1)$, et obtenu les surfaces à réseau doublement conique déterminées par les équations (25), (26), (26') où V_2, V_4 sont des polynômes du second degré. Les lieux des sommets sont des lignes planes situées dans des plans rectangulaires; elles correspondent à un mécanisme du type indiqué plus haut. Les réseaux cylindro-coniques sont donnés par les surfaces de Peterson; les réseaux doublement cylindriques par les surfaces de translation et minima [93, 127, 124, 130].

IV. — Transformations des réseaux conjugués persistants.

32. La difficulté du problème de la détermination des réseaux persistants, amène à rechercher des méthodes de transformation de pareils réseaux en réseaux analogues.

Telle est la transformation de Peterson, qui ne change pas les solutions quadratiques $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ déterminant la représentation sphérique du réseau, et remplace θ_4 par une solution arbitraire de l'équation de Moutard (4).

Une autre transformation évidente est fournie par la déformation des ∞^1 surfaces les unes en les autres. Cette transformation modifie l'image sphérique du réseau: elle remplace un groupe de solutions quadratiques $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ par un autre groupe $(\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3)$.

Les θ'_i vérifient [98, 146, 130] la même équation (4) que les θ_i . On a en effet

$$(37) \quad \mathcal{M} = -f - \frac{U'V'}{4(U+V)^2};$$

f ne varie pas pendant la déformation car $f = -FK$, F étant le coefficient de l'élément linéaire de la surface support du réseau et K sa courbure totale; quant aux U, V elles sont déterminées par les (15) du Chapitre I qui, en vertu de (13), s'écrivent

$$(38) \quad \frac{U'}{2(U+V)} = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{D}{D'}, \quad \frac{V'}{2(U+V)} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{D'}{D}.$$

De là la formule suivante démontrant la proposition :

$$(39) \quad \mathfrak{N} = \mathfrak{F} \mathfrak{K} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

33. M. Tzitzéica [49, 58] a donné les formules qui déterminent les variations de D , D'' pendant la déformation.

Envisageons les équations (6) du Chapitre I, et soit t_h la valeur de t correspondant à la surface déformée. En retranchant ces équations écrites pour t et t_h , et après élimination de b , b_1 au moyen de (38) et [(7), Chap. 1)], on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \log \frac{t_h}{t} &= \frac{U'}{2(U+V)} \left(\frac{t_h^2}{t^2} - 1 \right), \\ \frac{d}{dv} \log \frac{t_h}{t} &= \frac{V'}{2(U+V)} \left(1 - \frac{t_h^2}{t^2} \right); \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\frac{t_h}{t} = \sqrt{\frac{h+V}{h-U}},$$

et par suite

$$(40) \quad D_h = D \sqrt{\frac{h+V}{h-U}}, \quad D'_h = 0, \quad D''_h = D'' \sqrt{\frac{h-U}{h+V}};$$

h est le paramètre de déformation.

Pour les coefficients de l'élément linéaire sphérique on trouve

$$(41) \quad e_h = e \frac{h+V}{h-U}, \quad f_h = f, \quad g_h = g \frac{h-U}{h+V}.$$

Il en résulte que les U_h , V_h sont liés aux U , V par

$$(42) \quad U_h = \frac{hU}{h-U}, \quad V_h = \frac{hV}{h+V}.$$

34. Nous allons étudier maintenant une transformation due à M. Eisenhart [88, 94]. Considérons le plan $\sum_{i=1}^4 \tau_i x_i = 0$, où les τ_i sont fonctions de u , v et supposons que les courbes u , v de l'enveloppe forment un réseau conjugué. Nous appellerons plan τ le plan précédent et réseau (τ) le réseau (u, v) . L'intersection de deux plans τ , $\tau(u, v)$ et $\bar{\tau}(u, v)$, engendre une congruence que nous appellerons congruence $(\tau, \bar{\tau})$. Deux réseaux τ et $\bar{\tau}$, conjugués à une même

congruence C , donc harmoniques à la congruence $H \equiv (\tau, \bar{\tau})$ seront dits en transformation \mathcal{F} .

On vérifie sans peine que les plans focaux

$$\Sigma(\lambda\tau_i - \bar{\tau}_i)x_i = 0, \quad \Sigma(\mu\tau_i - \bar{\tau}_i)x_i = 0$$

de H , correspondant respectivement aux développables u, v , vérifient les relations

$$\bar{\tau}_{iu} + \bar{a}\bar{\tau}_i = \lambda(\tau_{iu} + a\tau_i), \quad \bar{\tau}_{iv} + \bar{b}\bar{\tau}_i = \mu(\tau_{iv} + b\tau_i),$$

où a, \bar{a}, b, \bar{b} sont certaines fonctions de u, v .

En exprimant l'intégrabilité du système précédent, et après multiplication de $\tau, \bar{\tau}$ par des facteurs convenables, on obtient les équations suivantes (DARBOUX, *Surfaces*, t. 2, p. 245) caractérisant la transformation \mathcal{F} .

$$(43) \quad \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial u} = \lambda \frac{\partial \tau}{\partial u}, \quad \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial v} = \mu \frac{\partial \tau}{\partial v}.$$

Les équations de Laplace vérifiées par τ_i et $\bar{\tau}_i$ sont

$$(44a) \quad (\lambda - \mu) \frac{\partial^2 \tau}{\partial u \partial v} + \lambda_\nu \frac{\partial \tau}{\partial u} - \mu_u \frac{\partial \tau}{\partial v} = 0,$$

$$(44b) \quad (\lambda - \mu) \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial u \partial v} + \frac{\mu}{\lambda} \lambda_\nu \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial u} - \frac{\lambda}{\mu} \mu_u \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial v} = 0.$$

Il est bien connu que les foyers de H obtenus par les variations respectives de u et de v , sont respectivement situés sur les tangentes aux courbes v et u de (τ) ; on vérifie d'autre part immédiatement que les plans τ_u, τ_v , qui contiennent les points homologues M, \bar{M} de $(\tau), (\bar{\tau})$, sont les plans focaux de la congruence engendrée par la droite $M\bar{M} = (\tau_u, \tau_v)$.

Une équation de Laplace arbitraire peut être mise d'une infinité de manières sous la forme (44a).

35. (44a) et (44b) sont à invariants égaux si

$$(45) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\lambda}{\lambda - \mu} \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\mu}{\mu - \lambda} \frac{\partial \log \mu}{\partial u} \right), \\ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\mu}{\mu - \lambda} \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\lambda}{\lambda - \mu} \frac{\partial \log \mu}{\partial u} \right). \end{cases}$$

En ajoutant les (45) on obtient

$$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \log \mu}{\partial u \partial v}.$$

Si l'on pose

$$\lambda = \nu U_1, \quad \mu = \nu V_1,$$

on remplace (45) par

$$(U_1^2 - V_1^2) \frac{\partial^2 \log \nu}{\partial u \partial v} + U_1 V_1 \frac{\partial \log \nu}{\partial u} - V_1 U_1 \frac{\partial \log \nu}{\partial v} = 0.$$

Si U_1^2, V_1^2 sont égaux à une même constante (que l'on peut réduire à l'unité), ν reste arbitraire. L'égalité de λ, μ conduisant à la dégénérescence de (44 a), on a $\mu = -\lambda$ et les (44 a), (44 b) prennent la forme

$$(46 a) \quad \frac{\partial^2 \tau}{\partial u \partial v} + \frac{1}{2} \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} \frac{\partial \tau}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial \log \lambda}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial v} = 0,$$

$$(46 b) \quad \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial \log \lambda}{\partial u} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial v} = 0.$$

Les plans focaux $\lambda\tau + \bar{\tau}, \lambda\tau - \bar{\tau}$ divisent alors harmoniquement les plans tangents $\tau, \bar{\tau}$ des réseaux. On dit que ces derniers sont en transformation Ω (au lieu de \mathcal{F}).

Supposons que le réseau (τ) soit défini par les cosinus directeurs X, Y, Z de la normale au plan tangent et la distance W de ce plan à l'origine, ces quatre quantités vérifiant l'équation à invariants égaux

$$(47) \quad \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} + \frac{1}{2} \frac{\partial \log \rho}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial \log \rho}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} + fX = 0.$$

Si ω est une solution quelconque de (47), le changement

$$(48) \quad X = \tau \omega$$

ramène (47) à la forme (46 a) avec

$$(49) \quad \lambda = \rho \omega^2.$$

De même, le changement

$$(50) \quad \theta = X \sqrt{\rho}$$

ramène (47) à la forme de Moutard

$$(51) \quad \theta_{uv} = \mathfrak{N} \theta, \quad \mathfrak{N} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial u \partial v} - f.$$

Pour le réseau transformé $(\bar{\tau})$ on a les formules analogues

$$(52) \quad \bar{X} = \tau \bar{\omega}, \quad \bar{\theta} = \bar{X} \sqrt{\bar{\rho}}, \quad \frac{1}{\bar{\lambda}} = \bar{\rho} \bar{\omega}^2.$$

36. Avec M. Eisenhart [94], exigeons que la congruence $(\tau, \bar{\tau})$ soit normale; l'orthogonalité des plans focaux donne

$$(53) \quad S(\lambda \tau + \bar{\tau})(\lambda \tau - \tau) = \lambda^2 S \tau^* - S \bar{\tau}^* = 0,$$

S s'étendant à τ_1, τ_2, τ_3 . D'après (48), (49), (52), on a

$$S \tau^* = \frac{1}{\omega^2} = \frac{\rho}{\lambda}, \quad S \bar{\tau}^* = \frac{1}{\bar{\omega}^2} = \lambda \bar{\rho};$$

(53) donne donc

$$(54) \quad \bar{\rho} = \rho.$$

Les (43) prennent maintenant la forme

$$(55) \quad \theta_u + \bar{\theta}_u = (\theta - \bar{\theta}) \frac{\partial \log(\omega \sqrt{\rho})}{\partial u}, \quad \theta_v - \bar{\theta}_v = (\theta + \bar{\theta}) \frac{\partial \log(\omega \sqrt{\rho})}{\partial v};$$

d'où, multipliant par $\theta, \bar{\theta}$ et sommant pour $i = 1, 2, 3$,

$$(55') \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} S(\theta_i^2 + 2\theta_i \bar{\theta}_i + \bar{\theta}_i^2) = 2[S(\theta_i^2 - \bar{\theta}_i^2)] \frac{\partial \log(\omega \sqrt{\rho})}{\partial u}, \\ \frac{\partial}{\partial v} S(\theta_i^2 - 2\theta_i \bar{\theta}_i + \bar{\theta}_i^2) = 2[S(\theta_i^2 - \bar{\theta}_i^2)] \frac{\partial \log(\omega \sqrt{\rho})}{\partial v}. \end{cases}$$

Or, si σ est l'angle des plans tangents $\tau, \bar{\tau}$, on a

$$(56) \quad S \theta_i^2 = S \bar{\theta}_i^2 = \rho, \quad S \theta_i \bar{\theta}_i = \rho \cos \sigma,$$

il en résulte que les seconds membres des (55') sont nuls; on peut donc intégrer et écrire

$$(57) \quad \rho(1 + \cos \sigma) = 2(V - k), \quad \rho(1 - \cos \sigma) = 2(U + k),$$

où V dépend de v , U de u seul et où k est une constante. On en déduit

$$(58) \quad \rho = U + V; \quad \tan \frac{\sigma}{2} = \sqrt{\frac{U+k}{V-k}}.$$

Les $\theta_i, \bar{\theta}_i$ sont quadratiques et $(\tau), (\bar{\tau})$ sont persistants; la transformation de M. Eisenhart résulte de ces remarques.

Elle consiste essentiellement à partir d'une équation de Moutard possédant trois solutions quadratiques connues $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ et à déterminer une quatrième solution R telle que pour l'équation transformée au moyen de R, les solutions $\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3$ correspondant à $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ soient elles-mêmes quadratiques.

37 Soient

$$ds'^2 = e du^2 + 2\sqrt{eg} \cos 2\omega du dv + g dv^2$$

l'élément linéaire de l'image sphérique de (τ) , et X, Y, Z, X_1, \dots, X_2, \dots les cosinus directeurs des arêtes du trièdre T dont la première arête est la normale de (τ) et les deux autres les bissectrices des angles des lignes u, v de la sphère. On a les formules connues

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial X}{\partial u} = \sqrt{e}(\sin \omega X_1 + \cos \omega X_2), & \frac{\partial X}{\partial v} = \sqrt{g}(-\sin \omega X_1 + \cos \omega X_2), \\ \frac{\partial X_1}{\partial u} = -AX_2 - \sqrt{e} \sin \omega X, & \frac{\partial X_1}{\partial v} = BX_2 + \sqrt{g} \sin \omega X, \\ \frac{\partial X_2}{\partial u} = AX_1 - \sqrt{e} \cos \omega X, & \frac{\partial X_2}{\partial v} = -BX_1 - \sqrt{g} \cos \omega X, \\ A = \frac{\partial \omega}{\partial u} - \sqrt{\frac{e}{g}} \sin 2\omega \frac{\partial \log \sqrt{e}}{\partial v}, & B = \frac{\partial \omega}{\partial v} - \sqrt{\frac{g}{e}} \sin 2\omega \frac{\partial \log \sqrt{e}}{\partial u}. \end{array} \right.$$

La normale de $(\bar{\tau})$ a pour cosinus directeurs

$$(60) \quad \bar{X} = X \cos \sigma + \sin \sigma (\sin \alpha X_1 - \cos \alpha X_2),$$

où σ est donné par (58) et α est une fonction inconnue.

Portant (60) dans (52), (55) et tenant compte de (50), on trouve

$$(61) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial \omega}{\partial u} - \sqrt{\frac{e}{g}} \sin 2\omega \frac{\partial \log \sqrt{e}}{\partial v} - \sqrt{e} \sin(\alpha + \omega) \cot \frac{\sigma}{2}, \\ \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial \omega}{\partial v} + \sqrt{\frac{g}{e}} \sin 2\omega \frac{\partial \log \sqrt{e}}{\partial u} + \sqrt{g} \sin(\alpha - \omega) \tan \frac{\sigma}{2}; \end{array} \right.$$

$$(61a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \log \omega}{\partial u} = \cot \frac{\sigma}{2} \sqrt{e} \cos(\alpha + \omega) - \frac{1}{1 - \cos \sigma} \frac{\partial \log e}{\partial u}, \\ \frac{\partial \log \omega}{\partial v} = -\tan \frac{\sigma}{2} \sqrt{g} \cos(\alpha - \omega) - \frac{1}{1 + \cos \sigma} \frac{\partial \log e}{\partial v}. \end{array} \right.$$

Pour (61) et (61 α) la condition d'intégrabilité est vérifiée, et ω satisfait à (47). La fonction ω détermine la transformation de M. Eisenhart. On peut observer que les (61 α) déterminent le réseau conjugué spécial de coordonnées tangentielles X, Y, Z, ω .

38. Nous reviendrons au Chapitre IV, consacré à la théorie de Bianchi, sur la transformation d'Eisenhart. Pour terminer le chapitre actuel, nous observerons que la déformation à réseau persistant d'une surface Σ , qui ne change pas l'équation de Moutard dont les quatre solutions θ_i déterminent Σ , ne change pas non plus la solution particulière $\omega\sqrt{\rho}$ qui détermine la transformation de M. Eisenhart, de sorte que le réseau persistant spécial (X, Y, Z, ω) correspond à une série de surfaces Σ applicables [94, 103, 103, 130]. Il suffit, pour le voir, de remplacer dans (61), α , σ , ρ par

$$(62) \quad \alpha_h = \alpha, \quad \text{tang } \frac{\sigma_h}{2} = \text{tang } \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{V+h}{U-h}}, \quad \rho_h = h^2 \frac{\rho}{(h-U)(h+V)},$$

et e_h, g_h par leurs expressions (41). On obtient ainsi

$$(63) \quad \omega_h = c\omega\sqrt{(h-U)(h+V)} \quad (c = \text{const.});$$

d'où, en négligeant un facteur constant, $\omega_h\sqrt{\rho_h} = \omega\sqrt{\rho}$.

CHAPITRE III.

CONGRUENCES CYCLIQUES.

I. — Déformation d'une congruence à développables persistantes.

39. Attachons, à chaque point M d'une surface Σ , un trièdre trirectangle T formé par deux tangentes et la normale. Σ est déterminée par les composantes d'entraînement (ξ, η, ζ) et de rotation (p, q, r) de T. Associons à M un rayon r , défini par les cosinus α, β, γ des angles qu'il fait avec les axes de T et par les coordonnées mobiles a, b, c de l'un, A, de ses points. Si Σ se déforme en entraînant les T et les rayons r associés, on dit que la congruence C

des r se déforme. La déformation est à développables persistantes si les développables de C se transforment en développables. Nous examinerons ici le cas d'une déformation continue [86, 122]. Soient (en n'écrivant que l'une des trois formules), $x = \alpha + t\alpha (t = \overline{AF})$ les coordonnées d'un point F de r . Si F est un foyer et si $du : dv$ détermine la développable correspondante, les composantes du déplacement infinitésimal de F

$$(1) \quad dx + \xi du + \xi_1 dv + (q du + q_1 dv)z - (r du + r_1 dv)y$$

sont proportionnelles à α, β, γ . Nous aurons donc

$$(2) \quad (\alpha_1 + t\alpha_1) du + (\alpha_2 + t\alpha_2) dv + \lambda \alpha = 0,$$

où λ est un facteur de proportionnalité, et où $\alpha_i, b_i, c_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ désignent les expressions suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \xi + \frac{\partial \alpha}{\partial u} + q c - r b, & \alpha_2 = \xi_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial v} + q_1 c - r_1 b, \\ \alpha_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial u} + q \gamma - r \beta, & \alpha_2 = \frac{\partial \alpha}{\partial v} + q_1 \gamma - r_1 \beta. \end{cases}$$

L'élimination de λ et t entre les trois (2) donne l'équation des développables de C

$$(4) \quad |a_1 \alpha_1 \alpha| du^2 + \{ |a_1 \alpha_2 \alpha| + |a_2 \alpha_1 \alpha| \} du dv + |a_2 \alpha_2 \alpha| dv^2 = 0.$$

Si les lignes coordonnées correspondent aux développables de C nous avons, en annulant les coefficients de du^2 et dv^2 ,

$$(5) \quad \begin{cases} (p\alpha + q\beta)[p(b\gamma - c\beta) + q(c\alpha - a\gamma)] + Lp + Mq + N = 0, \\ (p_1\alpha + q_1\beta)[p_1(b\gamma - c\beta) + q_1(c\alpha - a\gamma)] + L_1p_1 + M_1q_1 + N_1 = 0, \end{cases}$$

L, M, N, L_1, M_1, N_1 ne contiennent pas p, q, p_1, q_1 et restent invariants pendant la déformation de Σ .

Le problème revient à trouver une solution (p, q, p_1, q_1) contenant une constante arbitraire, du système formé par les (5) et les quatre équations fondamentales de la théorie des surfaces.

Les (5) sont linéaires en p, q, p_1, q_1 dans trois cas :

- 1° $\alpha = \beta = 0$; r est normal au plan tangent P de Σ ;
- 2° $\gamma = c = 0$; r est dans P ;
- 3° $a : b : c :: \alpha : \beta : \gamma$; r passe par le point M .

40. Si r est normal à P , prenons A à l'intersection de r et P ($\alpha = \beta = 0, \gamma = 1, c = 0$). Les deux premières (2), indépendantes de λ , donnent l'équation des développables

$$(6) (a_1 du + a_2 dv)(p du + p_1 dv) + (b_1 du + b_2 dv)(q du + q_1 dv) = 0.$$

La déformation laisse a_1, a_2, b_1, b_2 invariables :

$$\begin{aligned} a_1 &= \xi + \frac{\partial a}{\partial u} - rb, & b_1 &= \eta + \frac{\partial b}{\partial u} + ra, \\ a_2 &= \xi_1 + \frac{\partial a}{\partial v} - r_1 b, & b_2 &= \eta_1 + \frac{\partial b}{\partial v} + r_1 a. \end{aligned}$$

Introduisons le lemme suivant :

LEMME I. — Si les rotations p, q, p_1, q_1 d'une surface non développable satisfont à une équation de la forme

$$(7) \quad Ap + Bq + A_1 p_1 + B_1 q_1 = 0,$$

le réseau suivant est conjugué :

$$(8) \quad (A_1 \xi + B_1 \eta) \delta u^2 + (A_1 \xi_1 + B_1 \eta_1 - A \xi - B \eta) \delta u \delta v - (A \xi_1 + B \eta_1) \delta v^2 = 0.$$

Si en effet, dans les conditions exprimant que les directions (du, dv) , $(\delta u, \delta v)$ sont conjuguées, on remplace $\frac{dv}{du} + \frac{\delta v}{\delta u}$ et $\frac{dv}{du} \frac{\delta v}{\delta u}$ par la somme et le produit des racines de (8), on obtient (7) multipliée par le facteur non nul $\xi \eta_1 - \xi_1 \eta$.

Si l'on applique le lemme I à (6), (8) se décompose en

$$(9) \quad \begin{cases} (\xi \delta u + \xi_1 \delta v)(a_1 du + a_2 dv) + (\eta du + \eta_1 dv)(b_1 du + b_2 dv) = 0, \\ \delta u \delta v - du \delta v = 0, \end{cases}$$

où $\delta u : \delta v$ correspond aux directions conjuguées définies par le lemme, et $du : dv$ aux développables de l'une ou de l'autre famille de la congruence C . Chaque famille de développables persistantes donne un réseau persistant sur Σ , et pour que C soit à développables persistantes, il faut que les deux réseaux coïncident. En exprimant qu'il en est ainsi, on voit que les développables de C correspondent aux lignes de l'unique réseau persistant, et, ce réseau étant pris pour réseau coordonné, les quantités a, b définissant le rayon r de C sont

déterminées par les équations

$$(10) \quad \xi a_2 + \eta b_2 = 0, \quad \xi_1 a_1 + \eta_1 b_1 = 0.$$

Les C du type actuel sont cycliques; ces congruences jouent, comme nous le verrons, un rôle important dans notre théorie.

41. Si l'une des familles de développables de C vérifie les deux équations

$$(11) \quad a_1 du + a_2 dv = 0, \quad b_1 du + b_2 dv = 0,$$

le raisonnement qui précède cesse de s'appliquer, car pour cette famille la première équation (9) disparaît identiquement, et par suite aussi l'équation (8) qui doit déterminer le réseau. L'autre famille de développables de C détermine un réseau conjugué persistant que nous pouvons prendre pour réseau de coordonnées; supposons que les courbes $\delta u = 0$ soient obtenues par la seconde équation (9) (de sorte que $du = 0$ représente la famille de développables de C à adjoindre à la famille déjà indiquée). La première équation (9) est donc satisfaite par $\delta v = 0$ et $du = 0$. Cela donne

$$(12) \quad \xi a_1 + \eta b_1 = 0$$

et puisque, en vertu de (11), on a $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$, on a aussi

$$(12 a) \quad \xi a_1 + \eta b_1 = 0,$$

(12) et (12 a) déterminent les coordonnées a, b du rayon r .

D'après (11), la première (2) donne $t = 0$; le premier foyer de r est constamment dans P; nous appellerons C' les congruences actuelles.

42. Si r est dans P ($\gamma = c = 0$), les expressions (3) de $a_i, b_i, \alpha_i, \beta_i$ ne contiennent pas p, q, p_1, q_1 ; les deux premières (2) sont indépendantes de ces rotations, et aussi par suite la solution (t, λ) ; les foyers sont donc fixes sur r pendant la déformation [30]. La troisième (2) s'écrit :

$$(13) \quad p(b + t\beta) du - q(a + t\alpha) du + p_1(b + t\beta) dv - q_1(a + t\alpha) dv = 0,$$

et le lemme I met en évidence le réseau conjugué

$$(14) \quad [(b + t\beta)(\xi \delta u + \xi_1 \delta v) - (a + t\alpha)(\eta \delta u + \eta_1 \delta v)](du \delta v - dv \delta u) = 0$$

où $\partial u : \partial v$ correspond au réseau et $du : dv$ aux développables de la congruence, chaque famille de développables donnant un réseau.

Le premier facteur de (14) n'est identiquement nul que si $a + t\alpha = b + t\beta = 0$, c'est-à-dire $a = b = t = 0$; r contient alors M , et la congruence est l'une des congruences des tangentes aux lignes du réseau.

Ce cas écarté, les deux réseaux conjugués coïncident, et les courbes de l'unique réseau correspondent aux développables de la congruence. Avec ce réseau pour réseau coordonné, on a

$$(15) \quad \begin{cases} (b + t_1\beta)\xi - (a + t_1\alpha)\eta = 0, \\ (b + t_2\beta)\xi_1 - (a + t_2\alpha)\eta_1 = 0, \end{cases}$$

qui déterminent r dans P ; nous appellerons C'' ces congruences. Les rayons homologues de C' , C'' sont conjugués par rapport à la sphère centrée en M , admettant le rayon de C' pour corde de contact avec son enveloppe.

43. Si r contient M , on prend $a = b = c = 0$; un choix convenable de T réduit β à zéro, et les (5) sont linéaires (non homogènes) en p, q, p_1, q_1 . La surface Σ est assujettie à une déformation plus générale (à réseau cinématiquement conjugué persistant), que nous étudierons au Chapitre VI. Nous nous bornerons ici à signaler le lemme :

LEMME II. — Si les rotations p, q, p_1, q_1 de deux surfaces applicables non développables satisfont à une même équation

$$(16) \quad Ap + Bq + A_1p_1 + B_1q_1 = C,$$

où A, \dots, C ne dépendent que de l'élément linéaire commun, les lignes (8) sont cinématiquement conjuguées sur les deux surfaces.

Ce lemme se vérifie en écrivant (16) sous la forme

$$(16') \quad A(p - p') + B(q - q') + A_1(p_1 - p'_1) + B_1(q_1 - q'_1) = 0,$$

où les lettres accentuées se rapportent à la deuxième surface Σ' , et en appliquant les raisonnements du lemme I.

L'application du lemme II associe aux deux familles de développables de la congruence, deux réseaux cinématiquement conjugués, qui coïncident si $\gamma^2\xi\xi_1 + \eta\eta_1 = 0$, c'est-à-dire si le dièdre d'arête r , dont les faces contiennent les tangentes aux lignes du

réseau est droit; Σ se déforme alors avec un réseau cinématiquement conjugué persistant, dont les lignes correspondent aux développables de C. Le réseau est conjugué au sens de Dupin si Σ est de Peterson [95].

44. Si les (5) sont du second degré en p, q, p_1, q_1 , mais décomposables chacune en deux facteurs, ces facteurs sont évidemment de la forme

$$p\alpha + q\beta + l, \quad p(b\gamma - c\beta) + q(c\alpha - a\gamma) + m,$$

$$p_1\alpha + q_1\beta + l_1, \quad p_1(b\gamma - c\beta) + q_1(c\alpha - a\gamma) + m_1,$$

où l, m, l_1, m_1 sont des fonctions ne contenant pas p, q, p_1, q_1 . La discussion conduit : 1° à la déformation des surfaces réglées à génératrices persistantes, le rayon r étant orthogonal à la génératrice correspondante ou la coupant; 2° à la déformation à réseau cinématiquement conjugué persistant (correspondant aux développables de la congruence), r étant orthogonal à l'une des tangentes du réseau et coupant l'autre.

Si la première (5) est irréductible, on a ($D, D', D'' =$ coefficients de Gauss)

$$(17) \quad PD'' + QDD' + RD'' + SD + TD' + N = 0,$$

$$(17a) \quad PD'' + QD'D'' + RD''^2 + S_1D' + T_1D'' + N_1 = 0,$$

(17) étant irréductible dans le domaine des fonctions rationnelles de D, D' . En éliminant D'' au moyen de l'équation de Gauss, on obtient une seconde équation entre D, D' . Si les deux équations déterminent D et D' ($D \neq 0$), l'équation de Gauss donne D'' et la surface est indéformable; si $D = 0$ on obtient la déformation d'une surface gauche à génératrices persistantes.

Si les deux équations ne déterminent pas D, D' , le premier membre de la seconde est divisible par celui de (17); la discussion montre que (17) devient réductible en introduisant D, D', D'' , et conduit à la déformation à réseau cinématiquement conjugué persistant signalée au 2° [86, 122].

II. — Systèmes cycliques de Ribaucour. Congruences des axes.

45. Ribaucour a montré que s'il existe plus de deux surfaces normales aux cercles d'une congruence, il en existe une infinité.

Les cercles de la congruence constituent alors un système cyclique, et la congruence des axes est dite cyclique [23, 33].

Une congruence rectiligne n'est généralement pas cyclique; lorsqu'elle l'est, elle l'est en général d'une seule façon (il existe un seul système, système cyclique admettant la congruence pour congruence des axes). *Si une congruence est cyclique de plus de deux façons, elle l'est d'une infinité de façons. Les congruences ∞ fois cycliques sont liées aux réseaux conjugués persistants : la représentation sphérique des développables d'une telle congruence est celle d'un réseau conjugué persistant (congruence C du paragraphe I).*

Soit C une congruence arbitraire rapportée à ses développables; Σ l'enveloppe du plan perpendiculaire au rayon générateur r en un point A qui sera fixé ultérieurement. Attachons un trièdre T à chaque point M de Σ et conservons les notations du paragraphe I. On a $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$, et les deux premières (2) donnent

$$(18) \quad a_1 + t_1 q = 0, \quad b_1 - t_1 p = 0, \quad a_2 + t_2 q_1 = 0, \quad b_2 - t_2 p_1 = 0,$$

où $t_1 = \overline{AF}_1$, $t_2 = \overline{AF}_2$ sont les abscisses des foyers F_1, F_2 .

Si C est donnée, les rotations p, q, r de Σ sont connues, et les (18) déterminent ξ, η ainsi que la distance focale $t_1 - t_2$ de C.

Supposons que chaque r soit l'axe d'un cercle K de rayon R centré en A; les coordonnées, relatives à T, d'un point P de K sont

$$(19) \quad x = a + R \cos \mathfrak{S}, \quad y = b + R \sin \mathfrak{S}, \quad z = c,$$

\mathfrak{S} étant l'angle de AP avec l'axe x de T. En exprimant que P décrit une surface orthogonale aux cercles de C, on obtient l'équation aux différentielles totales

$$(20) \quad d\mathfrak{S} + \left[\frac{t_1}{R} (q \sin \mathfrak{S} + p \cos \mathfrak{S}) + r \right] du \\ + \left[\frac{t_2}{R} (q_1 \sin \mathfrak{S} + p_1 \cos \mathfrak{S}) + r_1 \right] dv = 0.$$

La condition d'intégrabilité est de la forme

$$(21) \quad M \cos \mathfrak{S} + N \sin \mathfrak{S} + P = 0.$$

Chaque solution \mathfrak{S} de (20), (21) donne une surface (P); *s'il existe trois surfaces (P), (21) est vérifiée identiquement, (20) est complètement intégrable, \mathfrak{S} est déterminé avec une constante*

arbitraire; il existe ∞^1 surfaces (P), K engendre un système cyclique. Les équations déterminant un système cyclique s'obtiennent en annulant M, N, P :

$$(22 a) \quad \left(\frac{t_1}{R}\right)_v q - \left(\frac{t_2}{R}\right)_u q_1 + \frac{t_1}{R} (q_v + p r_1) - \frac{t_2}{R} (q_{1u} + p_1 r) = 0,$$

$$(22 b) \quad \left(\frac{t_1}{R}\right)_v p - \left(\frac{t_2}{R}\right)_u p_1 + \frac{t_1}{R} (p_v - q r_1) - \frac{t_2}{R} (p_{1u} - q_1 r) = 0,$$

$$(22 c) \quad t_1 t_2 + R^2 = 0.$$

(22 c) montre que P est sur la sphère de diamètre $F_1 F_2$.

Si B est le point moyen de r , et si l'on pose $\widehat{ABP} = \pi - \sigma$, on a

$$(23) \quad t_1 = R \cot \frac{\sigma}{2}, \quad t_2 = -R \tan \frac{\sigma}{2}.$$

C étant donnée, $t_1 - t_2$ est connue, et les (23) donnent R.

46. Si l'on porte les expressions (23) dans (22 a) (22 b), R s'élimine, et l'on voit que σ ne dépend que des rotations p, q, \dots , c'est-à-dire de la représentation sphérique de C. On a

$$(24) \quad \frac{\partial \cos \sigma}{\partial u} = 2(\cos \sigma + 1) \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}', \quad \frac{\partial \cos \sigma}{\partial v} = 2(\cos \sigma - 1) \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}'$$

où les $\left\{ \begin{matrix} \\ \end{matrix} \right\}'$ se rapportent à l'élément linéaire sphérique. Chaque solution σ de (24) donne un système cyclique dont C est la congruence des axes. La condition d'intégrabilité de (24) est

$$(25) \quad \left[\frac{\partial}{\partial v} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}' - \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}' \right] \cos \sigma + \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}' + \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}' - 4 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}' \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}' = 0.$$

S'il existe deux systèmes cycliques attachés à C, (25) est identiquement vérifiée, (24) est complètement intégrable et C est ∞^1 fois cyclique. Cela a lieu si l'on a

$$\frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}' = \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}' = 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}' \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}'$$

c'est-à-dire si les équations de Cosserat [(14), Chap. I] sont vérifiées.

La représentation sphérique des développables d'une congruence ∞^1 fois cyclique est donc celle d'un réseau persistant [33].

En éliminant t_1, t_2 entre les équations (18), on obtient

$$(26) \quad pa_1 + qb_1 = 0, \quad p_1 a_2 + q_1 b_2 = 0;$$

les relations $p\eta_1 - q\xi_1 = p_1\eta - q_1\xi = 0$ caractérisant une surface rapportée à un réseau conjugué, les (26) coïncident avec les (10), et la congruence C du paragraphe I est la congruence ∞^1 fois cyclique la plus générale [86, 122].

47. Une congruence cyclique C étant donnée, Σ est déterminée par les équations (18) qui s'écrivent

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \xi + \frac{\partial a}{\partial u} + q(c + t_1) - rb = 0, & \xi_1 + \frac{\partial a}{\partial v} + q_1(c + t_2) - r_1 b = 0, \\ \eta + \frac{\partial b}{\partial u} - p(c + t_1) + ra = 0, & \eta_1 + \frac{\partial b}{\partial v} - p_1(c + t_2) + r_1 a = 0. \end{array} \right.$$

ξ, η, ξ_1, η_1 , tirées de (27) et portées dans les équations fondamentales de la théorie des surfaces, donnent, eu égard à (23), (24),

$$(28) \quad c_u - R_u \operatorname{tang} \frac{\sigma}{2} = aq - bp, \quad c_v + R_v \cot \frac{\sigma}{2} = aq_1 - bp_1;$$

d'où, par élimination de R,

$$(29) \quad \frac{\partial' c}{\partial u \partial v} - \frac{\partial c}{\partial u} \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 1 \end{array} \right\} - \frac{\partial c}{\partial v} \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 2 \end{array} \right\} + c(pp_1 + qq_1) = p\eta_1 - q\xi_1.$$

Or, Σ est rapportée à un réseau conjugué; le second membre de (29) est nul, et (29) détermine c , c'est-à-dire le plan enveloppant Σ .

Les coordonnées a, b sont déterminées par (28). Inversement, si $c = 0$, on a $p\eta_1 - q\xi_1 = 0$; les développables de la congruence des axes d'un système cyclique correspondent donc, sur l'enveloppe des plans des cercles, à un réseau conjugué (Darboux).

Nous n'avons pas utilisé (25); les résultats de ce numéro s'appliquent donc à tout système cyclique. Si la congruence des axes est ∞^1 fois cyclique, les plans des cercles associés enveloppent un réseau conjugué persistant; E. Cosserat [33] a montré que les points caractéristiques des plans des cercles correspondant à un même rayon de la congruence cyclique sont alignés, la droite qui les contient engendrant une congruence dont les développables correspondent au réseau (u, v) ; l'équation (29) coïncide avec

l'équation tangentielle relative au réseau (u, v) de Σ ; pour chaque solution c de cette équation le système (27), (28), (24) est complètement intégrable et détermine a, b, R, σ avec quatre constantes arbitraires.

48. — Pour une congruence ∞^1 fois cyclique, les cercles relatifs à un même rayon r de la congruence sont sur une sphère admettant pour diamètre le segment focal. Quand Σ se déforme à réseau (u, v) persistant, les foyers se déplacent et la sphère varie. D'après (41), (Chap. II) et (27), les distances t_1, t_2 (pour $c = 0$) des foyers au plan tangent varient pendant la déformation, *mais leur produit reste invariable. Le rayon R du cercle situé dans le plan tangent de Σ ne varie donc pas (Ribaucour).*

Ce dernier cercle est sur la sphère de rayon nul de centre $Q(a, b, iR)$. Si $\bar{a}_1 = \bar{b}_1 = \bar{c}_1 = \bar{a}_2 = \bar{b}_2 = \bar{c}_2 = 0$, où les lettres barrées désignent les expressions (3) avec $c = iR$, Q est fixe quand u, v varient et tous les cercles du système sont sur une même sphère de rayon nul. D'après (27) (où $c = 0$), les $\bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1$ pour une déformée Σ_h sont

$$\begin{aligned}\bar{a}_1 &= iR \left(q_h + iq \cot \frac{\sigma}{2} \right), & \bar{b}_1 &= -iR \left(p_h + ip \cot \frac{\sigma}{2} \right), \\ \bar{c}_1 &= b \left(p_h + ip \cot \frac{\sigma}{2} \right) - a \left(q_h + iq \cot \frac{\sigma}{2} \right),\end{aligned}$$

et les analogues $\bar{a}_2, \bar{b}_2, \bar{c}_2$. En portant dans ces expressions, σ tirée de (58), (Chap. II) et p_h, q_h tirées de (41), (Chap. II), on voit que tous les $\bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1$ s'annulent pour $h = -k$. Il en résulte *que l'enveloppe Σ des plans des cercles d'un système associé à une congruence ∞^1 fois cyclique, peut être déformée à réseau persistant en Σ_h , de façon que le système déformé soit composé des sections d'une sphère de rayon nul par les plans tangents de Σ_h (BIANCHI, Lezioni, t. 2, p. 250). Les axes des cercles passent alors par un point fixe Q . De là la construction suivante des congruences cycliques attachées à un réseau conjugué persistant : on prend un transformé de Peterson du réseau, on déforme à réseau persistant sa surface support et l'on abaisse, d'un point arbitraire de l'espace, les perpendiculaires aux plans tangents à la déformée. Si la surface revient à sa forme initiale, en entraînant les droites précédentes, on obtient la congruence cyclique la plus générale*

admettant pour image sphérique de ses développables l'image du réseau considéré.

49. D'après (24), σ est constant si $\left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}' = \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}' = 0$ et vice versa; les plans des cercles des systèmes cycliques attachés aux réseaux de Voss partagent donc les distances focales des axes en rapport constant.

Pour qu'une congruence cyclique soit normale, il faut et il suffit que le réseau correspondant soit de courbure. Si $R = \text{const.}$, et si Σ est l'enveloppe des plans des cercles, les (28) donnent $a = b = 0$; les axes sont les normales de Σ , et t_1, t_2 les rayons de courbure principaux de Σ ; (22c) montre que $t_1 t_2$ est une constante négative; Σ est pseudosphérique, de même d'ailleurs que les surfaces normales aux cercles (Ribaucour).

III. — Transformation de Ribaucour. Surfaces dont les lignes de courbure se correspondent avec intersection des tangentes homologues.

50. On vérifie sans peine les propriétés suivantes des systèmes cycliques (Ribaucour) :

Dans la correspondance établie par les cercles du système sur les ∞^1 surfaces (\mathcal{X}) orthogonales aux cercles, les lignes de courbure se correspondent et correspondent aux développables de la congruence des axes; les tangentes aux lignes de courbures homologues en des points homologues concourent en l'un ou l'autre des deux foyers de l'axe correspondant; les normales à deux surfaces $(\mathcal{X}_1), (\mathcal{X}_2)$ en deux points homologues, tangentes à un même cercle, concourent en un point G et l'on a $GP_1 = GP_2$: (\mathcal{X}_1) et (\mathcal{X}_2) sont les deux nappes de l'enveloppe de la sphère à deux paramètres de centre G et de rayon GP_1 .

Les deux nappes de l'enveloppe d'une congruence de sphères sont dites en transformation de Ribaucour si les lignes de courbures se correspondent; toutes les surfaces orthogonales aux cercles d'un système cyclique sont donc transformées de Ribaucour de l'une d'elles. On démontre d'ailleurs aisément que, si deux surfaces sont en transformation de Ribaucour, les tangentes aux lignes de courbure homologues se coupent (BIANCHI, *Lezioni*, t. 2, p. 168).

51. Étudions, d'une manière générale, les couples de surfaces dont les lignes de courbure se correspondent avec intersection des tangentes homologues [135]. Soient (P), (Q) deux surfaces d'un tel couple rapportées à leurs lignes de courbure, F₁, F₂ les intersections des tangentes homologues, T le trièdre formé par les tangentes aux lignes de courbure et la normale de (P), e₁, e₂, e les vecteurs unitaires des arêtes de T. Supposons Q fixé par rapport à T par la distance t = Pε de P à (F₁, F₂), l'angle β des plans tangents de (P), (Q) et les angles α = ∠F₁Pε, φ = ∠QF₂F₁; (Q) est uniquement assujettie aux conditions : 1° les lignes u, v de courbure; 2° leurs tangentes sont les droites ε₁ = QF₁, ε₂ = QF₂. 1° se traduit par

$$\varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial u} [\varepsilon_1 \varepsilon_2] = 0, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial v} [\varepsilon_1 \varepsilon_2] = 0,$$

soit en développant les dérivées du produit vectoriel [ε₁, ε₂]

$$(30) \quad \left(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial u} \right) = 0, \quad \left(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial v} \right) = 0;$$

2° se traduit par les équations

$$(31) \quad \varepsilon_2 \frac{\partial Q}{\partial u} = 0, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial Q}{\partial v} = 0, \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial u} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \right) = 0, \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial v} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \right) = 0.$$

Portant les expressions de Q, ε₁, ε₂ dans (30), (31) on trouve :

$$(32a) \quad \cot \varphi \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} + r \right) + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial \beta}{\partial u} + q \frac{\cos \alpha \sin \varphi - \sin \alpha \cos \beta \cos \varphi}{\sin \beta \sin \varphi} = 0,$$

$$(32b) \quad -\tan \varphi \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v} + r_1 \right) + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial \beta}{\partial v} - p_1 \frac{\sin \alpha \cos \varphi - \cos \alpha \cos \beta \sin \varphi}{\sin \beta \cos \varphi} = 0,$$

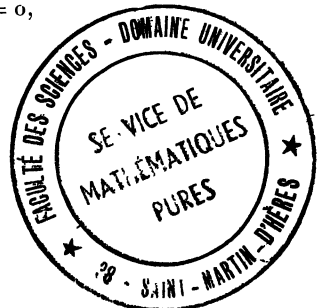
$$(32c) \quad \frac{\partial \log t}{\partial u} + \frac{\xi}{t} \cos \alpha = \cot \alpha \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} + r \right),$$

$$(32d) \quad \frac{\partial \log t}{\partial v} + \frac{\eta_1}{t} \sin \alpha = -\tan \alpha \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v} + r_1 \right),$$

$$(32e) \quad \tan \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \tan \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \quad \cot \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \cot \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial v}.$$

L'élimination de β dans (32 a, b) ou de t dans (32 c, d) donne

$$(32f) \quad \frac{\partial}{\partial v} \left[\cot \alpha \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} + r \right) \right] + \frac{\partial}{\partial u} \left[\tan \alpha \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v} + r_1 \right) \right] = 0,$$



et celle de φ dans (32 e) :

$$(33) \quad [\text{tang } \alpha \cot \varphi - \cot \alpha \text{ tang } \varphi] \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\cot \alpha \frac{d\alpha}{du} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\text{tang } \alpha \frac{d\alpha}{dv} \right) \right] = 0.$$

En annulant le premier facteur (33) on trouve $\varphi = \pm \alpha$; les (32 e) sont alors vérifiées; quelle que soit (P), (32 f) donne α ; avec deux fonctions arbitraires d'un argument, et, pour chaque α , le système (32 a, b, c, d) est complètement intégrable et détermine β , t avec deux constantes; les normales de (P), (Q) se coupent et (Q) est transformée de Ribaucour de (P).

Si $\varphi \neq \alpha$, le second facteur de (33) montre que

$$(34) \quad \text{tang } \alpha = \frac{U}{V},$$

et (32 f) impose à (P) la condition

$$(35) \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{V}{U} r \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{U}{V} r_1 \right) = 0.$$

Moyennant (34), (35), le système (32 a, . . . , e) est complètement intégrable et donne φ , β , t avec trois constantes arbitraires.

52. Fixons la solution α , β , φ ; lorsque la constante d'intégration de t varie, la figure PF_1F_2Q subit une homothétie et Q décrit une droite; les tangentes aux lignes de courbure des différentes surfaces (Q) sont parallèles, et toutes ces surfaces sont transformées de Combescure de l'une d'elles.

Si l'on fixe la solution t , α , φ , les (32 a, b) déterminent β avec une constante dont la variation fait tourner le triangle F_1QF_2 autour de F_1F_2 ; Q décrit un cercle d'axe F_1F_2 engendrant, lorsque u , v varient, un système cyclique normal aux (Q).

Si $\varphi = \alpha$, F_1QF_2 sont congruents et (P) fait partie des (Q). Quelle que soit (P), (32 f) détermine α et donne ∞^2 systèmes cycliques; chaque (Q) est transformée de Ribaucour de (P).

Pour les surfaces (35) on a d'autres solutions. Fixons α et t , les (32 e) donnent φ avec une constante, puis les (32 a, b) donnent β avec une autre constante. Si la constante de β varie, Q décrit un cercle d'axe F_1F_2 qui varie avec la constante de φ . $\widehat{F_1\varphi F_2}$ étant droit, tous les cercles sont sur la sphère de diamètre F_1F_2 . Ces

cercles engendrent ∞^1 systèmes cycliques dont $(F_1 F_2)$ est la congruence des axes. On constate que $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\sigma}{2}$ du paragraphe II.

53. Pour une surface (P) de la classe (35), α est déterminé par (32f) et

$$(35') \quad \frac{\partial}{\partial v} (\cot \alpha r) + \frac{\partial}{\partial u} (\tan \alpha r_1) = 0.$$

Avec une fonction auxiliaire γ , (35') s'écrit

$$(36) \quad \frac{d\alpha}{du} = -\frac{\partial \log r_1}{\partial u} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\gamma}{r_1} \cot \alpha, \quad \frac{d\alpha}{dv} = \frac{\partial \log r}{\partial v} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\gamma}{r} \tan \alpha;$$

en portant ces expressions dans (32f) on obtient

$$(37) \quad \begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial u} = -\frac{2}{r_1} \gamma^2 + \gamma \left[\frac{\partial \log r}{\partial u} + \frac{2}{\partial u} \frac{\partial \log r_1}{\partial u} \sin^2 \alpha \right] - \frac{\partial^2 \log r}{\partial u \partial v} r \cos^2 \alpha, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial v} = \frac{2}{r} \gamma^2 + \gamma \left[\frac{\partial \log r_1}{\partial v} + \frac{2}{\partial v} \frac{\partial \log r}{\partial v} \cos^2 \alpha \right] + \frac{\partial^2 \log r_1}{\partial u \partial v} r_1 \sin^2 \alpha, \end{cases}$$

dont la condition d'intégrabilité est de la forme

$$(38) \quad M \gamma + N \cos^2 \alpha + P \sin^2 \alpha = 0.$$

La discussion de (36), (37), (38) montre qu'une surface (35) ne peut admettre trois familles de ∞^1 systèmes cycliques, que si $M = N = P = 0$; à la surface sont alors liées ∞^2 congruences cycliques portant chacune ∞^1 systèmes cycliques.

La surface est déterminée par les équations

$$(39) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{r}{r_1} = 0, & \frac{\partial^3 \log r}{\partial u \partial v^2} = \frac{\partial^2 \log r}{\partial u \partial v} \frac{\partial \log r r_1}{\partial v}, \\ & \frac{\partial^3 \log r_1}{\partial u^2 \partial v} = \frac{\partial^2 \log r_1}{\partial u \partial v} \frac{\partial \log r r_1}{\partial u}. \end{cases}$$

Les (39) donnent, u et v étant convenablement choisis,

$$(40) \quad r_1 = r = K \frac{\sqrt{U_1' V_1'}}{U_1 - V_1} \quad (K = \text{const.}).$$

Avec cette expression de $r_1 = r$, les équations de la théorie des surfaces donnent pour U_1, V_1 certaines équations différentielles. Ainsi, si $K = 1$ on a $U' = c_1 U^2 + c_2 U + c_3$ ($c_i = \text{const.}$) et V est arbitraire.

54. Si $r = 0$, (35) donne $r_1 = U_2 V_2$; les équations de la théorie des surfaces fournissent deux solutions :

1° $r = r_1 = q_1 = 0$, $p_1 = 1$; (P) est un cylindre; l'élément linéaire de la représentation sphérique de la congruence cyclique

$$(41) \quad ds'^2 = \left(\frac{U'V}{U^2 + V^2} \right)' du^2 + 2 \frac{U'V'UV}{(U^2 + V^2)^2} du dv + \left[\left(\frac{V'U}{U^2 + V^2} \right)^2 + \frac{V^2}{U^2 + V^2} \right] dv^2$$

dépend de deux fonctions arbitraires U , V .

2° $r = 0$, $r_1 = \sin u$, $q = 1$, $p_1 = \cos u$; (P) est de révolution ou transformée de Peterson d'une telle surface. La congruence cyclique est déterminée par l'élément linéaire de l'image sphérique

$$(42) \quad ds'^2 = \frac{V^2(1 + V^2)}{(\sin^2 u + V^2)^2} du^2 - 2 \frac{VV' \sin u \cos u}{(\sin^2 u + V^2)^2} du dv + \left\{ \frac{V' \sin^2 u}{(\sin^2 u + V^2)'} + 2 \frac{V' \sin^2 u}{\sin^2 u + V^2} + \frac{\sin^2 u \cos^2 u}{\sin^2 u + V^2} + \sin^2 u \right\} dv^2.$$

Les normales de (P), (Q) sont perpendiculaires si

$$\operatorname{tang}^2 \varphi = \left(-\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \operatorname{tang}^2 \alpha.$$

Les cercles des ∞^1 systèmes cycliques liés à la congruence cyclique sont de rayon constant (variable d'un système à l'autre) si

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} q = \sin \gamma, \quad p_1 = \cos \gamma, \quad \operatorname{tang} \alpha = U, \\ \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{c-1} \sqrt{U^2+1}}{U + \sqrt{c}U^2} \operatorname{tang} \frac{\nu \sqrt{c-1}}{2}, \quad U^2 = c(U^2+1)^2 - U^2 - 1; \end{array} \right.$$

(P) est alors une surface pseudosphérique particulière [135, 149].

CHAPITRE IV.

SURFACES DE BIANCHI.

I. — Congruences W telles que les courbures des nappes focales aux points correspondants soient égales.

55. Trois solutions θ_1 , θ_2 , θ_3 d'une équation de Moutard

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \mathfrak{N} \theta$$

déterminent (Lelievre) une surface S rapportée à ses asympto-

tiques u, v , dont la courbure totale est

$$(2) \quad K = -\frac{1}{\rho^2}, \quad \rho = \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2.$$

Si R est solution de (1), la transformation de Moutard,

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial u}(\theta_i + \theta'_i) = (\theta_i - \theta'_i) \frac{\partial \log R}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial v}(\theta'_i - \theta_i) = -(\theta_i + \theta'_i) \frac{\partial \log R}{\partial v},$$

associe à θ_i les solutions θ' de l'équation transformée

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \theta'}{\partial u \partial v} = \mathfrak{N}' \theta', \quad \mathfrak{N}' = R \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{1}{R} \right),$$

et à S une surface S' déterminée par θ'_i ; on peut placer S' de façon que S, S' soient nappes focales d'une congruence W .

Si R_1, R_2 transforment θ_i en θ', θ'', R'_i transformée de R_2 à l'aide de R_1 et R''_i transformée de R_1 à l'aide de R_2 vérifient

$$(5) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial u} = R_2 \frac{\partial R_1}{\partial u} - R_1 \frac{\partial R_2}{\partial u}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = R_1 \frac{\partial R_2}{\partial v} - R_2 \frac{\partial R_1}{\partial v},$$

$$(6) \quad \lambda = R_1 R'_2 = R_2 R''_1.$$

Il existe une solution \mathfrak{S}_i transformée de Moutard de θ'_i à l'aide de R'_2 ou de θ''_i à l'aide de R''_1 , déterminée par

$$(7) \quad \mathfrak{S}_i - \theta_i = \frac{R_1 R_2}{\lambda} (\theta''_i - \theta'_i).$$

S^* correspondant à \mathfrak{S}_i , convenablement placée, est la deuxième nappe focale de deux congruences W dont les premières nappes sont S', S'' . Le quadrilatère gauche formé par quatre points homologues M, M', N, M'' de S, S', S'', S^* engendre quatre congruences W de nappes focales S, S', S'', S^* . (5) déterminant λ avec une constante arbitraire, il existe ∞^1 surfaces S^* à points homologues alignés sur MN (BIANCHI, t. 2, Chap. XVII).

56. *Examinons [18] les congruences W (de Bianchi) dont les courbures des nappes focales aux points homologues sont égales.*

Si (MM') est une congruence de Bianchi, les (2) donnent

$$(8) \quad \Sigma \theta_i^2 = \rho, \quad \Sigma \theta'_i{}^2 = \rho, \quad \Sigma \theta_i \theta'_i = \rho \cos \sigma,$$

où σ est l'angle des plans focaux. En multipliant les (3) par θ_i , puis par θ'_i ($i = 1, 2, 3$) et ajoutant, on obtient

$$(9) \quad \frac{\partial \cos \sigma}{\partial u} = -(\mathbf{1} + \cos \sigma) \frac{\partial \log \rho}{\partial u}, \quad \frac{\partial \cos \sigma}{\partial v} = (\mathbf{1} - \cos \sigma) \frac{\partial \log \rho}{\partial v},$$

dont la condition d'intégrabilité, $\frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} = 0$, donne

$$(10) \quad \rho = U + V.$$

La courbure de S, S' est de la forme

$$(11) \quad K = -\frac{\mathbf{1}}{(U + V)^2}.$$

Les surfaces de la classe (11) sont dites de Bianchi; l'image sphérique de leurs asymptotiques est celle d'un réseau persistant. Si une surface (11) est donnée, on déduit des (9)

$$(12) \quad \operatorname{tang} \frac{\sigma}{2} = \sqrt{\frac{U+k}{V-k}} \quad (k = \text{const}).$$

Avec le trièdre T du n° 37 (Chap. II), les coordonnées x, y, z de M sont définies par le système

$$(13) \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \rho \sqrt{e} (\cos \omega X_1 - \sin \omega X_2), \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\rho \sqrt{g} (\cos \omega X_1 + \sin \omega X_2);$$

or la distance des points limites d'une W est l'inverse de la racine quatrième du produit des courbures des nappes focales (Ribaucour); on a donc

$$(13') \quad MM' = \rho \sin \sigma,$$

et le point M' (x', y', z') de S' est déterminé par les formules

$$(14) \quad x' = x + \rho \sin \sigma (X_1 \cos \alpha + X_2 \sin \alpha),$$

où α est l'angle de MM' avec le premier axe de T. Les cosinus directeurs X', Y', Z' de la normale de S' sont déterminés par les (60) du Chapitre II. En portant dans le système

$$\Sigma X' \frac{\partial x'}{\partial u} = 0, \quad \Sigma X' \frac{\partial x'}{\partial v} = 0,$$

on obtient le système (61) du Chapitre II, qui est complètement inté-

grable et donne α avec une constante. On vérifie aisément que la congruence obtenue est de Bianchi. *Chaque surface de Bianchi est nappe focale de ∞^2 congruences de Bianchi [18].*

§7. *Les congruences de Bianchi possèdent des propriétés caractéristiques remarquables.*

1° *Dans la représentation sphérique, les asymptotiques des nappes focales ont pour image un système orthogonal.*

Il suffit pour le voir, de vérifier à l'aide des (59), (61) du Chapitre II, que les cosinus directeurs du rayon $\bar{X} = X_1 \cos \alpha + X_2 \sin \alpha$, satisfont à la relation $\sum \frac{\partial \bar{X}}{\partial u} \frac{\partial \bar{X}}{\partial v} = 0$ (BIANCHI, t. 2, p. 85).

2° *Les surfaces principales interceptent des réseaux conjugués sur les nappes focales.*

Rapportons une congruence C (non normale) à ses développables; soient 2ρ la distance focale et

$$ds^2 = e du^2 + 2\sqrt{eg} \cos \omega du dv + g dv^2$$

l'élément linéaire de la représentation sphérique. Deux directions $(du : dv)$, $(\delta u : \delta v)$ sont conjuguées sur une nappe focale (BIANCHI, t. 1, p. 488) si

$$(15) \quad \sqrt{e} \sin \omega \left[\frac{d\rho}{du} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}' \rho \right] du \delta u - \rho \sqrt{g} \left[\frac{d\omega}{dv} + \sqrt{\frac{g}{e}} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}' \sin \omega \right] dv \delta v = 0.$$

Les surfaces principales de C sont déterminées par

$$(16) \quad e du^2 + 2 \frac{\sqrt{eg}}{\cos \omega} du dv + g dv^2 = 0;$$

en portant dans (15) $du \delta u : dv \delta v = g : e$, on obtient

$$(17) \quad K_1 = - \frac{\sin^2 \omega}{4 \rho^2},$$

où K_1 est la courbure totale de la première nappe focale; (17) montre,

qu'au signe près, K_1 est l'inverse du carré de la distance des points limites.

Si les surfaces principales interceptent aussi sur la deuxième nappe un réseau conjugué, deux réseaux conjugués (donc les asymptotiques) se correspondent sur les deux nappes et la congruence est W ; en outre K_1 et K_2 ont la même valeur (17) et la congruence est de Bianchi [97].

3° *Les nappes focales d'une congruence de Bianchi (non pseudosphérique) se touchent le long de deux asymptotiques communes.*

D'après (10), (12), (13') on a

$$(18) \quad MM' = 2 \sqrt{(U+k)(V-k)},$$

et les points correspondants de deux courbes homologues

$$(U+k)(V-k) = \text{const.}$$

sont à distances constante. Les asymptotiques $U+k=0$, $V-k=0$ des deux nappes focales sont confondues et, en vertu de (12), les plans tangents à S , S' le long de ces courbes coïncident [146].

4° Imaginons, dans chaque plan tangent d'une surface (M) , un cercle, centré au point M , dont les points sont les centres de ∞^1 facettes dont les plans passent par M et font l'angle σ avec le plan tangent. *Si les plans des ∞^3 facettes enveloppent ∞^1 surfaces, (M) est une surface de Bianchi et les surfaces enveloppées en sont des transformées de Bianchi [84].*

58. Le théorème de permutabilité des transformations asymptotiques (par congruences W), appliqué aux surfaces de Bianchi, donne le résultat suivant : *Parmi les ∞^1 surfaces S^* déduites des transformées S' , S'' de S , il en existe une et une seule correspondant à S avec égalité des courbures totales aux points homologues.*

On déduit de (7)

$$(19) \quad \Sigma \mathfrak{S}_i^2 = \Sigma \theta_i^2 + 2 \frac{R_1 R_2}{\lambda} (\Sigma \theta_i \theta_i'' - \Sigma \theta_i' \theta_i') + \frac{R_1^2 R_2^2}{\lambda^2} \Sigma (\theta_i'^2 + \theta_i''^2 - 2 \theta_i' \theta_i'');$$

et l'on a ici

$$\begin{aligned} \Sigma \hat{\omega}_i^2 &= \Sigma \theta_i^2 = \Sigma \theta_i'^2 = \Sigma \theta_i''^2 = \rho, & \Sigma \theta_i \theta_i' &= \rho \cos \sigma', \\ \Sigma \theta_i \theta_i'' &= \rho \cos \sigma'', & \Sigma \theta_i' \theta_i'' &= \rho [\cos \sigma' \cos \sigma'' + \sin \sigma' \sin \sigma'' \cos(\alpha' - \alpha'')], \end{aligned}$$

la dernière formule s'obtenant en tenant compte des (60) du Chapitre II.

En portant les expressions précédentes dans (19), on trouve

$$(20) \quad \lambda = R_1 R_2 \frac{\cos \sigma' \cos \sigma'' - 1 + \sin \sigma' \sin \sigma'' \cos(\alpha' - \alpha'')}{\cos \sigma'' - \cos \sigma'}$$

et cette expression vérifie les (5) (BIANCHI, *Lezioni*, t. 2, p. 81).

59. *La transformation de Bianchi des surfaces S correspond à la transformation de M. Eisenhart des réseaux conjugués persistants.* Le théorème de permutabilité s'étend, comme l'a montré M. Eisenhart à cette dernière transformation [94]. Il suffit, pour le voir, de remarquer que les formules de la transformation de Bianchi et, en particulier, la formule (20), s'appliquent aux quatrièmes solutions $\theta_4, \theta_4', \theta_4''$ qui, avec les trois premières, déterminent tangentiellement les surfaces $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \Sigma^*$.

Deux surfaces contiguës du quadruple déterminent, par l'intersection de leurs plans tangents homologues, une congruence normale dont les développables correspondent au réseau conjugué persistant.

La configuration du théorème de permutabilité de M. Eisenhart contient quatre congruences normales dont les développables se correspondent; les réseaux conjugués persistants sont enveloppés par les plans des rayons homologues de deux congruences contiguës.

L'équation (7) est vérifiée par les coordonnées tangentielles de $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \Sigma^*$; *il en résulte que les quatre plans tangents passent par un même point et que, par suite, il en est de même des quatre rayons homologues des congruences normales signalées plus haut dans la configuration.*

60. Le théorème de permutabilité détermine en termes finis la surface S^* (obtenue par double application de la transformation de Bianchi) dès que les surfaces S', S'' (transformées de Bianchi du

premier ordre) sont connues. Il en résulte que, *si toutes les transformées du premier ordre sont connues, les applications ultérieures de la méthode de Bianchi n'exigent aucune quadrature.*

M. Masloff [112] a fait *une application élégante de cette proposition, en prenant une droite comme surface initiale de Bianchi.*

M. Masloff a aussi étudié le théorème de permutabilité dans le cas limite où les constantes k' , k'' sont égales, et cette étude l'a conduit à une transformation nouvelle [146].

II. — Surface associée.

61. Dans la déformation à réseau conjugué persistant d'une surface Σ , est incluse une déformation infiniment petite. *La surface S associée à Σ dans cette déformation correspond à Σ par parallélisme des normales et, dans cette correspondance, les asymptotiques de S correspondent au réseau persistant de Σ : S est par suite une surface de Bianchi.*

Aux trois sortes de réseaux persistants correspondent trois classes de surfaces de Bianchi. *Si le réseau contient deux familles de géodésiques, les fonctions U, V sont constantes, et la surface associée (B_0) est pseudosphérique.*

Si le réseau contient une famille de géodésiques, l'une des fonctions, V par exemple, est une constante que l'on peut annuler.

La surface associée (B_1) est caractérisée par le fait que sa courbure le long des asymptotiques ν est constante. Il en résulte (théorème d'Enneper) que les ν sont des courbes à torsion constante. En coordonnées curvilignes quelconques (u, ν), B_1 est caractérisée par l'équation

$$(21) \quad D \left(\frac{\partial K}{\partial \nu} \right)^2 - 2 D' \frac{\partial K}{\partial u} \frac{\partial K}{\partial \nu} + D'' \left(\frac{\partial K}{\partial u} \right)^2 = 0,$$

où K est la courbure de B_1 et D, D', D'' les coefficients de sa deuxième forme quadratique. On peut voir à ce sujet BIANCHI, *Lezioni*, t. 2, p. 29, et aussi [19, 87, 144, 148].

Les surfaces de Bianchi (B_2) de la troisième classe correspondent à des fonctions U, V contenant effectivement u, ν . En coordonnées asymptotiques, une B_2 est caractérisée par l'équation (11)

qui peut s'écrire

$$(22) \quad \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{-K}} \right) = 0.$$

Les fonctions $\delta, \delta', \delta''$ définies par les (25) du Chapitre I sont ici $\delta = 0, \delta' = \sqrt{-K}, \delta'' = 0$; les équations de Codazzi donnent

$$\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log \sqrt{-K}}{\partial v}, \quad \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log \sqrt{-K}}{\partial u},$$

et (22) peut se mettre sous la forme

$$(22') \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ K \end{matrix} \right\}_{1,2} = 0,$$

où les indices désignent une dérivation covariante.

Si nous remarquons maintenant avec M. Buchguene [144, 145] que (22') n'est qu'un cas particulier (correspondant aux coordonnées asymptotiques) de l'équation générale

$$(23) \quad D \left(\frac{1}{K} \right)_{,2} - 2 D' \left(\frac{1}{K} \right)_{1,2} + D'' \left(\frac{1}{K} \right)_{11} = 0,$$

qui signifie que les deux familles de courbes définies sur B_2 par l'équation

$$(24) \quad \left(\frac{1}{K} \right)_{11} du^2 + 2 \left(\frac{1}{K} \right)_{12} du dv + \left(\frac{1}{K} \right)_{22} dv^2 = 0$$

sont conjuguées, nous voyons que cette dernière propriété géométrique des courbes (24) caractérise les B_2 en coordonnées curvilignes u, v arbitraires.

Si l'on a égard à l'image sphérique de B_2 , (22) devient $(\log K)'_{1,2} = 0$, la dérivation covariante se rapportant à l'élément linéaire de la représentation sphérique. On déduit de là la propriété caractéristique suivante des B_2 : les lignes déterminées sur ces surfaces par l'équation

$$(25) \quad (\log K)'_{1,1} du^2 + 2 (\log K)'_{1,2} du dv + (\log K)'_{2,2} dv^2 = 0$$

forment un réseau conjugué nouveau.

La propriété caractéristique précédente montre que, si une surface B_2 est susceptible d'une déformation la laissant dans sa classe, la déformation est à réseau conjugué persistant [réseau (24)].

62. Comme exemples simples de surfaces de Bianchi, nous signalerons, les surfaces B applicables sur les surfaces de révolution déterminées par M. Vasseur [130], et les surfaces B réglées déterminées par M. Buchguence [144, 148].

Les premières surfaces comprennent les surfaces pseudosphériques (type B_0), les deux hélicoïdes minima (type B_1), et des surfaces de révolution (type B_2). Les surfaces B réglées comprennent l'hélicoïde minimum (type B_1) et des conoïdes (type B_2).

CHAPITRE V.

SURFACES DE VOSS-GUICHARD.

I. — Congruences de Guichard.

63. *Les surfaces de Voss-Guichard [14] sont celles qui possèdent un réseau conjugué formé de géodésiques.* — En portant dans les équations de Codazzi [(5), Chap. I] les valeurs.

$$(1) \quad \begin{cases} 11 \\ 2 \end{cases} = 0, \quad \begin{cases} 22 \\ 1 \end{cases} = 0$$

qui expriment que les u, v sont géodésiques, Voss obtient des équations qui s'intègrent et donnent

$$(2) \quad \delta = \frac{U}{\sqrt{G}}, \quad \delta' = \frac{V}{\sqrt{E}},$$

après quoi l'équation de Gauss et les équations (1) permettent de ramener le problème de la détermination des surfaces de Voss à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre. *Voss a remarqué que le réseau conjugué géodésique correspond, par parallélisme des normales, aux asymptotiques d'une surface pseudosphérique, mais il n'a pas signalé la permanence du réseau dans une déformation continue.* Il a recherché les surfaces V minima, déterminées plus tard par Razzaboni [15] et M. Gambier [133], puis les surfaces V de révolution étudiées par M. Tahauer [56].

64. *Les résultats de Voss ont été retrouvés et prolongés par*

Guichard [16], qui les a reliés à la théorie des congruences à réseaux focaux orthogonaux.

Considérons une surface G rapportée à ses lignes de courbure u, v , et attachons à chaque point M de G le trièdre T formé par les tangentes principales et la normale en M . G est déterminée par les composantes du déplacement de

$$T: \quad \xi, \quad \eta = \xi_1 = 0, \quad \eta_1, \quad p = q_1 = 0, \quad q, \quad p_1, \quad r, \quad r_1.$$

Envisageons la congruence des tangentes aux lignes u de G . Pour un point M' , situé à la distance ρ de M sur la tangente en M , les déplacements, lorsque u ou v varient seuls, sont représentés par les vecteurs

$$(3) \quad \mathbf{e}_1(\xi + \rho u) + \rho(\mathbf{e}_2 r - \mathbf{e}_3 q), \quad \mathbf{e}_1 \rho v + \mathbf{e}_2(\eta_1 + r_1 \rho).$$

Si M' est foyer de MM' , le second vecteur est sur MM' , donc

$$(4) \quad \rho = -\frac{\eta_1}{r_1}.$$

Le réseau focal (M) est orthogonal; (M') l'est également si

$$(5) \quad \xi + \rho u = 0,$$

et la congruence est dite de Guichard. En portant (4) dans (5), on obtient l'équation suivante, caractérisant les congruences de Guichard

$$(6) \quad r_{1u} = 0.$$

Un choix convenable de v donne $r_1 = 1$. Les équations fondamentales de la théorie des surfaces s'écrivent

$$(7) \quad p_{1u} = -q, \quad q_v = r p_1, \quad r_v = -p_1 q,$$

et montrent que $q^2 + r^2$ est une fonction de u , qu'on peut réduire à l'unité. ω étant l'angle des plans focaux, on a

$$(8) \quad q = \sin \omega, \quad r = -\cos \omega, \quad p_1 = -\frac{\partial \omega}{\partial v},$$

$$(9) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \sin \omega,$$

et l'élément linéaire de la représentation sphérique de la congruence est de la forme

$$(10) \quad ds'^2 = du^2 - 2 \cos \omega du dv + dv^2.$$

(9), (10) montre que l'image des développables est celle des asymptotiques d'une surface pseudosphérique S . La normale à la nappe Σ de la développée de G portant les développées des u est parallèle à MM' et les u, v tracent sur Σ un réseau conjugué; il en résulte que Σ est une surface de Voss avec le réseau (u, v) géodésique.

Inversement, pour une surface Σ de Voss, les congruences des tangentes aux u, v sont normales, les surfaces G_1, G_2 normales aux deux congruences sont de Guichard, et les tangentes aux u de G_1 et aux v de G_2 engendrent des congruences de Guichard dont les développables interceptent sur les nappes focales G_1, G'_1, G_2, G'_2 les réseaux de courbure.

La développée de G'_1 relative aux lignes v ou celle de G'_2 relative aux u sont des surfaces de Voss; cette remarque fournit une méthode de transformation des surfaces de Voss [16, 17, 21, 133].

65. L'élimination de \mathbf{e}_2 entre les équations fondamentales $\mathbf{e}_{1\nu} = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_{2u} = -\mathbf{e}_1 r$ montre que les cosinus directeurs de la normales de Σ vérifient l'équation de Laplace

$$(11) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \theta \cos \omega,$$

à laquelle satisfait d'ailleurs aussi la quatrième coordonnée tangentielle $\omega = M \mathbf{e}_1$ (distance du plan tangent à l'origine). Une solution de (9) et quatre de (11) donnent une surface Σ . La développée ν de G'_1 engendre une surface Σ' dont les normales, parallèles à MM' , le sont aux normales de Σ . Les trois premières coordonnées tangentielles de Σ' coïncident avec celles de Σ , la quatrième est

$$(12) \quad \omega' = M' \mathbf{e}_1 = (M + \rho \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 = \omega - \eta_1$$

où

$$(13) \quad \xi = t' \sin \omega, \quad \eta_1 = B + t' \omega_\nu, \quad t' = \int \left(\frac{A}{\sin \omega} du + B \cot \omega dv \right);$$

$$A = \omega_{uu} + \omega + \omega_u \frac{\omega_u \cos \omega - \omega_\nu}{\sin \omega}, \quad B = \omega_{\nu\nu} + \omega + \omega_\nu \frac{\omega_u - \omega_\nu \cos \omega}{\sin \omega}.$$

La constante additive de t' fait correspondre à une surface Σ de Voss ∞^1 surfaces de Guichard. A chaque surface G correspond une autre surface de Guichard G' , et une surface Σ' de Voss qui est une

nappe de la développée de G' . Si l'on recommence la construction en partant d'une Σ' , on obtient Σ et aussi ∞^1 autres surfaces de Voss. Si l'on part de Σ en considérant les tangentes des ν on obtient, par l'intermédiaire de deux surfaces de Guichard, ∞^1 surfaces de Voss, dont les normales sont parallèles à celles de Σ et dont la distance du plan tangent à l'origine est

$$(14) \quad \omega'' = \omega + A + \omega_u \epsilon'', \quad \epsilon'' = \int \left(A \cot \omega du + \frac{B}{\sin \omega} d\nu \right).$$

La droite joignant les points homologues des différentes surfaces G' , coupe la normale à G au centre de courbure autre que le point correspondant de Σ [133].

66. *La transformation précédente des surfaces de Voss ne change pas la représentation sphérique du réseau de Voss : c'est un cas particulier de la transformation de Peterson. Le lien entre les surfaces de Voss et pseudosphériques fait correspondre, à chaque transformation d'une surface pseudosphérique, une transformation des surfaces de Voss associées. La transformation la plus générale des surfaces pseudosphériques est celle de Backlund (cas particulier de celle de Bianchi étudiée au Chapitre IV); en théorie des réseaux persistants il lui correspond la transformation de M. Eisenhart :*

Σ étant une surface de Voss, il existe dans ses plans tangents, ∞^2 droites engendrant des congruences normales dont les développables correspondent au réseau géodésique de Σ , les foyers étant situés sur les tangentes du réseau et les plans focaux étant inclinés à angle constant sur le plan tangent de Σ . Le symétrique de ce plan tangent par rapport aux plans focaux de l'une quelconque de ces congruences enveloppe une nouvelle surface de Voss [82, 94].

M. Vincensini [140] a présenté sous un nouvel aspect la transformation de M. Eisenhart, en la rattachant à la transformation de Ribaucour des surfaces de Guichard.

II. — Déformation d'une surface faisant correspondre, aux asymptotiques, un réseau conjugué.

67. Les surfaces de Voss sont solutions d'un autre problème de déformation : *déterminer deux surfaces applicables telles que les*

asymptotiques de l'une correspondent, dans l'applicabilité, à un réseau conjugué de l'autre.

La question, étudiée par MM. Demoulin [51, 64] et Eisenhart [71], a été résolue complètement par M. Gambier [109].

Généralisant une propriété bien connue des surfaces minima associées, M. Gambier cherche *deux surfaces applicables* S_1, S_2 *telles qu'une combinaison linéaire à coefficients constants des deuxièmes formes quadratiques détermine intrinsèquement* ∞^1 *surfaces* S *applicables sur* S_1 *et* S_2 . *Les coefficients*

$$hD_1 + kD_2, \quad hD'_1 + kD'_2, \quad hD''_1 + kD''_2 \quad (h, k = \text{const.})$$

vérifient les équations de Codazzi et. en les portant dans l'équation de Gauss $DD'' - D'^2 = \Omega$, on obtient

$$(15) \quad h^2\Omega + hk\Omega_{12} + k^2\Omega = \Omega,$$

$$(16) \quad \Omega_{12} = D_1D''_2 + D_2D''_1 - 2D'_1D'_2.$$

(15) revient aux deux relations

$$(17) \quad \Omega_{12} = m\Omega, \quad k^2 + mkh + h^2 = 1 \quad (m = \text{const.}).$$

Si la première est vérifiée, la seconde donne ∞^1 surfaces S applicables, h (ou k) restant arbitraire. Le réseau conjugué commun à S_1, S_2 reste conjugué sur S qui se déforme ainsi à réseau conjugué persistant.

Si les deux familles de lignes du réseau se confondent, on a la déformation des surfaces réglées avec génératrices persistantes; ce cas, qui correspond à $m = 2$, sera écarté.

Appelons *associées* les ∞^1 surfaces S vérifiant (17). On peut substituer à S_1, S_2 un couple quelconque de surfaces S sans modifier la famille des associées, m prenant une valeur différente. Pour le couple $[S_1, S(h, k)]$, $m' = 2h + km$; si $m' = 0$, donc si

$$k = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{4 - m^2}}, \quad h = \frac{-\varepsilon m}{\sqrt{4 - m^2}}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

$S(h, k)$ est dite *adjointe* de S_1 ; les deux signes de ε correspondent à des surfaces S symétriques.

Écartons le cas impossible $m = \pm 2$ et soient S_1, S_2 deux adjointes; on a $m = 0$ et (16) montre que *les asymptotiques de* S_1 *correspondent à un réseau conjugué de* S_2 *et vice versa.* Inversement, si

les asymptotiques de S_1 s'appliquent sur un réseau conjugué de S_1 , choisi comme réseau coordonné, on a $D_1 = D'_1 = D''_2 = 0$; (17) est vérifiée avec $m = 0$, et l'on a un couple d'adjointes donnant une famille de surfaces associées.

68. Rapportons deux adjointes S_1, S_2 au réseau conjugué commun; l'équation de Gauss et (17) donnent

$$D_1 D'_1 - D_2 D''_2 = 0, \quad D_1 D''_2 + D_2 D'_1 = 0;$$

d'où

$$D''_2 = i D'_1, \quad D_2 = -i D_1, \quad D'_1 = D'_2 = 0.$$

Les équations de Codazzi donnent $\left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 0$ et le réseau est géodésique. *Inversement, toute surface de Voss est solution du problème; les surfaces associées sont ses déformées à réseau géodésique persistant.*

Les surfaces réelles de Voss à réseau géodésique réel sont à adjointe imaginaire et vice versa. Pour les détails de l'étude de la réalité, nous renvoyons aux deux Mémoires de M. Gambier [109, 133] dont le second contient un exposé complet de la théorie des surfaces de Voss.

68 bis. Les surfaces minima sont de Voss, le réseau persistant étant constitué par les lignes minima. Voss [14] et Tahauer [54] ont déterminé les surfaces de révolution à réseau géodésique conjugué.

Les surfaces de Voss à ds^2 de révolution, dont l'existence a été prévue par M. Buchguence [87], ont été explicitement déterminées par M. Gambier [109].

III. — Réseau persistant contenant une famille de géodésiques.

69. Supposons que le réseau focal de la première nappe de développée Σ d'une surface G (qui comprend une famille de géodésiques), soit persistant. La normale de Σ étant parallèle au premier axe du trièdre, l'élément linéaire de l'image sphérique de Σ est

$$(18) \quad ds'^2 = (q^2 + r^2) du^2 + 2rr_1 du dv + r_1^2 dv^2,$$

et l'on a

$$(19) \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0, \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{\partial \log r_1}{\partial u}.$$

La condition de Cosserat, qui se réduit ici à

$$(20) \quad \frac{\partial \log r_1}{\partial u \partial v} = 0,$$

donne, avec un choix convenable de v , $r_1 = U$. L'équation tangentielle de Laplace du réseau de courbure de G , à savoir

$$(21) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \frac{r p_1}{q} \frac{\partial \theta}{\partial u} - g \frac{r_1}{p_1} \frac{\partial \theta}{\partial v},$$

se réduit à $\frac{\partial r_1}{\partial v} = 0$ ($r_1 = U$) si l'on remplace θ par p_1^2 (troisième coefficient de l'élément linéaire de l'image sphérique de G). D'où cette élégante proposition d'Egoroff [59] : *si l'équation tangentielle relative au réseau de courbure d'une surface G admet comme solution particulière le troisième coefficient g de l'élément linéaire de la représentation sphérique de G , le réseau correspondant aux lignes de courbure sur la première nappe de développée de G est persistant avec une famille de géodésiques, et (avec un choix convenable de v) cette propriété est caractéristique des réseaux en question.*

On vérifie de même que l'équation ponctuelle de G admet pour solution le coefficient G de l'élément linéaire.

70. (21) est vérifiée par les cosinus directeurs X, Y, Z de la normale de G ; cela conduit à penser que g est une combinaison linéaire à coefficients constants de X, Y, Z ; effectivement, les axes étant convenablement choisis, on a

$$(22) \quad g = n - Z, \quad (n = \text{const.}),$$

Z satisfaisant à l'équation bien connue $\Delta'(Z) = 1 - Z^2$ (où le paramètre différentiel Δ' se rapporte à la sphère); si l'on porte l'expression (22) de Z dans cette équation on trouve

$$(23) \quad 4 \left(\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial v} \right)^2 = 1 - (n - g)^2 - 4U^2 g,$$

qui s'intègre par fonctions elliptiques [59].

71. Les équations fondamentales

$$(24) \quad \xi_\nu = -\eta_{1\nu} r', \quad \eta_{1\nu} = \xi r'_\nu$$

donnent, par élimination de ξ et en vertu de (20),

$$(25) \quad \frac{\partial^* \eta_1}{\partial u \partial \nu} = -\eta_{1\nu} r r'_\nu.$$

L'équation tangentielle relative au réseau focal de Σ

$$\frac{\partial' \mathbf{e}_1}{\partial u \partial \nu} = \frac{\partial \log r_1}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \nu} - \mathbf{e}_1 r r'_\nu$$

se ramène à la forme (25) si l'on introduit $\mathfrak{S} = \frac{\mathbf{e}_1}{r_1}$; *il en résulte une transformation des réseaux persistants avec une famille de géodésiques imaginée par Egoroff [59].*

La représentation sphérique de G étant donnée, à chaque solution de (25) correspond une fonction ξ déterminée par (24) et une surface G déterminée en termes finis par les formules d'Olinde Rodrigues. Soit θ_1 une solution particulière de (25); déterminons la surface G_1 correspondante, et envisageons en la nappe Σ_1 de développée dont ϖ_1 est la distance de l'origine au plan tangent; ϖ_1 vérifie l'équation tangentielle Σ_1 , et par suite $\frac{\varpi_1}{r_1} = \theta_1$ est une nouvelle solution de (25). A θ_2 correspond une nouvelle surface G_2 sur laquelle on peut raisonner comme sur G_1 . On obtient ainsi une suite infinie de surfaces \dots, G_1, G_2, \dots et une suite homologue de réseaux persistants $\dots, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots$ contenant une famille de géodésiques.

CHAPITRE VI.

DÉFORMATION A RÉSEAU CINÉMATIQUEMENT CONJUGUÉ PERSISTANT.

**I. — Roulement de surfaces applicables.
Réseau caractéristique de Voss.**

72. La déformation à réseau persistant ou celle des surfaces réglées à génératrices persistantes, sont des cas particuliers du problème de la déformation continue assujettie à une condition.

Chaque condition imposée à une surface S d'élément linéaire donné s'exprime par des équations entre D, D', D'', E, F, G . Pour que la condition soit compatible avec une déformation continue de S , il faut que D, D', D'' , qui sont liés par l'équation finie de Gauss, ne soient pas liés par plus d'une autre équation finie; cette dernière équation finie détermine le caractère de la déformation. Supposons l'équation linéaire

$$(1) \quad \alpha D + 2\beta D' + \gamma D'' = C,$$

α, β, γ, C étant fonctions des coefficients E, F, G et de leurs dérivées.

Considérons l'équation différentielle

$$(2) \quad \gamma du^2 - 2\beta du dv + \alpha dv^2 = 0.$$

Si (2) définit deux familles de courbes sur S , choisissons-les pour lignes coordonnées; (1) s'écrira alors

$$(3) \quad \bar{D}' = \frac{CM}{\alpha\gamma - \beta^2},$$

où M dépend du choix des paramètres, mais ne varie pas pendant la déformation; si les lignes (2) sont confondues, en les prenant pour lignes v , (1) se ramène à la forme

$$(4) \quad \bar{D} = \frac{C}{\alpha}.$$

Si $C = 0$, les déformations relatives aux cas (3) et (4) sont bien connues; (3) exprime que la déformation de S est à réseau conjugué (u, v) persistant; (4) montre que les (2) sont asymptotiques, donc droites, et la déformation est celle d'une surface réglée à génératrices persistantes.

Si $C \neq 0$, la déformation continue est impossible dans le cas (4); dans le cas (3) la déformation est d'un caractère plus général et, pour donner à (1) son sens géométrique, nous avons besoin d'une digression sur la théorie du roulement des surfaces applicables [104].

73. Rappelons les résultats du Chapitre VI (vol. 4) de la *Théorie des surfaces* de Darboux.

Soient S, S' deux surfaces applicables. S' étant fixe, on peut amener S à être en contact avec S' , le contact ayant lieu en deux points homologues et réalisant celui des courbes homologues. On obtient,

pour S, ∞ positions; le roulement qui leur correspond est un roulement de S sur S'.

Tout déplacement élémentaire de S est une rotation dont l'axe passe par le point de contact M et est situé dans le plan tangent commun. Attachons en effet à chaque point de S un trièdre T dont les rotations ont pour composantes (par rapport à T) p, q, r, p_1, q_1, r_1 . Les composantes de ces rotations relatives à des axes quelconques invariablement liés à S sont données par les formules

$$\mathcal{X}' = a_{11}p + a_{12}q + a_{13}r, \quad \mathcal{X}'_1 = a_{11}p_1 + a_{12}q_1 + a_{13}r_1, \quad \dots,$$

où a_{ik} est le cosinus de l'angle du $i^{\text{ème}}$ axe fixe et du $k^{\text{ème}}$ axe mobile. Remplaçons a_{i1}, a_{i2} par leurs valeurs déduites des équations

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a_{11}\xi + a_{12}\eta, \quad \dots,$$

où x, y, z sont les coordonnées de M par rapport aux axes fixes et ξ, η les composantes de sa vitesse relative à T; nous obtenons

$$(5) \quad \mathcal{X}' = \delta' \frac{\partial x}{\partial u} - \delta \frac{\partial x}{\partial v} + a_{13}r, \quad \mathcal{X}'_1 = \delta'' \frac{\partial x}{\partial u} - \delta' \frac{\partial x}{\partial v} + a_{13}r_1.$$

En considérant T comme attaché à S' on trouve de même pour ses rotations \mathcal{X}'' , \mathcal{X}''_1 , etc., les valeurs

$$(5') \quad \mathcal{X}'' = \delta'_1 \frac{\partial x}{\partial u} - \delta_1 \frac{\partial x}{\partial v} + a_{13}r, \quad \mathcal{X}''_1 = \delta''_1 \frac{\partial x}{\partial u} - \delta'_1 \frac{\partial x}{\partial v} + a_{13}r_1,$$

$\delta_1, \delta'_1, \delta''_1$ désignant les valeurs que prennent $\delta, \delta', \delta''$ quand on passe à la surface S'. Cela posé, supposons que u, v prennent des accroissements infiniment petits quelconques et que T prenne la position T' dans S et T'' dans S'. Le roulement de S amène T' en T''; ce mouvement se décompose en deux : l'un amène T' en T avec les rotations

$$- \mathcal{X}' du, \quad - \mathcal{X}'_1 dv, \quad \dots,$$

l'autre T en T'' avec les rotations

$$\mathcal{X}'' du + \mathcal{X}''_1 dv, \quad \dots$$

Il en résulte pour les composantes du roulement de S sur S'

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}'' - \mathcal{X}', \quad \mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_1'' - \mathcal{X}_1';$$

d'où, en vertu de (5) et (5'),

$$(6) \quad \mathcal{X} = -(\delta' - \delta'_1) \frac{\partial x}{\partial v} + (\delta - \delta_1) \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \mathcal{X}_1 = -(\delta'' - \delta''_1) \frac{\partial x}{\partial u} + (\delta' - \delta'_1) \frac{\partial x}{\partial v}.$$

L'axe de la rotation infinitésimale est bien dans le plan tangent. On peut poser $\mathcal{X} du + \mathcal{X}_1 dv = \frac{\partial x}{\partial u} \delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \delta v$, où δu , δv correspondent à un déplacement suivant l'axe de rotation. En tenant compte des (6), on obtient une équation linéaire et homogène en $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$; l'équation étant vérifiée par x , y , z , les coefficients de $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$ sont nuls; en exprimant ce fait, et après avoir remplacé δ , δ' , δ'' par les quantités proportionnelles D , D' , D'' , on trouve

$$(7) \quad (D - D_1) du \delta u + (D' - D'_1)(du \delta v + dv \delta u) + (D'' - D''_1) dv \delta v = 0.$$

(7) ne change pas lorsqu'on échange les caractéristiques d , δ , c'est-à-dire les directions du mouvement de M et de l'axe instantané; la relation entre ces directions est donc réciproque; Bianchi (*Lezioni*, t. 2, p. 111) appelle ces directions *cinématiquement conjuguées*.

74. Les éléments doubles de l'involution des directions cinématiquement conjuguées sont donnés par l'équation

$$(8) \quad (D - D_1) du^2 + 2(D' - D'_1) du dv + (D'' - D''_1) dv^2 = 0,$$

qui détermine le *réseau caractéristique de Voss* (¹). Si l'on rapporte S, S' au réseau caractéristique, (8) et l'équation de Gauss donnent

$$(9) \quad D = D_1, \quad D' = -D'_1, \quad D'' = D''_1.$$

Il en résulte que les *lignes du réseau ont même courbure normale sur S et S'*. Le réseau se confond avec le réseau asymptotique si S et S' sont symétriques.

Si le réseau est conjugué sur S au sens de Dupin, il l'est aussi

(¹) *Ueber isometrische Flächen (Math. Ann., 46).*

sur S' d'après (7); c'est le réseau conjugué commun à S, S' ; cette remarque a conduit Ribaucour [22] au théorème de Peterson.

75. C et C' étant deux courbes homologues d'un réseau cinématiquement conjugué de deux surfaces applicables S, S' , considérons les surfaces réglées R, R' , lieux de l'axe instantané dans le système mobile et dans l'espace fixe, lorsque S roule sur S' , le point de contact M décrivant C et C' . R et R' sont circonscrites à S, S' le long de C, C' . Lorsque S roule sur S' , R roule sur R' et R, R' sont applicables (DARBOUX, *Surfaces*, t. 4, p. 118).

La congruence des tangentes aux lignes d'une famille du réseau de S comprend ∞^1 surfaces réglées R touchant S suivant les lignes de l'autre famille. Si S se déforme avec conservation du réseau cinématiquement conjugué, la congruence se déforme, mais toutes les R correspondantes sont applicables.

II. — Déformation à réseau cinématiquement conjugué persistant.

76. Deux surfaces applicables S, S_1 déterminent, en chaque point M , une involution de directions cinématiquement conjuguées. S_2 applicable sur S , donne en M une autre involution. Les deux involutions déterminent par leurs couples d'éléments communs, un *réseau cinématiquement conjugué à la fois sur SS_1, SS_2, S_1S_2* . Ce réseau s'obtient par élimination de $\delta u : \delta v$ entre (7) et l'équation analogue relative à S, S_2 . Son équation, si l'on rapporte le couple S, S_1 au réseau caractéristique de Voss, est $(D_2, D''$ se rapportant à $S_2)$

$$(10) \quad (D_1 - D)du'' - (D_2'' - D'')dv'' = 0.$$

Pour l'étude du réseau cinématiquement conjugué sur S, S_1, S_2 , on peut voir Finikoff [104].

77. Posons-nous le problème suivant : *S étant donnée par ses deux formes quadratiques. existe-t-il une surface S_1 telle que le réseau coordonné soit cinématiquement conjugué sur S, S_1 ?* (7) donne la condition $D'_1 = D'$, et, d'après le théorème de Gauss $D_1 D'_1 = D D''$; on peut donc poser

$$(11) \quad D_1 = Dt, \quad D'_1 = \frac{D''}{t} \quad (t = \text{fonction auxiliaire}).$$

En portant ces expressions dans les équations de Codazzi on trouve

$$(12) \quad \frac{\partial \log t}{\partial u} = a t^2 + b t + c, \quad - \frac{\partial \log t}{\partial v} = a_1 t^{-2} + b_1 t^{-1} + c_1,$$

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \left\{ \begin{array}{c} 22 \\ 1 \end{array} \right\} \frac{D}{D''}, \quad b = - \frac{D'}{D''} \left[\frac{\partial \log D'}{\partial v} - \left\{ \begin{array}{c} 22 \\ 2 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 12 \\ 1 \end{array} \right\} \right], \\ c = \frac{\partial \log D''}{\partial u} - \left\{ \begin{array}{c} 12 \\ 2 \end{array} \right\}, \\ a_1 = \left\{ \begin{array}{c} 11 \\ 2 \end{array} \right\} \frac{D'}{D}, \quad b_1 = - \frac{D'}{D} \left[\frac{\partial \log D'}{\partial u} - \left\{ \begin{array}{c} 11 \\ 1 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 12 \\ 2 \end{array} \right\} \right], \\ c_1 = \frac{\partial \log D}{\partial v} - \left\{ \begin{array}{c} 12 \\ 1 \end{array} \right\}. \end{array} \right.$$

La condition d'intégrabilité de (12) est

$$(14) \quad t^2 \left[\frac{\partial a}{\partial v} - 2 a c_1 \right] + t \left[\frac{\partial b}{\partial v} - 3 a b_1 - b c_1 \right] + \frac{\partial c}{\partial v} + \frac{\partial c_1}{\partial u} - 2 b b_1 - 4 a a_1 \\ + \frac{1}{t} \left[\frac{\partial b_1}{\partial u} - 3 a_1 b - b_1 c \right] + \frac{1}{t^2} \left[\frac{\partial a_1}{\partial u} - 2 a_1 c \right] = 0.$$

(14) est du quatrième degré en t . Si un réseau est cinématiquement conjugué sur six surfaces applicables (dont une est S), (14) admet cinq solutions et est vérifiée identiquement; (12) est complètement intégrable et donne t avec une constante; il existe ∞^1 surfaces applicables admettant (u, v) pour réseau cinématiquement conjugué, S admet une déformation à réseau conjugué persistant. En annulant les coefficients de (14), on obtient le système caractérisant les surfaces rapportées à un réseau cinématiquement conjugué persistant

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \begin{array}{c} 22 \\ 1 \end{array} \right\} + 2 \left\{ \begin{array}{c} 12 \\ 1 \end{array} \right\} \frac{\partial}{\partial D D''} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{array}{c} 11 \\ 2 \end{array} \right\} + 2 \left\{ \begin{array}{c} 12 \\ 2 \end{array} \right\} \frac{\partial}{\partial D D''} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial v} \frac{B}{D D''} = 3 \left\{ \begin{array}{c} 22 \\ 1 \end{array} \right\} \frac{A}{D D''} - \left\{ \begin{array}{c} 12 \\ 1 \end{array} \right\} \frac{B}{D D''}, \\ \frac{\partial}{\partial u} \frac{A}{D D''} = 3 \left\{ \begin{array}{c} 11 \\ 2 \end{array} \right\} \frac{B}{D D''} - \left\{ \begin{array}{c} 12 \\ 2 \end{array} \right\} \frac{A}{D D''}, \\ \frac{\partial^2 \log D D''}{\partial u \partial v} = 2 \frac{A B}{D D''} + 4 \left\{ \begin{array}{c} 11 \\ 2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 22 \\ 1 \end{array} \right\} + \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{array}{c} 12 \\ 1 \end{array} \right\} + \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \begin{array}{c} 12 \\ 1 \end{array} \right\}, \end{array} \right.$$

$$(16) \quad A = \frac{\partial D'}{\partial u} - D' \left[\left\{ \begin{array}{c} 11 \\ 1 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} 12 \\ 2 \end{array} \right\} \right], \quad B = \frac{\partial D'}{\partial v} - D' \left[\left\{ \begin{array}{c} 22 \\ 2 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} 12 \\ 1 \end{array} \right\} \right],$$

(14) et l'équation de Gauss constituent un système de six équations pour cinq fonctions inconnues E, F, G, D' et le produit DD'' . Pour

chaque solution de ce système, les équations de Codazzi s'intègrent complètement et donnent D et D'' avec une constante arbitraire.

78. (15) se simplifie si le réseau contient des géodésiques. Si les u sont géodésiques, on a $\left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 0$, équation remplaçant la deuxième (15).

Comme exemple on peut citer les hélicoïdes

$$(17) \left\{ \begin{array}{l} ds^2 = du^2 + U^2 dv^2, \\ D = \frac{(U'' + c^2 U^{-3})U}{\sqrt{c_1 U + 2 U'^2 U - 2c}}, \quad D' = c U^{-1} \quad D'' = \sqrt{c_1 U + 2 U'^2 U - 2c}, \end{array} \right.$$

c est une constante arbitraire, c_1 le paramètre de déformation. Le réseau est formé des hélices et de leurs trajectoires orthogonales.

Si le réseau comprend deux familles de géodésiques, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} 11 \\ 2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 22 \\ 1 \end{array} \right\} = 0$$

et, en disposant des paramètres, (15) s'écrit

$$(18) A = \frac{DD''\sqrt{E}}{\sqrt{EG-F^2}} V, \quad B = \frac{DD''\sqrt{G}}{\sqrt{EG-F^2}} U, \quad \frac{DD''\sqrt{EG}}{EG-F^2} = \frac{1}{UV(u+v)^2}.$$

Comme exemple on peut citer les hélicoïdes

$$(19) \left\{ \begin{array}{l} ds^2 = c \frac{du^2 + 2 \cos \omega du dv + dv^2}{\sin^4 \frac{\omega}{2}}, \\ D = \alpha \cot \frac{\omega}{2}, \quad D' = \frac{c_1}{\sin \omega}, \quad D'' = \frac{1}{\alpha} \cot \frac{\omega}{2}; \end{array} \right.$$

α est paramètre de déformation, c et c_1 sont des constantes et ω une fonction de $x = u + v$ déterminée par l'équation

$$(20) \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 = -2 \cos \omega + \frac{c_1^2}{c \sin^2 \frac{\omega}{2}} + c_2, \quad c_1 = \text{const.}$$

L'exemple (17) montre que le même réseau peut servir de réseau cinématiquement conjugué persistant à plusieurs séries de surfaces applicables. L'examen du système (15) prouve que si un réseau possède cette propriété il contient toujours des géodésiques [104].

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

OUVRAGES GÉNÉRAUX.

1. DARBOUX (G.). — *Leçons sur la théorie générale des surfaces*; 4 vol. Spécialement 1, p. 181-184 et 4, p. 101-110 et suiv.
2. BIANCHI (L.). — *Lezioni di geometria differenziale*; 3^e édit., vol. 1, 2, 1927.
3. GAMBIER (B.). — Déformation des surfaces étudiée au point de vue infinitésimal (*Mémorial des Sc. math.*, t. 26, 1927).
4. GAMBIER (B.). — Applicabilité des surfaces étudiée au point de vue fini (*Mémorial des Sc. math.*, t. 31, 1928).

MÉMOIRES.

5. MINDING (F.). — *Ueber die Biegung gewisser Flächen. J. für math.*, t. 18, 1838, p. 257 et 365.
6. CODAZZI (D.). — *Intorno alle superficie le quali deformatosi ritengono le stesse linee di curvatura (Annali di Tortolini, t. 7, 1856, p. 410).*
7. BOUR (E.). — Théorie de la déformation des surfaces (*Journ. de l'École Polytechnique*, t. 22, cah. 39, 1862, p. 1-148).
8. PETERSON (K. M.). — Sur les relations et les affinités entre les surfaces courbes (en russe) (*Rec. Math. de Moscou*, t. 1, 1866, p. 391-438). Trad. française aux *Ann. de Toulouse*, 2^e série, t. 7, 1905, p. 5-107.
9. BONNET (O.). — Théorie des surfaces applicables sur une surface donnée (*Journ. de l'École Polytechnique*, t. 24, 1865, p. 209; et t. 25, 1867, p. 1-151).
10. PETERSON (K.). — *Ueber Curven und Flächen* (Moskau und Leipzig, 1868).
11. BIANCHI (L.). — *Sopra la deformazione di una classe di superficie (Giornale di mat. di Battaglini, t. 16, 1878, p. 267).*
12. PETERSON (K. M.). — Sur la déformation des surfaces du second ordre (en russe) (*Rec. Math. de Moscou*, t. 10, 1882, p. 476-523). Trad. française aux *Ann. de Toulouse*, 2^e série, t. 7, 1905, p. 7-107.
13. MŁODZIEJOWSKI (B. K.). — Recherches sur la déformation des surfaces (*Ann. Sc. de l'Univ. de Moscou, Sect. phys. math.*, fasc. 7, 1886).
14. VOSS (A.). — *Ueber diejenigen Flächen, auf denen zwei Scharen geodätischer Linien ein conjugiertes System bilden (Sitzungsber. Akad. d. Wiss. zu München, t. 18, 1888, p. 95-102).*
15. RAZZABONI (A.). — Sulle superficie sulle quali due serie di geodetiche formano un sistema conjugato (*Memorie Acad. di Bologna*, 4^e série, t. 9, 1888, p. 765).

16. GUICHARD (C.). — Surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques et congruences rapportées à leurs développables (*Ann. de l'École normale supérieure*, t. 6, 1889, p. 333).
17. GUICHARD (C.). — Sur les surfaces qui possèdent un réseau de géodésiques conjuguées (*C. R. Acad. Sc.*, t. 110, 1890, p. 995).
18. BIANCHI (L.). — Sopra una nuove classe di superficie appartenenti a sistemi tripli ortogonali (*Rend. dei Lincei*, 4^e série, t. 6, 1890, p. 435).
19. BIANCHI (L.). — Sulle superficie le cui linee assintotiche in un sistema sono curve a torsione costante (*Ibid.*, t. 6, 1890, p. 552).
20. BIANCHI (L.). — Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali (*Ann. di Mat.*, 2^e série, t. 18, 1890, p. 301-358).
21. GUICHARD (C.). — Recherches sur les surfaces à courbure totale constante et sur certaines surfaces qui s'y rattachent (*Ann. de l'École normale supérieure*, 3^e série, t. 7, 1890, p. 233-264).
22. RIBAUCCOUR (A.). — Sur les systèmes cycliques (*C. R. Acad. Sc.*, t. 113, 1891, p. 304, 324).
23. COSSERAT (E.). — Sur les systèmes conjugués et sur la déformation des surfaces (*C. R. Acad. Sc.*, t. 113, 1891, p. 460).
24. COSSERAT (E.). — Sur les systèmes cycliques et sur la déformation des surfaces (*C. R. Acad. Sc.*, t. 113, 1891, p. 498).
25. RAFFY (L.). — Détermination de toutes les surfaces moulures applicables sur des surfaces de révolution (*Bull. Soc. Math. de France*, t. 19, 1891, p. 34-37).
26. RAFFY (L.). — Sur les surfaces moulures dont les lignes d'égale courbure sont parallèles (*Ibid.*, t. 19, 1891, p. 54-57).
27. MŁODZIEJOWSKI (B.). — Sur la déformation des surfaces [*Bull. des Sc. math. (Darboux)*, 2^e série, t. 15, 1891, p. 97-101].
28. BIANCHI (L.). — Sui sistemi tripli ortogonali che contengono una serie di superficie con un sistema di linee di curvatura piane (*Ann. di Mat.*, 2^e série, t. 19, 1891, p. 177-199).
29. VOSS (A.). — Zur Theorie der Krümmung der Flächen (*Math. Annalen*, t. 39, 1891, p. 179-256).
30. RIBAUCCOUR (A.). — Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes (*Journ. de Math.*, 4^e série, t. 7, 1891, p. 5, 219).
31. BIANCHI (L.). — Sulle deformazioni infinitesime delle superficie flessibili ed inestendibili (*Rend. dei Lincei*, 5^e série, t. 1, sem. 2, 1892, p. 41-48).
32. GOURSAT (E.). — Sur un problème relatif à la déformation des surfaces (*Journ. of Math.*, t. 14, 1892, p. 19).
33. COSSERAT (E.). — Sur les congruences de droites et sur la théorie des surfaces (*Ann. de Toulouse*, t. 7, 1893, N, p. 1-62).
34. ADAM (P.). — Sur la déformation des surfaces avec conservation des lignes de courbure (*Bull. Soc. Math. de France*, t. 23, 1895, p. 195-196).
35. STAECKEL (P.). — Sur la déformation des surfaces (*C. R. Acad. Sc.*, t. 123, 1896, p. 677).
36. GUICHARD (C.). — Sur la déformation des surfaces (*Journ. de Math.*, 5^e série, t. 2, 1896, p. 677-680).

37. STAECKEL (P.). — Biegungen und conjugierte Systeme (*Math. Annalen*, 49, 1897, p. 255-310).
38. GUICHARD (C.). — Sur les réseaux qui correspondent au cas où la suite de Laplace est limitée dans un sens (*C. R. Acad. Sc.*, t. 128, 1899, p. 1149).
39. DARBOUX (G.). — Sur la déformation des surfaces générales du second degré (*C. R. Acad. Sc.*, t. 128, 1899, p. 1264).
40. TZITZEICA (G.). — Sur la déformation de certaines surfaces liées aux surfaces du second ordre (*C. R. Acad. Sc.*, t. 128, 1899, p. 1276).
41. GUICHARD (C.). — Sur les réseaux cycliques qui contiennent un système de géodésiques (*C. R. Acad. Sc.*, t. 128, 1899, p. 1308).
42. GUICHARD (C.). — Sur les surfaces de M. Voss (*Ibid.*, t. 129, 1899, p. 23).
43. MŁODZIEJOWSKI (B. K.). — Sur les surfaces associées aux surfaces de Peterson (en russe) (*Rec. math. de Moscou*, t. 21, 1900, p. 450-460).
44. EGOROFF (D. Th.). — Une classe nouvelle de surfaces algébriques qui admettent une déformation continue en restant algébriques (*C. R. Acad. Sc.*, t. 132, 1901, p. 302).
45. EGOROFF (D. Th.). — Sur une certaine surface du troisième ordre (*Ibid.*, t. 132, 1901, p. 538).
46. TZITZEICA (G.). — Sur la déformation continue des surfaces (*C. R. Acad. Sc.*, t. 132, 1901, p. 1100).
47. EGOROFF (D. Th.). — Sur la déformation continue des surfaces (*C. R. Acad. Sc.*, t. 132, 1901, p. 1545).
48. DEMOULIN (A.). — Sur les surfaces susceptibles d'une déformation continue avec déformation d'un système conjugué (*C. R. Acad. Sc.*, t. 133, 1901, p. 265).
49. TZITZEICA (G.). — Sur la déformation continue des surfaces (*C. R. Acad. Sc.*, t. 133, 1901, p. 431).
50. RAFFY (L.). — Sur les réseaux conjugués persistants (*C. R. Acad. Sc.*, t. 133, 1901, p. 729).
51. DEMOULIN (A.). — Sur les systèmes conjugués persistants (*C. R. Acad. Sc.*, t. 133, 1901, p. 986).
52. SERVANT. — Sur la déformation des quadriques (*Bull. Soc. Math. de France*, t. 30, 1902, p. 18-23).
53. TZITZEICA (G.). — Sur la déformation continue des surfaces (*C. R. Acad. Sc.*, t. 134, 1902, p. 894).
54. TZITZEICA (G.). — Sur la déformation continue des surfaces (*C. R. Acad. Sc.*, t. 135, 1902, p. 503).
55. DRACH (J.). — Sur certaines déformations remarquables (*C. R. Acad. Sc.*, t. 136, 1903, p. 996).
56. TACHAUER (A.). — Ueber diejenigen Rotationsflächen, auf denen zwei Schaaren geodetischen Linien ein konjugiertes System bilden (*Archiv. d. Math. u. Phys.*, 3^e série, t. 6, 1903, p. 60-84).
57. SMITH (B.). — Condition for the deformation of Surfaces referred to a conjugate system of lines (*Proc. Indian Acc. of Sc.*, 1904).
58. TZITZEICA (G.). — Sur la déformation continue des surfaces (*C. R. Acad. Sc.*, t. 138, 1904, p. 553).

59. EGOROFF (D. Th.). — Sur une classe particulière de systèmes conjugués persistants (*C. R. Acad. Sc.*, t. 138, 1904, p. 885).
60. BIANCHI (L.). — Sopra le rappresentazioni equivalenti della sfera e le coppie di superficie applicabili (*Rend. dei Lincei*, 5^e série, t. 13, 1904, p. 6-17).
61. BIANCHI (L.). — Sulle coppie di superficie applicabili con assegnata rappresentazione sferica (*Rend. dei Lincei*, 5^e série, t. 13, 1904, p. 147-161).
62. BIANCHI (L.). — Sulle equazioni di Moutard con gruppi di soluzioni quadratiche (*Rend. dei Lincei*, 5^e série, t. 13, 2^e sem., 1904, p. 283-294).
63. MŁODZIEJOWSKI (B. K.). — Sur la déformation des surfaces de Peterson (en russe) (*Rec. Math. de Moscou*, t. 24, 1904, p. 417-474).
64. DEMOULIN (A.). — Sur les surfaces de Voss de la géométrie non euclidienne (*C. R. Acad. Sc.*, t. 140, 1905, p. 1226, 1572).
65. EISENHART (L. P.). — On the deformation of surfaces of translation (*Bull. Amer. Math. Soc.*, 2^e série, t. 11, 1905, p. 466-494).
66. TZITZEICA (G.). — Sur la déformation de certaines surfaces tétraédrales (*C. R. Acad. Sc.*, t. 142, 1906, p. 1401, 1493).
67. SMITH (B.). — Certain surfaces admitting of continuous deformation with preservation of conjugate lines (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 12, 1906, p. 164-171).
68. EISENHART (L.). — Associate surfaces (*Math. Ann.*, t. 62, 1906, p. 504-538).
69. EGOROFF (D. Th.). — Sur la transformation de Laplace et les systèmes conjugués persistants (*C. R. Acad. Sc.*, t. 145, 1907, p. 1256).
70. MŁODZIEJOWSKI (B.). — Ueber aufeinander abwickelbare P-Flächen (*Math. Ann.*, t. 63, 1907, p. 62-84).
71. EISENHART (L.). — Applicable surfaces with asymptotic lines of one surface corresponding to a conjugate system of another (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 8, 1907, p. 113-134).
72. RAFFY (L.). — Sur les réseaux conjugués persistants qui comprennent une famille de lignes minima (*C. R. Acad. Sc.*, t. 146, 1908, p. 740).
73. SEGRE. — Sulla generazione delle superficie che ammettono un doppio sistema conjugato di conici circoscritti (*Torino Atti*, t. 43, 1908, p. 988).
74. RAFFY (L.). — Étude sur les surfaces imaginaires de Monge à lignes de courbure confondues (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. 36, 1908, p. 150-184).
75. DRACH (J.). — Recherches sur certaines déformations remarquables à réseau conjugué persistant (*Ann. de Toulouse*, 2^e série, t. 10, 1908, p. 125-164).
76. EGOROFF (D. Th.). — Sur la déformation à réseau conjugué persistant contenant une famille de lignes planes ou coniques (en russe) (*Rec. math. de Moscou*, t. 28, 1911, p. 167-187).
77. BUCHGUENCE (S. S.). — Sur la déformation des surfaces à réseau conjugué persistant (en russe) (*Rec. Math. de Moscou*, t. 28, 1911, p. 507-528).
78. FRIKOFF (S.). — Sur la déformation de la surface du second ordre à réseau conjugué persistant (en russe) (*Rec. Math. de Moscou*, t. 28, 1911, p. 529-543).

79. BIANCHI (L.). — Formole generali per le superficie riferite alle loro linee asintotiche, con alcune applicazioni (*Rend. dei Lincei*, 5^e série, t. 22, 1^{er} sem., 1913, p. 403-411).
80. BIANCHI (L.). — Sui sistemi conjugati permanenti nelle deformate delle quadriche (*Rend. dei Lincei*, 5^e série, t. 22, 2^e sem., 1913, p. 310).
81. ROUYER (L.). — Sur la déformation des quadriques et les surfaces conjugées par rapport à un complexe du second ordre (*Ann. de Toulouse*, 3^e série, 1913, p. 377-434).
82. EISENHART (L. P.). — Transformations of surfaces of Voss (*Trans. Amer. math. Soc.*, t. 15, 1914, p. 245-265).
83. BUCHGUENCÉ (S. S.). — Sur les congruences cycliques et sur les surfaces de Bianchi (en russe) (*Rec. Math. de Moscou*, t. 30, 1916, p. 296-313).
84. BIANCHI (L.). — Sopra una proprietà caratteristica delle superficie della classe $K = \frac{1}{\varphi(\alpha) + \psi(\beta)}$ (*Rend. dei Lincei*, 5^e série, t. 26, 1^{er} sem., 1917, p. 575-585).
85. EISENHART (L. P.). — Certain surfaces of Voss and surfaces associated with them (*Rend. Palermo*, t. 42, 1917, p. 145-166).
86. FINIKOFF (S.). — Problème général de la déformation à réseau conjugué persistant (en russe) (*Moscou*, 1917, p. 1-198).
87. BUCHGUENCÉ (S. S.). — Déformation à réseau conjugué persistant (en russe) (*Ann. de l'Inst. Agron. de Moscou*, t. 23, 1917, p. 1-79).
88. EISENHART (L. P.). — Transformations of applicable conjugate nets of curves on surfaces (*Proc. Nat. Acad.*, t. 3, 1917, p. 637; *Trans. Amer. Soc.*, t. 19, 1918, p. 167-185).
89. LAGALLY (M.). — Ueber gewisse Verbiegungen der achsenaffinen Flächen, insbesondere der Flächen 2^o Ordnung (*Munch. Ber.*, 1919, p. 369-379).
90. TERRACINI (A.). — Sui sistemi conjugati permanenti nelle deformazioni di una superficie (*Rend. dei Lincei*, 5^e série, t. 28, 2^e sem., 1919, p. 69-72).
91. GAMBIER (B.). — Étude des surfaces de translation de Sophus Lie (*Nouv. Ann. de Math.*, 4^e série, t. 20, 1920, p. 401-423, 454-479).
92. DEMOULIN (A.). — Sur les équations de Moutard à solutions quadratiques (*Bull. Ac. Belgique*, 1920, p. 192-215, 418-438, 503-525; 1921, p. 10-32).
93. GAMBIER (B.). — Mécanismes transformables ou déformables; couples de surfaces applicables qui s'en déduisent (*Journ. de Math.*, 9^e série, t. 1, 1922, p. 19-76).
94. EISENHART (L. P.). — Transformations of surfaces (*Princeton*, 1923, p. 138-145).
95. FINIKOFF (S.). — Ueber Biegung der Strahlensysteme mit Erhaltung ihrer abwickelbarer Flächen (en russe avec un résumé en allemand) (*Rec. Math. de Moscou*, t. 32, 1924, p. 241-248).
96. FINIKOFF (S.). — Sur les surfaces de M. Bianchi (*Rec. math. de Moscou*, t. 32, 1924, p. 249-254).
97. FINIKOFF (S.). — Sur les surfaces principales des congruences rectilignes de M. Bianchi (*Rend. dei Lincei*, 6^e série, t. 1, 1^{er} sem., 1925, p. 515).
98. MASLOFF (A. T.). — Sur la transformation de Moutard et sur la théorie

- des solutions quadratiques d'une équation aux invariants égaux (en russe avec résumé français) (*Rec. math. de Moscou*, t. 32, 1925, p. 569).
99. GAMBIER (B.). — Déformation des surfaces tétraédrales avec conservation d'un réseau conjugué et rigidité d'une asymptotique (*C. R. Acad. Sc.*, t. 182, 1926, p. 913).
100. GAMBIER (B.). — Déformation d'une surface avec conservation d'un réseau conjugué (*C. R. Acad. Sc.*, t. 182, 1926, p. 1312).
101. GAMBIER (B.). — Surfaces de Voss-Guichard (*C. R. Acad. Sc.*, t. 182, 1926, p. 1453).
102. GAMBIER (B.). — Déformation continue d'un hélicoïde en hélicoïde avec réseau conjugué permanent. Surfaces de Voss-Guichard (*Bull. des Sc. math.*, 2^e série, t. 50, 1926, p. 308-328, 335-342).
103. MASLOFF (A. T.). — Sur la déformation des surfaces avec conservation d'un système conjugué (*Rec. math. de Moscou*, t. 33, 1926, p. 42-48).
104. FINIKOFF (S.). — Sur la déformation des surfaces à réseaux cinématiquement conjugués persistants (*Rec. math. de Moscou*, t. 33, 1926, p. 129-159).
105. MASLOFF (A. T.). — Sur la déformation continue d'une classe de surfaces (*Rec. math. de Moscou*, t. 33, 1926, p. 367-370).
106. GAMBIER (B.). — Déformation des surfaces tétraédrales (*Journ. de math.*, 9^e série, t. 5, 1926, p. 227-295).
107. GAMBIER (B.). — Sur certains réseaux conjugués (*Bull. Soc. math. de France*, t. 54, 1926, p. 41).
108. GAMBIER (B.). — Surfaces de translation applicables l'une sur l'autre (*Nouv. Ann. de Math.*, 6^e série, t. 3, 1927).
109. GAMBIER (B.). — Surfaces de Voss et Guichard, surfaces associées et adjointes. Déformation avec réseau conjugué permanent (*Acta math.*, t. 51, 1927, p. 83-151).
110. MASLOFF (A. T.). — Sur la déformation des surfaces avec conservation d'un système conjugué conique (*C. R. Acad. Sc.*, t. 186, 1928, p. 1345).
111. VASSEUR (M.). — Sur les systèmes conjugués permanents dans la déformation d'une surface (*C. R. Acad. Sc.*, t. 186, 1928, p. 1694).
112. MASLOFF (A. Th.). — Sur une classe de congruences W (*C. R. Acad. Sc.*, t. 187, 1928, p. 794).
113. VASSEUR (M.). — Déformation d'une surface avec un réseau conjugué conique (*C. R. Acad. Sc.*, t. 187, 1928, p. 1109).
114. GAMBIER (B.). — Sur quelques cas méconnus de la déformation des surfaces (*Bull. Soc. math. de France*, t. 56, 1928, p. 224-239).
115. VASSEUR (M.). — Surfaces déformables avec un réseau conique conjugué persistant (*C. R. Acad. Sc.*, t. 188, 1929, p. 29).
116. DEMOULIN (A.). — Sur une classe de congruences (*C. R. Acad. Sc.*, t. 188, 1929, p. 138).
117. VASSEUR (M.). — Surfaces déformables avec un réseau conique permanent (*C. R. Acad. Sc.*, t. 188, 1929, p. 603).
118. VASSEUR (M.). — Relations entre les deux nappes focales d'une congruence rectiligne (*C. R. Acad. Sc.*, t. 188, 1929, p. 761).

119. GAMBIEB (B.). — Solutions quadratiques des équations de Moutard (*C. R. Acad. Sc.*, t. 188, 1929, p. 605, 758, 1078).
120. MASLOFF (A. Th.). — Sur une application du théorème de M. Eisenhart (*C. R. Acad. Sc.*, t. 188, 1929, p. 756).
121. MASLOFF (A. Th.). — Sur les solutions quadratiques de l'équation (E) (en russe avec résumé français) (*Rec. math. de Moscou*, t. 36, 1929, p. 107).
122. FINIKOFF (S.). — Déformation d'une congruence rectiligne avec développables persistantes (*Bull. des Sc. math.*, 2^e série, t. 53, 1929, p. 341-360).
123. LIEBMANN (H.). — *Die Verbiegung der Konisch zylindrischen Flächen.*
SCHUR (A.). — *Bemerkung zu der vorstehender Arbeit von Herrn Liebmann.*
VOLK (O.). — Anmerkung zu der vorstehenden Note des Herrn Liebmann betreffend die Darbouschen Gleichungen (*Math. Zeit.*, t. 30, 1929, p. 172-187).
124. VASSEUR (M.). — Sur les équations de Laplace (*C. R. Acad. Sc.*, t. 190, 1930, p. 1176).
125. GAMBIEB (B.). — Surfaces de Voss-Guichard (*C. R. Acad. Sc.*, t. 191, 1930, p. 1280).
126. FREIDANK (K.). — Die Verbiegung der konisch-zylindrischen Flächen (*Mitteil. Math. Semin. Un. Gtessen*, t. 18-20, 1930, p. 1-24).
127. GAMBIEB (B.). — Déformation d'une surface avec un réseau conjugué formé de lignes coniques ou cylindriques et remarques sur un article de M. Liebmann (*Math. Zeitschr.*, t. 32, 1930, p. 291-314).
128. GAMBIEB (B.). — Intégrales quadratiques de l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \left[-\frac{6}{(u - v)^2} + \frac{2}{(u + v)^3} \right] \theta$$

(*Journ. de Math.*, 9^e série, t. 9, 1930, p. 333-361).

129. SCHAFF (W.). — Biegung mit Erhaltung zylindrischer konjugierter Systeme (*Journ. für Math.*, t. 162, 1930, p. 205-227).
130. VASSEUR (M.). — Sur la conservation d'un réseau conjugué dans la déformation d'une surface (*Ann. de l'Éc. norm.*, 3^e série, t. 47, 1930, p. 93-195).
131. FINIKOFF (S.). — Déformation d'une surface et réseaux conjugués persistants (*Bull. des Sc. math.*, 2^e série, t. 54, 1930, p. 31).
132. LOVETT (E. O.). — Sur un problème de M. Gambier dans la déformation des surfaces (*C. R. Acad. Sc.*, t. 193, 1931, p. 565).
133. GAMBIEB (B.). — Surfaces de Voss-Guichard (*Ann. de l'Éc. norm.*, 3^e série, t. 48, 1931, p. 359-396).
134. GAMBIEB (B.). — Intégrales quadratiques de l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \frac{n(n+1)}{(u-v)^n} \theta = 0$$

(*Ann. Sc. Univ. Jassy*, t. 16, 1931, p. 301-338).

135. FINIKOFF (S.). — Couples de surfaces dont les lignes de courbure se corres-

- pondent, les tangentes homologues se coupant (*C. R. Acad. Sc.*, t. 196, 1933, p. 28).
136. ROSSINSKI (S.). — Sur un cas de déformation des congruences isotropes à réseau conjugué persistant (*C. R. Acad. Sc.*, t. 197, 1933, p. 1562).
137. LEBEL (J.). — Sur les surfaces de Voss et de Guichard (*Bull. Sc. math.*, 2^e série, t. 57, 1933, p. 69-96).
138. MASLOFF (A. T.). — Sur une classe de congruences de Bianchi (en russe avec résumé français) (*Rec. math. de Moscou*, t. 40, 1933, p. 196-209).
139. SCHAFF (W.). — Flächen mit verbiegbaren konjugierten System (*Sitzungsber Heidelb. Ak.*, t. 63-67, 1934, p. 8-17).
140. VINCENSINI (P.). — Transformation de Ribaucour des surfaces de Guichard. Réseaux cycliques. Nouvel aspect de la transformation d'Eisenhart (*C. R. Acad. Sc.*, t. 200, 1935, p. 1266).
141. ROSSINSKI (S.). — Sur la déformation des surfaces avec réseau conjugué persistant (*C. R. Acad. Sc.*, t. 200, 1935, p. 1268).
142. MASLOFF (A. Th.). — Sur les solutions quadratiques de l'équation harmonique (A_3) (*Journal de Math.*, 9^e série, t. 14, 1935, p. 229-232).
143. MASLOFF (A. Th.). — About one quality of the curvature of a rectangular base (en russe) (*Scient. papers Moscow Inst. Irrigation*, 1935).
144. BUCHGUENCE (S.). — Sur la déformation des surfaces de Bianchi (*C. R. Acad. Sc.*, t. 202, 1936, p. 2123).
145. BUCHGUENCE (S.). — Sur les surfaces de Bianchi [*Rec. de Moscou* (sous presse)].
146. MASLOFF (A. Th.). — Transformation de Bianchi des surfaces de la classe

$$K = - \frac{I}{[U(u) + V(v)]^2}$$

(en russe), Moscou, 1936 (*Thèse de Doctorat*, p. 119).

147. VINCENSINI (P.). — Surfaces déformables avec transformation des réseaux cinématiquement conjugués en réseaux conjugués (*C. R. Acad. Sc.*, t. 203, 1936, p. 973).
148. BUCHGUENCE (S.). — Sur les surfaces de Bianchi (*C. R. Acad. Sc.*, t. 203, 1936, p. 762).
149. FINIKOFF (S.). — Surfaces dont les trièdes fondamentaux se coupent (en russe, avec résumé français) (*Rec. math. de Moscou*, t. 2 (44), 1937, p. 627-663).
150. MASLOFF (A. Th.). — Le cas limite du théorème de permutabilité de la transformation de Bianchi (en russe, avec résumé français) (*Rec. math. de Moscou*, t. 3 (45), 1938, p. 209-218).
151. LUSIN (N.). — Sur l'existence de surfaces algébriques sans réseau conjugué persistant (*C. R. Acad. Sc. de l'U. R. S. S.*, t. 18, 1938, p. 529 et t. 19, 1938, p. 21, 227).



TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

RÉSEAU CONJUGUÉ PERSISTANT D'UNE SURFACE.

	Pages.
I. — Réseau conjugué commun à deux surfaces.....	1
II. — Réseaux conjugués persistants d'une surface ou d'un élément linéaire.	9
III. — Applications	13
IV. — Surfaces admettant ∞ réseaux persistants.....	18

CHAPITRE II.

SOLUTIONS QUADRATIQUES D'UNE ÉQUATION DE LAPLACE.

I. — Réseau conjugué persistant et solutions quadratiques de son équation tangentielle de Laplace.....	21
II. — Réseaux persistants contenant une ou deux familles de lignes planes ou coniques.....	23
III. — Mécanismes déformables de M. Gambier.....	29
IV. — Transformations des réseaux conjugués persistants.....	34

CHAPITRE III.

CONGRUENCES CYCLIQUES.

I. — Déformation d'une congruence avec développables persistantes....	40
II. — Systèmes cycliques de Ribaucour. Congruence des axes.....	45
III. — Transformation de Ribaucour. Surfaces dont les lignes de courbure se correspondent et les tangentes homologues se coupent.....	50

CHAPITRE IV.

SURFACES DE BIANCHI.

I. — Congruences W dont les courbures des nappes focales aux points homologues sont égales.....	54
II. — Surface associée.....	60

CHAPITRE V.
SURFACES DE VOSS.

	Pages.
I. — Congruences de Guichard.....	62
II. — Déformation d'une surface qui fait correspondre aux asymptotiques un réseau conjugué.....	65
III. — Réseaux conjugués persistants contenant une famille de géodésiques.....	67

CHAPITRE VI.

DÉFORMATION A RÉSEAU CINÉMATIQUEMENT CONJUGUÉ PERSISTANT.

I. — Roulement d'une surface sur une déformée. Réseau caractéristique de Voss	69
II. — Déformation à réseau cinématiquement conjugué persistant.....	73
INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.....	76

