Mémorial des sciences mathématiques

Ervin Feldheim

Théorie de la convergence des procédés d’interpolation et de quadrature mécanique

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 95 (1939)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1939__95__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT
Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE XCV

Théorie de la convergence des procédés d'interpolation et de quadrature mécanique

Par M. Ervin FELDHEIM

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1939

THÉORIE

DE LA

CONVERGENCE DES PROCÉDÉS D'INTERPOLATION

ET

DE QUADRATURE MÉCANIQUE

Par M. Ervin FELDHEIM.

INTRODUCTION.

On connaît bien le théorème classique de Weierstrass, d'après lequel toute fonction $f(x)$, continue dans un intervalle donné, peut être représentée avec une approximation aussi grande que l'on veut par des polynomes de degré assez élevé. Depuis que ce théorème a été découvert, plusieurs mathématiciens en ont donné des démonstrations différentes, et ont construit divers polynomes d'approximation $P_n(x)$, de degré n, tels que le maximum de la différence $|f(x) - P_n(x)|$ tende vers o pour $n \to \infty$. Les deux problèmes principaux qui se posaient alors étaient la construction effective des polynomes d'approximation de degré prescrit, et la détermination de la précision de l'approximation. Il est naturel de chercher celui des polynomes d'approximation, désigné par $R_n(x)$, pour lequel le maximum de la différence considérée est plus petit que pour tous les autres polynomes de même degré. En posant

$$E_n[f] = \max |f(x) - R_n(x)|,$$

$E_n[f]$ s'appelle *la meilleure approximation* de $f(x)$ dans l'intervalle considéré. La théorie de la meilleure approximation des fonctions continues, depuis les travaux de Tchebychef, des Markoff, Kirchberger, Borel, de la Vallée-Poussin [3], Fréchet, S. Bernstein [7], D. Jackson [9], J. Shohat et d'autres, a connu un grand développement. Nous nous contentons ici de cette indication en renvoyant pour plus de détails aux ouvrages cités.

Passons maintenant au premier des problèmes signalés tout à l'heure : la recherche des polynomes d'approximation. L'approximation de $f(x)$ au sens de Weierstrass suppose la connaissance complète de la fonction dans l'intervalle considéré. Mais, en vertu de la continuité, $f(x)$ peut être entièrement déterminé par un ensemble dénombrable, partout dense, de ses points. On peut aller plus loin — ce qui est d'une importance fondamentale pour la suite — et chercher un polynome d'approximation de $f(x)$ si l'on ne connaît qu'un nombre fini de points de la courbe (par exemple, d'abscisses rationnelles) qui représente $f(x)$, de sorte que l'on puisse obtenir une approximation de précision quelconque, si le nombre de ces points est suffisamment grand (et qui sont à la limite distribués d'une façon partout dense). Ces polynomes s'obtiennent par des formules d'interpolation. Nous ferons abstraction ici de la valeur pratique des formules d'interpolation, et ne nous occuperons que de la question de la convergence du procédé.

Nous étudierons en détail la théorie de l'interpolation de Lagrange et d'Hermite, et traiterons à part quelques formules modifiées, ainsi que des formules d'interpolation trigonométriques.

L'application la plus importante des formules d'interpolation est le calcul approché des intégrales définies, appelé quadrature mécanique. La seconde partie du travail sera consacrée à la théorie des procédés de quadrature par les méthodes interpolatoires, ou plutôt par la formule de Lagrange. Jusqu'à ce jour on ne connaît que peu de résultats pour la quadrature au moyen de la formule d'Hermite. Un dernier chapitre sera consacré à l'étude de la convergence en moyenne pour les séries d'interpolation de Lagrange.

Les théorèmes seront, dans la plupart des cas, énoncés sans démonstrations. Nous esquisserons quelquefois des démonstrations qui ne sont peut-être pas plus utiles que d'autres, mais qui présentent à notre avis un caractère de généralité et de possibilité d'application à d'autres cas.

Il peut se poser de même le problème de l'approximation des fonctions analytiques par des polynomes. Pour tout ce qui concerne cette question, voir le fascicule LXXIII de ce Mémorial (J. L. WALSH, *Approximation by Polynomials in the complex Domain*). Mentionnons encore le livre de M. N. E. Nörlund, qui traite la théorie des séries d'interpolation de nature entièrement différente de celles que nous allons exposer.

Qu'il me soit permis maintenant d'adresser mes bien vifs remerciements à M. le professeur H. Villat de m'avoir fait l'honneur d'accueillir ce travail dans la Collection du *Mémorial* qu'il dirige, et à M. le professeur Fejér, dont les conseils précieux m'ont été très utiles dans la rédaction.

CHAPITRE I.

THÉORIE DE L'INTERPOLATION DE LAGRANGE.

1. La formule de Lagrange. — Cette formule détermine le polynome unique de degré au plus égal à $n-1$, qui coïncide en n points d'abscisses distinctes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de l'intervalle (a, b) avec les valeurs que prend en ces points la fonction $f(x)$, continue et définie dans l'intervalle (a, b). Son expression est la suivante :

$$L_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, l_k(x), \tag{1}$$

où les fonctions $l_k(x)$ sont des polynomes de degré $n-1$. Si $\omega_n(x)$ désigne le polynome de degré n, ayant comme zéros les valeurs x_1, $x_2, \ldots, x_n$, — appelés *points fondamentaux* (ou *nœuds*) de l'interpolation —, c'est-à-dire, en posant

$$\omega_n(x) = c\prod_{k=1}^{n}(x - x_k) \qquad (c \neq 0),$$

nous aurons

$$l_k(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega'_n(x_k)(x - x_k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Ces fonctions s'appellent *fonctions fondamentales* (ou *polynomes fondamentaux*) de l'interpolation de Lagrange.

Si l'on applique la formule (1) à un polynome de degré $m \leqq n-1$, nous aurons

$$\mathrm{L}_n(g_m) \equiv g_m(x), \tag{2a}$$

et en prenant $g_m(x) \equiv 1$, nous serons conduits à l'identité remarquable

$$\sum_{k=1}^{n} l_k(x) \equiv 1. \tag{3}$$

Considérons maintenant un système triangulaire de points fondamentaux

$$\left\{\begin{array}{lllll} x_1^{(1)}, & & & & \\ x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & & & \\ x_1^{(3)}, & x_2^{(3)}, & x_3^{(3)}, & & \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & & \\ x_1^{(n)}, & x_2^{(n)}, & x_3^{(n)}, & \ldots, & x_n^{(n)}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \end{array}\right. \tag{4}$$

où la $n^{\text{ième}}$ ligne représente encore les n zéros du polynome $\omega_n(x)$. A chaque ligne correspond un polynome de Lagrange $\mathrm{L}_n(f)$, donné par (1), où l'on remplace quelquefois les x_k par $x_k^{(n)}$, et les $l_k(x)$ par $l_k^{(n)}(x)$. L'indice supérieur sera le plus souvent supprimé, s'il n'y a aucune confusion à craindre.

En donnant à n toutes les valeurs possibles, on obtient la suite des polynomes d'interpolation de Lagrange de la fonction continue $f(x)$

$$\mathrm{L}_1(f), \quad \mathrm{L}_2(f), \quad \ldots, \quad \mathrm{L}_n(f), \quad \ldots. \tag{5}$$

2. Divergence du procédé d'interpolation de Lagrange. — Le polynome $\mathrm{L}_n(f)$ étant égal aux n points x_k à la valeur que prend la fonction donnée $f(x)$ en ces points, il se pose évidemment la question si, n augmentant indéfiniment, le polynome $\mathrm{L}_n(f)$ tendra vers $f(x)$, ou encore, si la suite de polynomes (5) tendra, pour $n \to \infty$ vers une limite, et si cette limite sera bien la fonction donnée $f(x)$. Il est connu, depuis longtemps que, dans le cas de l'interpolation équidistante de Newton, c'est-à-dire lorsque les points fondamentaux x_k divisent l'intervalle en $n+1$ parties égales, la suite (5) ne converge pas vers la fonction à interpoler dans tout l'intervalle considéré. C. Runge et M. E. Borel ont donné les premiers des exemples qui prouvent la divergence en question. L'exemple de Runge [2] est le suivant :

Considérons le polynome $P_n(x)$ de degré n qui prend aux n points équidistants de l'intervalle $(-5, +5)$ les mêmes valeurs que la fonction $\frac{1}{1+x^2}$. Ce polynome ne converge pas nécessairement vers $\frac{1}{1+x^2}$, non seulement dans l'intervalle total $(-5, +5)$, mais il diverge aussi à l'extérieur de l'intervalle $(-3{,}63\ldots, +3{,}63\ldots)$. D'ailleurs, Ch. Méray [1,2] a remarqué déjà que rien ne prouve, *a priori*, que ce procédé fût légitime, et il a même signalé l'exemple, étudié plus tard par Runge. M. Borel a démontré aussi, par une méthode toute différente, que la multiplication indéfinie des points où le polynome $P_n(x)$ et la fonction $f(x)$ coïncident, n'entraîne pas la convergence de $P_n(x)$ vers $f(x)$ aux autres points. C'est effectivement ce qu'on observe dans l'étude du procédé d'interpolation de Lagrange.

3. Les résultats de G. Faber et S. Bernstein. — Les recherches relatives au comportement de la suite des polynomes de Lagrange sont basées sur un théorème célèbre, trouvé simultanément par G. Faber [4] et M. S. Bernstein [4], d'après lequel il est possible de trouver pour tout système de points fondamentaux (4) une fonction $f(x)$, *continue* dans l'intervalle $(-1, +1)$ telle que *la suite* (5) *des polynomes de Lagrange* $L_n(f)$ *ne converge pas uniformément vers* $f(x)$. La démonstration de ce théorème que Faber a établi pour le cas de l'interpolation trigonométrique, sera exposée dans un chapitre ultérieur, sous sa forme donnée par M. Fejér.

L'étude du problème dépend essentiellement de celle de la somme

$$(6) \qquad \lambda_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |\, l_k^{(n)}(x) \,|.$$

M. Bernstein a démontré que le maximum de $\lambda_n(x)$ est de l'ordre de $\log n$ pour n assez grand. Le point où ce maximum se produit peut varier avec n. M. L. Fejér a observé que, dans le cas des abscisses de Tchebychef

$$x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

la somme $\lambda_n(x)$ est déjà de l'ordre de $\log n$ pour $x=0$, c'est-à-dire pour *une valeur fixe de x*. Ce fait a été généralisé par un théorème ultérieur de M. Bernstein [13] qui est le suivant :

Pour tout système de points fondamentaux (4) *il est possible de trouver une fonction $f(x)$, continue dans l'intervalle* $(-1, +1)$ *telle que la suite des $L_n(f)$ n'est pas bornée pour une valeur* fixe ξ_0 *de la variable, où* $-1 \leqq \xi_0 \leqq 1$.

La démonstration de ce théorème est basée sur une étude plus approfondie de la somme (6).

Le rôle de la somme $\sum_{k=1}^{n} |l_k^{(n)}(x)|$ dans l'étude de la convergence des procédés d'interpolation a été mis en évidence par H. Hahn [1]. Il a établi des conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence des formules d'interpolation dans le cas général, d'applications très fréquentes dans les recherches ultérieures. Les démonstrations sont faites d'après un principe général et désormais classique, dû à M. Lebesgue [3].

Indiquons seulement le théorème suivant de M. Hahn :

Pour que l'on ait, pour toute fonction continue $f(x)$ dans l'intervalle (a, b), en un point x_0 de cet intervalle, la relation

$$\lim_{n \to \infty} L_n(f)_{x=x_0} = f(x_0), \tag{7}$$

il faut et il suffit qu'il existe un nombre C, *indépendant de n, tel que*

$$\lambda_n(x_0) = \sum_{k=1}^{n} |l_k^{(n)}(x_0)| < C. \tag{8}$$

Nous appellerons un procédé d'interpolation satisfaisant, pour $x=x_0$ à cette condition. *un procédé convergeant* dans x_0.

Remarquons que dans le cas des points fondamentaux équidistants cette condition est en défaut : on retrouve le fait connu et déjà signalé que pour l'interpolation équidistante de Newton il n'existe aucun point x de l'intervalle (a, b) dans lequel le procédé de l'interpolation de Lagrange soit convergent.

4. Le cas des abscisses de Tchebychef. — Comme nous avons déjà mentionné, dans le cas des abscisses de Tchebychef, la somme (6) augmente indéfiniment avec n, ce qui entraîne la divergence des polynomes $L_n(f)$ en un point.

Tout récemment MM. G. Grünwald et — un peu plus tard, mais d'une façon entièrement indépendante — J. Marcinkiewicz [1,4] ont trouvé le théorème suivant :

Il existe une fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle $(-1, +1)$ *pour laquelle la suite des polynomes d'interpolation de Lagrange, relative aux abscisses de Tchebychef*

$$x_k^{(n)} = \cos\theta_k^{(n)} = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n; \ -1 < x_n^{(n)} < x_{n-1}^{(n)} < \ldots < x_1^{(n)} < +1)$$

est divergente (*et même, ne reste pas bornée*) en tout point *de l'intervalle* $-1 \leqq x \leqq 1$.

Esquissons la démonstration de M. Grünwald [3] qui est encore basée sur des évaluations de la somme (6). Un calcul assez simple donne les deux inégalités

$$\lambda_n(x) \geqq \frac{1}{\pi} |\cos n\theta| \log n - c_1(x) \qquad (x = \cos\theta) \tag{9}$$

et

$$\lambda_n(x, m) \geqq \frac{1}{2\pi} |T_n(x)| \log m - c_2(x), \tag{10}$$

où $c_1(x)$ et $c_2(x)$ sont deux fonctions positives et finies de x, qui ne dépendent pas de n. Précisons encore la signification des quantités qui figurent dans (9) et (10). Dans le cas considéré des abscisses de Tchebychef, le polynome $\omega_n(x)$ est

$$T_n(x) = \cos n(\arc\cos x),$$

les fonctions fondamentales ont donc l'expression

$$l_k(x) = \frac{T_n(x)}{T'_n(x_k)(x - x_k)} = (-1)^{k+1} \frac{T_n(x)}{n} \frac{\sin\theta_k}{\cos\theta - \cos\theta_k}.$$

Si $2\nu + 1$ est le plus petit indice, tel que $x_{2\nu+1} + 1 \leqq \frac{2\mu}{m}$, lorsque

$x+1=\frac{2(\mu+\delta)}{m}$ ($\mu>0$ entier, $0\leqq\delta<1$), le premier membre de (10) représente la somme

$$\lambda_n(x, m)=\sum_{k=\nu}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} |\, l_{2k+1}(x)\,| \qquad \left(\left[\frac{n-1}{2}\right] \text{ étant la partie entière de } \frac{n-1}{2}\right).$$

Si n et n' sont deux entiers premiers entre eux, $\xi=0$ est la seule racine commune de $T_n(x)$ et $T_{n'}(x)$, et $\xi=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ les seules racines communes de $T_{2n}(x)$ et $T_{2n'}(x)$ [tandis que $T_n(x)$ et $T_{2n'}(x)$ sont toujours premiers entre eux]. On peut alors construire une série absolument et uniformément convergente sur le segment $(-1, +1)$ de fonctions continues

$$\varphi(x)=\sum_{r=1}^{\infty} u_r(x),$$

telle que $x(-1<x\leqq 1)$ étant arbitrairement donné, il lui correspond une infinité de couples de nombres (r, n_r), jouissant de la propriété que

$$|\, L_{n_r}[u_r(x)]\,| \geqq \frac{r}{4\pi}-c_1(x) \qquad [c_1(x) \text{ borné}],$$

$$|\, L_{n_r}[\varphi(x)-u_r(x)]\,|<3,$$

de sorte que

$$|\, L_{n_r}[\varphi(x)]\,| \to \infty.$$

D'une façon analogue, on construit une fonction $\psi(x)$ telle que $L_n[\psi(x)]$ est borné en tous les points du segment $(-1, +1)$, sauf le point $x=-1$. La suite $L_n[\varphi(x)+\psi(x)]$ n'est bornée en aucun point de l'intervalle $-1\leqq x\leqq 1$, si les abscisses d'interpolation sont les zéros du polynome de Tchebychef $T_n(x)$.

La méthode précédente peut être appliquée dans le cas plus général où les points fondamentaux sont les zéros des polynomes de Jacobi (dont le polynome de Tchebychef n'est qu'un cas particulier), ainsi que dans le cas des abscisses équidistantes de Newton (Grünwald, Marcinkiewicz).

Il est d'ailleurs très probable qu'on peut faire correspondre à tout système de points fondamentaux d'interpolation une fonction continue et bornée telle que la suite des polynomes d'interpolation de Lagrange correspondante soit presque partout divergente, c'est-à-dire que les points de convergence — s'il en existe — forment un ensemble de mesure nulle. On ne pourra pas aller plus loin parce qu'il existe des points fondamentaux sur lesquels les polynomes d'interpolation d'une fonction continue et bornée convergent dans un ensemble dénombrable des points. Un tel système de points est, par exemple, le suivant :

$$x_k^{(n)} = x_k \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, n; \; n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Indiquons encore quelques résultats relatifs au mode de convergence des polynomes de Lagrange sur les abscisses de Tchebychef.

P. Turán a remarqué qu'on peut construire une fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle $(-1, +1)$ telle que les polynomes d'interpolation correspondants convergent *en tout point* de l'intervalle vers la fonction $f(x)$, mais la convergence n'est pas uniforme dans aucun intervalle. D'autre part, il existe une fonction continue dont les polynomes de Lagrange formés sur les zéros de $T_n(x)$ augmentent indéfiniment au point $x = \pm \cos \frac{\pi}{3}$ (Erdös). Mais, si les polynomes d'interpolation sont convergents, alors ils convergent vers la fonction à interpoler en tout point $x = \cos\theta$, d'argument non commensurable avec π, c'est-à-dire pour $x \neq \cos \frac{p}{q}\pi$, p et q étant deux nombres impairs, premiers entre eux (Erdös-Turán, [1]).

5. **Analogies avec les séries de Fourier.** — Les polynomes d'interpolation de Lagrange d'une fonction $f(x)$, relatifs aux abscisses de Tchebychef considérées, présentent une analogie très marquée avec les sommes partielles de la série de Fourier de cette fonction. A cause de cette analogie, plusieurs auteurs ont étudié parallèlement les séries de Fourier et les polynomes de Lagrange appartenant aux abscisses de Tchebychef $x_k = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Une analogie formelle apparaît immédiatement des développements suivants. On sait que la fonction fondamentale $l_k(x)$ peut être mise sous la forme suivante :

$$(11) \qquad l_k(x) = \frac{1}{n} + \frac{2}{n}\sum_{r=1}^{n-1} \cos r\,\theta_k \cos r\theta \qquad (\cos\theta = x)$$

(Fejér, [4] et [10], ou Feldheim, [2]). Alors

$$(12)\quad \begin{cases} L_n(f) = c_0^{(n)} + c_1^{(n)}\cos\theta + c_2^{(n)}\cos 2\theta + \ldots + c_{n-1}^{(n)}\cos(n-1)\theta \qquad (\cos\theta = x), \\ \text{avec} \\ c_0^{(n)} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(\cos\theta_k), \qquad c_r^{(n)} = \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(\cos\theta_k)\cos r\theta_k \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1), \end{cases}$$

tandis que la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier de la fonction $f(\cos\theta)$ est de la forme suivante :

$$(13)\quad \begin{cases} S_n(f) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}\cos\theta + a_1^{(n)}\cos 2\theta + \ldots + a_{n-1}^{(n)}\cos(n-1)\theta \qquad (\cos\theta = x), \\ \text{avec} \\ a_0^{(n)} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(\cos\theta)\,d\theta, \qquad a_r^{(n)} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(\cos\theta)\cos r\theta\,d\theta \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1). \end{cases}$$

Et si nous posons encore

$$\varphi_n(\theta) = \theta_k^{(n)} = \theta_k, \qquad \text{pour} \quad \theta_k^{(n)} \leqq \theta < \theta_{k+1}^{(n)}; \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

les relations (12) deviennent :

$$(14)\quad \begin{cases} c_0^{(n)} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(\cos\theta)\,d\varphi_n(\theta), \\ c_r^{(n)} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(\cos\theta)\cos r\theta\,d\varphi_n(\theta) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1), \end{cases}$$

qui sont de même forme que les formules (13).

On sait qu'il existe des fonctions continues et de période 2π dont la série de Fourier diverge en certains points isolés de l'intervalle $(0, 2\pi)$, ou même dans un sous-ensemble parfait et non dense, mais la question s'il existe une fonction continue, et de période 2π, dont la série de Fourier diverge *en tout point* de l'intervalle (ou au moins sur un ensemble mesurable de points) reste encore ouverte. Nous avons vu que le même problème peut être complètement résolu pour les polynomes d'interpolation de Lagrange (12). Les sommes $\lambda_n(x)$ des modules des fonctions fondamentales $l_k(x)$, dont l'importance a été signalée, jouent le même rôle que les *constantes de Lebesgue* des séries de Fourier. L'analogue de l'inégalité (9), pour les constantes de Lebesgue

$$\rho_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\right|dt \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

est le résultat de M. Fejér

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\rho_n}{\log n} = \frac{4}{\pi^2}.$$

En étudiant le problème de l'équiconvergence des séries de Fourier et des polynomes de Lagrange, Faber [3] a obtenu des résultats très intéressants. Un de ses théorèmes — qu'il a établi pour le cas de l'interpolation trigonométrique, mais qui peut être transcrit sans changement au cas des polynomes de Lagrange formés sur les abscisses de Tchebychef — est le suivant :

Il existe des fonctions continues $f(x)$ dont la série de Fourier est partout uniformément convergente, tandis que les polynomes d'interpolation de Lagrange divergent en un nombre fini ou infini de points, ou au voisinage de certains points leur convergence n'est pas uniforme. Inversement : on peut donner une suite de nombres entiers croissant indéfiniment $n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots$, tels que la suite $L_{n_\nu}(f)$ des polynomes de Lagrange de la fonction continue $f(x)$ converge uniformément vers $f(x)$, tandis que les sommes partielles de la série de Fourier formées avec les mêmes indices divergent en certains points de l'intervalle.

La première partie du théorème de Faber a été généralisée par MM. Erdös et Grünwald qui ont démontré (d'apres une communication orale) qu'il existe une fonction continue $f(x)$ dont les polynomes d'interpolation formés sur les zéros de $T_n(x)$ divergent partout, tandis que sa série de Fourier est uniformément convergente dans tout l'intervalle.

Les moyennes arithmétiques

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} L_k(f) \tag{15}$$

des polynomes d'interpolation de Lagrange, formés toujours sur les abscisses de Tchebychef présentent encore des analogies avec celles des sommes partielles de la série de Fourier de $f(x)$. Les résultats de M. Fejér [1] seront exposés dans le Chapitre III; nous nous contenterons ici de l'indication de quelques résultats récents.

M. J. Marcinkiewicz [2] a démontré qu'il existe une fonction continue pour laquelle les moyennes arithmétiques $\sigma_n(x)$ sont divergentes en un point. Le même résultat a été trouvé — indépendemment — par MM. Erdös et Turán [1] pour le point $x=0$. Le problème proposé par M. Marcinkiewicz [2] de voir s'il existe une fonction continue pour laquelle les $\sigma_n(x)$ soient presque partout divergents a été résolu à son tour par MM. Erdös et Grünwald. Ils ont démontré le théorème plus général d'après lequel la divergence des moyennes arithmétiques peut avoir lieu *partout* dans l'intervalle.

6. **Un défaut d'autre nature du procédé de Lagrange.** — M. de la Vallée Poussin [1] a remarqué que la formule de Lagrange présente encore un inconvénient d'ordre pratique : c'est d'exagérer l'influence des erreurs d'observation. Autrement dit, si les valeurs $y_1+\varepsilon_1$, $y_2+\varepsilon_2, \ldots, y_n+\varepsilon_n$, utilisées pour déterminer $L_n(f)$ aux points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ne sont égales aux valeurs correspondantes $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de $f(x)$ qu'à une certaine approximation près, il en résulte pour la valeur de $L_n(f)$, en un point différent des précédents, une erreur qui peut devenir pour des valeurs assez grandes de n beaucoup plus grande que cette approximation. Mais si cette circonstance ne se produisait qu'en des points isolés ou dans des intervalles dont la longueur totale tend vers o avec $\frac{1}{n}$ — présumé par M. de la Vallée Poussin — ce défaut ne serait pas très grave, et il pourrait par exemple ne présenter aucun inconvénient pour l'intégration. Or, il n'en est pas ainsi, parce que, comme l'a montré M. Fréchet [4], cette exagération de l'influence des erreurs d'observation peut se présenter effectivement dans une suite d'intervalles dont la longueur totale peut devenir et rester aussi voisine qu'on voudra de la moitié de la longueur de l'intervalle d'interpolation, à partir d'un nombre d'observations assez grand.

Remarquons encore que, tandis que les singularités signalées par Méray se présentent pour des fonctions elles-mêmes singulières [il faut supposer au moins que $f(x)$ n'est pas holomorphe dans un certain intervalle comprenant l'intervalle d'interpolation], la singularité de de la Vallée Poussin (et c'est ce qui en fait la gravité) est indépendante de la fonction $f(x)$ qu'il s'agit de représenter.

H. Hahn a cherché des conditions pour que des changements négligeables des valeurs de la fonction à interpoler $f(x)$ n'aient comme conséquence, dans le cas de méthodes générales d'interpolation, que de petits changements dans l'expression de la fonction d'approximation. Indiquons une de ces conditions : la circonstance précédente se produit sûrement dans tout intervalle (a, b) si le procédé d'interpolation est uniformément convergent vers $f(x)$ dans (a, b), la fonction à interpoler $f(x)$ étant continue dans cet intervalle (Fréchet-Rosenthal, [1]).

CHAPITRE II.

LES FORMULES D'INTERPOLATION MODIFIÉES.

7. Le théorème de Borel et ses diverses démonstrations. — M. Borel, en démontrant la divergence de la formule d'interpolation de Lagrange pour les abscisses équidistantes de Newton, a cherché la possibilité d'approcher une fonction par un polynome bien défini, et a trouvé le théorème suivant :

On peut former, une fois pour toutes, des polynomes $P_{m,n}(x)$ *de degré n qui jouissent de la propriété suivante : Étant donné une fonction* $f(x)$ *définie et continue dans l'intervalle* $(0, 1)$, *on a*

$$f(x) = \Pi_1(x) + \{\Pi_2(x) - \Pi_1(x)\} + \{\Pi_3(x) - \Pi_2(x)\} + \ldots + \{\Pi_n(x) - \Pi_{n-1}(x)\} + \ldots, \tag{1}$$

en posant

$$\Pi_n(x) = \sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right) P_{m,n}(x), \tag{2}$$

et la série de polynomes figurant au second membre de (1) *converge uniformément vers* $f(x)$ *dans l'intervalle* $(0, 1)$.

M. Borel [1, 2] a démontré l'*existence* de ces polynomes $P_{m,n}(x)$, qui a été après construit effectivement par plusieurs auteurs, tant dans le cas trigonométrique que dans le cas d'interpolation par polynomes proprement dite.

La méthode de M. Sierpinski [1] consiste dans l'approximation de $|x|$ par un polynome. Indiquons encore les constructions de Krause [1] et Potron [1]. Il faut aussi mentionner la méthode générale de M. Lebesgue [3] par laquelle on peut déterminer (en partant de représentations intégrales au moyen d'intégrales singulières) les polynomes précédents, et d'autres solutions — analogues à celles de Borel — du problème d'interpolation. Cette méthode a été utilisée par M. Radakovič [1] pour l'étude de la dérivabilité des séries d'interpolation.

Une autre démonstration du théorème de Borel a été fournie par les célèbres polynomes de S. Bernstein [2, 10, 15]

$$B_n(f)=\sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m(1-x)^{n-m}. \tag{3}$$

Il est extrêmement simple de voir que, dans l'intervalle $(0,1)$, on a uniformément

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f)=f(x), \tag{4}$$

$f(x)$ étant continu sur ce segment.

Pour cela, rappelons les identités

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m(1-x)^{n-m}=1 \tag{5}$$

et

$$\sum_{m=0}^{n} (m-nx)^2 C_n^m x^m(1-x)^{n-m}=nx(1-x). \tag{6}$$

Posons

$$f(x)-B_n(f)=\sum_{m=0}^{n}\left[f(x)-f\left(\frac{m}{n}\right)\right] C_n^m x^m(1-x)^{n-m}=\Sigma'+\Sigma'',$$

où Σ' désigne la somme de la quantité précédente pour toutes les valeurs entières de m telles que $|m-nx|\leq n^{\frac{3}{4}}$, Σ'' la même somme pour les autres valeurs de m, c'est-à-dire telles que $|m-nx|>n^{\frac{3}{4}}$.

Dans la somme Σ', $\max\left|f(x)-f\left(\frac{m}{n}\right)\right|=\varepsilon_n(x)$, avec $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n(x)=0$ uniformément pour toute x, donc $\varepsilon_n(x)<\varepsilon_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$. Par suite

$$\Sigma' < \varepsilon_n \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m (1-x)^{n-m} = \varepsilon_n \qquad \text{[en vertu de (5)].}$$

Ensuite, si $|f(x)| < M$,

$$\Sigma'' < 2M \sum_{|m-nx| > n^{\frac{3}{4}}} C_n^m x^m (1-x)^{n-m}.$$

Mais, dans ces conditions, d'aprés l'identité (6),

$$n^{\frac{3}{2}} \sum_{|m-nx| > n^{\frac{3}{4}}} C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \leqq nx(1-x) \leqq \frac{n}{4},$$

d'où

$$\Sigma'' < \frac{M}{2} n^{-\frac{1}{2}},$$

et ainsi

$$|f(x) - B_n(f)| < \varepsilon_n + \frac{M}{2} n^{-\frac{1}{2}}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

8. **Les formules modifiées de S. Bernstein.** — Les formules d'interpolation convergentes de M. Borel sont de nature entièrement différente de celle de Lagrange. Cette dernière a la propriété caractéristique que

$$L_n[f(x_k)] = f(x_k), \qquad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

tandis que $B_n(f)$ ne coïncide pas aux points fondamentaux avec la fonction donnée $f(x)$. Par exemple, pour les abscisses équidistantes $x_k = \frac{k}{n}$, on n'a, comme l'a montré M. Bernstein [10] que la relation approchée

$$B_n\left[f\left(\frac{k}{n}\right)\right] = \sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m \left(\frac{k}{n}\right)^m \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-m}$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n} + t\sqrt{\frac{k(n-k)}{n^3}}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt.$$

La formule de Lagrange étant divergente, si l'on veut la conserver, il faut soumettre la fonction à interpoler à des hypothèses plus restrictives que la continuité, par exemple, à une condition de Lipschitz, ou à être à variation bornée dans tout intervalle du segment $(-1, +1)$.

D'autre part, la continuité seule peut suffire pour obtenir des formules convergentes si l'on modifie le procédé d'interpolation d'une façon convenable, par exemple, en augmentant le degré des polynomes. Le cas classique de l'interpolation d'Hermite sera traité dans un chapitre ultérieur. Ici nous montrerons qu'une petite modification de la formule de Lagrange peut assurer la convergence de la formule modifiée dans tout intervalle où $f(x)$ est continue et assujettie seulement à la condition de rester bornée sur tout le reste du segment $(-1, +1)$. Cette modification permet de construire des polynomes de degré $M = n - 1$ qui se confondent avec la fonction $f(x)$ en $N = n - \left[\frac{n}{2l}\right]$ points, $2l$ étant un entier pair quelconque, et tendent uniformément vers $f(x)$ lorsque n augmente indéfiniment. *Le rapport* $\frac{M}{N}$, qui est égal pour la formule d'Hermite (*voir* Chapitre IV) à $\frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$, *peut être rendu dans notre cas aussi voisin de l'unité qu'on veut. la convergence ayant lieu dans tous les cas* (Bernstein, [9], [10]).

En choisissant pour les points fondamentaux les zéros de $T_n(x)$

$$x_k = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

la formule d'interpolation en question sera définie par

$$Q_n(f) = T_n(x)\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(x - x_k)\,T'_n(x)}, \tag{7}$$

où

$$\left\{\begin{array}{ll} A_k = f(x_k), & \text{pour } \frac{k}{2l} \text{ non entier,} \\ A_k - A_{k-1} + A_{k-2} - \ldots + A_{k-2l+2} - A_{k-2l+1} = 0, & \text{pour } k = 2ls. \end{array}\right. \tag{8}$$

On aura alors

$$Q_n(f) = \frac{T_n(x)}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{A_k\sqrt{1 - x_k^2}}{x - x_k}.$$

Passons à la démonstration de la convergence de cette formule. Posons

$$\rho_n = Q_n(f) - f(x) = \frac{T_n(x)}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{[A_k - f(x)]\sqrt{1 - x_k^2}}{x - x_k} = \rho'_n + \rho''_n, \tag{9}$$

où ρ'_n correspond à la partie de la somme où $x_k > x$, ρ''_n à celle où $x_k < x$. Il suffit d'examiner la première somme. Écrivons encore que

$$\rho'_n = S_1 + S_2,$$

S_1 contenant h points fondamentaux voisins de x, et S_2 tous les autres (s'il y en a), réunis en groupes de $2l$ termes. En désignant par $\omega(\delta)$ l'oscillation maxima de $f(x)$ dans un intervalle de longueur δ, et en observant que

$$\left|\frac{T_n(x)\sqrt{1-x_k^2}}{n(x-x_k)}\right| < 3,$$

on aura l'inégalité

$$|S_1| < 6h\omega\left(\frac{h+1}{n}\pi\right). \tag{10}$$

D'autre part, la fonction $u(z) = \frac{\sqrt{1-z^2}}{x-z}$ est croissante pour x fixe, donc, en supposant $|f(x)| < M$ dans $(-1, +1)$, il vient

$$|S_2| < \frac{2lM}{n}|u(x_{k_0})|,$$

x_{k_0} étant le point fondamental le plus voisin de x. Un calcul simple donne $u(x_{k_0}) < \frac{n}{h}$, d'où

$$|S_2| < \frac{2lM}{h}. \tag{11}$$

ε étant arbitrairement petit, on peut prendre n assez grand, pour que, si $h = \frac{4lM}{\varepsilon}$, on ait

$$6h\omega\left(\frac{h+1}{n}\pi\right) = \frac{24lM}{\varepsilon}\omega\left(\frac{4lM}{\varepsilon n}\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(10) et (11) montrent que

$$|\rho'_n| < \varepsilon.$$

En appliquant le même raisonnement pour l'évaluation de ρ''_n, on aura finalement

$$|\rho_n| = |Q_n(f) - f(x)| < 2\varepsilon,$$

et cela prouve le théorème.

Indiquons comme conséquence particulière la formule relative à $l=1$,

$$(12)\qquad Q_n(f)=\frac{T_n(x)}{2n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{[f(x_k)+f(x_{k+1})]\sqrt{1-x_k^2}}{x-x_k},$$

qui sera convergente pourvu que l'on prenne

$$f(x_0)=f(x_1) \quad \text{et} \quad f(x_{n+1})=f(x_n).$$

On aura une formule encore plus symétrique et aussi bien convergente si l'on emploie la même formule de Lagrange (7), avec les conditions suivantes :

$$A_k=\frac{1}{4}[f(x_{k-1})+2f(x_k)+f(x_{k+1})], \qquad \text{pour } k=2,3,\ldots,n-1,$$

et

$$A_1=\frac{1}{4}[3f(x_1)+f(x_2)], \qquad A_n=\frac{1}{4}[f(x_{n-1})+3f(x_n)].$$

Une autre formule modifiée de M. Bernstein [10] est constituée de polynomes $P(x)$ de degré $n+2h-1$ se confondant avec la fonction $f(x)$, continue dans l'intervalle $(-1, +1)$, en n points de cet intervalle, où le rapport $\frac{2h}{n}=\delta$ peut être pris aussi petit qu'on veut. La formule est la suivante :

$$(13)\quad P(x)=\frac{2T_n(x)}{n(2h+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}f(x_k)\sqrt{1-x_k^2}}{(x-x_k)^2}\sin(2h+1)\arc\sin\frac{x-x_k}{2}.$$

La convergence uniforme de cette formule ne sera toutefois assurée qu'à l'intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$, et ce n'est qu'en multipliant le reste par $\sqrt{1-x^2}$ qu'on obtient la convergence uniforme de (13) sur tout le segment. La brièveté nous oblige de négliger la démonstration de ce théorème.

9. **D'autres formules d'interpolation convergentes.** — *a. Formule de Faber.* — Considérons la série

$$(14)\qquad J_n(x)=\sum_{k=0}^{n}R_k^{(n)}(x)f(x_k^{(n)}),$$

où $f(x)$ est continu dans $(0, 1)$; $x_k^{(n)}$ sont $n+1$ points rangés dans l'ordre de grandeur croissante de cet intervalle; $x_0^{(n)} = 0$, $x_n^{(n)} = 1$,

$$\lim_{n \to \infty} \{ x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)} \} = 0,$$

uniformément pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Quant aux fonctions $R_k^{(n)}(x)$, elles doivent tout d'abord vérifier les deux relations

$$R_k^{(n)}(x_k^{(n)}) = 1 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n;\ n = 2, 3, \ldots),$$
$$R_k^{(n)}(x_i^{(n)}) = 0, \qquad \text{pour} \quad i \neq k,$$

qui montrent que

$$J_n(x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)}), \qquad \text{pour} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Si l'on prend ensuite $x_k^{(n)} = \frac{k}{n}$,

$$(15) \quad \begin{cases} R_k^{(n)}(x) = 0, & \text{pour} \quad x \leqq \frac{k-1}{n} \text{ et } x \geqq \frac{k+1}{n}, \\ R_k^{(n)}(x) = \cos^2\left(x - \frac{k}{n}\right)\frac{\pi n}{2}, & \text{pour} \quad \frac{k-1}{n} \leqq x \leqq \frac{k+1}{n}, \end{cases}$$

on aura, uniformément dans l'intervalle $(0, 1)$, la relation

$$\lim_{n \to \infty} J_n(x) = f(x).$$

Remarquons que l'on a, d'une façon approchée,

$$R_k^{(n)}(x) \approx e^{-(nx-k)^2 n^2} \cos^2(nx - k)\frac{\pi}{2}.$$

Cette approximation est très bonne, et conduit à une erreur très petite. Si l'on développe le second membre en série de puissance de $(nx - k)$, on pourra prendre un nombre de termes suffisant pour que le reste soit inférieur en module à $\frac{1}{n^2}$. Alors

$$J_n(x) = i_n(x) + r_n(x),$$

et

$$\lim_{n \to \infty} i_n(x) = f(x),$$

ce qui fournit une démonstration du théorème de Weierstrass.

Pour d'autres formules, ne supposant pas les abscisses distribuées d'une manière équidistante, *voir* le Mémoire [1] de G. Faber.

b. Formule de Ch. de la Vallée Poussin. — Considérons une fonction $f(x)$, continue dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$, et $n = 2m+1$ points équidistants d'abscisses $x_k = \frac{k\pi}{m}$ $(k = -m, \ldots, +m)$, de cet intervalle. En partant de la formule

$$\mathrm{F}(x) = \frac{\sin mx}{m} \sum_{k=-m}^{+m} \frac{(-1)^k f(x_k)}{x - x_k},$$

M. de la Vallée Poussin [1] construit un polynome $\mathrm{F}_1(x)$ de degré $12m$ (donc 6 fois plus élevé que celui de Newton) qui converge, ainsi que $\mathrm{F}(x)$, vers la fonction considérée $f(x)$, en prenant les mêmes valeurs que $f(x)$ aux points x_k, pourvu que $f(x)$ soit à variation bornée.

On a

$$\frac{\sin mx}{m} = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{m^2 x^2}{k^2 \pi^2}\right) = \mathrm{P}(x)\,\mathrm{Q}(x),$$

avec

$$\mathrm{P}(x) = x \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{m^2 x^2}{k^2 \pi^2}\right), \qquad \mathrm{Q}(x) = \prod_{k=m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{m^2 x^2}{k^2 \pi^2}\right),$$

et en définissant un polynome $\mathrm{S}(x)$, de degré p, tel que

$$\frac{\mathrm{Q}(x) - \mathrm{S}(x)}{\mathrm{Q}(x)} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{m\sqrt{m}}\right),$$

le polynome en question aura l'expression

$$\mathrm{F}_1(x) = \mathrm{P}(x)\,\mathrm{S}(x) \sum_{k=-m}^{+m} \frac{(-1)^k f(x_k)}{x - x_k} \frac{\mathrm{Q}(x_k)}{\mathrm{S}(x_k)}.$$

Il est facile de voir que

$$\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}_1(x) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right).$$

M. Bernstein [11] a montré que le degré de ces polynomes peut être considérablement abaissé : il suffit de prendre un polynome de degré $5m$.

Diverses extensions et généralisations de la formule de M. de la Vallée Poussin ont été données par S. Bernstein, M. Krawtchouk [1], N. Kryloff et J. Tamarkine [2]. Le lecteur est prié de se reporter pour ces formules — qui ne sont en général pas des formules d'interpolation par polynomes — aux mémoires cités.

10. Sur la formule d'interpolation de Newton. — Le polynome d'interpolation de degré $n-1$, outre la forme (1), Chapitre I, due à Lagrange, peut être exprimé de la manière suivante :

$$N_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} B_k\, n_k(x), \tag{16}$$

les polynomes $n_k(x)$, de degré k, étant définis par

$$n_0(x) = 1, \qquad n_k(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

où les x_k sont les points fondamentaux, et les coefficients B_k les différences divisées

$$B_k = \{ x_1, x_2, \ldots, x_k \},$$

où l'on a posé

$$\{ x_1 \} = f_1(x),$$

$$\{ x_1, x_2 \} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\{ x_1, x_2, \ldots, x_{k+1} \} = \frac{\{ x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1} \} - \{ x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k \}}{x_{k+1} - x_k}.$$

Ce polynome $N_n(f)$ est, bien entendu, identique au polynome de Lagrange. M. W. Gontcharoff [4] a étudié dans un travail récent la convergence de ces deux procédés d'interpolation, dans le cas d'abscisses assez générales, soumises à être réelles et positives,

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots \qquad \left(\lim_{k \to \infty} x_k = \infty\right),$$

et telles que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x_k}$ est convergente. La formule (16) de Newton correspondante aura la même forme, la sommation étant seulement étendue à la suite indéfinie des points x_k. Quant à la formule de Lagrange, elle sera remplacée par

$$L(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(x_k)\, l_k(x),$$

ou encore

$$l_k(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x - x_k)} \quad \text{et} \quad \omega(x) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{x_k}\right) \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

M. Gontcharoff a établi des théorèmes et des conditions pour la convergence simultanée des méthodes d'interpolation de Lagrange et de Newton. Indiquons seulement la conclusion intéressante qu'il a déduite :

La convergence, dans le cas des abscisses précisées, *de la méthode de Lagrange entraîne celle de la méthode de Newton*, mais la réciproque n'est pas vraie : la méthode de Newton peut converger sans qu'il en soit de même pour celle de Lagrange.

CHAPITRE III.

INTERPOLATION TRIGONOMÉTRIQUE.

11. Le théorème de Faber et sa démonstration due à L. Fejér. — Nous ne pouvons pas faire une distinction bien marquée entre l'interpolation par polynomes et l'interpolation trigonométrique. Il y a des cas qui peuvent bien se classer à chacune des deux sortes d'interpolation. Tel est, par exemple, le cas de l'interpolation formée par les abscisses de Tchebychef $x_k = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}$, zéros du polynome $T_n(x) = \cos n(\operatorname{arc}\cos x)$. Nous exposerons les principaux résultats analogues à ceux des chapitres précédents.

La divergence de la formule de Lagrange dans le cas trigonométrique a été établie par G. Faber [4], comme nous l'avons déjà mentionné dans 3. Ce théorème peut s'énoncer de la façon suivante :

Soient $t_0, t_1, \ldots, t_n$ des valeurs arbitraires données, différentes entre elles, et appartenant à l'intervalle $0 \leqq t \leqq \pi$. Il existe un polynome de cosinus $T(t)$, d'ordre au plus égal à n tel que, d'une part,

$$(1) \qquad |T(t_0)| \leqq 1, \quad |T(t_1)| \leqq 1, \quad \ldots, \quad |T(t_n)| \leqq 1,$$

mais, d'autre part, tel qu'il existe un nombre τ appartenant *également à l'intervalle* $0 \leqq t \leqq \pi$, *pour lequel*

$$|T(\tau)| > \frac{1}{12} \log n. \tag{2}$$

M. L. Fejér [3] a donné une démonstration très élégante de ce théorème que nous reproduisons dans ses grandes lignes. Considérons les deux polynomes de cosinus

$$\psi(\theta) = \frac{1}{6}\left(\frac{\cos\theta}{n} + \frac{\cos 2\theta}{n-1} + \ldots + \frac{\cos n\theta}{1}\right),$$

et

$$\chi(\theta) = -\frac{1}{6}\left(\frac{\cos(n+1)\theta}{1} + \frac{\cos(n+2)\theta}{2} + \ldots + \frac{\cos 2n\theta}{n}\right),$$

et soit

$$\varphi(\theta) = \psi(\theta) + \chi(\theta),$$

ensuite

$$\Phi(\alpha, t) = \frac{\varphi(\alpha - t) + \varphi(\alpha + t)}{2},$$

où α est un nombre réel quelconque. Désignons par $J(\alpha, t)$ le polynome de Lagrange de $\Phi(\alpha, t)$, d'ordre $\leqq n$

$$\begin{aligned} J(\alpha, t) &= \sum_{k=0}^{n} \Phi(\alpha, t_k)\, l_k(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi(\alpha - t_k) + \varphi(\alpha + t_k)}{2}\, l_k(t) \\ &= \frac{\psi(\alpha - t) + \psi(\alpha + t)}{2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{\chi(\alpha - t_k) + \chi(\alpha + t_k)}{2}\, l_k(t). \end{aligned}$$

Alors

$$J(\alpha, \alpha) = \frac{\psi(0)}{2} + \frac{\psi(2\alpha)}{2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{\chi(\alpha - t_k) + \chi(\alpha + t_k)}{2}\, l_k(\alpha) = \frac{\psi(0)}{2} + U(\alpha),$$

$U(\alpha)$ étant un polynome de cosinus en α, *sans terme absolu*. Désignons par ξ un des zéros de $U(\alpha)$; pour cette valeur

$$J(\xi, \xi) = \frac{\psi(0)}{2} = \frac{1}{12}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{12} \log n. \tag{3}$$

Si l'on considère le polynome de cosinus

$$T(t) = J(\xi, t) = \sum_{k=0}^{n} \Phi(\xi, t_k)\, l_k(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi(\xi - t_k) + \varphi(\xi + t_k)}{2}\, l_k(t),$$

on aura, d'une part,

$$|T(t_k)| = |J(\xi, t_k)| = \left| \frac{\varphi(\xi - t_k) + \varphi(\xi + t_k)}{2} \right| \leqq 1 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

ce qui vérifie (1); d'autre part, en vertu de (3),

$$T(\xi) = J(\xi, \xi) > \frac{1}{12} \log n,$$

qui vérifie (2), et par suite le théorème.

Une nouvelle démonstration de ce théorème, non essentiellement différente de celle de Fejér, a été donnée tout dernièrement par M. Marcinkiewicz [3]. Désignons par $x_k (k = 0, 1, 2, \ldots, 2n)$ $2n + 1$ points de l'intervalle $(0, 2\pi)$, rangés dans l'ordre croissant, et soit $U_n[f, x]$ le polynome trigonométrique d'ordre n défini par les $2n + 1$ égalités

$$U_n[f, x_k] = f(x_k) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2n).$$

Si $S_n(f, x)$ est la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier de $f(x)$, supposée intégrable au sens de Lebesgue, et de période 2π, on aura

$$(4) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_n[g_u, x - u]\, du = S_n(f, x),$$

où l'on a posé $g_u = f(x + u)$. Si l'on fait

$$L_n = \max |U_n[f, x]|,$$

où le maximum est pris pour toutes les fonctions $f(x)$, vérifiant la condition $|f(x)| \leqq 1$ dans $0 \leqq x \leqq 2\pi$, on tire de (4), que, pour $x = 0$,

$$L_n \geqq \max |S_n(f)| = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| dx,$$

le maximum étant pris pour toutes les fonctions $f(x)$, soumises à l'unique condition $|f(x)| \leqq 1$. Il existe alors une fonction continue $f_n(x)$ telle que

$$|f_n(x)| \leqq 1,$$

et

$$\max |U_n[f_n, x]| \geqq \frac{1}{2} L_n \geqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \right| dx \to \infty.$$

D'autre part, $L_n < \infty$ pour $n = 1, 2, \ldots$. Si l'on considère la fonction

$$(5) \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} L_{n_i}^{-\frac{1}{2}} f_{n_i}(x),$$

on aura

$$\limsup_{n \to \infty} \max_{0 \leqq x \leqq 2\pi} |U_n[f, x]| = \infty,$$

dès que la suite n_i croît assez rapidement, ce qui fournit la démonstration signalée du théorème de Faber.

D'autre part, *la fonction continue $f(x)$ étant donnée, on peut choisir un système de points fondamentaux $\{x_k\}$, tel que la suite $U_n[f, x]$ converge uniformément vers $f(x)$.*

12. La forme trigonométrique de la formule de Borel. — Nous avons vu dans le n° 7 du Chapitre II comment M. Borel a défini une formule d'interpolation par polynomes donnés une fois pour toutes et qui converge toujours vers la fonction à interpoler. Sa méthode a été étendue au cas trigonométrique par M. Fréchet [1] qui a démontré qu'il existe des polynomes trigonométriques $M_{p,q}(\theta)$, formés une fois pour toutes, pour lesquels

$$(6) \qquad f(\theta) = \lim_{q \to \infty} \sum_{p=0}^{q} f\left(\frac{2p\pi}{q}\right) M_{p,q}(\theta),$$

uniformément dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, la fonction $f(\theta)$ étant continue dans cet intervalle. Si $f(\theta)$ est encore supposée de période 2π, on a

$$f(\theta) = \lim_{q \to \infty} \sum_{p=1}^{q} f\left(\frac{2p\pi}{q}\right) S_{p,q}(\theta),$$

uniformément par rapport à θ dans $(0, 2\pi)$, $S_{p,q}(\theta)$ étant également de période 2π. On pourra prendre, par exemple

$$S_{p,q}(\theta) = \frac{1}{q} + \frac{2q}{\pi^2}\sum_{n=1}^{q^3}\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{q}}{n}\right)^2 \cos n\left(\theta - \frac{2p\pi}{q}\right).$$

M. D. Jackson [2] s'occupait, à son tour, du même problème. Il a posé

$$S_{p,q}(\theta) = \varphi_q\left(\theta - \frac{2p\pi}{q}\right),$$

$\varphi_q(x)$ étant une fonction continue, de période 2π. Si, pour toute valeur de θ,

$$S_{p,q}(\theta) \geqq 0, \qquad \sum_{p=1}^{q} S_{p,q}(\theta) = 1, \qquad \lim_{q\to\infty} \sum_{p \in \mathcal{J}} S_{p,q}(\theta) = 0,$$

l'ensemble des indices $\mathcal{J}$ étant constitué par les valeurs de p pour lesquelles $\theta - \frac{2p\pi}{q}$ diffère du multiple le plus voisin de 2π de moins de δ, $\delta > 0$ étant indépendant de θ et q, la relation (6) a lieu uniformément dans l'intervalle $(0, 2\pi)$. Nous avons vu que M. Fréchet prend la fonction $\varphi_q(x)$ sous la forme la plus simple possible, sa courbe représentative étant une ligne brisée : la somme des $1 + q^3$ premiers termes de sa série de Fourier. La propriété de convergence uniforme (6) peut être obtenue en ne prenant qu'un nombre de termes de l'ordre de $O\left(\frac{1}{q^2}\right)$. Si l'on prend, par exemple,

$$\varphi_q(\theta) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{q\theta}{2}\right) \quad \text{pour} \quad -\frac{2\pi}{q} \leqq \theta \leqq \frac{2\pi}{q},$$

$$\varphi_q(\theta) = 0 \quad \text{pour les autres points de l'intervalle } (-\pi, +\pi),$$

la série de Fourier de $\varphi_q(\theta)$ est

$$S[\varphi_q(\theta)] = \frac{1}{q} - \frac{q^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n-q)(2n+q)}\sin\frac{2n\pi}{q}\cos n\theta,$$

et il suffit de conserver dans $S_{p,q}(\theta)$ les N premiers termes, où $\frac{1}{N} = O\left(q^{-\frac{3}{2}}\right)$.

13. L'interpolation trigonométrique par abscisses équidistantes. — Soit $f(\theta)$ une fonction bornée et intégrable au sens de Riemann dans l'intervalle $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Désignons par

$$(7)\qquad s_n(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta),$$

la somme des $n+1$ premiers termes de sa série de Fourier. Les coefficients sont donnés par

$$(8)\qquad \begin{cases} a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt \\ b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,dt \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Or, considérons la somme trigonométrique d'ordre n,

$$(9)\qquad S_n(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta),$$

avec

$$(10)\qquad \begin{cases} A_k = \dfrac{1}{\pi}\left\{\dfrac{2\pi}{2n+1}\displaystyle\sum_{\nu=0}^{2n} f(\theta_\nu)\cos k\theta_\nu\right\} = \dfrac{2}{2n+1}\displaystyle\sum_{\nu=0}^{2n} f_\nu \cos k\theta_\nu, \\ B_k = \dfrac{1}{\pi}\left\{\dfrac{2\pi}{2n+1}\displaystyle\sum_{\nu=0}^{2n} f(\theta_\nu)\sin k\theta_\nu\right\} = \dfrac{2}{2n+1}\displaystyle\sum_{\nu=0}^{2n} f_\nu \sin k\theta_\nu \\ \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

On a

$$(11)\qquad S_\nu(\theta_\nu) = f(\theta_\nu) = f_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, 2n);$$

donc (9) est une sorte de formule d'interpolation pour $f(\theta)$, aux abscisses θ_ν. Il est connu (Fejér [1, 2]) que

$$(12)\qquad s_n(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{\sin(2n+1)\dfrac{t-\theta}{2}}{\sin\dfrac{t-\theta}{2}}\,dt,$$

et

$$(13)\qquad S_n(\theta) = \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{\nu=0}^{2n} f(\theta_\nu)\frac{\sin(2n+1)\dfrac{\theta_\nu-\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta_\nu-\theta}{2}} = \sum_{\nu=0}^{2n} f_\nu \frac{\sin(2n+1)\dfrac{\theta_\nu-\theta}{2}}{(2n+1)\sin\dfrac{\theta_\nu-\theta}{2}},$$

d'où l'on déduit immédiatement les relations (11). Les formules (12) et (13) montrent très clairement l'analogie qui existe entre $s_n(\theta)$ et $S_n(\theta)$. Prenons maintenant le cas des abscisses équidistantes

$$(14)\qquad \theta_\nu = \nu\frac{2\pi}{n+1} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

et calculons les moyennes arithmétiques des sommes partielles $s_n(\theta)$ et $S_n(\theta)$. Pour la série de Fourier, nous aurons

$$(15)\quad m_n(\theta) = \frac{1}{n+1}\sum_{r=0}^{n} s_r(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{n+1-k}{n+1}(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta),$$

avec les valeurs (8) de a_k et b_k, tandis que pour la somme trigonométrique,

$$(16)\quad M_n(\theta) = \frac{1}{n+1}\sum_{r=0}^{n} S_r(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{n+1-k}{n+1}(\alpha_k\cos k\theta + \beta_k\sin k\theta),$$

avec

$$\alpha_k = \frac{2}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu\cos k\theta_\nu, \quad ; \quad \beta_k = \frac{2}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu\sin k\theta_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Or, on peut encore mettre (15) et (16) sous une forme plus condensée

$$(17)\qquad m_n(\theta) = \frac{1}{2(n+1)\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\frac{\sin(n+1)\dfrac{t-\theta}{2}}{\sin\dfrac{t-\theta}{2}}\right)^2 dt,$$

$$(18)\qquad M_n(\theta) = \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu\left(\frac{\sin(n+1)\dfrac{\theta_\nu-\theta}{2}}{(n+1)\sin\dfrac{\theta_\nu-\theta}{2}}\right)^2.$$

Cette dernière formule permet de montrer que l'on a encore

$$M_n(\theta_\nu) = f(\theta_\nu) = f_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

donc (18) est encore, dans un certain sens, une formule d'interpolation généralisée. M. Bernstein [4] a remarqué qu'il suffit d'introduire les conditions supplémentaires

$$M'_n(\theta_\nu) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

pour que (18) devienne une véritable formule d'interpolation.

Or,

$$M_n(\theta) - f(\theta) = \sum_{\nu=0}^{n} [f(\theta_\nu) - f(\theta)] \left(\frac{\sin(n+1)\dfrac{\theta_\nu - \theta}{2}}{(n+1)\sin\dfrac{\theta_\nu - \theta}{2}} \right)^2,$$

et si l'on suppose $f(\theta)$ partout continue, de période 2π, on aura

$$|M_n(\theta) - f(\theta)| < \varepsilon, \qquad \text{si} \quad n \to \infty.$$

Pour ce qui est de l'ordre de l'approximation, nous renvoyons aux travaux de Faber [2, 3], Jackson [3, 5], Kryloff [2, 6], ainsi qu'aux ouvrages cités dans l'Introduction. Indiquons seulement que

$$|M_n(\theta) - f(\theta)| = O\left(\frac{\log n}{n}\right) \qquad \text{(Kryloff [2])}.$$

14. Interpolation trigonométrique par la méthode des moindres carrés. — L'interpolation trigonométrique des fonctions périodiques par la méthode des moindres carrés, traitée par M. S. Bernstein [14] dans le cas où les points fondamentaux sont équidistants, conduit aux sommes

$$S_m(\theta) = \sum_{\nu=0}^{m} (a_\nu \cos\nu\theta + b_\nu \sin\nu\theta), \tag{19}$$

avec les coefficients

$$a_0 = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{2k\pi}{p}\right),$$

$$a_\nu = \frac{2}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{2k\pi}{p}\right)\cos\frac{2k\pi\nu}{p},$$

$$b_\nu = \frac{2}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{2k\pi}{p}\right)\sin\frac{2k\pi\nu}{p} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m),$$

quel que soit $m < \frac{p}{2}$, p désignant le nombre des abscisses d'interpolation. On a aussi

$$(20) \qquad S_m(\theta) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{2k\pi}{p}\right) \frac{\sin \frac{2m+1}{2}\left(\theta - \frac{2k\pi}{p}\right)}{\sin \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{2k\pi}{p}\right)}.$$

Si $p = 2s + 1$, (20) se réduit à la formule exacte de Lagrange, lorsqu'on fait $m = s = \frac{p-1}{2}$; si $p = 2s$, on ne peut plus prendre $m = s$ et alors la formule d'interpolation exacte d'ordre s, dont les coefficients pour $\nu \leqq s$ sont toujours donnés par les expressions précédentes, sera remplacée par

$$S_s^*(\theta) = \frac{\sin m\theta}{2m} \sum_{k=1}^{2s} (-1)^k f\left(\frac{k\pi}{s}\right) \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{k\pi}{s}\right) + b \sin s x.$$

Si l'on suppose

$$(21) \qquad \left| f\left(\frac{2k\pi}{p}\right) \right| \leqq 1,$$

on aura

$$| f(\theta) - S_m(\theta) | < [\log(2m+1) + 3] E_m f(\theta),$$

où $E_m f(\theta)$ est la meilleure approximation de $f(\theta)$ par des sommes trigonométriques d'ordre m.

On obtient un résultat encore plus satisfaisant en formant les moyennes des sommes $S_m(\theta)$ analogues à celles de Fejér

$$(22) \qquad \sigma_m(\theta) = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_{m-1}}{m} = \frac{1}{mp} \sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{2k\pi}{p}\right) \left(\frac{\sin \frac{m}{2}\left(\theta - \frac{2k\pi}{p}\right)}{\sin \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{2k\pi}{p}\right)} \right)^2.$$

La condition (21) entraîne

$$(23) \qquad | \sigma_m(\theta) | \leqq 1,$$

quels que soient θ et $m < \frac{p}{2}$. On en déduit que, si m croît indéfiniment,

$$\lim_{m \to \infty} \{ \sigma_m(\theta) - f(\theta) \} = 0,$$

uniformément par rapport à θ, quelle que soit la fonction continue périodique $f(\theta)$. On pourra encore considérer les moyennes générales des sommes $S_m(\theta)$.

15. **Relations avec les séries de Fourier.** — Écrivons la formule (9), en remplaçant les coefficients A_k et B_k par $A_k^{(n)}$ et $B_k^{(n)}$

$$(24) \qquad S_n(\theta) = \frac{A_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k^{(n)} \cos k\theta + B_k^{(n)} \sin k\theta).$$

Si l'on écrit

$$\varphi_n(\theta) = \nu \frac{2\pi}{2n+1}, \qquad \text{pour} \quad \nu \frac{2\pi}{2n+1} \leqq \theta < (\nu+1) \frac{2\pi}{2n+1}$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots, 2n),$$

les coefficients auront pour expression

$$(25) \quad A_k^{(n)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos k\theta \, d\varphi_n(\theta), \qquad B_k^{(n)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin k\theta \, d\varphi_n(\theta)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

L'analogie entre les coefficients (8), (10) et (25) est évidente. Elle apparaît encore mieux si l'on met (24) sous la forme

$$(26) \qquad S_n(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(\theta - t) \, d\varphi_n(t),$$

$D_n(t)$ étant le noyau

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}},$$

tandis que la somme (7) est égale à

$$(27) \qquad s_n(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(\theta - t) \, dt.$$

(Jackson [9], Marcinkiewicz [2]). Dans toutes ces formules $f(\theta)$ désigne une fonction continue, de période 2π dans l'intervalle $(0, 2\pi)$

M. Marcinkiewicz [4] a démontré qu'on peut construire une fonction $g(\theta)$, continue et définie pour $0 \leqq \theta \leqq \pi$, telle que la suite $S_n(\theta) = U_n[g, \theta]$ soit partout divergente (théorème analogue à celui traité dans le n° 7 du Chap. I).

Le même auteur [2] a trouvé d'autre part, que *la convergence absolue de la série de Fourier de* $f(\theta)$ *entraîne la convergence uniforme de* $S_n(\theta) = U_n[f, \theta]$ *vers la fonction* $f(\theta)$.

Considérons, en effet, la fonction

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos\nu\theta + b_\nu \sin\nu\theta);$$

alors

$$s_n(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos\nu\theta + b_\nu \sin\nu\theta),$$

et

$$S_n(\theta) = U_n[f, \theta] = \frac{A_0^{(n)}}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (A_\nu^{(n)} \cos\nu\theta + B_\nu^{(n)} \sin\nu\theta).$$

Les formules (25) montrent que

$$A_\nu^{(n)} = a_\nu + \sum_{t=1}^{\infty} [a_{t(2n+1)+\nu} + a_{t(2n+1)-\nu}],$$

$$B_\nu^{(n)} = b_\nu + \sum_{t=1}^{\infty} [b_{t(2n+1)+\nu} + b_{t(2n+1)-\nu}],$$

de sorte que

$$|U_n(f, \theta) - s_n(\theta)| \leqq \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \{ |a_{t(2n+1)\pm\nu}| + |b_{t(2n+1)\pm\nu}| \}$$

$$= \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} |a_\nu| + |b_\nu| \right) \to 0.$$

On démontre de même que si la fonction continue et impaire $f(\theta)$ admet les coefficients de Fourier décroissants et d'ordre $o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors la suite $U_n[f, \theta]$ converge uniformément.

Indiquons encore quelques résultats. Soit

$$S_{n,i}(\theta) = U_{n\,i}[f, \theta] = \frac{A_0^{(n)}}{2} + \sum_{\nu=1}^{i} [A_\nu^{(n)} \cos\nu\theta + B_\nu^{(n)} \sin\nu\theta]$$

et

$$\sigma_n(\theta) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} U_{n,i}[f, \theta].$$

Alors la suite des $\sigma_n(\theta)$ converge uniformément vers $f(\theta)$.

Enfin, si $f(\theta)$ désigne une fonction continue, et $1 \leqq p < \infty$, on a la relation

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} |U_n(f) - f(\theta)|^p \, d\theta = 0.$$

16. Quelques formules modifiées. — Considérons la formule de M. D. Jackson [5], analogue à celle de Kryloff-Tamarkine [2], signalée dans le n° 9 *b* du Chapitre II

$$\Sigma_n(\theta) = H_n \sum_{k=1}^{2n} f(\theta_k) \left(\frac{\sin n \frac{\theta_k - \theta}{2}}{\sin \frac{\theta_k - \theta}{2}} \right)^4, \tag{28}$$

où

$$\frac{1}{H_n} = \sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{\sin n \frac{\theta_k - \theta}{2}}{\sin \frac{\theta_k - \theta}{2}} \right)^4,$$

et

$$\theta_{k+1} - \theta_k = \frac{\pi}{n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n - 1).$$

H_n est indépendant de θ, donc Σ_n est un polynome trigonométrique d'ordre $\leqq 2(n-1)$. D'autre part, comme

$$\Sigma_n(\theta_k) = f(\theta_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n - 1),$$

(28) est une formule d'interpolation. On a le théorème suivant :

Si la fonction $f(\theta)$, de période 2π, satisfait partout à la condition

$$|f(\theta'') - f(\theta')| \leqq \lambda |\theta'' - \theta'|, \tag{29}$$

la somme trigonométrique d'ordre $\leqq n$, $\Sigma_n(\theta)$ approche cette fonction avec une précision ne dépassant pas $\frac{37\lambda}{n}$.

Plus précisément,

$$|\Sigma_n(\theta) - f(\theta)| \leqq \frac{23\pi}{4} \frac{\lambda}{n},$$

ou, d'après M. Kryloff [2],

$$|\Sigma_n(\theta) - f(\theta)| < \frac{23\pi}{3} \frac{\lambda}{n} + \frac{4\pi^3}{\delta^3} \frac{\varpi}{n^3},$$

δ étant la longueur de l'intervalle où la condition (29) est valable, et ω désignant l'oscillation de $f(\theta)$ dans tout l'intervalle.

Remarquons qu'une erreur au plus égale à ε, commise sur $f(\theta_k)$ n'entraîne sur $\Sigma_n(\theta)$ une erreur supérieure, en valeur absolue, à ε, contrairement à $S_n(\theta)$ [formule (13)], pour laquelle cette erreur est de l'ordre de $\varepsilon \log n$.

Si $f(\theta)$ est continue, $\Sigma_n(\theta)$ tend uniformément vers $f(\theta)$, pour $n \to \infty$.

Une autre formule d'interpolation généralisée, analogue à l'intégrale singulière de M. de la Vallée Poussin, rencontrée dans sa méthode de sommation des séries trigonométriques [1] a été traitée par M. N. Kryloff [2]. Elle est la suivante :

$$V_n(\theta) = h_n \sum_{k=1}^{2n} f(\theta_k) \left(\cos \frac{\theta - \theta_k}{2}\right)^{2n},$$

avec

$$\frac{1}{h_n} = \sum_{k=1}^{2n} \left(\cos \frac{\theta - \theta_k}{2}\right)^{2n}, \qquad \text{et} \qquad \theta_{k+1} - \theta_k = \frac{\pi}{n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n-1).$$

Cette formule ressemble beaucoup à celles considérées antérieurement par MM. Kryloff et Tamarkine, et Jackson. On démontre encore que h_n est indépendant de θ, et l'on a le théorème suivant :

Pour toute fonction continue $f(\theta)$,

$$\lim_{n \to \infty} V_n(\theta) = f(\theta),$$

la convergence étant uniforme dans l'intervalle de continuité de $f(\theta)$. Si la fonction $f(\theta)$, au lieu d'être continue, satisfait à la condition plus restrictive (29), *on aura*

$$|V_n(\theta) - f(\theta)| < O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Cette approximation est donc moins bonne que celle de la formule (18).

17. Une formule de M. Riesz. — C'est une formule d'interpolation qui représente, pour les abscisses de Tchebychef, la dérivée d'une fonction trigonométrique. Soit

$$F(\varphi) = a_0 + a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi + \ldots + a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n} \{ a_\nu \cos\nu\varphi + b_\nu \sin\nu\varphi \}.$$

Si $\varphi_r = \dfrac{(2r-1)\pi}{2n}$ $(r = 1, 2, \ldots, 2n)$, on aura

$$F(\varphi + \varphi_r) = \sum_{\nu=0}^{n} \cos\nu\varphi_r(a_\nu \cos\nu\varphi + b_\nu \sin\nu\varphi) + \sum_{\nu=0}^{n} \sin\nu\varphi_r(b_\nu \cos\nu\varphi - a_\nu \sin\nu\varphi).$$

En observant que

$$\frac{1}{2n}\sum_{r=1}^{2n} \frac{(-1)^{r+1}\sin\nu\varphi_r}{2\sin^2\frac{\varphi_r}{2}} = n, \qquad \frac{1}{2n}\sum_{r=1}^{2n} \frac{(-1)^{r+1}\cos\nu\varphi_r}{2\sin^2\frac{\varphi_r}{2}} = 0, \qquad \text{pour} \quad \nu \leqq n,$$

on trouve la formule de M. M. Riesz [1, 2]

$$F'(\varphi) = \frac{1}{2n}\sum_{r=1}^{2n} F(\varphi + \varphi_r)\frac{(-1)^{r+1}}{2\sin^2\frac{\varphi_r}{2}}, \qquad \text{où} \quad \varphi_r = \left(r - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}. \tag{30}$$

On peut encore établir la relation

$$F(\varphi) = a_n \cos n\varphi + \frac{\cos n\varphi}{2n}\sum_{r=1}^{2n} F(\varphi_r)(-1)^{r+1} \operatorname{cotg}\frac{\varphi_r - \varphi}{2}, \tag{31}$$

d'où l'on pourrait aussi déduire la formule (30).

Remarquons que cette formule d'interpolation a de nombreuses applications, en particulier pour établir des inégalités pour la fonction $F(\varphi)$. Nous n'en citerons que la fameuse inégalité de M. Serge Bernstein [7].

Si $|F(\varphi)| \leqq 1$, *on aura pour toute valeur réelle de* φ, *l'inégalité* $|F'(\varphi)| \leqq n$. La méthode de M. Riesz lui a permis de trouver diverses extensions de ce théorème.

M. Kryloff [4], en démontrant la formule de Riesz, a établi un théorème plus général que nous insérons ici, bien que ce théorème ait été donné pour l'interpolation de Lagrange, mais qui peut aussi être formulé dans le cas trigonométrique. L'énoncé est le suivant :

La formule d'interpolation de Lagrange est convergente quand $n \to \infty$ dans le cas où les points fondamentaux sont les zéros des polynomes de Tchebychef, pour toute fonction continue $f(x)$ admettant la représentation de la forme

$$f(x) = \int_a^x \Phi(x)\,dx + c,$$

lorsque $\Phi(x)$ est intégrable au sens de Riemann, et c est une constante.

CHAPITRE IV.

THÉORIE DE L'INTERPOLATION D'HERMITE.

18. La formule d'interpolation d'Hermite. — Nous avons vu dans le Chapitre II que l'augmentation du degré des polynomes interpolateurs peut entraîner la convergence de la formule vers la fonction considérée. On peut soumettre ces polynomes $X_n(x)$, outre la coïncidence avec $f(x)$ aux points fondamentaux à d'autres conditions, par exemple limiter ses dérivées d'une façon convenable pour que la suite

$$X_1(x),\quad X_2(x),\quad \ldots,\quad X_n(x),\quad \ldots \tag{1}$$

converge vers $f(x)$. Cette possibilité a été développée par M. L. Fejér, dans une série de travaux importants [1, 2, 3, 4, 11]. En partant de la formule d'interpolation de Lagrange généralisée par Hermite, M. Fejér [3] a considéré d'abord les *polynomes à escalier*, c'est-à-dire une suite de polynomes $X_n(x)$, de degré $\leqq 2n-1$ coïncidant, pour les abscisses d'interpolation avec les valeurs correspondantes de la fonction continue donnée $f(x)$, et tels que la dérivée disparaisse en ces mêmes points

$$X_n(x_k) = f(x_k), \qquad X'_n(x_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

La suite des polynomes (1) ainsi formés converge uniformément vers $f(x)$ dans l'intervalle de continuité $a \leq x \leq b$ ($b - a$ fini) de cette fonction, dans le cas de points fondamentaux particuliers [par exemple les zéros du polynome de Tchebychef $T_n(x)$, ou de Legendre $P_n(x)$]. Le même résultat reste valable (Fejér [4]) aussi dans le cas où les dérivées, au lieu d'être nulles, sont seulement inférieures, en module, à une borne fixe indépendante de n.

Nous signalons seulement ces résultats particuliers, parce que les polynomes de Tchebychef et de Legendre font partie de la classe générale des polynomes de Jacobi, et pour ces derniers le problème de la convergence de l'interpolation d'Hermite a été complètement élucidé par M. G. Szegö et, indépendamment de lui, par M. J. Shohat. Ces résultats seront traités en détail.

Considérons le cas de la formule d'interpolation d'Hermite qui fait correspondre à n valeurs distinctes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de x un polynome de degré $\leq 2n - 1$, égal pour ces points à n valeurs prescrites $y_1, y_2, \ldots, y_n$, tandis que sa dérivée est égale, pour ces mêmes valeurs, à $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ respectivement. Ce polynome est mis sous la forme

$$X_n(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k\, h_k(x) + \sum_{k=1}^{n} y'_k\, \mathfrak{h}_k(x). \tag{3}$$

Les fonctions fondamentales de première et de deuxième espèce $h_k(x)$ et $\mathfrak{h}_k(x)$ sont données par les formules

$$h_k(x) = v_k(x)\, l_k^2(x) = \left[1 - \frac{\omega''_n(x_k)}{\omega'_n(x_k)}(x - x_k)\right] l_k^2(x), \tag{4}$$

$$\mathfrak{h}_k(x) = (x - x_k)\, l_k^2(x), \tag{5}$$

où $l_k(x)$ est la fonction fondamentale de l'interpolation de Lagrange [formule (2), Chap. I]. Les fonctions fondamentales de première espèce $h_k(x)$ vérifient une identité analogue à celle des fonctions fondamentales $l_k(x)$ de l'interpolation de Lagrange [formule (3), Chap. I]

$$\sum_{k=1}^{n} h_k(x) \equiv 1. \tag{6}$$

Les *facteurs linéaires caractéristiques* $v_k(x)$ satisfont à l'identité découverte par M. Fejér [12]

$$\sum_{k=1}^{n} v_k(x) = n^2.$$

Introduisons encore une notation. La formule (3) peut s'écrire sous la forme

$$\mathrm{X}_n(x) = \mathrm{H}_n(x) + \mathcal{H}_n(x), \tag{7}$$

où $\mathrm{H}_n(x)$ et $\mathcal{H}_n(x)$ sont les deux termes du second membre de (3). Ici, $\mathrm{H}_n(x)$ représente le polynome de degré $\leqq 2n - 1$ qui est égal aux points x_k à $\mathrm{X}_n(x_k)$, tandis que sa dérivée s'annule pour $x = x_k$, de même que $\mathcal{H}_n(x)$ est le polynome de degré $\leqq 2n - 1$ qui disparaît pour $x = x_k$, et dont la dérivée prend aux mêmes points les valeurs $\mathrm{X}'_n(x_k)$. $\mathrm{H}_n(x)$ est le polynome à escalier [la courbe $y = \mathrm{H}_n(x)$ est la parabole à escalier], $\mathcal{H}_n(x)$ s'appelle le polynome d'onde [$y = \mathcal{H}_n(x)$ étant la parabole d'onde].

Énonçons alors les deux théorèmes suivants, relatifs au cas des abscisses de Tchebychef (Fejér [3, 4]) :

Théorème I. — *Soient $y = f(x)$ une fonction donnée quelconque, partout continue dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$, et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les n abscisses de Tchebychef*

$$x_k = \cos(2k - 1)\frac{\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Posons $y_k = f(x_k)$. Soit $y = \mathrm{X}_n(x)$ une parabole de degré au plus égal à $2n - 1$, passant par les points (x_k, y_k), et telle que les pentes aux points fondamentaux soient inférieures, en module, à un nombre positif donné Δ

$$|\mathrm{X}'_n(x_k)| \leqq \Delta \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Dans ces conditions

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{X}_n(x) = f(x),$$

et cela uniformément dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$.

Théorème II. — *Les résultats précédents ne seront pas changés* *si l'on remplace la condition* (8) *relative aux pentes par*

$$|X'_n(x_k)|\sqrt{1-x_k^2} \leqq \varepsilon_n \frac{n}{\log n} \qquad (k=1, 2, \ldots, n;\ n=2, 3, \ldots),$$

avec

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Pour la raison indiquée tout à l'heure, nous n'insistons pas sur la démonstration de ces théorèmes.

19. Le cas des abscisses équidistantes de Newton. — Dans ce cas, le théorème de convergence des polynomes d'interpolation d'Hermite n'est pas vérifié : $|X_n(x)|$ peut dépasser toute valeur donnée à l'avance, si n est assez grand, bien que les inégalités

$$|X_n(x_k)| \leqq 1, \qquad |X'_n(x_k)| \leqq 1$$

ont lieu pour $k = 1, 2, \ldots, n$ (Fejér [4]).

Supposons les abscisses équidistantes distribuées de façon que celle du milieu, x_r, soit égale à 0, et que

$$\omega''(x_r) = 0,$$

avec

$$\omega(x) = \prod_{l=1}^{n}(x - x_l).$$

La formule (4) donne alors

$$h_r(x) = h(x) = \left[1 - \frac{\omega''(x_r)}{\omega'(x_r)}(x - x_r)\right] l_r^2(x) = l_r^2(x) = [l(x)]^2,$$

pour toute valeur de x, en supprimant l'indice r. Alors

$$h(1) = [l(1)]^2.$$

D'ailleurs, on a aussi

$$\mathfrak{h}(1) = [l(1)]^2.$$

Si les $n = 2\nu + 1$ points fondamentaux sont

$$-x_\nu, \quad -x_{\nu-1}, \quad \ldots, \quad -x_1, \quad 0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{\nu-1}, \quad x_\nu,$$

on aura

$$\omega(x) = x\prod_{l=1}^{\nu}(x^2 - x_l^2) = x\,\Omega(x),$$

$$l(x) = \frac{\omega(x)}{x\,\omega'(0)} = \frac{\Omega(x)}{\Omega(0)}, \qquad l(1) = \frac{\Omega(1)}{\Omega(0)},$$

et

$$h(1) = \left[\frac{\Omega(1)}{\Omega(0)}\right]^2.$$

Posons maintenant

$$x_k = \frac{2k}{n} = \frac{2k}{2\nu+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Il vient

$$\Omega(x) = \prod_{k=1}^{\nu}\left(x^2 - \frac{4k^2}{n^2}\right),$$

$$\sqrt{h(1)} = \frac{\Omega(1)}{|\Omega(0)|}$$

$$= \frac{\prod_{k=1}^{\nu}\left(1-\frac{4k^2}{n^2}\right)}{\prod_{k=1}^{\nu}\frac{4k^2}{n^2}} = \frac{\prod_{k=1}^{\nu}(n^2-4k^2)}{\prod_{k=1}^{\nu}4k^2} = \frac{(4\nu+1)!}{4^{2\nu}(\nu!)^2(2\nu)!(2\nu+1)} = \frac{2^{2\nu+\frac{1}{2}}}{\pi\nu}(1+\varepsilon_\nu),$$

où $\lim\limits_{\nu\to\infty} \varepsilon_\nu = 0$. Donc

$$h(1) \sim \frac{2^{4\nu+1}}{\pi^2\nu^2},$$

ce qui montre que $h(1)$ augmente indéfiniment avec n, et, par cela, le théorème est démontré.

20. Les points conjugués de l'interpolation d'Hermite. — Dans les recherches de M. Fejér, le facteur linéaire caractéristique

$$v_k(x) = 1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

joue un rôle fondamental, et surtout son zéro

$$X_k = x_k + \frac{\omega_n'(x_k)}{\omega_n''(x_k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

qu'il appelle le *point conjugué* des points fondamentaux $x_k (k = 1, 2, \ldots, n)$, ou plus simplement, le point conjugué de l'interpolation d'Hermite.

Supposons que tous les points fondamentaux soient situés dans l'intervalle $(-1, +1)$. Il faut alors distinguer deux sortes de points fondamentaux :

a. Tels que *tous* les points conjugués X_k soient *en dehors* de l'intervalle $(-1, +1)$, et qui sont alors appelés *points normalement distribués;*

b. Tels qu'il y ait des points conjugués dans l'intervalle $(-1, +1)$.

Au point de vue de l'interpolation, c'est la classe *a* qui est de beaucoup la plus importante.

Indiquons qu'à cette classe *a* appartient parmi les groupes de points les plus fréquents les abscisses de Tchebychef, de Legendre, et en général, les zéros des polynomes de Jacobi $J_n(\alpha, \beta, x)$, de paramètres vérifiant les conditions

$$-1 \leqq \alpha < 0, \qquad -1 \leqq \beta < 0.$$

La définition des polynomes $\omega_n = J_n(\alpha, \beta, x)$ adoptée ici est, d'après la notation de Pólya-Szegö [1], celle qui correspond au poids

$$p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta,$$

et à l'équation différentielle

$$(1-x^2)\omega_n'' + [(\beta-\alpha)-(\beta+\alpha+2)x]\omega_n' + n(n+\alpha+\beta+1)\omega_n = 0.$$

Au contraire, dans le cas des abscisses équidistantes de Newton

$$x_k = -1 + k\frac{2}{n+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

tous les points conjugués X_k tombent dans l'intervalle $(-1, +1)$, et y sont distribués d'une façon partout dense.

Remarquons que pour les points fondamentaux de la classe *a*, les fonctions fondamentales $h_k(x)$ sont toutes positives pour $-1 \leqq x \leqq 1$. Pour les abscisses de Tchebychef considérées à plusieurs reprises

$$x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} = \cos\theta_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

on a

$$X_k = \frac{1}{x_k},$$

c'est-à-dire X_k est le conjugué harmonique de x_k par rapport aux points -1 et $+1$, et comme tel est toujours à l'extérieur de l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ (Fejér [6]).

Si nous considérons la série trigonométrique

$$S^{(k)}(\theta) = \frac{1}{n} + \frac{2}{n}\sum_{\nu=1}^{\infty} \cos\nu\theta \cos\nu\theta_k \qquad \theta_k = \left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n},$$

et si nous posons

$$s_0^{(k)}(\theta) = \frac{1}{n}, \qquad s_r^{(k)}(\theta) = \frac{1}{n} + \frac{2}{n}\sum_{\nu=1}^{r} \cos\nu\theta \cos\nu\theta_k \qquad (r = 1, 2, \ldots),$$

nous aurons

$$h_k(x) = \frac{1}{2n}[s_0^{(k)}(\theta) + s_1^{(k)}(\theta) + \ldots + s_{2n-1}^{(k)}(\theta)],$$

ce qui montre, d'après un théorème connu relatif aux moyennes arithmétiques d'une série trigonométrique, que $h_k(x)$ est toujours positif pour $-1 \leqq x \leqq 1$ (Feldheim [2]).

21. Convergence dans le cas des points fondamentaux normalement distribués. — Nous allons démontrer dans ce numéro le théorème suivant de M. Fejér [11].

Si le système de points fondamentaux $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ *est normalement distribué dans l'intervalle* $(-1, +1)$, *la suite correspondante des polynomes d'interpolation d'Hermite* (1) *converge uniformément vers* $f(x)$ *dans tout l'intervalle* $-1 \leqq x \leqq 1$.

Désignons par $T_{2n-1}(x)$ le polynome de Tchebychef de degré $2n-1$, qui appartient à $f(x)$ dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$. Nous avons vu que ce polynome fournit une approximation, au sens de Weierstrass, pour la fonction $f(x)$. Et de plus, si nous posons

$$\max_{-1 \leqq x \leqq 1} |f(x) - T_{2n-1}(x)| = E_{2n-1}, \tag{9}$$

cette différence sera plus petite que

$$\max_{-1 \leqq x \leqq 1} |f(x) - g_{2n-1}(x)|,$$

quel que soit le polynome $g_{2n-1}(x)$ de degré $2n-1$, différent de $T_{2n-1}(x)$. En d'autres termes, $T_{2n-1}(x)$ fournit, dans un certain sens, la meilleure approximation de $f(x)$ par un polynome de degré $2n-1$. Ceci fait, considérons un polynome $X(x)$, de degré au plus égal à $2n-1$, pour lequel

$$X(x_k)=f(x_k), \qquad X'(x_k)=T'_{2n-1}(x_k) \qquad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Alors, en vertu de (3),

$$X(x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, h_k(x)+\sum_{k=1}^{n} T'_{2n-1}(x_k)\, \mathfrak{h}_k(x), \tag{10}$$

et, d'après la même formule,

$$T_{2n-1}(x)=\sum_{k=1}^{n} T_{2n-1}(x_k)\, h_k(x)+\sum_{k=1}^{n} T'_{2n-1}(x_k)\, \mathfrak{h}_k(x). \tag{11}$$

En prenant la différence des deux membres de (11) et (10), il vient

$$T_{2n-1}(x)-X(x)=\sum_{k=1}^{n} [T_{2n-1}(x_k)-f(x_k)]\, h_k(x). \tag{12}$$

On déduit de (12) et (9) que

$$|T_{2n-1}(x)-X(x)| \leqq E_{2n-1}\sum_{k=1}^{n} |h_k(x)|.$$

Par hypothèse, les points fondamentaux sont normalement distribués, de sorte que les $h_k(x)$ sont positifs, et, en tenant compte de l'identité (6), il vient

$$|T_{2n-1}(x)-X(x)| \leqq E_{2n-1}. \tag{13}$$

Enfin, (9) et (13) montrent que

$$|f(x)-X(x)| \leqq 2E_{2n-1} \qquad \text{pour} \quad -1 \leqq x \leqq 1.$$

Le théorème est donc démontré. Il comprend, comme cas particulier, le théorème I du n° 18 relatif aux abscisses de Tchebychef, et est valable pour la classe des abscisses de Jacobi normalement distribuées, que nous avons précisées dans le n° 20.

22. Le cas des abscisses de Jacobi. — Le problème de la convergence des suites de polynomes d'interpolation d'Hermite pour les abscisses de Jacobi a été tranché, en toute sa généralité, par MM. Szegö et Shohat, par des méthodes assez différentes, et indépendamment l'un de l'autre. Les résultats obtenus ne sont pas essentiellement différents, mais pour ne pas prêter à une confusion, nous les exposerons tous l'un apres l'autre. Le premier en date est M. Szegö. Indiquons d'abord sa méthode et ses résultats (Szegö [1]).

Plaçons-nous dans les conditions du théorème I du n° 18.

Soient $f(x)$ une fonction continue dans $-1 \leqq x \leqq 1$, et $X_n(x)$ la suite de polynomes de degré $2n-1$, vérifiant les conditions

$$X_n(x_\nu^{(n)}) = f(x_\nu^{(n)}), \qquad |X'_n(x_\nu^{(n)})| \leqq \Delta \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

où Δ est un nombre positif fixe, indépendant de n et ν, les points $x_\nu^{(n)}$ étant les zéros du $n^{\text{ième}}$ polynome de Jacobi $J_n(\alpha, \beta, x)$ qui sont tous réels, différents et situés dans l'intervalle $(-1, +1)$, lorsque $\alpha > -1$ et $\beta > -1$.

M. G. Szegö a établi les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Pour toute fonction $f(x)$, continue dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$, la relation*

$$\lim_{n \to \infty} X_n(x) = f(x)$$

a lieu à l'intérieur de $(-1, +1)$, *et cela uniformément dans tout intervalle* $-1+\delta \leqq x \leqq 1-\delta$, *pour* $0 < \delta < 1$.

Théorème II. — *Si* $-1 < \alpha < 0$, *et dans ce cas seulement,*

$$\lim_{n \to \infty} X_n(1) = f(1),$$

la fonction $f(x)$ étant continue dans $-1 \leqq x \leqq 1$. On a le résultat analogue pour le point $x = -1$.

Théorème III. — *Soit* $-1 < \alpha < 0$. *Si $f(x)$ est continue dans* $-1 \leqq x \leqq 1$, *on aura dans l'intervalle* $-1 < x \leqq 1$

$$\lim_{n \to \infty} X_n(x) = f(x),$$

et cela uniformément dans l'intervalle $-1+\delta \leqq x \leqq 1$, *où* $0 < \delta < 2$.

En particulier, si $-1 < \alpha < 0$ et $-1 < \beta < 0$, les polynomes $X_n(x)$ convergent uniformément vers la fonction continue $f(x)$ dans tout l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$, ce qui est contenu dans le théorème général de M. Fejér.

Indiquons, pour donner une idée de la méthode de M. Szegö, la démonstration du théorème I. D'après la formule (3),

$$\begin{aligned} X_n(x)f(x) &= \sum_{\nu=1}^{n} [f(x_\nu)-f(x)]\, h_\nu(x) + \sum_{\nu=1}^{n} y'_\nu\, \mathfrak{h}_\nu(x) \\ &= \sum_{|x_\nu-x|\leqq\varepsilon} [f(x_\nu)-f(x)]\, h_\nu(x) \\ &\quad + \sum_{|x_\nu-x|>\varepsilon} [f(x_\nu)-f(x)]\, h_\nu(x) + \sum_{\nu=1}^{n} y'_\nu\, \mathfrak{h}_\nu(x). \end{aligned}$$

Si $|x_\nu - x|\leqq\varepsilon$, $|f(x_\nu)-f(x)|\leqq\omega(\varepsilon)$, où $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\omega(\varepsilon)=0$. Soit, d'autre part, $|f(x)|\leqq M$. Enfin, par hypothèse, $|y'_\nu|\leqq\Delta$ $(\nu=1, 2, \ldots, n)$. Donc

$$(14)\qquad \begin{aligned} |X_n(x)-f(x)| &\leqq \omega(\varepsilon) \sum_{|x_\nu-x|\leqq\varepsilon} |h_\nu(x)| \\ &\quad + 2M \sum_{|x_\nu-x|>\varepsilon} |h_\nu(x)| + \Delta\sum_{\nu=1}^{n} |\mathfrak{h}_\nu(x)|. \end{aligned}$$

On peut démontrer à l'aide de formules asymptotiques établies pour les polynomes de Jacobi (Szegö [2]) que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{|x_\nu-x|\leqq\varepsilon} |h_\nu(x)| = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{|x_\nu-x|\geqq\varepsilon} |h_\nu(x)| = 0$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} |\mathfrak{h}_\nu(x)| = 0,$$

de sorte que (14) donne bien la démonstration du théorème I.

M. Szegö a étudié encore les cas où les points fondamentaux sont les zéros du $n^{\text{ième}}$ polynome de Laguerre, défini par l'équation différentielle

$$xy'' + (\alpha+1-x)y' + ny = 0 \qquad [y = L_n^{(\alpha)}(x)]$$

et la condition $L_n^{(\alpha)}(0) = C_{n+\alpha}^{n}$. Alors

I. Pour tout $x>0$, $f(x)$ étant continu et borné,

$$\lim_{n\to\infty} X_n(x) = f(x),$$

et cela uniformément dans tout intervalle positif $\delta\leqq x\leqq\omega$ $(\delta>0)$.

II. Pour $-1 < \alpha < 0$, et dans ce cas seulement,

$$\lim_{n \to \infty} X_n(0) = f(0),$$

pour toute fonction $f(x)$ continue et bornée.

III. Si $-1 < \alpha < 0$, le théorème I est valable dans tout intervalle non négatif $0 \leqq x \leqq \omega$.

Le principe de la démonstration est encore le même que pour les points fondamentaux de Jacobi. Finalement, si l'on considère les zéros du polynome d'Hermite $H_n(x)$, vérifiant l'équation différentielle.

$$y'' - xy' + xy = 0 \qquad [y = H_n(x)],$$

on aura le théorème suivant :

Théorème. — *Si $f(x)$ est une fonction continue et bornée de la variable réelle x, la relation*

$$\lim_{n \to \infty} X_n(x) = f(x)$$

a lieu pour tout x, uniformément dans tout intervalle fini.

M. Shohat [3] a retrouvé les mêmes résultats en faisant intervenir dans ses calculs la formule de quadrature mécanique, dont nous parlerons plus loin. Il n'a considéré que les polynomes à escalier et, par la méthode signalée, parvient à compléter en certains points les résultats de Fejér et Szegö. Ses principaux résultats sont les suivants :

I. *Abscisses de Jacobi.* — Dans ce cas, si $f(x)$ est supposé borné, $X_n(x)$ converge vers $f(x)$ en tout point de continuité de celle-ci, si les paramètres vérifient les inégalités $\alpha > -1$, $\beta > -1$; si, de plus, $\alpha < 0$, $\beta < 0$, la convergence sera uniforme sur le segment $-1 \leqq x \leqq 1$, pourvu que $f(x)$ reste continue sur tout ce segment.

II. *Abscisses de Laguerre.* — Si $\alpha > -1$, $X_n(x)$ converge vers $f(x)$ pour toute valeur positive de x, en supposant que $f(x)$ est borné, et que $\int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha+2} |f(x)| \, dx$ ait un sens. La convergence est uniforme dans tout intervalle fermé (ε, A), où $f(x)$ est continue $(\varepsilon > 0)$; si $\alpha < 0$, on a aussi $\lim\limits_{n \to \infty} X_n(0) = f(0)$.

III. *Abscisses d'Hermite.* — Dans ce cas, $X_n(x) \to f(x)$ pour $n \to \infty$ en tous les points de continuité de $f(x)$, en la supposant bornée, et l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^2 |f(x)| \, dx$ ayant un sens.

23. Formules d'interpolation d'Hermite plus générales. — On a considéré aussi des polynomes à escalier d'ordre supérieur. Dans cet ordre d'idées, MM. Kryloff et Stayermann [1] ont obtenu le théoreme suivant :

Théorème. — *En tout point de continuité x de la fonction réelle et bornée $f(x)$ dans $-1 \leqq x \leqq 1$, on a*

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = f(x),$$

où $y = F_n(x)$ représente la parabole à escalier d'ordre supérieur, c'est-à-dire passant par les n points donnés et où, par exemple, les trois premières dérivées sont égales à 0 *en ces points.*

Ce théorème a été démontré dans l'hypothèse que les points fondamentaux sont les zéros du polynome trigonométrique, et il serait intéressant d'essayer de l'étendre au cas où les abscisses d'interpolation sont les zéros des polynomes hypergéométriques.

CHAPITRE V.

THÉORÈMES DE CONVERGENCE POUR L'INTERPOLATION DE LAGRANGE.

24. Convergence de la formule de Lagrange dans le cas où les points fondamentaux sont normalement distribués. — Nous avons vu que les points conjugués de l'interpolation d'Hermite jouent un rôle très important dans l'étude de la convergence de celle-ci, tandis que dans l'interpolation de Lagrange ces points n'interviennent pas explicitement. M. L. Fejér [5. 6, 11] a observé plus récemment qu'ils peuvent toutefois servir pour la recherche des conditions dans lesquelles les polynomes d'interpolation de Lagrange sont convergents si l'on fait encore sur la fonction continue $f(x)$ quelques hypothèses restrictives.

La base de ces recherches est l'identité déjà signalée

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} h_k(x) = \sum_{k=1}^{n} v_k(x)\, l_k^2(x) \equiv 1.$$

Si les points fondamentaux sont normalement distribués, dans l'intervalle (a, b),

$$(2) \qquad \begin{cases} a \leqq x_n < x_{n-1} < \ldots < x_2 < x_1 \leqq b, \\ X_k \geqq b \quad \text{ou} \quad X_k \leqq a \quad (k = 1, 2, \ldots, n); \end{cases}$$

on aura nécessairement

$$v_k(x) \geqq 0 \quad \text{pour} \quad a \leqq x \leqq b \text{ et } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Faisons encore les hypothèses

$$v_k(b) \geqq \rho, \qquad v_k(a) \geqq \rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

où $0 < \rho \leqq 1$, indépendant de k et n. Alors

$$(3) \qquad v_k(x) \geqq \rho \quad \text{pour} \quad a \leqq x \leqq b \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

et (1) donne par suite

$$(4) \qquad l_1^2(x) + l_2^2(x) + \ldots + l_n^2(x) \leqq \frac{1}{\rho} \qquad (a \leqq x \leqq b),$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwartz montre que

$$(5) \qquad |l_1(x)| + |l_2(x)| + \ldots + |l_n(x)| \leqq \sqrt{\frac{n}{\rho}} \qquad (a \leqq x \leqq b).$$

Nous avons alors le

Théorème I. — *Si les points fondamentaux vérifient la condition* (2) *et* (3), *la suite des polynomes d'interpolation de Lagrange correspondante converge vers la fonction $f(x)$, la convergence ayant lieu uniformément dans l'intervalle $a \leqq x \leqq b$ si $f(x)$ est partout continue dans cet intervalle, et y vérifie une condition de Lipschitz d'exposant $> \frac{1}{2}$.*

En effet, cette condition

$$(6) \qquad |f(x'') - f(x')| \leqq c_1 |x'' - x'|^{\lambda} \qquad \left(a \leqq x' < x'' < b, \ \frac{1}{2} < \lambda \leqq 1\right)$$

entraîne (d'après de la Vallée Poussin, [3], Lebesgue, [1], [2], [4], S. Bernstein, [7], D. Jackson [9]), la relation

$$(7) \qquad |f(x) - P(x)| \leqq \frac{c_2}{n^\lambda},$$

$P(x)$ étant un polynome de degré $\leqq n - 1$, et c_2 une constante indépendante de n.

Observons que l'opération $L_n(f)$ est linéaire et que, d'après la formule ($2a$) du Chapitre I, on a

$$\begin{aligned} f(x) - L_n(f) &= f(x) - L_n[P + (f - P)] \\ &= f(x) - L_n(P) - L_n(f - P) = f(x) - P(x) - L_n(f - P). \end{aligned}$$

Or,

$$L_n(f - P) = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - P(x_k)]\, l_k(x),$$

et, en vertu de (7) et (5),

$$|L_n(f - P)| \leqq \frac{c_2}{n^\lambda}\sqrt{\frac{n}{\rho}} = \frac{c_3}{n^{\lambda - \frac{1}{2}}},$$

de sorte que

$$(8) \quad |f(x) - L_n(f)| \leqq |f(x) - P(x)| + |L_n(f - P)| \leqq \frac{c_2}{n^\lambda} + \frac{c_3}{n^{\lambda - \frac{1}{2}}}.$$

Les constantes c_2 et c_3 étant indépendantes de n et $\lambda > \frac{1}{2}$, on aura, si n est assez grand,

$$(9) \qquad |f(x) - L_n(f)| < \eta,$$

dans tout l'intervalle $a \leqq x \leqq b$. Notre théorème est donc démontré.

Pour citer un exemple où ce théorème s'applique, rappelons que les abscisses de Jacobi sont normalement distribuées si les paramètres vérifient les inégalités $-1 \leqq \alpha < 0$, $-1 \leqq \beta < 0$. Dans ces conditions, on a la relation intéressante

$$(10) \qquad \sum_{k=1}^{n} l_k^2(x) \leqq \frac{1}{\min\{-\alpha, -\beta\}},$$

où $\min\{-\alpha, -\beta\}$ désigne le plus petit des deux nombres positifs $-\alpha$, $-\beta$, et l'on pourra énoncer le théorème suivant :

Les polynomes d'interpolation de Lagrange d'une fonction $f(x)$

$$L_1(f),\quad L_2(f),\quad \ldots,\quad L_n(f),\quad \ldots$$

convergent dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$, *uniformément vers* $f(x)$, *si les points fondamentaux* $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ *sont les zéros du* $n^{\text{ième}}$ *polynome de Jacobi* $J_n(\alpha, \beta, x)$, *avec les paramètres* $-1 \leqq \alpha < 0$, $-1 \leqq \beta < 0$. *La fonction* $f(x)$ *doit vérifier la condition de Lipschitz* (6).

On peut énoncer des théorèmes analogues dans le cas où l'hypothèse (2) de la distribution normale est seule vérifiée. Alors, dans l'intervalle

$$a + \varepsilon \leqq x \leqq b - \varepsilon \qquad \left(0 < \varepsilon \leqq \frac{b-a}{2}\right),$$

on aura

$$(11) \qquad v_k(x) = v_k(b)\frac{x-a}{b-a} + v_k(a)\frac{b-x}{b-a} \geqq \frac{\varepsilon}{b-a},$$

de sorte que

$$(12) \qquad \sum_{k=1}^{n} l_k^2(x) \leqq \frac{b-a}{\varepsilon} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} |\, l_k(x) \,| \leqq \sqrt{\frac{b-a}{\varepsilon}}\sqrt{n}.$$

On en déduit le

THÉORÈME II. — *Si l'intervalle* $a \leqq x \leqq b$ *contient tous les points fondamentaux* $x_k^{(n)}(k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$, *mais aucun des points conjugués* $X_k(k = 1, 2, \ldots, n)$ *ne tombe dans l'intervalle* $a < x < b$, *la suite des polynomes d'interpolation de Lagrange* $L_n(f)(n = 1, 2, \ldots)$ *correspondante tend, dans l'intervalle* $a < x < b$, *vers* $f(x)$ *et cela uniformément dans tout intervalle partiel* $a + \varepsilon \leqq x \leqq b - \varepsilon$.

On suppose encore que la fonction $f(x)$ vérifie, dans l'intervalle $a \leqq x \leqq b$, la condition de Lipschitz (6).

25. Le cas où les points fondamentaux ne sont pas normalement distribués. — L'exemple des points fondamentaux de Jacobi, de paramètres ne vérifiant pas les conditions $-1 \leqq \alpha < 0$ et $-1 \leqq \beta < 0$, montre qu'il existe des classes de points qui ne sont pas normalement distribués. (Telle est encore, comme nous l'avons vu, la classe des points équidistants de Newton.) Pour ces points on a le

THÉORÈME III. — *Si les points fondamentaux* $x_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n;$ $n = 1, 2, \ldots)$ *sont tous dans l'intervalle* $A \leqq x \leqq B$, *tandis que les points conjugués sont tous à l'extérieur d'un intervalle plus petit* $a \leqq x \leqq b$ $(A \leqq a < b \leqq B)$, *la suite des polynomes d'interpolation de Lagrange converge dans* $a < x < b$ *vers* $f(x)$, *et la convergence est uniforme dans tout intervalle* $a + \varepsilon \leqq x \leqq b - \varepsilon$.

Il faut encore faire ici l'hypothèse qu'il existe un nombre positif η, aussi petit qu'on le veut, tel qu'on ait toujours $X_k > x_k$, pourvu que $x_k \geqq b - \eta$, et $X_k < x_k$, lorsque $x_k \leqq a + \eta$. La fonction $f(x)$ satisfait encore à une condition de Lipschitz d'exposant $\lambda > \frac{1}{2}$ dans l'intervalle total $A \leqq x \leqq B$.

On vérifie, en effet, que pour $a + \varepsilon \leqq x \leqq b - \varepsilon$, on a

$$v_k(x) \geqq \frac{\varepsilon}{b - a},$$

et le reste de la démonstration est sans changement.

M. Fejér [6] a déterminé, pour les abscisses de Jacobi, le plus grand intervalle qui est libre de points conjugués. Cet intervalle est le suivant

$$M(\alpha, \beta) < x < m(\alpha, \beta),$$

où

$$M(\alpha, \beta) = \begin{cases} -1 & \text{pour } -1 < \beta \leqq 0, \\ \dfrac{(\beta^2 - \alpha^2) - 4\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+1)(\beta+1)}}{(\alpha+\beta+2)^2} & \text{pour } 0 < \beta, \end{cases}$$

$$m(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -1 < \alpha \leqq 0, \\ \dfrac{(\beta^2 - \alpha^2) + 4\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+1)(\beta+1)}}{(\alpha+\beta+2)^2} & \text{pour } 0 < \alpha. \end{cases}$$

26. **Les résultats de J. Shohat.** — M. Shohat [3] a étudié aussi le problème de la convergence des polynomes d'interpolation de Lagrange, sous les hypothèses que $f(x)$ vérifie une condition de Lipschitz. Il a établi, pour les abscisses de Jacobi, Laguerre et Hermite, des théorèmes analogues à ceux du numéro précédent. Indiquons seulement les résultats, sans entrer dans le détail des démonstrations :

a. Si les points fondamentaux x_k sont les zéros du $n^{\text{ième}}$ polynome de Jacobi $J_n(\alpha, \beta, x)$, on a

$$\lim_{n \to \infty} L_n(x) = f(x),$$

la convergence étant uniforme dans tout intervalle partiel de $(-1, +1)$, où $f(x)$ vérifie une condition de Lipschitz, d'exposant $> \frac{1}{2}$, et uniforme dans l'intervalle total $-1 \leqq x \leqq 1$, si $(\alpha, \beta) \leqq 0$, et $f'(x)$ est continue. [Si l'on a seulement $\alpha \leqq 0$, $\beta > 0$, la convergence uniforme a lieu seulement dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1 - \varepsilon$.]

b. Si les points fondamentaux sont les zéros du $n^{\text{ième}}$ polynome de Laguerre, on a aussi la relation (13) uniformément dans tout intervalle fini situé à droite de l'origine, si $f(x)$ vérifie dans cet intervalle une condition de Lipschitz d'exposant $\lambda > \frac{1}{4}$. Si $f(x)$ est continue dans l'intervalle $(0, \varepsilon)$, et en désignant par E_n la meilleure approximation de $f(x)$ par un polynome de degré n, si l'on a $E_n n^{\alpha+1} \to 0$ pour $n \to \infty$, alors on a aussi

$$\lim_{n \to \infty} L_n(0) = f(0).$$

Donc, pour $\alpha = -1$,

$$\lim_{n \to \infty} L_n(f) = f(x),$$

uniformément dans tout intervalle fini $(0, A)$, où $f'(x)$ est continu.

c. Si les $x_k^{(n)}$ sont les n zéros du polynome d'Hermite $H_n(x)$, on a encore la relation (13), uniformément dans tout intervalle fini où $f(x)$ satisfait à une condition de Lipschitz d'exposant $\lambda > \frac{1}{4}$.

Les démonstrations sont faites à l'aide des méthodes de quadrature mécanique basées sur la formule d'interpolation de Lagrange.

27. **Théorèmes de convergence dans le cas de polynomes orthogonaux.** — MM. Shohat [3], Grünwald et Turán ont étudié le problème de la convergence de l'interpolation de Lagrange dans le cas où les points fondamentaux sont les zéros de polynomes orthogonaux. Ils ont trouvé les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Soit donné une fonction-poids $p(x)$, positive et restant supérieure à une borne m : $p(x) \geqq m > 0$, et intégrable au sens de Riemann dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$. Si l'on désigne par $\omega_n(x)$ le polynome orthogonal par rapport à $p(x)$, tous les zéros de ce polynome sont réels, distincts, et situés dans $(-1, +1)$. Formons l'interpolation de Lagrange sur ces zéros comme points fondamentaux, et pour une fonction vérifiant une condition de Lipschitz d'exposant $> \frac{1}{2}$. Alors, à l'intérieur de l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$, la suite des polynomes de Lagrange $L_n(f)$ converge uniformément vers $f(x)$.* (Théorème de J. Shohat [3].)

THÉORÈME II. — *Dans les mêmes conditions, si la fonction $f(x)$ admet une dérivée première continue, la convergence sera uniforme dans tout l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$.* (Théorème de J. Shohat [3].)

THÉORÈME III. — *Si l'on fait l'hypothèse*

$$p(x)\sqrt{1-x^2} \geqq m > 0 \qquad (-1 \leqq x \leqq 1) \tag{14}$$

et si $f(x)$ vérifie uniformément dans $(-1, +1)$ une condition de Lipschitz d'exposant $> \frac{1}{2}$, la convergence des $L_n(f)$ aura lieu uniformément dans tout l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$. (Théorème de Grünwald-Turán.)

Nous indiquerons la démonstration du théorème I, donnée par M. P. Turán. Elle est basée sur l'inégalité intéressante en elle-même

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{l_\nu^2(x)}{k_\nu} \leqq \frac{1}{2m}[(1-x^2)P_n'^2(x) + n^2 P_n^2(x)], \tag{15}$$

où $P_n(x)$ est le $n^{\text{ième}}$ polynome de Legendre, $l_\nu(x)$ la fonction fondamentale de Lagrange relative aux zéros de $\omega_n(x)$, enfin k_ν le nombre de Stieltjes

$$k_\nu = \int_{-1}^{+1} l_\nu(x) p(x)\, dx \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Il est facile à voir que tous ces nombres k_ν sont positifs. La différence $l_\nu^2(x) - l_\nu(x)$ est, en effet, un polynome de degré $2n-2$, qui est nul pour $x = x_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$

$$l_\nu^2(x) - l_\nu(x) = \omega_n(x) \mathrm{R}_{n-2}(x),$$

$\mathrm{R}_{n-2}(x)$ étant un polynome de degré $n-2$. Si l'on multiplie les deux membres par $p(x)$, et intègre de -1 à $+1$, celle du second membre est nulle et ainsi

$$(16) \qquad k_\nu = \int_{-1}^{+1} l_\nu(x) p(x)\, dx = \int_{-1}^{+1} l_\nu^2(x) p(x)\, dx,$$

ce qui montre que $k_\nu > 0$.

Pour établir la relation (15), cherchons le polynome $\varphi_{n-1}(x)$, de degré $n-1$, qui rend minima l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{-1}^{+1} \varphi_{n-1}^2(x) p(x)\, dx,$$

si l'on fait encore la condition supplémentaire $\varphi_{n-1}(x_0) = 1$.

La formule de Lagrange du polynome $\varphi_{n-1}(x)$, formée sur les zéros x_ν de $\omega_n(x)$ est la suivante

$$(16) \qquad \varphi_{n-1}(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{n-1}(x_\nu)\, l_\nu(x),$$

donc

$$\mathrm{I} = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{n-1}(x_\mu)\, \varphi_{n-1}(x_\nu) \int_{-1}^{+1} l_\mu(x)\, l_\nu(x) p(x)\, dx.$$

Si $\mu \neq \nu$,

$$l_\mu(x)\, l_\nu(x) = c\,\omega_n(x) \frac{\omega_n(x)}{(x - x_\mu)(x - x_\nu)} = c\,\omega_n(x)\, \mathrm{R}_{n-2}^*(x),$$

c étant une constante non nulle, et $\mathrm{R}_{n-2}^*(x)$ un polynome de degré $n-2$. Donc

$$(17) \qquad \int_{-1}^{+1} l_\mu(x)\, l_\nu(x) p(x)\, dx = 0 \qquad \text{pour} \quad \mu \neq \nu.$$

En tenant compte de (16) et (17), nous aurons

$$\mathrm{I} = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{n-1}^2(x_\nu) k_\nu.$$

Si nous appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwartz au second membre de (16) pour $x = x_0$ qui s'écrit, par suite de la condition $\varphi_{n-1}(x_0) = 1$, sous la forme

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{n-1}(x_\nu)\, l_\nu(x_0) = 1$$

ou

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{n-1}(x_\nu)\sqrt{k_\nu}\,\frac{l_\nu(x_0)}{\sqrt{k_\nu}} = 1,$$

alors

$$\text{(18)} \qquad I = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{n-1}^2(x_\nu)\, k_\nu \geqq \frac{1}{\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} \frac{l_\nu^2(x_0)}{k_\nu}}.$$

D'autre part, le second membre est bien la borne inférieure de I, qui est atteinte si l'on prend pour $\varphi_{n-1}(x)$ le polynome

$$g(x) = \frac{1}{\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} \frac{l_\nu^2(x_0)}{k_\nu}} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{l_\nu(x_0)}{k_\nu}\, l_\nu(x),$$

pour lequel

$$\int_{-1}^{+1} g^2(x)\, p(x)\, dx = \frac{1}{\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} \frac{l_\nu^2(x_0)}{k_\nu}}.$$

Donc, d'après (18),

$$\frac{1}{\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} \frac{l_\nu^2(x_0)}{k_\nu}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{minimum de} \displaystyle\int_{-1}^{+1} f^2(x)\, p(x)\, dx > m \min \int_{-1}^{+1} f^2(x)\, dx, \\ f(x) \text{ de degré } n-1, \\ f(x_0) = 1, \end{array} \right.$$

le second minimum étant pris dans les mêmes conditions que le premier. Nous devons donc résoudre le même problème que précédemment, mais avec le poids $p(x) = 1$. Le polynome correspondant étant le polynome de Legendre, nous aurons, pour la valeur de ce minimum, l'expression

$$m \frac{1}{\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} \frac{L_\nu^2(x_0)}{K_\nu}},$$

les grandes lettres indiquant que les quantités sont relatives aux abscisses de Legendre. Un calcul assez simple donne alors l'inégalité (15).

On peut déduire de propriétés connues du polynome de Legendre et de l'inégalité (15), que

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{l_\nu^2(x)}{k_\nu} \leqq c_1 n \qquad \text{pour} \quad -1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon, \tag{19}$$

c_1 étant une constante (dépendant de ε), et

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{l_\nu^2(x)}{k_\nu} < c_2 n^2 \qquad \text{pour} \quad -1 \leqq x \leqq 1. \tag{20}$$

Écrivons maintenant, en utilisant encore l'inégalité de Schwartz, que

$$\sum_{\nu=1}^{n} |l_\nu(x)| = \sum_{\nu=1}^{n} |l_\nu(x)| \frac{1}{\sqrt{k_\nu}} \sqrt{k_\nu} \leqq \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{l_\nu^2(x)}{k_\nu} \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu};$$

or,

$$\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu = \int_{-1}^{+1} p(x)\,dx,$$

et en vertu de (19) et (20), on en déduit que

$$\sum_{\nu=1}^{n} |l_\nu(x)| \leqq c_3 \sqrt{n} \qquad \text{pour} \quad -1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon,$$

et

$$\sum_{\nu=1}^{n} |l_\nu(x)| \leqq c_4 n \qquad \text{pour} \quad -1 \leqq x \leqq 1,$$

et le reste de la démonstration du théorème I est identique à celle du théorème I du n° 24.

Pour étudier la somme des $|l_\nu(x)|$, considérons le polynome de degré $n-1$, qui est égal, pour $x = \cos\theta$, à

$$\varphi(\cos\theta) = \frac{1}{n^2}\left[\left(\frac{\sin\frac{n(\theta-\theta_0)}{2}}{\sin\frac{\theta-\theta_0}{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sin\frac{n(\theta+\theta_0)}{2}}{\sin\frac{\theta+\theta_0}{2}}\right)^2\right],$$

où $\theta_0 = \theta_\nu$ correspond à l'abscisse x_ν où $\varphi(\cos\theta_\nu) = 1$. On peut écrire que

$$k_\nu < \varphi(x_\nu) k_\nu < \sum_{\nu=1}^{n} \varphi(\cos\theta_\nu) \int_{-1}^{+1} l_\nu(x) p(x)\, dx.$$

Mais

$$\int_{-1}^{+1} l_\nu(x) p(x)\, dx = \int_0^\pi l_\nu(\cos\theta) p(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta.$$

En faisant l'hypothèse $p(\cos\theta)\sin\theta < c$, il vient

$$k_\nu < c \int_0^\pi \varphi(\cos\theta)\, d\theta < \frac{c_5}{n} \qquad \text{(les } c \text{ étant toujours des constantes).}$$

Maintenant,

$$\sum_{\nu=1}^{n} l_\nu^2(x) < \frac{c_5}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{l_\nu^2(x)}{k_\nu},$$

et, en tenant compte de (20), nous aurons

$$\sum_{\nu=1}^{n} l_\nu^2(x) < c_6 n,$$

et, dans l'intervalle intérieur,

$$\sum_{\nu=1}^{n} l_\nu^2(x) < c_7.$$

On en déduit que dans ce cas les valeurs absolues des fonctions fondamentales sont bornées dans $(-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon)$. On en verra des applications dans le chapitre suivant.

CHAPITRE VI.

APPLICATIONS DES THÉORÈMES DE CONVERGENCE DES POLYNOMES DE LAGRANGE.

28. Les résultats de L. Fejér sur la distribution des points fondamentaux. — Jusqu'à maintenant nous avons toujours cherché, *pour un système de points fondamentaux donné*, des propriétés — et, en général, les propriétés de convergence ou divergence — des polynomes d'interpolation de Lagrange, et nous avons vu comment des hypothèses particulières faites sur le système de points fondamentaux (par exemple la distribution normale) permettent de trouver des théorèmes sur le comportement des suites $L_n(f)$. C'est M. Fejér qui a eu le premier l'idée de voir si la connaissance de propriétés interpolatoires permettent de tirer certains renseignements sur la distribution des points fondamentaux. Sous « propriété interpolatoire » nous entendons des relations ou conditions remplies par les quantités figurant dans les formules d'interpolation; par exemple, dans le cas des abscisses de Tchebychef, les fonctions fondamentales sont bornées : $|l_k(x)| < \sqrt{2}$, dans le cas où les points fondamentaux sont les zéros de polynomes orthogonaux par rapport à un poids positif, les nombres de Stieltjes (voir n° 17) sont positifs, et ainsi de suite.

Le premier théorème de M. Fejér [6] est le suivant :

Si les points fondamentaux $x_k^{(n)}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ *de l'interpolation sont normalement distribués dans* $a \leqq x \leqq b$, *alors ils couvrent l'intervalle d'une façon partout dense*, dans le sens strict suivant : si i désigne un intervalle partiel quelconque de $a \leqq x \leqq b$, au moins un point fondamental $x_k^{(n)}$ tombe dans cet intervalle i, pour n assez grand.

Soit $\lambda < x < \eta$ cet intervalle i, situé tout entier dans (a, b) : $a < \lambda < \eta < b$, et considérons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } a \leqq x < \lambda, \\ (x-\lambda)(\mu - x) & \text{pour } \lambda \leqq x \leqq \mu, \\ 0 & \text{pour } \mu < x \leqq b, \end{cases}$$

qui satisfait dans l'intervalle $a \leqq x \leqq b$ à une condition de Lipschitz d'exposant $\sigma > \frac{1}{2}$ (et même $\sigma = 1$).

Supposons maintenant que la proposition relative à la distribution des points fondamentaux ne soit pas vraie. Il existe alors une suite indéfinie d'indices

$$n_1, \quad n_2, \quad \ldots, \quad n_\nu, \quad \ldots$$

telle que les systèmes de points $x_1^{(n_\nu)}, x_2^{(n_\nu)}, \ldots, x_{n_\nu}^{(n_\nu)}$ correspondant à ces indices n'aient pas d'éléments dans l'intervalle $\lambda < x < \eta$. Mais alors $L_{n_\nu}(x) \equiv 0$, et ainsi

$$\lim_{\nu \to \infty} L_{n_\nu}(x) = 0,$$

pour toute valeur de x. D'après le théorème II, du n° **24**, on aura, pour le point $x = \frac{\lambda + \mu}{2}$,

$$\lim_{n_\nu \to \infty} L_{n_\nu}\left(\frac{\lambda + \mu}{2}\right) = f\left(\frac{\lambda + \mu}{2}\right)^2 = \left(\frac{\mu - \lambda}{2}\right)^2 \neq 0,$$

ce qui conduit à une contradiction. Le théorème est donc démontré.

Considérons maintenant les « nombres de Cotes »

$$\lambda_k^{(n)} = \int_{-1}^{+1} l_k^{(n)}(x)\, dx \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots),$$

c'est-à-dire l'intégrale des fonctions fondamentales.

Si les nombres de Cotes possèdent la propriété d'être non négatifs,

$$\lambda_k^{(n)} \geqq 0 \qquad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots,$$

alors les points fondamentaux $x_k^{(n)}$ sont encore distribués d'une façon partout dense dans l'intervalle (a, b), dans le sens précisé tout à l'heure. Le rôle de ces nombres de Cotes sera expliqué dans le chapitre suivant, dans la théorie des procédés de quadrature où nous signalerons aussi la démonstration de la proposition précédente, d'ailleurs analogue à celle que nous avons donnée ici.

29. Quelques recherches récentes. — M. Fejér [6] a établi encore des limites supérieures pour la différence de deux points fondamentaux consécutifs, dans le cas de distribution normale. Ces résultats ont été généralisés par MM. Erdös, Grunwald et Turán. La plupart de leurs recherches ne sont pas encore publiées, et nous avons le plaisir de les insérer ici avant leur publication.

Théorème I (de Erdös-Turán). — *Considérons la classe de points fondamentaux de l'intervalle* $-1 \leqq x \leqq 1$

$$x_k^{(n)} = \cos \theta_k^{(n)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Si les fonctions fondamentales correspondantes sont toutes bornées dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$,

(1) $\qquad |l_k(x)| \leqq c \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 0, 1, 2, \ldots),$

alors on a les deux inégalités

(2) $$\theta_{k+1}^{(n)} - \theta_k^{(n)} > \frac{c_1}{n}$$

et

(3) $$\theta_{k+1}^{(n)} - \theta_k^{(n)} < \frac{c_2}{n} \qquad (c_1 \text{ et } c_2 \text{ indépendants de } n).$$

La limitation supérieure est valable aussi pour $k = 0$ et $k = n$, tandis que pour l'inférieure ce n'est pas vrai.

Théorème II (de Erdös-Turán). — *Si l'on fait l'hypothèse relative aux nombres de Cotes*

(4) $$|\lambda_k^{(n)}| < cn^\alpha \qquad (c \text{ et } \alpha \text{ indépendants de } n \text{ et } k),$$

n étant fixe et $k = 1, 2, \ldots, n$, alors on a l'inégalité

$$\theta_{k+1}^{(n)} - \theta_k^{(n)} < c_1 \frac{\log n}{n} \qquad (c_1 = \text{const.}).$$

Corollaire. — *Si les $x_k^{(n)}$ sont les zéros d'un polynome orthogonal par rapport à un poids $p(x) > 0$, l'inverse de ce poids $\frac{1}{p(x)}$ étant supposé intégrable au sens de Riemann, on aura encore le théorème* II.

Théorème III (de Grünwald-Turán). — *Si le poids $p(x)$ est supérieur à une quantité m*

$$p(x) > m,$$

on a l'inégalité

$$\theta_{k+1}^{(n)} - \theta_k^{(n)} > \frac{c}{n^2} \qquad (c = \text{const.}).$$

Faisons l'hypothèse restrictive que $p(x) \geqq m$ et possède un nombre fini de points où il devient infini (Erdös-Turán). On aura, dans tout intervalle excluant ces points singuliers, les inégalités (2) et (3).

Si l'on remplace la condition (4) par celle que tous les nombres de Cotes soient non négatifs (Erdös-Turán)

$$\lambda_k^{(n)} \geqq 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

on pourra démontrer que

$$\theta_{k+1}^{(n)} - \theta_k^{(n)} < \frac{c}{n} \qquad (c = \text{const.}).$$

Indiquons encore que les inégalités (2) et (3) restent valables aussi dans le cas où l'interpolation d'Hermite de toute fonction continue est convergente (ou seulement si tous les $|h_k(x)|$ sont bornés).

CHAPITRE VII.

CONVERGENCE DES PROCÉDÉS DE QUADRATURE MÉCANIQUE.

Les possibilités de la convergence des procédés classiques de calcul numérique d'intégrales définies ont été recherchées, pour la première fois, par Stieltjes. Il a démontré que les valeurs approchées fournies par la méthode de quadrature de Gauss tendent vers la valeur exacte de l'intégrale, s'il s'agit d'une intégrale au sens de Riemann. Il a soulevé par ailleurs la question si le procédé de Newton-Cotes fournit le même résultat.

M. Pólya, en étudiant cette question, a introduit une notion plus générale de procédé de quadrature, et a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence de tels procédés.

Nous traiterons d'abord ce cas général, dont les procédés interpolatoires ne forment, en vérité, qu'un cas particulier. Le résultat classique de Stieltjes, ainsi que les considérations élégantes de M. Fejér seront esquissées en relation avec ce dernier cas. Nous mentionnons à la fin de ce chapitre quelques résultats d'autre nature, tandis que les méthodes d'un caractère entièrement différent (de Misès [1, 2], R. Schmidt [1]) ne peuvent pas être traitées ici à cause de l'étendue limitée de ce travail.

30. **Les théorèmes de convergence de G. Pólya.** — Un procédé de quadrature (Q) sera défini par les deux schémas

$$(Q) \qquad x_{nj} \quad \text{et} \quad \lambda_{nj} \qquad (j=1, 2, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots),$$

où les x_{nj} appartiennent à l'intervalle (a, b) donné

$$a \leqq x_{n1} < x_{n2} < \ldots < x_{nn} \leqq b \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

A toute fonction $f(x)$, définie et intégrable au sens de Riemann dans (a, b), appartient une suite de « quadratures »

$$Q_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{nj} f(x_{nj}) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

L'intervalle (a, b) est ***l'intervalle fondamental***, les nombres x_{nj} les ***points fondamentaux***, les nombres λ_{nj} ***les poids*** du procédé de quadrature. Il s'agit de trouver des conditions pour que la convergence

$$\lim_{n \to \infty} Q_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{K}$$

ait lieu.

Introduisons les deux conditions

I. $$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_{nj}| < L \qquad \text{(constante indépendante de } n\text{)}.$$

II. $$\limsup_{n \to \infty} \sum_{\mathrm{I}} |\lambda_{nj}| = \Lambda(\mathrm{I}),$$

où I désigne la somme d'un nombre fini d'intervalles fermés appartenant à (a, b), la sommation étant étendue à toutes les valeurs de x_{nj} qui tombent dans I. Soit ensuite $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \ldots$ une suite arbitraire de telles sommes d'intervalles I, décroissantes et de longueur totale tendant vers o, $\Lambda(\mathrm{I})$ est une fonction de la somme d'intervalles I, et ses propriétés principales sont qu'elle est : non négative,

$$\Lambda(\mathrm{I}) \geqq 0;$$

monotone,

$$\Lambda(\mathrm{I}) \leqq \Lambda(\mathrm{I} + \mathrm{I}^*);$$

sous-additive,

$$\Lambda(\mathrm{I} + \mathrm{I}^*) \leqq \Lambda(\mathrm{I}) + \Lambda(\mathrm{I}^*).$$

La longueur totale $m(\mathrm{I}_n)$ tend, par hypothèse, vers o avec $\frac{1}{n}$

$$\mathrm{I}_1 \supset \mathrm{I}_2 \supset \ldots \supset \mathrm{I}_n \supset \ldots, \qquad \lim_{n \to \infty} m(\mathrm{I}_n) = 0.$$

On peut alors supposer que

$$\lim_{n \to \infty} \Lambda(\mathrm{I}_n) = 0. \tag{2}$$

Dans ce cas la fonction $\Lambda(\mathrm{I})$ est dite « semi-continue ».

Si l'on désigne par P la classe des polynomes, par C celle des fonctions continues et par R celle des fonctions intégrables au sens de Riemann, les théorèmes de M. Pólya [1] s'énoncent de la façon suivante :

THÉORÈME A. — *Supposons la relation* (K) *vérifiée pour la classe* P. *Pour qu'elle soit vraie aussi pour la classe* C, *il faut et il suffit que la condition* I *soit vérifiée.* (La nécessité de I est signalée déjà par E. HELLY, *Sitzungsber. d. Akad. in Wien*, **121**, 1912, p. 265-297.)

THÉORÈME B. — *Supposons* (K) *vérifiée pour la classe* C. *Il en sera de même pour* R, *sous la condition nécessaire et suffisante* II.

Pour ce qui est du cas des polynomes, nous ne nous y arrêterons pas longtemps. L'opération $Q_n(f)$ étant linéaire, on aura

$$Q_n(f+g) = Q_n(f) + Q_n(g), \qquad Q_n(cf) = c\,Q_n(f), \tag{3}$$

donc le procédé convergera pour tout polynome s'il converge pour les polynomes spéciaux $1, x, x^2, \ldots$, parce que tout polynome peut être formé par une combinaison linéaire de ces derniers. Il est nécessaire et suffisant pour la convergence du procédé de quadrature dans le cas des polynomes que l'on ait

$$\lim_{n \to \infty} [\lambda_{n1} x_{n1}^k + \lambda_{n2} x_{n2}^k + \ldots + \lambda_{nn} x_{nn}^k] = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Passons maintenant à la démonstration du théorème A. Pour la démonstration du théorème B qui est basée sur un raisonnement bien connu, dû à M. Lebesgue, mais qui est un peu longue, le lecteur est prié de se reporter au Mémoire cité de M. G. Pólya.

Désignons une fonction continue par $C(x)$ en général, et déterminons conformément au théorème de Weierstrass, un polynome $P(x)$ tel que, $\varepsilon > 0$ étant donné, on ait

$$|C(x) - P(x)| < \varepsilon. \tag{4}$$

Alors

$$\left|\int_a^b C(x)\,dx - Q_n(C)\right|$$
$$\leqq \int_a^b |C(x)-P(x)|\,dx + \left|\int_a^b P(x)\,dx - Q_n(P)\right| + \sum_{j=1}^{n} |P(x_{nj}) - C(x_{nj})|\,|\lambda_{nj}|$$
$$\leqq \varepsilon(b-a) + \varepsilon + \varepsilon L,$$

d'après (5) et I. Cela démontre donc que I est une condition suffisante.

Si l'on supposait alors que la condition I n'est pas vérifiée, on pourra construire par une méthode fréquemment employée, et qui remonte à M. Lebesgue [3], une fonction continue $c(x)$, pour laquelle $Q_n(c)$ est divergente.

Si nous posons

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_{nj}| = \Lambda_n,$$

notre hypothèse s'exprime par

$$\limsup_{n\to\infty} \Lambda_n = +\infty.$$

Considérons la fonction $g_k(x)$ qui est « en résonance » avec le procédé (Q), c'est-à-dire telle que

$$(5)\qquad \begin{cases} |g_k(x)| \leqq 1 & \text{pour } a \leqq x \leqq b, \\ Q_k(g_k) = \Lambda_k. \end{cases}$$

On obtient cette fonction, en posant

$$(6)\qquad \begin{cases} g_k(x_{kj}) = \dfrac{\lambda_{kj}}{|\lambda_{kj}|} & (j = 1, 2, \ldots, k), \\ g_k(x_{kj}) = 0 & \text{pour } \lambda_{kj} = 0, \end{cases}$$

et en prenant $g_k(x)$ *linéaire* dans les $k-1$ intervalles $(x_{kj}, x_{k,j+1})$, et constante dans les deux intervalles extrêmes (a, x_{k1}) et (x_{kk}, b).

Faisons les deux hypothèses suivantes :

α. Il existe un k tel que

$$(7)\qquad \limsup_{n\to\infty} Q_n(g_k) = +\infty.$$

Dans ce cas la fonction continue cherchée est $c(x) = g_k(x)$.

β. La limite figurant au premier membre de (7) est finie pour $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Définissons alors une suite partielle indéfinie de fonctions $g_k(x)$

$$g_{k_1}(x), \quad g_{k_2}(x), \quad \ldots, \quad g_{k_n}(x), \quad \ldots.$$

On détermine $g_{k_n}(x)$ par induction totale, en prenant $g_{k_1}(x) = g_1(x)$, et

$$\text{borne sup}\left| Q_n\left(\frac{g_{k_1}}{3} + \frac{g_{k_2}}{3^2} + \ldots + \frac{g_{k_{m-1}}}{3^{m-1}}\right)\right| = M_{m-1} \qquad (\text{nombre} > 0, \text{ fini}).$$

On peut choisir la fonction $g_{k_m}(x)$ de telle façon que

$$k_m > k_{m-1}$$

et

$$(8) \qquad \Lambda_{k_m} > 3^m 2(M_{m-1} + m).$$

Si nous posons maintenant

$$c(x) = \frac{g_{k_1}(x)}{3} + \frac{g_{k_2}(x)}{3^2} + \ldots + \frac{g_{k_m}(x)}{3^m} + \ldots,$$

$c(x)$ sera, comme la somme d'une série uniformément convergente, une fonction continue, pour laquelle

$$Q_{k_m}(c) = \frac{1}{3^m} Q_{k_m}(g_{k_m})$$
$$+ Q_{k_m}\left(\frac{g_{k_1}}{3} + \frac{g_{k_2}}{3^2} + \ldots + \frac{g_{k_{m-1}}}{3^{m-1}}\right) + Q_{k_m}\left(\frac{g_{k_{m+1}}}{3^{m+1}} + \frac{g_{k_{m+2}}}{3^{m+2}} + \ldots\right),$$

donc

$$Q_{k_m}(c) \geqq \frac{1}{3^m}\Lambda_{k_m} - M_{m-1} - \Lambda_{k_m}\left(\frac{1}{3^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+2}} + \ldots\right) = \frac{\Lambda_{k_m}}{3^m . 2} - M_{m-1},$$

d'où. en vertu de (8),

$$Q_{k_m}(c) \geqq m.$$

Si $m \to \infty$, le procédé est divergent, et cela démontre la nécessité de la condition I.

Le passage des polynomes aux fonctions analytiques est plus difficile que les cas des théorèmes A et B. Pour ces fonctions, M. Pólya a étudié le procédé de Newton-Cotes, qui est un procédé interpolatoire. Nous en parlerons donc dans le numéro suivant, et ici nous n'indiquerons que le résultat relatif aux abscisses équidistantes.

Alors

$$Q_n(f) = \lambda_{n0} f\left(\frac{0}{n}\right) + \lambda_{n1} f\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots + \lambda_{nn} f\left(\frac{n}{n}\right),$$

où

$$\lambda_{nk} = \int_0^1 \frac{nx(nx-1)\ldots(nx-k+1)(nx-k-1)\ldots(nx-n)}{k(k-1)\ldots 2.1(-1)\ldots(k-n)}\,dx.$$

M. Ouspensky [1] a établi (et M. Pólya l'a retrouvé dans son travail cité) l'expression asymptotique

$$\lambda_{nk} = -\frac{1}{n(\log n)^2} C_n^k \left[\frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^{n-k}}{n-k}\right](1 + \eta_{nk}),$$

où $\eta_{nk} \to 0$, pour $n \to \infty$, uniformément pour $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$.

M. Pólya a démontré, à l'aide de cette formule asymptotique, que le procédé de quadrature de Newton-Cotes ne peut pas être convergent pour toute fonction continue, de même qu'il ne sera pas convergent pour toute fonction analytique dans l'intervalle $(0, 1)$. La méthode employée ici est encore celle de la construction de Lebesgue.

31. **Les formules de quadrature interpolatoires.** — Un cas particulier très important de la théorie précédente est celui où $Q_n(f)$ est une formule de quadrature interpolatoire, c'est-à-dire où $Q_n(f)$ est l'intégrale du polynome bien défini, de degré $\leqq n-1$, qui interpole la fonction $f(x)$ aux points $x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nn}$. Dans ce cas, les poids $\lambda_{nk} (k = 1, 2, \ldots, n)$ sont entièrement définis par les points fondamentaux x_{nk}. Le procédé converge sûrement pour tout polynome $f(x)$, car alors $Q_n(f)$ est exactement égal à $\int_a^b f(x)\,dx$, tant que n dépasse le degré de $f(x)$. Considérons la formule d'interpolation de Lagrange :

$$L_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{nk})\, l_{nk}(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, l_k(x).$$

Alors

$$(9) \qquad Q_n(f) = \int_a^b L_n(f)\,dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \int_a^b l_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\lambda_k,$$

où

$$(10) \qquad \lambda_k = \int_a^b l_k(x)\,dx \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

sont les « nombres de Cotes » de la quadrature. En tenant compte de l'identité $\sum_{k=1}^{n} l_k(x) = 1$, on tire de (10) une identité relative aux nombres de Cotes

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = b - a. \tag{11}$$

Dans le cas de l'intervalle $-1 \leq x \leq 1$, on aura $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 2$.

Le premier résultat important relatif à ce procédé a été établi par Stieltjes [2]. Il a démontré que l'on a, dans le cas où les points fondamentaux x_k sont les zéros du $n^{\text{ième}}$ polynome de Legendre $P_n(x)$, la relation

$$\lim_{n \to \infty} Q_n(f) = \int_{-1}^{+1} f(x)\, dx. \tag{12}$$

Stieltjes a basé la démonstration de son théorème sur les trois faits suivants :

I. Les nombres de Cotes λ_k, relatifs aux abscisses de Legendre, sont tous positifs. (Propriété connue par Gauss.)

II. $$1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k) < x_k < 1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{k-1})$$
(Tchebycheff, Markoff).

III. $$\operatorname*{Max}_{k=1,2,\ldots,n} \lambda_k \to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty.$$

(Ce résultat a été établi par M. Fejér pour tous les cas où les nombres de Cotes sont non négatifs, de même que le résultat indiqué p. 59). M. Fejér [10] a observé que la condition I seule suffit pour la convergence du procédé de quadrature, et a démontré le théorème général suivant :

Théorème I. — Soit $x_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$ une suite triangulaire indéfinie de points, situés tous dans l'intervalle $-1 \leq x \leq 1$, les points du n^{ieme} groupe $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ étant tous différents. *Si les nombres de Cotes correspondants* $\lambda_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n;$ $n = 1, 2, \ldots)$ *sont tous non négatifs, on a la relation* (12), pourvu que $f(x)$ soit borné et intégrable au sens de Riemann dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$.

Nous voyons que ce théorème est une conséquence très importante des théorèmes de Pólya, parce que l'identité (11) et l'hypothèse $\lambda_k \geqq 0$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) montrent que la condition I du n° 29 est vérifiée.

M. Pólya, en le généralisant un peu, a énoncé ce théorème sous la forme suivante : Si un procédé de quadrature est convergent pour tout polynome, et si les poids sont tous non négatifs : $\lambda_{nk} \geqq 0$, alors le procédé converge aussi pour toute fonction intégrable.

Rappelons que ce théorème est valable aussi pour le cas où les points fondamentaux sont les zéros du polynome de degré n

$$R_n(x) = P_n(x) + A P_{n-1}(x) + B P_{n-2}(x).$$

$P_n(x)$ étant le $n^{\text{ième}}$ polynome de Legendre, A et $B \leqq 0$ deux constantes choisies de façon que les zéros de $R_n(x)$ soient tous réels, difrents et situés dans $-1 \leqq x \leqq 1$.

Pour démontrer que les nombres de Cotes sont encore non négatifs, employons la différence introduite dans le n° 26

$$l_k^2(x) - l_k(x) = g(x) R_n(x),$$

où $g(x)$ est un polynome de degré $n-2$ qu'on peut développer en série de polynomes de Legendre

$$g(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_{n-2} P_{n-2}(x) \qquad \text{avec} \quad c_{n-2} > 0.$$

L'orthogonalité des polynomes de Legendre permet alors d'écrire que

$$\int_{-1}^{+1} [l_k^2(x) - l_k(x)]\, dx = c_{n-2} B \int_{-1}^{+1} P_{n-2}^2(x)\, dx.$$

L'hypothèse $B \leqq 0$ montre que

$$\lambda_k = \int_{-1}^{+1} l_k(x)\, dx \geqq \int_{-1}^{+1} l_k^2(x)\, dx > 0. \tag{13}$$

M. Fejér a indiqué quelques cas — des polynomes particuliers de Jacobi — où les nombres de Cotes sont non négatifs. Tels sont par exemple les polynomes de Jacobi de paramètres :

$\alpha = \beta = -1$ (polynome proportionnel à $P_n - P_{n-2}$, considéré déjà par R. Radau [1]),

$\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ [polynome de Tchebychef $T_n(x)$],

$\alpha = \beta = 0$ [polynome de Legendre $P_n(x)$],

$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ [polynome de Tchebychef $U_n(x)$],

$\alpha = -1, \beta = -\frac{1}{2}$ (polynome proportionnel à $P_n - P_{n-1}$).

Le cas général des polynomes de Jacobi, au point de vue de la convergence de la formule de quadrature formée sur ses zéros, a été traité par M. Szego [2], qui a établi le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Si* $\max(\alpha, \beta) > \frac{3}{2}$, *il existe une fonction* $f(x)$ *continue dans l'intervalle* $(-1, +1)$ *pour laquelle la suite des quadratures* (9) *est divergente.*

Si $\max(\alpha, \beta) < \frac{3}{2}$, *les quadratures* $Q_n(f)$ *convergent vers* $\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx$ *pour toute fonction* $f(x)$, *intégrable dans l'intervalle* $-1 \leq x \leq 1$. *Le même résultat est encore valable pour* $\alpha = \beta = \frac{3}{2}$.

Nous voyons donc que les formules de quadrature déduites de la formule d'interpolation de Lagrange par intégration peuvent être convergentes bien que la formule de Lagrange elle-même est divergente.

32. Le cas où les points fondamentaux sont les zéros de polynomes orthogonaux. — Il faut distinguer des résultats relatifs à la positivité des nombres de Cotes d'autres résultats anciens (connus par Heine et Stieltjes), correspondant au cas où les points fondamentaux sont les zéros de polynomes orthogonaux, et où l'on fait l'intégration avec le poids.

Considérons une fonction $p(x)$, non négative et intégrable dans l'intervalle $-1 \leq x \leq 1$, et soit

$$\omega_0(x), \quad \omega_1(x), \quad \ldots, \quad \omega_n(x), \quad \ldots$$

la suite de polynomes *orthonormés* par rapport au poids $p(x)$ dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$

$$\int_{-1}^{+1} \omega_m(x)\,\omega_n(x)\,p(x)\,dx = \delta_{mn},$$

où $\delta_{mn} = 0$ si $m \neq n$, et $\delta_{nn} = 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Il est connu que tous les zéros $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'un tel polynome $\omega_n(x)$ sont réels, distincts et tombent dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$. La fonction fondamentale $l_k(x)$ de l'interpolation de Lagrange formée sur ces points fondamentaux x_k est encore égale à

$$l_k(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k)(x - x_k)}.$$

On sait (*voir* par exemple Feldheim, [2]) que $l_k(x)$ peut être développé, à l'aide de la formule de Darboux [1], en une série de polynomes $\omega_r(x)$

$$(14) \qquad l_k(x) = -\frac{a_{n+1}}{a_n}\,\frac{1}{\omega_{n+1}(x_k)\,\omega_n'(x_k)} \sum_{r=0}^{n-1} \omega_r(x_k)\,\omega_r(x)$$
$$= \frac{1}{\sum_{s=0}^{n} \omega_s^2(x_k)} \sum_{r=0}^{n-1} \omega_r(x_k)\,\omega_r(x),$$

où a_n est le coefficient de x^n dans $\omega_n(x)$. Le développement (14) fournit alors la relation suivante, démontrée d'ailleurs directement dans le n° 26,

$$(15) \qquad \int_{-1}^{+1} l_k(x)\,p(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} l_k^2(x)\,p(x)\,dx = \frac{1}{\sum_{s=0}^{n-1} \omega_s^2(x_k)} > 0.$$

Les « nombres de Stieltjes » $\int_{-1}^{+1} l_k(x)p(x)\,dx$ sont donc tous positifs tandis que les nombres de Cotes $\int_{-1}^{+1} l_k(x)\,dx$ ne le sont pas toujours. Pour les polynomes de Legendre $p(x) = 1$, la positivité des nombres de Cotes correspondants résulte donc simplement de (15). Pour les abscisses de Tchebychef. (15) donne

$$\int_{-1}^{+1} l_k(x)\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} > 0 \qquad \text{pour } k = 1, 2, \ldots, n;\ x_k = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n},$$

et le résultat de M. Fejér s'exprime par $\int_{-1}^{+1} l_k(x)\,dx > 0$, pour $k = 1, 2, \ldots, n$.

La relation (15) montre que si l'on effectue l'intégration avec le poids $p(x)$, le procédé de quadrature converge pour toute fonction $f(x)$ bornée et intégrable dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{+1} L_n(f)\,p(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} f(x)\,p(x)\,dx,$$

dans tous les cas où les points fondamentaux sont les zéros de polynomes orthogonaux relatifs au poids $p(x) > 0$, borné et intégrable dans $-1 \leqq x \leqq 1$.

33. D'autres résultats. — MM. Shohat et Winston [1] ont étudié le procédé de quadrature mécanique rapporté à un poids positif dont nous venons de parler, et ont donné, dans les cas des abscisses de Jacobi, de Laguerre et d'Hermite, des limitations pour les nombres de Stieltjes

$$H_{k,n} = \int_a^b l_k^{(n)}(x)\,p(x)\,dx \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Dans le cas des abscisses d'Hermite, ils ont établi des propriétés de séparation intéressantes pour les nombres $H_{k,n}$.

Mentionnons encore les recherches de MM. Shohat [1, 2], Winston [1], Kryloff [1, 5], Stekloff [1, 2, 3], S. Bernstein [16], et beaucoup d'autres que la brièveté nous oblige de laisser de côté.

Disons seulement quelques mots de la formule de quadrature interpolatoire obtenue par l'intégration de la formule d'interpolation d'Hermite [formule (3), Chap. IV]

$$X_n(x) = H_n(x) + \mathcal{H}_n(x).$$

Dans quelques cas particuliers [par exemple pour les abscisses de Tchebychef, zéros de $T_n(x)$ et $U_n(x)$], on peut démontrer que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{+1} X_n(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx,$$

(Fejér [3], Feldheim [5]), mais, en général, la question n'est pas encore traitée.

Si les points fondamentaux sont les zéros de polynomes orthogonaux par rapport à un poids $p(x) \geqq \mathrm{M} > 0$, on aura toujours

$$(16) \qquad \int_{-1}^{+1} \mathfrak{h}_k(x) p(x)\, dx = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_{-1}^{+1} h_k(x) p(x)\, dx > 0,$$

d'où

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{+1} \mathrm{X}_n(x) p(x)\, dx = \int_{-1}^{+1} f(x) p(x)\, dx.$$

Si les points fondamentaux sont encore normalement distribués, on a

$$h_k(x) = v_k(x)\, l_k^2(x) \geqq 0 \qquad \text{dans} \quad -1 \leqq x \leqq 1,$$

donc aussi

$$\int_{-1}^{+1} h_k(x)\, dx \geqq 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

et ainsi

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{+1} \mathrm{X}_n(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{+1} \mathrm{H}_n(x)\, dx = \int_{-1}^{+1} f(x)\, dx.$$

La première relation (16) résulte très facilement de l'hypothèse d'orthogonalité des polynomes

$$\omega_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k).$$

En effet,

$$\mathfrak{h}_k(x) = l_k^2(x)(x - x_k) = \frac{1}{\omega'_n(x_k)}\, l_k(x)\, \omega_n(x),$$

et $l_k(x)$ étant un polynome de degré $n - 1$, on aura bien

$$\int_{-1}^{+1} \mathfrak{h}_k(x) p(x)\, dx = \frac{1}{\omega'_n(x_k)} \int_{-1}^{+1} l_k(x)\, \omega_n(x) p(x)\, dx = 0.$$

C'est une propriété générale, valable pour tous les polynomes orthogonaux. Pour les polynomes spéciaux de Tchebychef

$$\mathrm{T}_n(x) = \cos n(\arccos x),$$

nous avons une propriété très intéressante

$$\int_{-1}^{+1} \mathfrak{h}_{i_1}(x)\, \mathfrak{h}_{i_2}(x) \ldots \mathfrak{h}_{i_r}(x) \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n;\ i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_r),$$

c'est-à-dire les polynomes $\mathfrak{h}_k(x)$ de degré $2n - 1$ vérifient entre eux une relation d'orthogonalité d'ordre quelconque (Feldheim [2]).

CHAPITRE VIII.

CONVERGENCE D'ORDRE SUPÉRIEUR DANS L'INTERPOLATION DE LAGRANGE.

34. Convergence en moyenne. — MM. Erdös et Turán [1] ont étudié dans un travail récent la possibilité de la convergence en moyenne des polynomes d'interpolation de Lagrange, et ont obtenu les théorèmes suivants :

Théorème I. — *La convergence en moyenne*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{+1} [f(x) - L_n(f)]^2 \, dx = 0 \tag{1}$$

a lieu pour toute fonction intégrable au sens de Riemann $f(x)$ dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$, dans tous les cas où les points fondamentaux sont les zéros de polynomes orthogonaux $\omega_n(x)$, formés par rapport à un poids $p(x) \geqq M > 0$, intégrable dans $-1 \leqq x \leqq 1$.

Théorème II. — *La relation limite* (1) *a lieu aussi dans le cas plus général où les points fondamentaux sont les zéros du polynome*

$$R_n(x) = \omega_n(x) + A_n \, \omega_{n-1}(x) + B_n \, \omega_{n-2}(x),$$

où les $\omega_n(x)$ sont les polynomes orthogonaux précédents, A_n et $B_n \leqq 0$ deux constantes choisies de façon que tous les zéros de $R_n(x)$ soient réels, distincts et situés dans $-1 \leqq x \leqq 1$.

Nous ne démontrerons que le théorème I, et cela encore dans le cas des fonctions continues. Il est basé sur la propriété d'orthogonalité, déjà signalée, des fonctions fondamentales $l_k^{(n)}(x)$, relatives aux zéros des polynomes orthogonaux

$$\int_{-1}^{+1} l_i^{(n)}(x) \, l_k^{(n)}(x) \, p(x) \, dx = 0 \qquad \text{pour} \quad i \neq k,$$

qui résulte aussi facilement du développement (15) du n° 32.

Considérons un nombre $\varepsilon > 0$ donné, aussi petit que l'on veut, et adjoignons à $f(x)$ un polynome $\varphi(x)$ de degré $\leqq n - 1$ tel que, si l'on fait

$$f(x)-\varphi(x)=\Delta(x),$$

on ait $|\Delta(x)|\leqq\varepsilon$, pour $-1\leqq x\leqq 1$.

Nous avons déjà vu que

$$f(x)-\mathrm{L}_n(f)=f(x)-\varphi(x)-\mathrm{L}_n[f(x)-\varphi(x)]=\Delta(x)-\mathrm{L}_n(\Delta),$$

de sorte que

$$\int_{-1}^{+1}[f(x)-\mathrm{L}_n(f)]^2\,p(x)\,dx=\int_{-1}^{+1}[\Delta(x)-\mathrm{L}_n(\Delta)]^2\,p(x)\,dx$$

$$\leqq 2\int_{-1}^{+1}\Delta^2(x)\,p(x)\,dx+2\int_{-1}^{+1}\mathrm{L}_n^2(\Delta)\,p(x)\,dx.$$

Or

$$2\int_{-1}^{+1}\Delta^2(x)\,p(x)\,dx\leqq 2\varepsilon^2\int_{-1}^{+1}p(x)\,dx=\frac{2\varepsilon^2}{\omega_0^2(x)}=\frac{2\varepsilon^2}{a_0^2},$$

et

$$2\int_{-1}^{+1}\mathrm{L}_n^2(\Delta)\,p(x)\,dx=2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\Delta(x_i)\,\Delta(x_k)\int_{-1}^{+1}l_i^{(n)}(x)\,l_k^{(n)}(x)\,p(x)\,dx$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}\Delta^2(x_k)\int_{-1}^{+1}l_k^2(x)\,p(x)\,dx$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}\Delta^2(x_k)\int_{-1}^{+1}l_k(x)\,p(x)\,dx,$$

et ainsi

$$2\int_{-1}^{+1}\mathrm{L}_n^2(\Delta)\,p(x)\,dx\leqq 2\varepsilon^2\sum_{k=1}^{n}\int_{-1}^{+1}l_k(x)\,p(x)\,dx=2\varepsilon^2\int_{-1}^{+1}p(x)\,dx=\frac{2\varepsilon^2}{a_0^2}.$$

Finalement

$$(2)\qquad\int_{-1}^{+1}[f(x)-\mathrm{L}_n(f)]^2\,p(x)\,dx\leqq\frac{4\varepsilon^2}{a_0^2}\qquad\text{si}\quad n\to\infty.$$

Mais, par hypothèse, $p(x)\geqq\mathrm{M}>0$, donc

$$0<\int_{-1}^{+1}[f(x)-\mathrm{L}_n(f)]^2\,dx\leqq\frac{1}{\mathrm{M}}\int_{-1}^{+1}[f(x)-\mathrm{L}_n(f)]^2\,p(x)\,dx\leqq\frac{4\varepsilon^2}{\mathrm{M}\,a_0^2},$$

ce qui démontre le théorème I, pour les fonctions continues. Pour ce qui est du passage des fonctions continues aux fonctions intégrables au sens de Riemann, nous renvoyons au Mémoire cité des auteurs.

Si ce théorème est vérifié, on a *a fortiori*, pour toute fonction bornée et intégrable au sens de Riemann, la relation

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{+1} |f(x) - L_n(f)| \, dx = 0, \tag{3}$$

résultat plus fort que la convergence de quadrature. Pour cela il faut seulement supposer $p(x) \geqq 0$ dans $(-1, +1)$, et que les intégrales $\int_{-1}^{+1} p(x)\,dx$ et $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{p(x)}$ existent. On déduit alors de (2), au moyen de l'inégalité de Schwartz, que

$$\begin{aligned}
0 &\leqq \int_{-1}^{+1} |f(x) - L_n(f)| \, dx \\
&= \int_{-1}^{+1} |f(x) - L_n(f)| \sqrt{p(x)} \frac{dx}{\sqrt{p(x)}} \\
&\leqq \sqrt{\int_{-1}^{+1} [f(x) - L_n(f)]^2 p(x) \, dx} \sqrt{\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{p(x)}} \leqq \frac{2\varepsilon}{a_0} \sqrt{\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{p(x)}},
\end{aligned}$$

ce qui suffit pour la démonstration de (3).

Indiquons quelques cas où ces théorèmes sont valables. Si l'on considère les polynomes de Jacobi, relatifs au poids

$$p(x) = (1 - x)^{\alpha} (1 + x)^{\beta},$$

nous voyons que $p(x) > 0$ pour $-1 < \alpha \leqq 0$ et $-1 < \beta \leqq 0$, donc le théorème I est valable pour les zéros de $J_n(\alpha, \beta, x)$ de paramètres vérifiant ces inégalités, tandis que la relation (3) est applicable à tous les polynomes $J_n(\alpha, \beta, x)$, avec $-1 < \alpha < 1$, $-1 < \beta < 1$.

Mentionnons encore deux conditions pour la convergence (ou divergence) en moyenne :

CONDITION I. — *Il est suffisant (mais non nécessaire) pour la convergence en moyenne* (1) *que la somme*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{-1}^{+1} l_i(x) \, l_k(x) \, dx \right|$$

soit bornée pour $n \to \infty$ (Feldheim [2]).

CONDITION II. — *Si l'on a*

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{-1}^{+1} l_k^2(x)\,dx \to \infty \qquad \text{pour} \quad n \to \infty,$$

on pourra trouver une fonction continue $g(x)$ *telle que*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{-1}^{+1} [g(x) - L_n(g)]^2\,dx = +\infty \qquad \text{(Erdös-Turán, [1]).}$$

Indiquons un cas où la convergence en moyenne n'a pas lieu, mais où cette condition II ne suffit pas pour décider la question. C'est le cas des polynomes de Tchebychef

$$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta},$$

$$x = \cos\theta, \qquad x_k = \cos\theta_k = \cos\frac{\pi k}{n+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

qui est le polynome ultrasphérique, de paramètres $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, de poids $p(x) = \sqrt{1-x^2}$. Nous avons trouvé (Feldheim [5]) que pour ces points fondamentaux

$$\sum_{k=1}^{n} l_k^2(x) = 1 + \frac{3}{2(n+1)}[U_{n-1}^2(x) - 1],$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{-1}^{+1} l_k^2(x)\,dx = 2 + \frac{3}{n+1}\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{2r+1} = 2 + O\left(\frac{\log n}{n}\right),$$

donc reste borné pour $n \to \infty$.

Mais si l'on observe que, pour les points fondamentaux considérés, on a (Feldheim [3, 5])

$$(4) \qquad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} l_k(x) \equiv U_{n-1}(x),$$

dont la démonstration vient simplement du fait que

$$U_{n-1}(x_k) = \frac{\sin n\theta_k}{\sin\theta_k} = \frac{\sin n\dfrac{\pi k}{n+1}}{\sin\dfrac{\pi k}{n+1}} = (-1)^{k+1},$$

alors il en résulte que

$$(5)\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}\int_{-1}^{+1} l_i(x)\, l_k(x)\, dx = \int_{-1}^{+1} U_{n-1}^2(x)\, dx > \log\frac{2n}{3}.$$

Si nous considérons la fonction $f_n(x)$ définie de la manière suivante :

$$f_n(x_k^{(n)}) = (-1)^k \qquad \left(k = 1, 2, \ldots, n;\ x_k^{(n)} = \cos\frac{\pi k}{n+1}\right),$$

$f_n(x)$ est linéaire de $x_k^{(n)}$ à $x_{k+1}^{(n)}$ $\quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$

et $f_n(x)$ est constante de -1 à $x_n^{(n)}$ et de $x_1^{(n)}$ à $+1$,

on verra que, d'après (5),

$$\int_{-1}^{+1} L_n(f_n)^2\, dx > \log\frac{2n}{3},$$

et le procédé employé à plusieurs reprises permettra d'établir l'existence d'une fonction $g(x)$, continue dans l'intervalle $(-1, +1)$, pour laquelle, et sur les points fondamentaux $x_k^{(n)} = \cos\frac{k\pi}{n+1}$,

$$(6)\quad \limsup_{n\to\infty}\int_{-1}^{+1} [g(x) - L_n(g)]^2\, dx = +\infty.$$

Remarquons que la relation (2) étant valable pour ce cas aussi, nous aurons pour toute fonction continue

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{+1} [f(x) - L_n(f)]^2 \sqrt{1-x^2}\, dx = 0,$$

donc la convergence en moyenne sera vérifiée dans l'intervalle $-1+\varepsilon \leq x \leq 1-\varepsilon$,

$$(7)\quad \lim_{n\to\infty}\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} [f(x) - L_n(f)]^2\, dx = 0,$$

et cela montre que la divergence (6) est due à la croissance rapide des polynomes $L_n(f)$ aux extrémités de l'intervalle fondamental.

35. La forte convergence en moyenne dans le cas des abscisses de Tchebychef $x_k = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. — Le résultat relatif à la convergence en moyenne. vérifié pour une classe importante de points fondamentaux étant acquis, nous nous sommes proposé de rechercher s'il existe une fonction continue dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$, pour laquelle la relation plus forte

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{+1} [f(x) - L_n(f)]^4 \, dx = 0 \tag{8}$$

sera encore vérifiée. Nous avons résolu (Feldheim [2]) le problème dans le cas où les points fondamentaux sont les zéros du $n^{\text{ième}}$ polynome de Tchebychef $T_n(x) = \cos n\theta$, $x = \cos\theta$, et nous avons trouvé le

THÉORÈME I. — *Si les points fondamentaux sont les abscisses de Tchebychef* $x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, *on aura la relation* (8) *pour toute fonction continue* $f(x)$ *dans l'intervalle* $(-1, +1)$.

Le poids relatif à ce polynome $T_n(x)$, $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, étant toujours positif, il suffit de démontrer au lieu de (8), la relation

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{+1} [f(x) - L_n(f)]^4 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0. \tag{9}$$

En faisant le même raisonnement que pour la démonstration de la convergence en moyenne, nous aurons

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} [f(x) - L_n(f)]^4 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_{-1}^{+1} [\Delta(x) - L_n(\Delta)]^4 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &\leqq 8\int_{-1}^{+1} \Delta(x)^4 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + 8\int_{-1}^{+1} L_n(\Delta)^4 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

Si l'on tient compte du

THÉORÈME II. — *Dans le cas des abscisses de Tchebychef les fonctions fondamentales* $l_k(x)$ *vérifient la relation d'orthogonalité d'ordre pair*

$$\int_{-1}^{+1} l_{i_1}(x)\, l_{i_2}(x) \ldots l_{i_{2r}}(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \tag{10}$$

pour $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_{2r}$, $r = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$ (Feldheim [1]), et de l'inégalité de Fejér [6],

$$(11) \qquad \sum_{k=1}^{n} l_k^2(x) \leqq 2,$$

on pourra démontrer que

$$\int_{-1}^{+1} \mathrm{L}_n(\Delta)^4 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \leqq \mathrm{C}\pi\varepsilon^4 \qquad (\mathrm{C} = \text{constante indépendante de } n),$$

donc

$$\int_{-1}^{+1} [f(x) - \mathrm{L}_n(f)]^4 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \leqq 8(\mathrm{C}+1)\pi\varepsilon^4 \quad \text{si} \quad n \to \infty. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Dans ce cas nous avons même le théorème plus général suivant :

Théorème III. — *Si les points fondamentaux sont les points* $x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, *on a la relation*

$$(12) \qquad \lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{+1} [f(x) - \mathrm{L}_n(f)]^{2r}\, dx = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, \text{indépendant de } n)$$

si $f(x)$ *est une fonction continue dans l'intervalle* $(-1, +1)$.

Pour la démonstration voir Erdös-Feldheim [1].

On peut déduire de (12) que l'on a aussi

$$(13) \qquad \lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{+1} | f(x) - \mathrm{L}_n(f) |^p\, dx = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

ce qui est à rapprocher d'un résultat de M. J. Marcinkiewicz [2] (*voir* le n° 15).

Nous avons vu que les relations (10) et (11) sont essentielles pour la démonstration de notre théorème. Remarquons que, dans le cas de polynomes orthogonaux $\omega_n(x)$ généraux, la relation (10), avec $r = 2$, sera sûrement vérifiée, si l'on a

$$(14) \qquad \omega_n^3(x) = \sum_{k=n-3}^{3n} \alpha_k^{(n)} \omega_k(x).$$

Nous avons donc (Feldheim [2]) le

THÉORÈME IV. — *La relation limite* (8) *a lieu, pour les zéros de polynomes orthogonaux par rapport à un poids* $p(x) > 0$ *dans l'intervalle* $-1 \leq x \leq 1$, *si l'on a les deux conditions :*

a. $\sum_{k=1}^{n} l_k^2(x) < C$ (*constante indépendante de n*).

b. La relation (14) *est vérifiée. Cette condition peut être remplacée par les suivantes :*

$$\sum\sum\sum\sum_{\substack{1\\ i \neq k \neq p \neq q}}^{n} \left| \int_{-1}^{+1} l_i(x)\, l_k(x)\, l_p(x)\, l_q(x)\, dx \right| < C_1 \qquad \text{si} \quad n \to \infty,$$

ou

$$\left| \sum\sum\sum\sum_{\substack{1\\ i \neq k \neq p \neq q}}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_k \varepsilon_p \varepsilon_q \int_{-1}^{+1} l_i(x)\, l_k(x)\, l_p(x)\, l_q(x)\, dx \right| < C_2$$

si $n \to \infty$, *avec* $|\varepsilon_i| = 1$.

Indiquons pour terminer que la forte convergence en moyenne des polynomes d'interpolation de Lagrange n'est pas vérifiée dans le cas où les points fondamentaux sont les zéros $x_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ du polynome de Tchebychef $U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$, $x = \cos\theta$, même si l'on fait l'intégration par rapport au poids $p(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Nous avons démontré en effet (Feldheim [5]) qu'il existe une fonction $g(x)$, continue dans l'intervalle $-1 \leq x \leq 1$, telle que dans le cas considéré on ait la relation

$$\lim_{n \to \infty} \sup \int_{-1}^{+1} [g(x) - L_n(g)]^4 \sqrt{1 - x^2}\, dx = +\infty$$

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

Nous essayons de donner ici une bibliographie aussi complète que possible (en mai 1937) des problèmes traités, et pour cette raison nous y indiquerons plusieurs travaux que l'étendue limitée de ce fascicule nous a empêché de traiter en détail.

BERNSTEIN (S.). — 1. Sur l'approximation des fonctions continues par des polynomes (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 152, 1911, p. 502-504).

2. Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités (*Communic. de la Soc. math. de Kharkoff*, 2e série, t. 13, 1912, p. 1-2).

3. Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné (*Mém. Acad. roy. Belgique*, 2e série, t. 4, 1912, p. 3-104).

4. Quelques remarques sur l'interpolation (*Communic. de la Soc. math. de Kharkoff*, 2e série, t. 14, 1914).

5. Sur la convergence absolue de séries trigonométriques (*C. R. Acad. Sc., Paris*, 1914).

6. Quelques remarques sur l'interpolation (*Math. Annalen*, t. 79, 1918, p. 1-12).

7. Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle (Paris, Gauthier-Villars, 1926)

8. État actuel et problèmes de la théorie des polynomes d'approximation des fonctions réelles d'une variable (*Congr. Math. de Kharkoff*, p. 58-77).

9. Sur une formule d'interpolation (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 191, 1930, p. 635-637).

10. Sur une modification de la formule d'interpolation de Lagrange (*Communic. de la Soc. math. de Kharkoff*, p. 49-57).

11. Sur une formule d'interpolation de M. de la Vallée Poussin (*Ibid.*, p. 61-64).

12. Exemple d'une fonction continue pour laquelle la formule d'interpolation trigonométrique de Lagrange diverge (*C. R. Acad. Sc. de l'U. R. S. S.*, 1931, p. 365-366).

13. Sur la limitation des valeurs d'un polynome $P_n(x)$ de degré n sur tout un segment par ses valeurs en $(n+1)$ points du segment (*Bull. Acad. Sc. de l'U. R. S. S.*, 1931, p. 1025-1050).

14. Sur l'interpolation trigonométrique par la méthode des moindres carrés (*C. R. Acad. Sc. de l'U. R. S. S.*, t. 4, 1934).

15. Sur le domaine de convergence des polynomes

$$B_n f(x) = \sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m}.$$

(*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. **202**, 1936, p. 1356-1358).

16. Sur la formule de quadrature approchée de Tchebychef (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. **203**, 1936, p. 1305-1306).

Borel (E.). — **1.** Sur l'interpolation (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. **104**, 1897, p. 673-676).

2. Leçons sur les fonctions de variables réelles, et les développements en séries de polynomes. Chapitre IV (Paris, Gauthier-Villars, 1905).

Cauchy (A.-L.). — **1.** Mémoire sur l'interpolation (*Journ. de Math.*, t. **2**, 1837, p. 193-205).

Christoffel (E. B.). — **1.** Über die Gaussche Quadratur, etc. (*Journ. für Mathem.*, t. **55**, 1858, p. 61-82).

Darboux (G.). — **1.** Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres, etc. (*Journ. de Math.*, 4e série, t. **4**, 1878, p. 5 57 et 371-416).

Erdos (P.) et Feldheim (E.). — **1.** Sur le mode de convergence dans l'interpolation de Lagrange (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. **203**, 1936, p. 913-915).

Erdos (P.) et Turán (P.). — **1.** On interpolation. I. Quadrature- and Mean-Convergence in the Lagrange-Interpolation (*Annals of Math.*, t. **38**, 1937, p. 142-155).

2. On Interpolation. II. On the distribution of the fundamental abscissae of Lagrange-Interpolation (A paraître dans les *Annals of Math.*).

Faber (G.). — **1.** Über stets konvergente-Interpolationsformeln (*Jahr. der d. Math. Ver.*, t. **19**, 1910, p. 142-146).

2. Über stetige Funktionen I. (*Math. Annalen*, t. **66**, p. 81-94).

3. Über stetige Funktionen II. (*Math. Annalen*, t. **69**, p. 372-443).

4. Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen (*Jahr. der d. Math. Ver.*, t. **23**, 1914, p. 192 210).

Fejér (L.). — **1.** Über Interpolation (*Nachr. der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen*, 1916, p. 66-91).

2. Sur l'interpolacion (en hongrois) (*Math. és Term.-tud. Ért.*, t. **34**, 1916, p. 209-229).

3. Über Weierstrassche Approximation, besonders durch Hermitesche Interpolation (*Math. Annalen*, t. **102**, 1930, p. 707-725).

4. Die Abschätzung eines Polynoms in einem Intervalle, etc. (*Math. Zeitsch.*, t. **32**, 1930, p. 426-457).

5. Les points conjugués dans l'interpolation de Lagrange (en hongrois) (*Math. es Term.-tud. Ért.*, t. **48**, 1931, p. 631-643).

6. Lagrangesche Interpolation und die zugehörigen konjugierten Punkte (*Math. Annalen*, t. **106**, 1932, p. 1-55).

7. Bestimmung derjenigen Abszissen eines Intervalles, etc. (*Annali della R. Sc. Norm. sup. di Pisa*, 2e série, t. 1, 1932, p. 263 276).

8. On the infinite sequences arising in the theorie of harmonic analysis, etc. (*Bull. of the Amer. Math. Soc.*, 1933).

9. Sur les suites indéfinies de points qui interviennent dans la théorie de l'analyse harmonique, de l'interpolation et de la quadrature mécanique (en hongrois) (*Math. Fiz. Lapok.*, t. **40**, 1933).

10. Mechanische Quadraturen mit positive Coteschen Zahlen (*Math. Zeits.*, t. 37, 1933, p. 287 309).

11. On the caracterization of some remarquable systems of points of interpolation by means of conjugate points (*Amer. Math. Monthly*, t. **41**, 1934, p. 1-14).

12. Über einige Identitäten der Interpolationstheorie und ihre Anwendung zur Bestimmung kleinster Maxima (*Acta Szeged*, t. 5, 1932, p. 145-153).

FELDHEIM (E.). — 1. Sur l'orthogonalité des fonctions fondamentales de l'interpolation de Lagrange (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. **203**, 1936, p. 650-652).

2. Sur l'orthogonalité des fonctions fondamentales, et sur la forte convergence en moyenne des polynomes d'interpolation de Lagrange, etc. (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. **65**, 1937, p. 1-40).

3. Sur l'interpolation de Lagrange (*C. R. séances de la Soc. math. de France*, 25 novembre 1936).

4. Sur le mode de convergence dans l'interpolation de Lagrange (*C. R. Acad. Sc. de l'U. R. S. S.*, t. **14**, nº 6, 1937, p. 327-331).

5. Quelques recherches sur l'interpolation de Lagrange et d'Hermite par la méthode du développement des fonctions fondamentales (*Math. Zeits.*, t. **44**, 1938, p. 55-84).

6. Sur une propriété des polynomes orthogonaux (*Journ. of the London Math. Soc.*, t. **13**, 1938, p. 44-53).

FRÉCHET (M.). — 1. Formule d'interpolation des fonctions périodiques continues (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. **141**, 1905, p. 818-819).

2. Sur l'approximation des fonctions par des suites trigonométriques limitées (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. **144**, 1907, p. 124-125).

3. Sur l'approximation des fonctions périodiques par les sommes trigonométriques limitées (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. **44**, 1908, p. 43-56).

4. Sur un défaut de la méthode d'interpolation par les polynomes de Lagrange (*Nouv. Ann. de Math.*, t. **20**, 1920, p. 241-249)

FRÉCHET (M.) et ROSENTHAL (A.). — 1. Funktionenfolgen (*Encyklopädie*, II, p. 1153).

GLOVER (J. W.). — 1. Quadrature formulae when ordinates are not equidistant (*Proceedings of the Intern. Math. Congress, Toronto*, t. 2, 1924, p.831-835).

GONTCHAROFF (W.). — 1. Sur les formules d'interpolation de Lagrange et de Newton (*Communic. de la Soc. math. de Kharkoff*, 4e série, t. 13, 1936, p. 41-53).

GRUNWALD (G.). — 1. Sur les phénomènes de divergence des polynomes d'interpolation de Lagrange (en hongrois) (*Math. Fiz. Lapok*, t. **42**, 1935).

2. Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome (*Acta de Szeged*, t. 7, 1935, p. 207-221, Thèse).

3. Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome stetiger Funktionen (*Annals of Math.*, t. 37, 1936, p. 908-918).

HAHN (H.). — 1. Über das Interpolationsproblem (*Math. Zeits.*, t. 1, 1918, p. 115-142).

HERMITE (Ch.). — 1. Sur l'interpolation (*C. R. Acad. Sc.*, t. 48, 1859, p. 62 67; *Œuvres*, t. II, p. 87-92).

2. La formule d'interpolation de Lagrange (*Journ. de Crelle*, t. 84, 1878, p. 70 79; *Œuvres*, t. 3, 1912, p. 432-443).

JACKSON (D.). — 1. On approximation by trigonometrical sums and polynomials (*Transactions of the Amer. Math. Soc.*, t. 13, 1912, p. 491 515).

2. Note on trigonometric Interpolation (*Rendic. Circ. Mat. di Palermo*, t. 39, 1913, p. 230-232).

3. On the accouracy of trigonometric Interpolation (*Transactions Amer. Math. Soc.*, t. 14, 1913, p. 453-461).

4. On the approximate representations of an indefinite integral and the degree of convergence of related Fourier's series (*Ibid.*, t. 14, 1913, p. 343-364).

5. A formula of trigonometric interpolation (*Rendic. del Circ. Mat. di Palermo*, t. 37, 1914, p. 371-375).

6. On the order of magnitude of the coefficients in trigonometric interpolation (*Transactions Amer. Math. Soc.*, t. 21, 1920, p. 321-332).

7. On the convergence of certain trigonometric and polynomial approximations (*Ibid.*, t. 22, 1921, p 158 166).

8. The general theory of approximation by polynomials and trigonometric sums (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 27, 1921, p. 415-431).

9. The Theory of Approximation (*Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, t. 11, New-York, 1930).

10. Orthogonal trigonometric sums (*Annals of Math.*, t. 34, 1933, p. 799-814).

KOWALEWSKI (G.). — 1. Interpolation und genäherte Quadratur (Leipzig, 1932).

KRAUSE (M.). — 1. Sur l'interpolation des fonctions continues par des polynomes (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 140, 1905, p. 1442 1444).

KRAWTCHOUK (M.). — 1. Note sur l'interpolation généralisée (*Proceed. Intern. Congr. Toronto*, t. 1, 1924, p. 657 658).

KRYLOFF (N.). — 1. Sur la théorie des quadratures mécaniques, et sur certaines questions qui s'y rattachent (*Ann. de l'Éc. sup. des Mines de Pétersbourg*, 1915).

2. Sur quelques formules d'interpolation généralisées (*Bull. Sc. Math.*, t. 41, 1917, p. 309 320).

3. Sur la détermination de diverses formes du reste de la formule d'interpolation de Lagrange (*Proceed. of the Math. Labor. of the Tauric Univ.*, t. 1).

4. On the convergence of some interpolation formulae and in particular of M. Riesz's formula (*Ibid.*, t. 3).

5. Sur quelques formules d'approximation fondées sur les généralisations des quadratures dites mécaniques (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 168, 1919, p. 721-723).

6. Sur quelques recherches dans le domaine de la théorie de l'interpolation, et des quadratures dites mécaniques (*Proceedings of the Intern. Congress of Toronto*, t. 1, 1924, p. 651-658).

KRYLOFF (N.) et STAYERMANN (E.). — 1. Sur quelques formules d'interpolation convergentes, etc. (*Bull. Acad. Sc. d'Ukraine*, t. 1).

KRYLOFF (N.) et TAMARKINE (J.). — 1. Sur l'application de la théorie des quadratures mécaniques, etc. (*Ibid.*).

2. Sur une formule d'interpolation (*Proceed. Intern. Congr. Toronto*, t. 1, 1924 p. 641-650).

LAGRANGE (J.-L.). — 1. Sur les interpolations (*Astron. Jahr., Berlin*, 1780; *Œuvres*, t. 7, p. 535).

2. Sur une méthode particulière d'approximation et de l'interpolation (*Acad. Berlin*, 1789, ou *Œuvres*, t. 5, p. 517).

3. Mémoire sur la méthode d'interpolation (*Acad. Berlin*, 1792-1793, ou *Œuvres*, t. 5, p. 663).

LAGRANGE (R.). — 1. Sur le calcul approché des intégrales définies (*Acta Math.*, t. 59, 1932, p. 373-422).

2. Mémoire sur les séries d'interpolation (*Ibid.*, t. 64, 1934, p. 1-80).

LEBESGUE (H.). — 1. Sur l'approximation des fonctions (*Bull. Sc. math.*, t. 22, 1898, p. 278).

2. Sur la représentation approchée des fonctions (*Rendic. del Circ. Mat. di Palermo*, t. 26, 1908, p. 325-328).

3. Sur les intégrales singulières (*Annales de la Fac. Sc. de Toulouse*, t. 1, 1909, p. 25-117).

4. Sur la représentation trigonométrique des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz (*Bull. de la Soc. Math. de France*, t. 38, 1910, p. 184-210).

MARCINKIEWICZ (J.). — 1. Sur les polynomes d'interpolation (en polonais) (*Wiadomósci Matematyczne*, t. 39, 1935, p. 85-115).

2. Sur l'interpolation (*Studia Math.*, t. 6, 1936, p. 1-17 et 67-81).

3. Quelques remarques sur l'interpolation (*Acta Szeged*, t. 8, 1937, p. 127-130).

4. Sur la divergence des polynomes d'interpolation (*Ibid.*, p. 131-135).

MÉRAY (Ch.). — 1. Observations sur la légitimité de l'interpolation (*Annales de l'Éc. Norm. sup.*, t. 2, 1884, p. 165-176).

2. Nouveaux exemples d'interpolations illusoires (*Bull. Sc. math.*, t. 20, 1896, p. 266-271).

MISÈS (R. DE). — 1. Zur mechanische Quadratur (*Zeits. für angew. Math.*, t. 13, 1933, p. 53-56).

2. Über allgemeine Quadraturformeln (*Journ. für die r. und angew. Math.*, t. 174, 1936, p. 56-57).

3. Formules de cubature (*Rev. Math. de l'Union Interbalk.*, t. 1, 1936, p. 17-27).

MONTEL (P.). — 1. Sur les polynomes d'approximation (*Bull. Soc. Math. de France*, t. 46, 1919, p. 151-192).

2. Sur une formule de Darboux et les polynomes d'interpolation (*Annali della R. Sc. Norm. di Pisa*, t. 1, 1932, p. 371-384).

NEWTON (I.). — 1. Newtons interpolation formulae (*Journ. Inst. Actuaries*, t. 51, 1919, p. 77-106, 211-232).

NÖRLUND (N. E.). — 1. Sur les formules d'interpolation de Stirling et de Newton (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 174, 1922, p. 919-921, 1108-1110; *Annales de l'Éc. Norm. sup.*, t. 39, 1922, p. 343-404; t. 40, 1923, p. 35-54).

2. Sur l'interpolation (*Bull. de la Soc. Math. de France*, t. 52, 1924, p. 114-132).

3. Leçons sur les séries d'interpolation (Paris, Gauthier-Villars, 1926).

OUSPENSKY (J.). — 1. Sur les valeurs asymptotiques des coefficients de Cotes (*Bull. of the Amer. Math. Soc.*, t. 31, 1925, p. 145-156).

2. On the expansion of the remainder in the Newton-Cotes formula (*Transactions of the Amer. Math. Soc.*, t. 37, 1935, p. 381-396).

PÓLYA (G.). — 1. Über die Konvergenz von Quadraturverfahren (*Math. Zeits.*, t. 37, 1933, p. 264-286).

PÓLYA (G.) et SZEGÖ (G.). — 1. Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Berlin, 1925; Julius Springer).

POTRON (M.). — 1. Sur une formule généralisée d'interpolation (*Bull. de la Soc. Math. de France*, t. 34, 1906, p. 52-60).

RADAKOVIC (Th.). — 1. Über singuläre Integrale und Interpolationsverfahren (*Dissertation*, Bonn, 1921).

RADAU (R.). — 1. Étude sur les formules d'approximation, etc. (*Journ. de Math.*, 1880, p. 283-336).

RIESZ (M.). — 1. Formule d'interpolation pour la dérivée d'une fonction trigonométrique (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 158, 1914, p. 1152-1154).

2. Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome (*Jahr. der d. Math. Ver.*, t. 23, 1914, p. 354-368).

RUNGE (C.). — 1. Über die Darstellung willkürlicher Funktionen (*Acta Math.* t. 7-8, 1885, p. 387-392).

2. Ueber empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten (*Zeits. für Math. und Phys.*, t. 46, 1901, p. 224-243).

3. Theorie und Praxis der Reihen (*Sammlung Schubert*, t. 32, 1904).

SCHMIDT (R.). — 1. Die allgemeine Newtonsche Quadraturformel und Quadraturformeln für Stieltjesintegrale (*Journ. für Math.*, t. 173, 1935, p. 52-59).

SIERPINSKI (W.). — 1. Démonstration élémentaire du théorème de Weierstrass et de la formule d'interpolation de Borel (*Prace Math.-Fyz.*, t. 22, 1911, p. 59-68 (en polonais), et *Bull. Sc. Math.*, 2e série, t. 38, 1914, p. 9-11).

SHOHAT (J.). — 1. Sur la convergence des quadratures mécaniques dans un intervalle infini (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 186, 1928, p. 344-346).

2. On certain formula of mechanical quadrature with non-equidistant ordinates (*Transactions Amer. Math. Soc.*, t. 31, 1929, p. 448-463).

3. On interpolation (*Annals of Math.*, 2e série, t. 34, 1933, p. 130-146; *Econometrica*, t. 1, 1933, p. 148-158).

SHOHAT (J.) et WINSTON (C.). — 1. On mechanical quadratures (*Rendic. del Circ. Mat. di Palermo*, t. 58, 1934, p. 153-160).

STEKLOFF (W.). — 1. On the approximate evaluation of definite integrals by means of mechanical quadratures. I. Convergence of mechanical quadrature formulas (en russe) (*Bull. Acad. Sc. de Russie*, 1916, p. 170-186).

2. Sopra la teoria delle quadrature dette meccaniche (*Rendic. Acad. Lincei*, 1923).

3. Sur les problèmes de représentation des fonctions à l'aide de polynomes, etc. (*Proceed. of the Intern. Congr. Toronto*, t. 1, 1924, p. 631-640).

STIELTJES (T. J.). — 1. A propos d'une formule d'interpolation de Lagrange (*Versl. K. Acad. Wet. Amsterdam*, t. 17, 1882, p. 239-254; *Œuvres*, t. 1, p. 47-60).

2. Quelques recherches sur les quadratures dites mécaniques (*Annales de l'Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. 1, 1884, p. 409-426; *Œuvres*, t. 1, p. 377-396).

SZEGÖ (G.). — 1. Über gewisse Interpolationspolynome die zu den Jacobischen und Laguerreschen Abszissen gehören (*Math. Zeits.*, t. 35, 1932, p. 579-602).

2. Asymptotische Entwicklungen der Jacobischen Polynome (*Schrift. der Königsberger Gelehrten Gesellschaft*, année 10, fasc. 3, 1933).

TCHEBYCHEF (P.). — 1. Sur l'interpolation dans le cas d'un grand nombre de données (*Mém. Acad. Sc. Saint-Pétersbourg*, 1859; *Œuvres*, t. 1, 1899, p. 109-143, 271-378 et 705-710).

THEIS (M.). — 1. Über eine Interpolationsformel von de la Vallée Poussin (*Math. Zeits.*, t. 3, 1919, p. 93-113).

THIELE (N. T.). — 1. Interpolationsrechnung (Leipzig, 1909).

LA VALLÉE POUSSIN (Ch.-J. DE). — 1. Sur la convergence des formules d'interpolation entre coordonnées équidistantes (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1908, p. 313-403).

2. Note sur l'approximation par un polynome d'une fonction dont la dérivée est à variation bornée (*Ibid.*, p. 403-410).

3. Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle (Paris, 1910; Gauthier-Villars, édit.).

VALIRON (G.). — 1. Sur l'interpolation des fonctions entières (*Bull. de la Soc. Math. de France*, t. 44, p. 103).

2. Sur la formule d'interpolation de Lagrange (*Bull. de la Soc. Math.*, t. 49, 1928, p. 181-191, 203-224).

WEIERSTRASS (Ch.). — 1. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen (*Berliner Sitzungsberichte*, 1885, p. 663-639, 789-805).

2. Sur la possibilité de la représentation analytique des fonctions dites arbitraires d'une variable réelle (*Traduction, Journ. de Liouville*, 1886).

WIDDER (D. W.). — 1. Some Mean-Value Theorems connected with Cotes's Method in Mechanical Quadrature (*Bull. of the Amer. Math. Soc.*, t. 31, 1925, p. 56-62).

WINSTON (C.). — 1. On the mechanical quadratures formulae involving the classical orthogonal Polynomials (*Annals of Math.*, 1935).

ZYGMUND (A). — 1. Trigonometrical Series (*Monografje Matematyczne*, t. 5, 1935. Warszawa-Lwów).

TABLE DES MATIÈRES.