MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

J. KAMPÉ DE FÉRIET

La fonction hypergéométrique

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 85 (1937)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1937__85__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COIMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT
Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées »

FASCICULE LXXXV

La fonction hypergéométrique

Par M. J. KAMPÉ DE FÉRIET
Professeur à la Faculté des Sciences de Lille

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1937

LA

FONCTION HYPERGÉOMÉTRIQUE

Par M. J. KAMPÉ DE FÉRIET,

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

I. — Introduction.

1. Historique. — L'expression « progressio hypergeometrica » paraît avoir été appliquée pour la première fois par J. Wallis (1655) à la série de terme général $\frac{a(a+b)\ldots[a+(n-1)b]}{b.2b\ldots(n-1)b}$, qui serait désignée actuellement par $a\mathrm{F}\left(\frac{a}{b}+1, 1, 1, 1\right)$.

L. Euler, tout en employant encore le qualificatif « hypergéométrique » dans ce sens particulier, considère d'autre part la série telle qu'elle est définie au n° 3, sans lui donner aucun nom spécial; dans (*b*) (1778), il remarque que cette série vérifie une équation différentielle linéaire du deuxième ordre, qu'il utilise pour en établir une formule de transformation; antérieurement (*a*) (1769) il avait déjà, dans un cas particulier, intégré cette équation par une intégrale définie. J. Pfaff (1797) consacre un long chapitre à l'étude de cette équation et aux diverses formes des séries qui la vérifient.

Mais c'est C. F. Gauss (1813) qui sortant du pur formalisme a véritablement fondé la théorie; désignant la *série* par $\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$, il établit d'abord (*a*) que, dans le plan complexe, elle converge à l'intérieur du cercle $|x| = 1$; il introduit la notion de « fonctions contiguës » et forme les équations qui lient de telles fonctions; il développe en fraction continue le quotient de deux fonctions contiguës; il retrouve (*b*) l'équation différentielle d'Euler qu'il intègre systématiquement par des séries F.

E. Kummer (1832) (appliquant pour la première fois le qualificatif « hypergéométrique » à la série de Gauss) exprime 24 intégrales particulières par des séries F; dans un mémoire profond, il montre que le problème des transformations rationnelles ou algébriques de la série hypergéométrique (dont il forme de nombreux exemples) dépend de l'intégration d'une équation du troisième ordre.

C. G. J. Jacobi (mémoire posthume, 1859) exprime d'une façon élégante les 24 intégrales de Kummer par des intégrales définies et s'attache au cas où la série se réduit à un polynome.

Avec B. Riemann (1856) apparaît le point de vue moderne : la notion de la *fonction* hypergéométrique se précise, avec la considération de ses branches s'échangeant quand x tourne autour des trois points singuliers 0, 1, ∞ et la formation de son groupe; retournant le problème il montre que la donnée des points singuliers et de l'allure de deux branches autour de chacun de ces points, détermine la fonction.

H. Schwarz (1871) ouvre un filon nouveau en découvrant que le rapport $s(x)$ de deux intégrales de l'équation hypergéométrique (qui vérifie une équation du troisième ordre) donne la représentation conforme d'un demi-plan sur un triangle d'arcs de cercle; il en déduit tous les cas où la fonction hypergéométrique est rationnelle ou algébrique en x. L'étude de la fonction inverse $x(s)$ devait ouvrir la voie à la découverte des fonctions fuchsiennes par H. Poincaré (1881).

Par une méthode plus directe E. Goursat (1881) retrouve les cas où F est algébrique et résout entièrement le problème de ses transformations rationnelles et algébriques.

Divers auteurs forment des expressions analytiques représentant élégamment une branche quelconque de la fonction hypergéométrique : C. Jordan (1887) et L. Pochhammer (1890) introduisent une intégrale prise le long d'un double lacet; S. Pincherle (1888), Hj. Mellin (1895), E. Barnes (1905) utilisent une intégrale portant sur un quotient de fonctions gamma. F. Klein (1891) remarque que les intégrales de Jordan sont des fonctions entières par rapport à α, β, γ.

Conformément à une vue générale de Poincaré, en prenant pour x une fonction modulaire de τ, la fonction hypergéométrique devient une fonction uniforme de τ. W. Wirtinger (1902) exprime très simplement la fonction uniformisée par une intégrale portant sur un produit de fonctions thêta.

L'étude du développement de la théorie de la fonction hypergéométrique est attachante parce qu'elle a puissamment agi sur l'évolution de plusieurs chapitres de l'Analyse, devenus très importants, par exemple : la représentation conforme, les équations linéaires à coefficients rationnels, les fonctions fuchsiennes. La thèse de L. Jecklin résume assez fidèlement les travaux jusqu'à Riemann; la notice de E. Papperitz (*d*) donne des renseignements substantiels jusqu'en 1889, qu'on peut compléter par les quelques pages de E. Hilb. Le grand ouvrage de F. Klein (*e*), malheureusement déjà un peu ancien, donne un exposé largement synthétique illustré de nombreux aperçus historiques.

2. Notations. — Les notations suivantes permettront d'abréger beaucoup l'exposé :

1° Dans le plan (X) de la variable complexe $x = \mathcal{R}(x) + i\mathcal{J}(x)$, je désignerai par (C_0) et (C'_0) les domaines $|x| < 1$ et > 1, par (C_1) et (C'_1) les domaines $|x - 1| < 1$ et > 1. par (E_0) et (E_1) les demi-plans $\mathcal{R}(x) < \frac{1}{2}$ et $> \frac{1}{2}$; les domaines qui se déduisent de (X) en y traçant comme coupures certains segments de l'axe réel seront ainsi désignés :

Coupure.	$(+1, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0)$ et $(+1, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(0, +1)$	$(-\infty, +1)$
Domaine.	(X_1)	(X_2)	(X_3)	(X_4)	(X_5)	(X_6)

2° En généralisant la notation de P. Appell, je poserai

$$(\lambda, \mu) = \frac{\Gamma(\lambda + \mu)}{\Gamma(\lambda)},$$

λ et μ étant des nombres complexes quelconques; en particulier $(\lambda, 0) = 1$ et $(\lambda, k) = \lambda(\lambda + 1)\ldots(\lambda + k - 1)$ (k entier positif).

3° Lorsque interviennent les fonctions elliptiques j'emploie les notations de Tannery et Molk (*Éléments de la théorie des fonctions elliptiques*, Gauthier-Villars, éditeur).

II. — La série et la fonction hypergéométriques.

3. La série hypergéométrique. — La *série hypergéométrique*

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{(\alpha, n)(\beta, n)}{(\gamma, n)(1, n)} x^n,$$

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)1.2\ldots n}$$

dépend des quatre quantités α, β, γ, x que Gauss (a) nomme respectivement : 1^er^, 2^e^, 3^e^, 4^e^ élément; c'est une série entière en x, une série de polynomes en α et en β, une série de facultés en γ.

Les éléments α et β jouent évidemment un rôle symétrique. Le coefficient a_n de x^n a une valeur finie et non nulle, hormis les cas suivants :

I. *A partir d'un certain rang :* 1° *si γ est nul ou entier négatif, les a_n sont infinis;*

2° *si γ et α (ou β) sont simultanément nuls ou entiers négatifs, les a_n sont sous la forme indéterminée* 0 : 0;

3° *si α (ou β) est nul ou entier négatif, les a_n sont nuls; la série se réduit à un polynome en x de degré* $|\alpha|$ (ou $|\beta|$).

Ces valeurs exclues, pour examiner la convergence de la série, Gauss (a) forme le rapport

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}{n^2+(\gamma+1)n+\gamma} = 1 + \frac{\alpha+\beta-\gamma-1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right);$$

en supposant x complexe, mais α, β, γ réels, il en déduit que la série converge pour $|x| < 1$, diverge pour $|x| > 1$; pour $|x| = 1$, il y a doute : il n'examine que le cas ou $x = 1$.

K. Weierstrass a complètement résolu la question

II. *Quelles que soient les quantités complexes α, β, γ (hormis les cas exclus) la série hypergéométrique admet* (C_0) *comme cercle de convergence; sur* (C_0) *la série est*

1° *absolument convergente, si* $\mathcal{R}(\gamma-\alpha-\beta) > 0$;

2° *semi-convergente, sauf au point* $x = 1$, *si* $-1 < \mathcal{R}(\gamma - \alpha - \beta) \leqq 0$,
3° *divergente, si* $\mathcal{R}(\gamma - \alpha - \beta) \leqq -1$.

Ce résultat a été retrouvé par Scheibner (*voir* aussi A. Pringsheim et M. Godefroy). Il est clair que x désignant un point intérieur à (C_0) la série hypergéométrique définit une fonction entière par rapport à α et à β, une fonction méromorphe par rapport à γ, admettant pour pôles simples les points $\gamma = 0, -1, \ldots, -n, \ldots$.

Comme Gauss l'a remarqué de très nombreuses séries « élémentaires » se déduisent de la série hypergéométrique en donnant à α, β, γ des valeurs particulières (série du binome $\beta = \gamma$; série logarithmique : $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 2$; séries trigonométriques, etc.).

4. Prolongement analytique; fonction hypergéométrique; branche principale. — La série $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, convergente à l'intérieur de (C_0), définit un *élément* d'une fonction analytique de la variable x, qu'on obtiendra en effectuant le *prolongement analytique* de la série au dehors de (C_0). On pourrait étudier ce prolongement, notamment déterminer les points singuliers, par les méthodes générales applicables aux fonctions définies par une série de Taylor. Mais les *expressions analytiques* simples données plus loin pour cette fonction et l'étude de l'équation différentielle qu'elle vérifie conduisent à des résultats précis que nous énoncerons dès maintenant.

III. *Le prolongement analytique de la série* $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ *définit une fonction multiforme de la variable* x, *la fonction hypergéométrique* $\mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$, *dont les seuls points singuliers sont* $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$. *En effectuant le prolongement sans franchir la coupure* $(+1, +\infty)$ *on définit la branche principale* $\overline{\mathcal{F}}(\alpha, \beta, \gamma, x)$ *de la fonction hypergéométrique; cette branche est holomorphe dans tout le domaine* (X_1), *qui constitue l'étoile principale de la fonction. Le point* $x = 0$ *est en général singulier pour toute autre branche que la branche principale* (¹).

(¹) Je m'excuse d'introduire les nouvelles notations $\overline{\mathcal{F}}$ et $\mathcal{F}$, mais il m'a semblé que l'habitude de désigner trois choses différentes : la série, la fonction, la branche principale, par le même symbole F, obligeait à des périphrases perpétuelles et conduisait parfois à des confusions.

Nous verrons au n° 16 que *la surface de Riemann de la fonction multiforme $\mathcal{F}$ est en rapport étroit avec celle de la fonction $\tau = \tau(x)$, inverse de la fonction modulaire $x = \varphi(\tau)^8$.*

Parmi l'ensemble dénombrable de valeurs prises, en un point x, par $\mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$, pour en préciser une, il suffit de spécifier le chemin suivi, à partir de (C_0), pour aboutir à x; la branche principale correspond uniquement aux chemins qui ne franchissent pas la coupure $(+1, +\infty)$; on observera qu'à l'intérieur de (C_0)

$$\mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, x) \equiv F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

Il serait naturel d'énumérer ici les cas où $\mathcal{F}$ se réduit aux fonctions élémentaires (rationnelles ou algébriques); mais la difficulté du problème et la nature des méthodes employées pour le résoudre conduisent à le rejeter beaucoup plus loin.

III. — Fonctions hypergéométriques contiguës et associées.

5. Fonctions contiguës; équations aux différences finies. — Gauss (a) nomme fonction contiguë à $\mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$ une fonction hypergéométrique qui s'en déduit en ajoutant ou retranchant l'unité à l'un des trois premiers éléments, les autres conservant la même valeur; il y a donc six fonctions contiguës à $\mathcal{F}$, qu'on désignera par $\mathcal{F}_{\alpha\pm1}$, $\mathcal{F}_{\beta\pm1}$, $\mathcal{F}_{\gamma\pm1}$.

IV. *La fonction hypergéométrique $\mathcal{F}$ et deux de ses fonctions contiguës sont liées par une équation linéaire homogène dont les coefficients sont des polynomes en α, β, γ, x.*

Gauss forme ainsi 15 équations entre fonctions contiguës; par exemple

$$(1)\qquad (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)x\mathcal{F}_{\gamma+1} - \gamma(\gamma-1)(1-x)\mathcal{F}_{\gamma-1} + \gamma[\gamma-1-(2\gamma-\alpha-\beta-1)x]\mathcal{F} = 0.$$

En réalité Gauss établit seulement ces équations pour les *séries* hypergéométriques, mais elles subsistent pour les *fonctions*, en vertu du *principe de permanence*; toutefois les fonctions étant multiformes les trois prolongements doivent être effectués le long du même chemin (ou de chemins équivalents se réduisant l'un à l'autre sans passer par les points singuliers); en particulier les équations ont lieu, dans tout (X_1), pour les trois branches principales.

V. *Par rapport à chacun des éléments* α, β, γ *la fonction hypergéométrique vérifie une équation linéaire aux différences finies du deuxième ordre, dont les coefficients sont des polynomes en* α, β, γ, x

$$(\alpha+1)(1-x)\Delta_\alpha^2\mathcal{F}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\Delta_\alpha\mathcal{F}-\beta x\mathcal{F}=0,$$

$$(\gamma+1-\alpha)(\gamma+1-\beta)x\Delta_\gamma^2\mathcal{F}+\{\gamma(\gamma+1)+[(\gamma+1)(1-\alpha-\beta)+2\alpha\beta]x\}\\ \times\Delta_\gamma\mathcal{F}+\alpha\beta x\mathcal{F}=0,$$

$$\Delta_\lambda\mathcal{F}=\mathcal{F}_{\lambda+1}-\mathcal{F},\qquad \Delta_\lambda^2\mathcal{F}=\mathcal{F}_{\lambda+2}-2\mathcal{F}_{\lambda+1}+\mathcal{F}.$$

J. Thomae (c, d) a esquissé une étude de la fonction hypergéométrique, en prenant comme point de départ les propriétés des facultés analytiques et des équations aux différences finies linéaires; on trouvera dans W. Heymann (c) une énumération des principales formes d'équations aux différences finies hypergéométriques. S. Pincherle (c) a étudié ces équations sous la forme d'équations de récurrence; par exemple la fonction $u_n=\mathcal{F}(\alpha+n, \beta, \gamma, x)$ vérifie l'équation de récurrence du deuxième ordre

$$(\alpha+n+1)(1-x)u_{n+2}+[\gamma-2(\alpha+n+1)-(\beta-\alpha-n-1)x]u_{n+1}\\ -(\gamma-\alpha-n-1)u_n=0,$$

dont les coefficients sont des polynomes en n. Les deux solutions U_n et V_n pour lesquelles

$$U_0=1,\qquad U_1=0,\qquad V_0=0,\qquad V_1=1,$$

forment un système principal d'intégrales et toute autre solution est de la forme

$$u_n=U_n u_0+V_n u_1.$$

Pincherle a introduit la notion importante de *l'intégrale distinguée*, qui est telle que la limite de son rapport à toute autre intégrale tend vers 0 avec $1:n$; la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale distinguée existe c'est que $U_n:V_n$ tende vers une limite quand n augmente indéfiniment.

Les équations aux différences finies linéaires ont fait l'objet de très nombreux travaux, qu'on trouvera exposés dans l'ouvrage de N. E. Nörlund (f); l'étude des équations hypergéométriques a certainement joué un rôle dans l'orientation générale de la théorie, qui par bien des points se rapproche aujourd'hui de la théorie des équations différentielles du type de Fuchs. Pour représenter leurs intégrales on dispose de trois types d'expressions analytiques :

1° Les séries de facultés; soit par exemple l'équation hypergéométrique

$$(\gamma+1-\alpha)(\gamma+1-\beta)xu(\gamma+2)+(\gamma+1)[\gamma-(2\gamma+1-\alpha-\beta)x]\,u(\gamma+1)-\gamma(\gamma+1)(1-x)\,u(\gamma)=0;$$

en supposant $|x|<1$, on obtient pour solutions particulières les deux séries hypergéométriques

$$u_1(\gamma)=F(\alpha,\beta,\gamma,x),$$
$$u_2(\gamma)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\alpha,1-\beta,2-\gamma,x)$$

(séries de facultés par rapport à γ); la solution générale est de la forme $p_1(\gamma)\,u_1(\gamma)+p_2(\gamma)\,u_2(\gamma)$, p_1 et p_2 étant des fonctions périodiques arbitraires de période 1; u_1 et u_2 sont des fonctions méromorphes de γ, mais une solution quelconque peut n'être pas même analytique.

2° Les intégrales définies (moyennant la transformation de Laplace) : *voir* le n° **13**.

3° Les fractions continues : *voir* le n° **11**.

6. Fonctions associées. — Nous dirons que la fonction

$$\mathcal{F}(\alpha+m,\ \beta+n,\ \gamma+p,\ x),$$

où m, n, p désignent trois entiers (positifs, nuls ou négatifs), est une *fonction associée* (¹) à $\mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$; cette définition contient comme cas particulier celle des fonctions contiguës. La notion ne prend son véritable relief que dans l'étude du groupe de la fonction hypergéométrique.

VI. *Trois fonctions associées à $\mathcal{F}$ sont liées par une équation linéaire homogène dont les coefficients sont des polynomes en α, β, γ, x. En particulier une fonction associée à $\mathcal{F}$ s'exprime*

(¹) Cette expression commode est la traduction libre de la terminologie des auteurs allemands, qui nomment de telles fonctions « verwandte Funktionen », « benachbarte » étant réservé aux fonctions contiguës.

linéairement au moyen de $\mathcal{F}$ et de l'une des six fonctions contiguës à $\mathcal{F}$.

En se bornant aux valeurs $-1, 0, +1$, il y a 26 fonctions associées à $\mathcal{F}$ liées deux à deux avec $\mathcal{F}$ par 325 équations linéaires.

7. **Dérivées de la fonction hypergéométrique.** — En dérivant terme à terme la série hypergéométrique par rapport à x, on obtient une nouvelle série hypergéométrique, ce qui conduit à la formule valable dans tout le domaine de définition

$$\frac{d}{dx}\mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\alpha\beta}{\gamma}\mathcal{F}(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x);$$

au contraire les dérivées par rapport à α, β, γ ne sont pas des séries hypergéométriques (¹)

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{n=0}^{n=+\infty}[\Psi(\alpha+n) - \Psi(\alpha)]\,a_n x^n,$$

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{n=0}^{n=+\infty}[\Psi(\gamma) - \Psi(\gamma+n)]\,a_n x^n.$$

Ce sont les différences par rapport à α, β, γ qui conduisent à des séries hypergéométriques

$$\alpha\Delta_\alpha\mathcal{F} = \beta\Delta_\beta\mathcal{F} = (1-\gamma)\Delta_\gamma\mathcal{F}_{\gamma-1} = x\frac{d\mathcal{F}}{dx}.$$

Par récurrence on obtient pour les dérivées et différences d'ordre supérieur

$$\frac{d^k}{dx^k}\mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{(\alpha, k)(\beta, k)}{(\gamma, k)}\mathcal{F}(\alpha+k, \beta+k, \gamma+k, x),$$
$$(\alpha, k)\Delta_\alpha^k\mathcal{F} = (\beta, k)\Delta_\beta^k\mathcal{F} = x^k\frac{d^k\mathcal{F}}{dx^k}.$$

VII. *Toute fonction associée à $\mathcal{F}$ s'exprime linéairement au moyen de $\mathcal{F}$ et de $\frac{d\mathcal{F}}{dx}$, les coefficients étant rationnels en α, β, γ, x.*

En particulier $\mathcal{F}$ et ses deux premières dérivées sont liées par une

(¹) Ψ désigne selon l'usage la dérivée logarithmique de Γ.

équation linéaire; l'étude de cette propriété fondamentale fera l'objet du paragraphe VI.

8. Valeur de $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ lorsque $\mathcal{R}(\gamma-\alpha-\beta)>0$. — Lorsque $\mathcal{R}(\gamma-\alpha-\beta)>0$ la série hypergéométrique reste convergente au point $x=1$; de l'équation de récurrence (5_1) Gauss déduit

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1)=\frac{(\gamma-\alpha, k)(\gamma-\beta, k)}{(\gamma, k)(\gamma-\alpha-\beta, k)} F(\alpha, \beta, \gamma+k, 1) \quad (k \text{ entier positif}).$$

Lorsque k augmente indéfiniment, la série tend vers 1; en appliquant aux expressions (λ, k) la formule limite qui lui sert de définition pour la fonction Γ, Gauss obtient ce résultat

$$(1) \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, 1)=\frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha) \Gamma(\gamma-\beta)}, \qquad \mathcal{R}(\gamma-\alpha-\beta)>0.$$

Lorque $\mathcal{R}(\gamma-\alpha-\beta) \leqq 0$, la série diverge pour $x=1$; M. Hill (a, b) montre que la somme $S_p(\alpha, \beta, \gamma)$ de ses p premiers termes, multipliée par $\Gamma(\alpha) . \Gamma(\beta) : \Gamma(\gamma)$, tend asymptotiquement vers $\log p$ ou $p^{\alpha+\beta-\gamma}$ selon que $\mathcal{R}(\gamma-\alpha-\beta)=0$ ou <0; il donne de nombreuses équations de récurrence entre les $S_p(\alpha, \beta, \gamma)$ relatives à des fonctions contigues.

9. Développement en fraction continue des quotients de fonctions associées. — La forme des équations de récurrence hypergéométriques a conduit naturellement Gauss à représenter certains quotients de fonctions associées par des fractions continues. On simplifie beaucoup les calculs en remplaçant l'équation de récurrence du deuxième ordre par un système de deux équations du premier ordre, qu'on peut mettre sous la forme

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} p_{n+1}(x) u_{n+1}(x)+u_n(x)-s_n(x) v_n(x)=0, \\ q_{n+1}(x) u_{n+1}(x)-r_{n+1}(x) v_{n+1}(x)-v_n(x)=0 ; \end{array}\right.$$

de ce système on tire immédiatement les relations

$$\begin{aligned} (2) \qquad \frac{v_0(x)}{u_0(x)} & =\frac{1}{s_0 \mid}-\frac{p_1}{q_1 \mid}-\frac{r_1}{s_1 \mid}-\ldots-\frac{r_n}{s_n \mid}-p_{n+1} \cdot \frac{u_{n+1}(x)}{v_n(x)} \\ & =\frac{1}{s_0 \mid}-\frac{p_1}{q_1 \mid}-\frac{r_1}{s_1 \mid}-\ldots-\frac{r_n}{s_n \mid}-\frac{p_{n+1}}{q_{n+1} \mid}-r_{n+1} \cdot \frac{v_{n+1}(x)}{u_{n+1}(x)}, \end{aligned}$$

où les deuxièmes membres utilisant le symbole connu désignent des fractions limitées. Gauss part du système obtenu en prenant

$$p_n = \frac{(\alpha+n-1)(\gamma+n-1-\beta)}{(\gamma+2n-2)(\gamma+2n-1)}x \equiv b_n x,$$
$$r_n = \frac{(\beta+n)(\gamma+n-\alpha)}{(\gamma+2n-1)(\gamma+2n)}x \equiv c_n x, \qquad q_n = s_n = 1,$$

qui admet comme intégrales particulières les séries hypergéométriques

$$u_n^{(1)}(x) = \mathrm{F}(\alpha+n,\ \beta+n,\ \gamma+2n,\ x),$$
$$v_n^{(1)}(x) = \mathrm{F}(\alpha+n,\ \beta+n+1,\ \gamma+2n+1,\ x).$$

Si γ est nul ou entier négatif un b_n et un c_n deviennent infinis : on ne peut poursuivre le développement (2) au delà d'un certain rang n; si α, β, $\gamma-\alpha$ ou $\gamma-\beta$ est un entier négatif, un b_n ou un c_n s'annule, le développement, poursuivi jusqu'à ce rang, se réduit à une fraction rationnelle en x. Ces cas écartés, Gauss passant à la limite écrit le développement en *fraction continue illimitée*.

$$(3) \qquad \frac{v_0^{(1)}(x)}{u_0^{(1)}(x)} = \frac{\mathrm{F}(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{\mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma,x)}$$
$$= \frac{1}{1|} - \frac{b_1 x}{1|} - \frac{c_1 x}{1|} \cdots - \frac{b_n x}{1|} - \frac{c_n x}{1|} - \cdots.$$

Mais ce résultat était purement formel, car Gauss n'a pas établi la convergence de la fraction continue ni prouvé qu'elle représentait bien $v_0^{(1)} : u_0^{(1)}$, plutôt que le quotient des deux autres intégrales particulières du système

$$u_n^{(2)}(x) = \frac{(\gamma-1, 2n)(\gamma-1, 2n+1)}{(\gamma-\alpha, n)(\gamma-\beta, n)(\alpha, n)(\beta, n)}x^{-2n}$$
$$\times \mathrm{F}(1-\alpha-n,\ 1-\beta-n,\ 2-\gamma-2n,\ x),$$
$$v_n^{(2)}(x) = \frac{(\gamma, 2n)(\gamma, 2n+1)}{(\gamma+1-\alpha, n)(\gamma-\beta, n)(\alpha, n)(\beta+1, n)}x^{-2n}$$
$$\times \mathrm{F}(1-\alpha-n,\ -\beta-n,\ 1-\gamma-2n,\ x).$$

Gauss a donné plusieurs développements formels analogues et remarqué que, pour $\beta = 0$, le premier membre de (3) se ramène à la série $\mathrm{F}(\alpha, 1, \gamma, x)$.

VIII. *Dans le domaine, déduit de* (X_1) *en excluant les zéros de* $\mathcal{F}(\alpha,\beta,\gamma,x)$, *la fraction continue de Gauss converge uniformément; dans tout* (X_1) *elle représente effectivement le quotient*

$\overline{\mathcal{F}}(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x) : \overline{\mathcal{F}}(\alpha, \beta, \gamma, x)$, *qui est une fonction méromorphe dans ce domaine.*

La première démonstration paraît due à B. Riemann (*b*) (mémoire posthume rédigé par H. Schwarz), qui a exprimé les numérateurs P_n et les dénominateurs Q_n de la *réduite de rang n* au moyen de sa fonction P, ce qui l'a conduit à une expression asymptotique du *reste* $v_0^{(1)} : u_0^{(1)} - P_n : Q_n$.

Indépendamment de ce résultat, resté inédit, E. Heine (*b*, *d*) a pu exprimer les numérateurs et dénominateurs par des séries hypergéométriques.

Partant de ces expressions, L. Thomé (*c*, *d*) pose $x = 4z(1+z)^{-2}$, ce qui lui donne la représentation conforme de (X_1) sur l'intérieur du cercle $|z| = 1$; il obtient la valeur asymptotique du reste

$$b_1.c_1.b_2.c_2 \ldots (4z)^n \left[\frac{(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}(1+z)^{\alpha+\beta}}{\overline{\mathcal{F}}[\alpha, \beta, \gamma, 4z(1+z)^{-2}]} \right]^2$$

qui tend vers zéro, pour $|z| < 1$, quels que soient α, β, γ, sauf pour les valeurs de z annulant le dénominateur : ces valeurs sont les pôles du quotient $v_0^{(1)} : u_0^{(1)}$.

Ce résultat se déduit encore des théorèmes généraux de E. van Vleck (*b*), qui a étendu aux fractions du type (3), lorsque b_n et c_n sont complexes, certaines propositions de Stieltjes: il suppose que $\overline{\lim}\,|b_n| = \overline{\lim}\,|c_n| = \rho$ et que

$$\frac{b_n}{c_n} = 1 + \frac{\lambda}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad \frac{c_n}{b_{n+1}} = 1 - \frac{\lambda}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et démontre que la fraction continue représente une fonction méromorphe en dehors du segment $\left(\frac{1}{4\rho}, +\infty\right)$ de l'axe réel.

Enfin les formules générales de la théorie des différences réciproques conduisent N. E. Nörlund aux expressions très simples des réduites

$$\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = \frac{v_0^{(1)} u_n^{(2)} - v_0^{(2)} u_n^{(1)}}{u_0^{(1)} u_n^{(2)} - u_0^{(2)} u_n^{(1)}}, \qquad \frac{P_{2n+3}}{Q_{2n+3}} = \frac{v_0^{(1)} v_n^{(2)} - v_0^{(2)} v_n^{(1)}}{u_0^{(1)} v_n^{(2)} - u_0^{(2)} v_n^{(1)}};$$

pour établir la convergence vers $v_0^{(1)} : u_0^{(1)}$, il lui suffit de montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^{(1)} : u_n^{(2)} = \lim\limits_{n\to\infty} v_n^{(1)} : v_n^{(2)} = 0$; on voit ainsi nettement le rôle joué par les intégrales *distinguées* du système. G. Frobenius a développé le quotient $F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x^{-2}) : xF(\alpha, \beta, \gamma, x^{-2})$ sous la forme $\frac{1}{e_0 x|} - \frac{1}{e_1 x|} - \ldots$ très différente de (3); L. Schendel a développé le quotient de fonctions contiguës $F(\alpha+1, \beta, \gamma, x) : F(\alpha, \beta+1, \gamma, x)$; L. Gegenbauer a donné de nombreuses formules notamment le développement de $x^{-1}F\left(\frac{1}{2}, 1, n+1, x^{-2}\right)$ (*voir* aussi H. Padé). C. G. J. Jacobi a étudié les réduites de $x^{-1}F(\alpha, 1, \gamma, x^{-1})$.

Parmi les nombreux résultats élégants dus à N. E. Nörlund (*a*) citons celui-ci; le système obtenu en faisant

$$p_n = \frac{x-1}{\alpha+n-1}, \qquad q_n = -\frac{x}{\beta+n-1},$$
$$r_n = -\frac{x(\gamma-\beta)}{\beta+n-1}, \qquad s_n = -\frac{1}{x(\alpha+n)}$$

admet les intégrales particulières

$$u_n^{(1)} = \frac{1}{x(\gamma-\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)} \times \overline{\mathfrak{F}}(\alpha+n, \beta+n, \gamma+n, x),$$

$$v_n^{(1)} = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n+1)} \times \overline{\mathfrak{F}}(\alpha+n+1, \beta+n, \gamma+n+1, x),$$

$$u_n^{(2)} = (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+n+1)} \times \overline{\mathfrak{F}}(\alpha+n, \beta+n, \alpha+\beta-\gamma+n+1, 1-x),$$

$$v_n^{(2)} = (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+n+1)} \times \overline{\mathfrak{F}}(\alpha+n+1, \beta+n, \alpha+\beta-\gamma+n+1, 1-x).$$

Soient les deux fractions continues

$$y_1 = \frac{\alpha x}{1|} - \frac{\alpha(x-1)}{\gamma-\beta|} - \frac{(\alpha+1)x}{1|} - \frac{(\beta+1)(x-1)}{\gamma-\beta|} - \ldots$$
$$y_2 = \frac{1}{x(x-1)}\left[\frac{\beta(x-1)}{\gamma-\beta|} - \frac{(\alpha+1)x}{1|} - \frac{(\beta+1)(x-1)}{\gamma-\beta|} - \ldots\right].$$

Dans tout le demi-plan (E_0) y_1 converge vers $v_0^{(1)}(x) : u_0^{(1)}(x)$ et y_2 vers $u_1^{(1)}(x) : v_0^{(1)}(x)$; dans tout le demi-plan (E_1) y_1 converge vers $v_0^{(2)}(x) : u_0^{(2)}(x)$ et y_2 vers $u_1^{(2)}(x) : v_0^{(2)}(x)$; les fonctions représentées par y_1 et y_2 dans (E_0) et (E_1) ne sont pas le prolongement analytique l'une de l'autre.

IV. — Intégrales hypergéométriques.

10. L'intégrale hypergéométrique d'Euler. — IX. *Lorsque* $\mathcal{R}(\gamma) > \mathcal{R}(\beta) > 0$, *la branche principale de la fonction hypergéométrique est représentée dans tout le domaine* (X_1) *par l'intégrale*

$$B(\beta, \gamma-\beta)\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, x) = \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-ux)^{-\alpha}du = \int_0^1 U(u)du;$$

le chemin d'intégration est le segment rectiligne $(0, +1)$; la fonction multiforme $U(u)$ admet les points de ramification $0, 1, \infty, 1:x$; sa détermination est choisie de manière que : $\arg u = 0$, $\arg(1-u) = 0$ et $\arg(1-ux) = 0$ pour $u = 0$.

Pour établir la proposition il suffit de constater que l'intégrale représente une fonction de x holomorphe dans tout (X_1) et qu'à l'intérieur de (C_0), en développant le binome $(1-ux)^{-\alpha}$ en série et en intégrant terme à terme, on retrouve la série hypergéométrique.

La première considération de cette intégrale paraît due à Euler (a); elle est la plus simple des expressions analytiques représentant $\mathfrak{F}$ dans toute son étoile d'holomorphie. La restriction imposée à $\mathcal{R}(\beta)$ et $\mathcal{R}(\gamma)$ (indispensable pour que l'intégrale ait un sens) est assez gênante; lorsque $\mathcal{R}(\beta) < 0$ ou $\mathcal{R}(\gamma-\beta) < 0$ on peut tourner la difficulté en exprimant au préalable $\mathfrak{F}$ au moyen de deux de ses fonctions associées, pour lesquelles les conditions sont vérifiées. Ce procédé, utile dans certains cas, se prête mal aux démonstrations générales.

En faisant $x = 1$ dans l'intégrale, elle conserve un sens si $\mathcal{R}(\gamma-\alpha-\beta) > 0$ et l'on retrouve la formule (8_1), mais établie avec la restriction surabondante $\mathcal{R}(\beta) > 0$.

11. Les formules de transformation d'Euler et de Gauss. — Jacobi a remarqué qu'en faisant dans l'intégrale d'Euler l'un des changements de variable

$$u = 1-v, \qquad u = v : (1-x+vx), \qquad u = (1-v) : (1-vx),$$

elle se change en une intégrale du même type.

X. *La fonction hypergéométrique admet les trois formules de transformation, valables dans* (X_1)

$$(1) \qquad \mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\alpha}\mathfrak{F}\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$$

$$(2) \qquad = (1-x)^{-\beta}\mathfrak{F}\left(\gamma-\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$$

$$(3) \qquad = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\mathfrak{F}(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x)$$

(on doit prendre pour les binomes leur branche principale). La fonction qui figure dans (3) est développable en série hypergéométrique à l'intérieur de (C_0); comme $\mathcal{R}[\gamma-(\gamma-\alpha)-(\gamma-\beta)] = -\mathcal{R}(\gamma-\alpha-\beta)$, cette série est convergente sur (C_0) lorsque $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ est divergente; en particulier on tire de (8_1) cette formule qui la complète

$$\lim_{x \to 1}[(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}F(\alpha, \beta, \gamma, x)] = F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)},$$
$$\mathcal{R}(\gamma-\alpha-\beta) < 0.$$

Les fonctions qui figurent au deuxième membre de (1) et (2) sont développables en série hypergéométrique, procédant selon les puissances de $x:(x-1)$, convergente dans tout le demi-plan (E_0).

XI. *D'après* (3), *si* $\gamma-\beta$ (*ou* $\gamma-\alpha$) *est nul ou entier négatif, sans qu'il en soit de même de* γ, $\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$ *se réduit à un polynome en* x, *multiplié par* $(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}$; *si en outre* α (*ou* β) *est un nombre rationnel, la fonction hypergéométrique est donc algébrique en* x.

Euler et Gauss étaient parvenus aux formules de transformation par une voie moins élégante que celle de Jacobi.

12. Intégrales de Jordan-Pochhammer, le long d'un double lacet. — On peut se débarrasser de la restriction $\mathcal{R}(\gamma) > \mathcal{R}(\beta) > 0$ en substituant au chemin d'intégration rectiligne de la fonction $U(u)$, un contour tournant deux fois en sens contraire autour de chacun des points 0 et 1; un tel contour se ramène à la forme typique du double lacet $\mathcal{L}_{0,1}$. B. Riemann paraît s'être servi le premier de telles intégrales de contour; C. Jordan en a fait un usage systématique pour représenter les intégrales de certaines équations différentielles linéaires; P. A. Nekrasov (a) a obtenu des résultats analogues; L. Pochhammer a publié de nombreux mémoires sur ces intégrales (Doppelumlaufintegral), retrouvant et développant les résultats fondamentaux de Jordan.

Jordan et Pochhammer (d) généralisent d'abord l'expression de la fonction eulérienne, en démontrant que

$$(1) \qquad \mathcal{E}(p, q) = e^{-\pi i(p+q)} \int_{\mathcal{L}_{0,1}} u^{p-1}(1-u)^{q-1}\,du = -4 \sin p\pi \sin q\pi\, \mathrm{B}(p, q),$$

cette formule étant valable quelles que soient $\mathcal{R}(p)$ et $\mathcal{R}(q)$; $\mathcal{E}(p, q)$ est une fonction entière de p et q qui s'annule pour toutes les valeurs entières positives de p, q et $1-p-q$. Ceci posé (96, c, d, e).

XII. *Quels que soient* α, β, γ *on a dans tout* (X_1)

$$(2) \qquad \mathcal{E}(\beta, \gamma-\beta)\overline{\mathcal{F}}(\alpha, \beta, \gamma, x) = \int_{\mathcal{L}_{0,1}} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-ux)^{-\alpha}\,du.$$

Cette formule fournit une représentation de la branche principale pour toutes les valeurs de α, β, γ *sauf : 1° si* β *ou* $\gamma-\beta$ *est entier positif, la fonction* $\mathcal{E}$ *et l'intégrale s'annulant simultanément; 2° si* γ *est nul ou entier négatif,* $\mathcal{E}$ *s'annulant sans qu'il en soit de même de l'intégrale.*

En effet si $1 : x$ n'est pas sur le segment $(0, +1)$, $\mathcal{L}_{0,1}$ ne contient que les deux points de ramification $u = 0$ et $u = 1$; $\mathrm{U}(u)$ revient à sa détermination initiale quand u a tourné deux fois en sens contraire autour de chacun de ces points; $\mathrm{U}(u)$ étant continu par rapport à u sur $\mathcal{L}_{0,1}$ et holomorphe par rapport à x dans (X_1), l'intégrale définit une fonction holomorphe de x dans (X_1); soit $\rho > 1$ le maximum de $|u|$ sur $\mathcal{L}_{0,1}$: en développant $(1-ux)^{-\alpha}$ en série à l'intérieur du cercle $|x| = 1 : \rho$, on retrouve, en s'appuyant sur (1), la série

$$\mathcal{E}(\beta, \gamma-\beta)\, \mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

Lorsque $\mathcal{R}(\gamma) > \mathcal{R}(\beta) > 0$, en faisant tendre vers zéro dans $\mathcal{L}_{0,1}$ les rayons des petites circonférences entourant les points 0 et 1, l'intégrale (2) tend vers l'intégrale d'Euler multipliée par

$$[1 - e^{2\pi i\beta}][1 - e^{2\pi i(\gamma-\beta)}].$$

Lorsque β ou $\gamma-\beta$ est entier positif, l'un des points 0 ou 1 cesse d'être singulier pour U et $\mathcal{L}_{0,1}$ peut se réduire à un point : l'intégrale s'annule en même temps que $\mathcal{E}$; mais on sait (I et XI) que $\mathcal{F}$ est alors une fonction élémentaire. Lorsque γ est entier négatif $\mathcal{E}$ s'annule : $\overline{\mathcal{F}}$ n'a plus de sens, mais on voit que la fonction $\overline{\mathcal{F}}(\alpha, \beta, \gamma, x) : \Gamma(\gamma)$ reste finie et bien déterminée.

U est une fonction entière de α, β, γ; d'où ce résutat, important pour fixer la nature de $\overline{\mathcal{F}}$ comme fonction de α, β, γ :

XIII. *Dans tout* (X_1), $\mathcal{E}(\beta, \gamma - \beta)\overline{\mathcal{F}}(\alpha, \beta, \gamma, x)$ *est une fonction entière par rapport à chacun des éléments* α, β, γ. (F. KLEIN, *d*, *e*.)

Dans l'intégrale (2) Klein a substitué à la variable u des variables homogènes u_1 et u_2; en mettant aussi sous forme homogène (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2), (d_1, d_2) les quatre points de ramification de U, l'intégrale devient une forme homogène de degré $-1:2$ par rapport aux variables binaires (a_1, a_2).... C. Schellenberg a fait une étude approfondie de ce point de vue.

13. Applications des intégrales hypergéométriques. — L'intégrale d'Euler intervient dans de nombreuses applications; on obtient beaucoup plus de souplesse, en effectuant sur la variable u une transformation linéaire; les points de ramification $0, \infty, 1, 1:x$ de $U(u)$ se changent en a_1, a_2, a_3, a_4 si l'on pose

$$u = (v a_3 a_1 a_2), \qquad x = (a_4 a_3 a_2 a_1)$$

(la parenthèse désignant le rapport anharmonique de quatre nombres); on obtient ainsi

$$(1) \quad B(\beta, \gamma - \beta)\overline{\mathcal{F}}[\alpha, \beta, \gamma, (a_4 a_3 a_2 a_1)]$$
$$= \int_{a_1}^{a_3} (v a_3 a_1 a_2)^{\beta} (v a_1 a_3 a_2)^{\gamma-\beta-1} (v a_1 a_4 a_2)^{-\alpha} d\log(v a_3 a_1 a_2);$$

l'intégrale est prise sur la circonférence passant par a_1, a_2, a_3 en allant de a_1 vers a_3 sans passer par a_2; on prend

$$\arg(v a_3 a_1 a_2) = \arg(v a_1 a_3 a_2) = 0 \qquad \text{et} \qquad \arg(v a_1 a_4 a_2) = 0 \text{ pour } v = a_1;$$

le point a_4 est simplement assujetti à ne pas traverser le chemin d'intégration, pour assurer l'uniformité de la branche principale. Cette formule suppose $\mathcal{R}(\gamma) > \mathcal{R}(\beta) > 0$; dans le cas contraire il suffit de remplacer l'arc $(a_1 a_3)$ par un double lacet autour de a_1 et de a_3.

Représentation conforme d'un cercle sur un triangle. — Soient a, b, c trois points se succédant dans le sens direct sur une circonférence (γ) et λ, μ, ν trois nombres positifs tels que $\lambda+\mu+\nu=1$; la fonction

$$(2)\qquad \begin{aligned} \zeta(z) &= \zeta_1(c-b)^\lambda(a-b)^\mu(a-c)^\nu \\ &\quad\times\int_a^z (v-a)^{\lambda-1}(v-c)^{\mu-1}(v-b)^{\nu-1}\,dv+\zeta_0 \\ &= \zeta_1\int_a^z (vbac)^\lambda(vabc)^{\nu-1}\,d\log(vbac)+\zeta_0 \\ &= \frac{\zeta_1}{\lambda}(zbac)^\lambda\,\mathcal{F}[1-\nu,\lambda,\lambda+1,(zbac)]+\zeta_0 \end{aligned}$$

fournit la représentation conforme du domaine intérieur au cercle (γ) dans le plan z sur le domaine intérieur à un triangle ABC du plan ζ; les sommets A, B, C correspondent aux points a, b, c; les angles intérieurs ont pour valeur $\left(\widehat{AB, AC}\right)=\pi\lambda$, $\left(\widehat{BC, BA}\right)=\pi\nu$, $\left(\widehat{CA, CB}\right)=\pi\mu$; le sommet A est placé aux point ζ_0 et

$$\arg(B-A)=\arg\zeta_1.$$

Ce résultat important, dû à H. Schwarz (a) et à E. B. Christoffel, devient presque évident en posant dans l'intégrale

$$u=(vbac),\qquad x=(zbac),$$

$$\zeta(z)=\bar\zeta(x)=\zeta_1\int_0^x u^{\lambda-1}(1-u)^{\nu-1}\,du+\zeta_0;$$

le domaine intérieur à (γ) se transforme dans le demi-plan $\mathcal{J}(x)>0$, (γ) correspondant à l'axe réel, les points $z=a$, b, c correspondant à $x=0$, 1, ∞; il est clair d'autre part que $\zeta=\bar\zeta(x)$ donne la représentation conforme du demi-plan sur le triangle ABC [*voir* aussi un important travail de L. Schläfli (b)].

Fonctions elliptiques : 1° Notation de Jacobi. — Posons dans l'intégrale (1)

$$v=sn^2 u,\qquad a_1=0,\qquad a_2=\infty,\qquad a_3=1,\qquad a_4=1:k^2;$$

pour $v=a_1$ et $v=a_2$, on a donc $u=0$ et $u=K$; nous obtenons ainsi la formule

$$(3)\qquad \int_0^{K} sn^{2\beta-1} u \, cn^{2(\gamma-\beta)-1} u \, dn^{1-2\alpha} u \, du = \frac{1}{2} B(\beta, \gamma-\beta) \mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, k^2),$$

qui contient de nombreuses formules usuelles dans la théorie des fonctions elliptiques, en particulier l'expression de la période

$$K = \frac{\pi}{2} \mathfrak{F}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right);$$

2° *Notation de Weierstrass.* — Posons dans l'intégrale (1)

$$v = pu, \qquad a_1 = \infty, \qquad a_2 = e_3, \qquad a_3 = e_1, \qquad a_4 = e_2 \qquad (e_1 + e_2 + e_3 = 0);$$

pour $v = a_1$ et $v = a_3$, on peut prendre $u = 0$ et $u = \omega_1$; ce qui conduit à la formule

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\int_0^{\omega_1} (pu - e_1)^{\gamma-\beta-\frac{1}{2}} (pu - e_2)^{\frac{1}{2}-\alpha} (pu - e_3)^{\alpha-\gamma+\frac{1}{2}} du \\ &\quad = \frac{1}{2} B(\beta, \gamma-\beta)(e_1 - e_3)^{-\beta} \mathfrak{F}\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}\right), \end{aligned}$$

qui condense un grand nombre de résultats, notamment

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2}(e_1 - e_3)^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{F}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}\right).$$

14. Intégrale de Mellin-Barnes d'un quotient de fonctions gamma. — S. Pincherle (a) et Hj. Mellin (a, b, c, d, e) ont, indépendamment, donné une représentation de $\mathfrak{F}$ par une intégrale d'un type différent du précédent : la fonction sous le signe somme est uniforme, méromorphe et s'exprime au moyen de la fonction Γ. Les importants travaux de Mellin concernent une classe très étendue de fonctions, vérifiant une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels et seront exposés dans un autre fascicule. E.-W. Barnes (e) a retrouvé postérieurement ce mode de représentation dont il a fait un usage systématique.

XIV. *Si α et β ne sont ni nuls ni entiers négatifs la branche principale est représentée dans tout le domaine* (X_1) *par l'inté-*

grale

$$(1)\quad \overline{\mathcal{F}}(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{(\alpha, s)(\beta, s)}{(\gamma, s)(1, s)} \cdot \frac{-\pi}{\sin \pi s}(-x)^s\, ds$$

$$(1')\quad = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)}{\Gamma(\gamma+s)}\Gamma(-s)(-x)^s\, ds,$$

le contour d'intégration se composant de l'axe imaginaire complété : 1° par un petit demi-cercle de manière à laisser à sa droite les pôles de $\Gamma(-s)$; 2° si $\mathcal{R}(\alpha) < 0$ [ou $\mathcal{R}(\beta) < 0$], par un lacet de manière à laisser à sa gauche les pôles de $\Gamma(\alpha + s)$ [ou de $\Gamma(\beta + s)$]; dans les cas exclus la fonction hypergéométrique se réduit à un polynome.

On établit d'abord que l'intégrale définit une fonction holomorphe de x dans le domaine

$$(2)\qquad \varepsilon \leqq \arg x \leqq 2\pi - \varepsilon, \qquad \varepsilon' \leqq |x| \leqq 1 : \varepsilon';$$

on applique ensuite le théorème de Cauchy au contour fermé C composé : 1° du segment $-i\left(n+\frac{1}{2}\right)$, $+i\left(n+\frac{1}{2}\right)$ de l'axe imaginaire (n entier > 0) complété comme plus haut; 2° de la demi-circonférence $|s| = n + \frac{1}{2}$, $\mathcal{R}(s) > 0$. A l'intérieur de C la fonction à intégrer possède les pôles simples $0, 1, \ldots, n$; en supposant $|x| < 1$, quand n tend vers l'infini, l'intégrale le long de la demi-circonférence tend vers zéro et la somme des résidus tend vers la série hypergéométrique.

Entre autres résultats importants, on déduit des théorèmes généraux de Mellin, que dans le domaine (2) on peut poser, en supposant

$$\mathcal{R}(\beta) > \mathcal{R}(\alpha),$$

$$\overline{\mathcal{F}}(\alpha, \beta, \gamma, x) = (-x)^{-\alpha}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}[1 + \eta(x)],$$

la fonction $\eta(x)$ tendant uniformément vers zéro avec $1 : x$.

V. — Surface de Riemann et uniformisation de la fonction hypergéométrique.

15. Formules de transformation. Prolongement analytique de la branche principale. — Les expressions analytiques des numéros précédents représentent la branche principale dans tout son domaine d'holomorphie, *il convient maintenant d'examiner ce que devient le prolongement analytique de la fonction lorsqu'on le poursuit en franchissant la coupure* $(1, +\infty)$. La réponse à cette question se déduit de deux formules de transformation qui jouent un rôle fondamental

$$(1)\quad \begin{cases} \mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, x) = A\,\mathcal{F}(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x) \\ \qquad + B(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\mathcal{F}(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, 1-x), \\ A = \dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}, \qquad B = \dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}; \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, x) = C(-x)^{-\alpha}\mathcal{F}\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \dfrac{1}{x}\right) \\ \qquad + D(-x)^{-\beta}\,\mathcal{F}\left(\beta+1-\gamma, \beta, \beta+1-\alpha, \dfrac{1}{x}\right), \\ C = \dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\beta)}, \qquad D = \dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}. \end{cases}$$

Ces formules ont été données par Gauss (a) et par Kummer (b), mais non sans ambiguïté, les branches des fonctions multiformes n'étant pas suffisamment précisées. Elles ont été établies en toute rigueur par E. Goursat (a), par une méthode élégante qui consiste à appliquer le théorème de Cauchy à la fonction $U(u)$ pour des contours d'intégration convenablement choisis; prenons par exemple un contour formé des segments $(-1:\varepsilon, -\varepsilon)$, $(\varepsilon, 1-\varepsilon)$, $(1+\varepsilon, 1:\varepsilon)$ de l'axe réel, réunis par les trois demi-cercles

$$\mathcal{I}(u) > 0, \qquad |u| = \varepsilon, \qquad |1-u| = \varepsilon, \qquad |u| = 1:\varepsilon;$$

si $\mathcal{I}(x) > 0$, $U(u)$ est holomorphe à l'intérieur de ce contour; en supposant $\mathcal{R}(\beta)$, $\mathcal{R}(\gamma-\beta)$ et $\mathcal{R}(\alpha+1-\gamma)$ positives, les intégrales prises le long des demi-cercles tendent vers zéro avec ε, le théorème de Cauchy fournit une relation entre les intégrales prises le long des trois segments $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$, intégrales qui s'expriment immédiatement, moyennant la formule (13_1), par des branches principales.

Si l'on veut lever la restriction relative à $\mathcal{R}(\beta)$ etc., on peut recourir à une intégrale de double lacet ou encore partir de la formule de Mellin (14_1); E. Barnes obtient immédiatement, par exemple, la relation (2) en appliquant le théorème de Cauchy à la fonction méromorphe

$$\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)}{\Gamma(\gamma+s)}\Gamma(-s)(-x)^s$$

le long d'un contour se composant : 1° du segment $-i\left(n+\frac{1}{2}\right)$, $+i\left(n+\frac{1}{2}\right)$ (n entier positif) de l'axe imaginaire, complété au besoin par des lacets de manière à laisser à sa gauche les pôles de $\Gamma(\alpha+s)$ et $\Gamma(\beta+s)$ et à sa droite ceux de $\Gamma(-s)$; 2° de la demi-circonférence $|s|=n+\frac{1}{2}$, $\mathcal{R}(s)<0$. En supposant $|x|>1$, l'intégrale le long de la demi-circonférence tend vers zéro avec $1:n$ et la somme des résidus tend vers la somme de deux séries convergentes qui représentent précisément le développement du deuxième membre de (2) dans (C'_0).

Précisons le sens et la portée des formules de transformation; il faut tout d'abord supposer que $|\gamma|$, $|\gamma-\alpha-\beta|$, $|\alpha-\beta|$ ne sont ni nuls ni entiers (*voir* au n° **23**, comment on doit modifier les formules dans cette hypothèse). Les trois branches principales qui figurent dans (1) restent uniformes si x et $1-x$ ne prennent pas de valeurs réelles plus grandes que 1, c'est-à-dire si x ne franchit pas les coupures $(-\infty, 0)$ et $(1, +\infty)$; la formule (1) est ainsi valable dans tout le domaine (X_3); on achève de la préciser en prenant $\arg(1-x)=0$ sur $(0, 1)$. De même les trois branches qui figurent dans (2) demeurent uniformes si x ne franchit pas les coupures $(0, 1)$ et $(1, +\infty)$; (2) est donc valable dans tout le domaine (X_1); on précise en prenant $\arg(-x)=0$ sur $(-\infty, 0)$.

Soit ξ un point de l'axe réel situé sur un segment considéré comme coupure; si nous envisageons ξ comme point limite d'un ensemble de points x tous situés dans le demi-plan $\mathcal{J}(x)>0$, nous dirons qu'il appartient au bord supérieur de la coupure et nous le représenterons par le symbole $\xi+i0$; si les x sont tous dans le demi-plan $\mathcal{J}(x)<0$, nous dirons que le point limite appartient au bord inférieur de la coupure et nous le représenterons par $\xi-i0$.

Ceci étant, supposons $1<\xi<+\infty$; $(1, +\infty)$ n'est pas une coupure pour les branches qui figurent au deuxième membre de (1), de sorte que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-\xi+i0) &= \mathcal{F}(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-\xi-i0)\\ &= \mathcal{F}(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-\xi),\end{aligned}$$

et de même pour l'autre; mais par contre c'est une coupure pour le binome

$$\begin{aligned}&[1-(\xi+io)]^{\gamma-\alpha-\beta}=(\xi-1)^{\gamma-\alpha-\beta}e^{-\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}\\&[1-(\xi-io)]^{\gamma-\alpha-\beta}=(\xi-1)^{\gamma-\alpha-\beta}e^{\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}\end{aligned}\qquad [\arg(\xi-1)=0].$$

De sorte qu'en appliquant la formule (2) sur les deux bords, on obtient

$$\begin{aligned}(3)\quad &\overline{\mathcal{F}}(\alpha,\beta,\gamma,\xi+io)-\overline{\mathcal{F}}(\alpha,\beta,\gamma,\xi-io)\\&=-2iB(\xi-1)^{\gamma-\alpha-\beta}\sin\pi(\gamma-\alpha-\beta)\overline{\mathcal{F}}(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-\xi).\end{aligned}$$

XV. *La branche principale $\overline{\mathcal{F}}(\alpha,\beta,\gamma,x)$ prend des valeurs différentes sur les deux bords de la coupure $(1,+\infty)$, ce qui prouve que $\mathcal{F}(\alpha,\beta,\gamma,x)$ est multiforme; quand on effectue le prolongement en traversant la coupure, on obtient deux nouvelles branches représentées d'une manière uniforme dans tout (X_3) par*

$$\begin{aligned}(4)\quad \mathcal{F}=\;&A\overline{\mathcal{F}}(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-x)\\&+Be^{\pm2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\overline{\mathcal{F}}(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma+1-\alpha-\beta,1-x);\end{aligned}$$

le signe $+$ ou $-$ convient selon que la traversée a lieu de bas en haut ou de haut en bas; on prend toujours $\arg(1-x)=0$ sur $(0,1)$. Ces deux branches sont évidemment distinctes et différentes de la branche principale; de chacune d'elles se déduit une nouvelle branche, en répétant simplement le raisonnement précédent; n traversées consécutives de la coupure $(1,+\infty)$ (dans le même sens) conduisent à la branche, uniforme dans (X_3)

$$\begin{aligned}(5)\quad \mathcal{F}=\;&A\overline{\mathcal{F}}(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-x)\\&+Be^{\pm2n\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\overline{\mathcal{F}}(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma+1-\alpha-\beta,1-x),\end{aligned}$$

que l'on peut écrire aussi

$$\begin{aligned}(5')\quad \mathcal{F}=\;&\overline{\mathcal{F}}(\alpha,\beta,\gamma,x)-B[1-e^{\pm2n\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}]\\&\times(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\overline{\mathcal{F}}(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma+1-\alpha-\beta,1-x),\end{aligned}$$

ce qui met nettement en évidence la manière dont elle se distingue de la branche principale. *La branche* (5) *ne prend pas les mêmes valeurs sur les deux bords de la coupure* $(-\infty,0)$. En effet, le changement de x en $1-x$ dans (1) donne cette formule de transformation valable dans (X_3)

$$(6) \quad \overline{\mathcal{F}}(\alpha, \beta, \gamma, 1-x) = A\overline{\mathcal{F}}(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, x) \\ + Bx^{\gamma-\alpha-\beta}\overline{\mathcal{F}}(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, x),$$

où l'on prend $\arg x = 0$ sur $(0, 1)$. En utilisant (6), (5′) conduit à cette nouvelle représentation de la branche (5)

$$(5'') \quad \begin{cases} \mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}(\alpha, \beta, \gamma, x) - B[1 - e^{\pm 2n\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}] \\ \quad \times [A'\overline{\mathcal{F}}(\alpha, \beta, \gamma, x) + B'x^{1-\gamma}\overline{\mathcal{F}}(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x)], \\ A' = \dfrac{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}, \qquad B' = \dfrac{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}. \end{cases}$$

Soit donc $\xi < 0$; $(-\infty, 0)$ n'est pas une coupure pour les branches qui figurent au deuxième membre de (5″); par contre c'est une coupure pour $x^{1-\gamma}$

$$(\xi + i0)^{1-\gamma} = (-\xi)^{1-\gamma} e^{\pi i(1-\gamma)}, \qquad (\xi - i0)^{1-\gamma} = (-\xi) e^{-\pi i(1-\gamma)} \\ [\arg(-\xi) = 0];$$

c'est donc une coupure pour la branche (5).

XVI. *Si en partant d'une branche, différente de la branche principale* $\overline{\mathcal{F}}(\alpha, \beta, \gamma, x)$, *on effectue le prolongement à travers la coupure* $(-\infty, 0)$, *on obtient deux nouvelles branches distinctes de la fonction* $\mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$, *selon le sens dans lequel on traverse la coupure.*

16. Uniformisation de $\mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$; intégrale de W. Wirtinger. — On peut uniformiser *localement* $\mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$ dans le domaine de $x = 0$ ou $x = 1$, en posant

$$x = e^{\pi i t} \qquad \text{ou} \qquad x = e^{\pi i t} + 1,$$

toute branche devient une fonction uniforme de la variable uniformisante t, holomorphe dans le demi-plan $\mathcal{I}(t) > 0$ qui correspond à l'intérieur de (C_0) ou (C_1); quand x franchit la coupure $(-\infty, 0)$ ou $(1, +\infty)$ t augmente de 2 et la même expression analytique (en t) représente successivement les branches qui se permutent autour du point de ramification.

La possibilité d'uniformiser *dans son ensemble* $\mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$ en exprimant paramétriquement x par une fonction modulaire convenablement choisie a été explicitement énoncée par H. Poincaré, au début de ses mémorables travaux sur les fonctions fuchsiennes (*Œuvres*, t. II, p. 7); E. Papperitz (*e*) a ensuite consacré un long mémoire à la question; mais W. Wirtinger (*a*, *b*) a fait faire un pas décisif en fournissant la fonction uniformisée sous la forme d'une intégrale définie, très propre à mettre en relief ses propriétés.

Le nombre x étant donné, les conditions

$$(1)\qquad e_1 - e_3 = 1, \qquad e_2 - e_3 = x, \qquad e_1 - e_2 = 1 - x, \qquad e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

déterminent une fonction pu; considérons le rapport de deux périodes $\tau = \omega_3 : \omega_1$; nous supposerons τ dans le demi-plan $(\mathfrak{T})$, $\mathcal{J}(\tau) > 0$; soit $v = u : 2\omega_1$; on a en introduisant les fonctions thêta

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{pu - e_1} &= \sqrt[4]{1 - x}\, \frac{\vartheta_2(v \mid \tau)}{\vartheta_1(v \mid \tau)}, \\ \sqrt{pu - e_2} &= \sqrt[4]{x(1 - x)}\, \frac{\vartheta_3(v \mid \tau)}{\vartheta_1(v \mid \tau)}, \\ \sqrt{pu - e_3} &= \sqrt[4]{x}\, \frac{\vartheta_4(v \mid \tau)}{\vartheta_1(v \mid \tau)}; \end{aligned} \right.$$

d'où en particulier, en faisant $u = 0$, ces formules qui expriment x par une *fonction modulaire* de τ

$$(3)\qquad x = \frac{\vartheta_2(0 \mid \tau)^4}{\vartheta_3(0 \mid \tau)^4} = \varphi(\tau)^8, \qquad 1 - x = \frac{\vartheta_4(0 \mid \tau)^4}{\vartheta_3(0 \mid \tau)^4} = \psi(\tau)^8;$$

x est une fonction uniforme de τ, holomorphe dans $(\mathfrak{T})$, l'axe réel constituant la frontière de son domaine d'existence; à tout point τ de $(\mathfrak{T})$ correspond une valeur de x différente de 0, 1, ∞; la fonction modulaire $x(\tau)$ demeure invariante pour toutes les substitutions

$$\tau_1 = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \qquad (ad - bc = 1,\ a \equiv d \equiv 1,\ b \equiv c \equiv 0, \bmod 2),$$

qui forment le sous-groupe Γ_6 du groupe modulaire, et dérivent des substitutions fondamentales

$$\mathrm{U}: \quad \tau_1 = \tau + 2, \qquad \mathrm{V}: \quad \tau_1 = \frac{\tau}{-2\tau + 1}.$$

Le domaine fondamental $(\mathcal{D})$ de Γ_6 est le quadrilatère ABCD ayant pour sommets

$$\mathrm{A}: \ \tau = 0, \qquad \mathrm{B}: \ \tau = 1, \qquad \mathrm{C}: \ \tau = -1, \qquad \mathrm{D}: \ \tau = +i\infty,$$

les côtés étant les demi-droites (BD) et (CD) : $\mathcal{R}(\tau) = \pm 1$ et les demi-circonférences (AB) et (AC) : $\left|\tau \pm \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$. La fonction $x(\tau)$ donne la représentation conforme de $(\mathcal{O})$ sur (X_3); les sommets ABCD correspondent à $x = 1, \infty, \infty, 0$; les côtés (CD) et (BD) d'une part, (AC) et (AB) d'autre part, correspondent aux bords inférieur et supérieur des coupures $(-\infty, 0)$ et $(1, +\infty)$; les triangles ABD et ACD correspondent aux demi-plans $\mathcal{J}(x) > 0$ et < 0. Les substitutions U, U^{-1}, V, V^{-1} transforment $(\mathcal{O})$ en quatre quadrilatères que nous désignerons par $U(\mathcal{O})$, $U^{-1}(\mathcal{O})$, $V(\mathcal{O})$ et $V^{-1}(\mathcal{O})$ et qui sont respectivement son *symétrique* par rapport aux côtés (BD), (CD), (AC), (AB); toute substitution W de Γ_6 transforme $(\mathcal{O})$ en un quadrilatère $W(\mathcal{O})$; le réseau de ces quadrilatères couvre $(\mathfrak{T})$ d'une manière uniforme. En deux points congruents, $x(\tau)$ prend la même valeur; quand τ traverse un côté d'un quadrilatère, x franchit une des coupures de (X_3).

Ceci rappelé, en supposant toujours que pu soit déterminée par les conditions (1), l'intégrale (13_1) s'écrit

$$2\omega_1 x^{\frac{1-\gamma}{2}}(1-x)^{\frac{\gamma-\alpha-\beta}{2}}$$
$$\times \int_0^{\frac{1}{2}} \vartheta_1(\nu \mid \tau)^{2\beta-1}\, \vartheta_2(\nu \mid \tau)^{2(\gamma-\beta)-1}\, \vartheta_3(\nu \mid \tau)^{1-2\alpha}\, \vartheta_4(\nu \mid \tau)^{1-2(\gamma-\alpha)}\, d\nu.$$

Pour se rendre compte de la nature de cette fonction de τ, il est commode d'introduire la variable auxiliaire $q = e^{\pi i \tau}$; au demi-plan $(\mathfrak{T})$, correspond l'intérieur de la circonférence $(Q) : |q| = 1$. En remplaçant ω_1, x, $1-x$, et les fonctions ϑ par leurs développements en produits infinis, uniformément convergents à l'intérieur de (Q), l'intégrale prend la forme

$$(4) \qquad \Pi_0(q) \int_0^{\frac{1}{2}} \sin^{2\beta-1} \pi\nu \cos^{2(\gamma-\beta)-1} \pi\nu\, \Pi_1(\nu, q)\, d\nu,$$

Π_0 et Π_1 désignant des produits infinis uniformément convergents, dont tous les termes sont de la forme

$$(1 \pm q^k)^\lambda \quad \text{et} \quad (1 \pm q^k e^{\pm 2\pi i \nu})^\mu \quad (k \text{ entier} > 0);$$

les points de ramification de ces termes sont tous sur (Q), ν parcourant le segment $\left(0, \frac{1}{2}\right)$; par conséquent une fois choisie sa détermination initiale, chacun est uniforme à l'intérieur de (Q); il en est donc de même des produits Π_0 et Π_1. Ainsi l'expression (4) est une fonction uniforme de q, holomorphe dans (Q), donc une fonction uniforme et holomorphe de τ dans ($\mathfrak{T}$).

XVII. *Quand on exprime x par la fonction modulaire $x = \varphi(\tau)^8$, la fonction hypergéométrique devient une fonction uniforme de τ représentée dans tout le demi-plan ($\mathfrak{T}$), son domaine d'existence, par l'expression analytique*

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2} B(\beta, \gamma-\beta)\, \mathfrak{F}[\alpha, \beta, \gamma, x(\tau)] \\ &\quad = 2\omega_1 x^{\frac{1-\gamma}{2}} (1-x)^{\frac{\gamma-\alpha-\beta}{2}} \\ &\quad\quad \times \int_0^{\frac{1}{2}} \vartheta_1(v \mid \tau)^{2\beta-1} \vartheta_2(v \mid \tau)^{2(\gamma-\beta)-1} \vartheta_3(v \mid \tau)^{1-2\alpha} \vartheta_4(v \mid \tau)^{1-2(\gamma-\alpha)}\, dv \\ &\quad = \pi^{2\beta} \vartheta_3(0 \mid \tau)^{4\beta} \int_0^{\frac{1}{2}} \Phi(v \mid \tau)\, dv, \\ &\qquad\qquad \Phi(v \mid \tau) = \left[\frac{\vartheta_1(v \mid \tau)}{\vartheta_1'(0 \mid \tau)}\right]^{2\beta-1} \left[\frac{\vartheta_2(v \mid \tau)}{\vartheta_2(0 \mid \tau)}\right]^{2(\gamma-\beta)-1} \\ &\qquad\qquad\qquad \times \left[\frac{\vartheta_3(v \mid \tau)}{\vartheta_3(0 \mid \tau)}\right]^{1-2\alpha} \left[\frac{\vartheta_4(v \mid \tau)}{\vartheta_4(0 \mid \tau)}\right]^{1-2(\gamma-\alpha)}; \end{aligned}\right.$$

à l'intérieur du quadrilatère fondamental ($\mathcal{O}$), $\mathfrak{F}$ coïncide avec la branche principale $\overline{\mathfrak{F}}$ (Wirtinger).

Lorsque la condition $\mathcal{R}(\gamma) > \mathcal{R}(\beta) > 0$ n'est pas vérifiée, l'ensemble du raisonnement précédent subsiste, en remplaçant le segment rectiligne d'intégration par un double lacet.

17. Surface de Riemann de $\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$. — Dans ($\mathcal{O}$), $\mathfrak{F}[\alpha, \beta, \gamma, x(\tau)]$ coïncide avec la branche principale $\overline{\mathfrak{F}}$; il en est de même dans les quadrilatères adjacents $U(\mathcal{O})$ et $U^{-1}(\mathcal{O})$ et plus généralement dans tout quadrilatère $U^{\pm n}(\mathcal{O})$; en effet, d'après les formules de transformation des fonctions ϑ, l'expression (16_5) admet la période 2 (par rapport à τ); ceci correspond au fait qu'un circuit autour de $x = 0$ ne modifie pas $\overline{\mathfrak{F}}$. Au contraire dans $V(\mathcal{D})$ et $V^{-1}(\mathcal{D})$, $\mathfrak{F}$ coïncide respectivement avec chacune des branches (15$_1$), qui se déduisent de $\overline{\mathfrak{F}}$ en franchissant une fois la coupure $(1, +\infty)$; on retrouve ces deux mêmes branches dans tous les quadrilatères $VU^{\pm n}(\mathcal{D})$ et $V^{-1}U^{\pm n}(\mathcal{D})$ à cause de la périodicité; ce qui s'explique de la manière suivante : quand τ passe de $\mathcal{D}$ à $V(\mathcal{D})$, x franchit une fois la coupure $(1, +\infty)$; quand τ passe de $(\mathcal{D})$ à $VU^{\pm n}(\mathcal{D})$, x franchit n fois la coupure $(-\infty, 0)$, puis une fois la coupure $(1, +\infty)$ on retrouve bien la même branche dans les deux cas, car les n circuits préliminaires autour de $x = 0$ sont sans effet sur $\overline{\mathfrak{F}}$. Cette remarque est générale : *dans les deux quadrilatères* $W(\mathcal{D})$ *et* $WU^{\pm n}(\mathcal{D})$, $\mathfrak{F}$ *représente toujours la même branche*. Il suffit donc de considérer l'ensemble des quadrilatères compris dans la bande $-1 < \mathcal{R}(\tau) < +1$, pour obtenir toutes les branches, ce qui revient à négliger les circuits préliminaires autour de $x = 0$, sans effet avant d'avoir franchi une première fois la coupure $(1, +\infty)$. Enroulons le demi-plan $(\mathfrak{C})$ sur un cylindre de manière que les côtés (BD) et (CD) de $(\mathcal{D})$ viennent en coïncidence; après cette opération les quadrilatères $W(\mathcal{D})$ et $WU^{\pm n}(\mathcal{D})$ seront confondus et la frontière de $(\mathcal{D})$ se composera des deux côtés (AB), (AC). Considérons une infinité dénombrable de feuillets étalés au-dessus du plan (X), munis des coupures $(-\infty, 0)$ et $(1, +\infty)$ sauf l'un d'eux, le *feuillet principal*, muni de la seule coupure $(1, +\infty)$. Établissons une correspondance biunivoque entre les feuillets et les quadrilatères du *réseau enroulé* au moyen de la fonction modulaire $x(\tau)$, qui fournit la représentation conforme de chaque quadrilatère sur un feuillet, les côtés correspondant aux quatre bords des coupures; $(\mathcal{D})$ est représenté par le feuillet principal, ses deux côtés correspondant aux bords de la coupure unique. Étant donnés deux quadrilatères adjacents, réunissons par une soudure les bords des coupures qui, sur les deux feuillets correspondants, sont les images du côté commun; cette opération étant effectuée pour tous les feuillets, nous obtenons ainsi un domaine continu; *c'est la surface de Riemann* $[\mathfrak{F}]$ *de la fonction hypergéométrique* $\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$; il est clair, en effet, que la fonction est uniforme sur cette surface, puisque chaque fois que x franchit une coupure le point représentatif change de feuillet; sur le feuillet principal $\mathfrak{F}$ coïncide avec $\overline{\mathfrak{F}}$.

La surface de Riemann de la fonction

$$\Phi(x) = x^{\rho}(1-x)^{\sigma}\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

est aussi utile à connaître; elle est distincte de $[\mathcal{F}]$, car $\Phi[x(\tau)]$ ne prend pas les mêmes valeurs dans deux quadrilatères $W(\mathcal{Q})$ et $W U^{\pm n}(\mathcal{Q})$, la branche principale elle-même $\Phi = x^\rho(1-x)^\sigma \mathcal{F}$ $[\arg x = \arg(1-x) = 0 \text{ sur } (0, 1)]$ étant modifiée par la traversée de la coupure $(-\infty, 0)$. Le procédé de construction reste analogue au précédent; on ne peut plus enrouler $(\mathcal{C})$ sur un cylindre : à chaque quadrilatère $W(\mathcal{Q})$ correspond un feuillet; en outre le feuillet principal lui-même doit être muni des deux coupures $(-\infty, 0)$, $(1, +\infty)$. *La surface de Riemann ainsi construite est identique à celle de la fonction multiforme* $\tau = \tau(x)$, *inverse de la fonction modulaire* $x(\tau)$; nous la désignerons par $[\tau]$.

Le groupe modulaire Γ comprend toutes les substitutions

$$\tau_1 = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \qquad (ad - bc = 1,\ a,\ b,\ c,\ d \text{ entiers}),$$

elles dérivent des deux substitutions fondamentales

$$(\mathrm{S}) \qquad \tau_1 = \tau + 1,$$
$$(\mathrm{T}) \qquad \tau_1 = -1 \,.\, \tau,$$

à chacune d'elles correspond une transformation simple de la surface $[\tau]$; en effet, elles laissent invariante la fonction modulaire

$$J(\tau) = \frac{4}{27}\frac{(1 - x + x^2)^3}{x^2(1-x)^2} = \frac{4}{27}\frac{[\varphi(\tau)^{16} + \psi(\tau)^{16}]^3}{\varphi(\tau)^{16}\psi(\tau)^{16}},$$

donc elles transforment linéairement $x(\tau)$ en échangeant les points $x = 0, 1, \infty$.

Les six transformations linéaires de x peuvent s'obtenir ainsi

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{llllll}
S_0 = 1 & S_1 = S & S_2 = T & S_3 = ST & S_4 = TS & S_5 = S^{-1}TS, \\
\tau_0 = \tau & \tau_1 = \tau + 1 & \tau_2 = -\dfrac{1}{\tau} & \tau_3 = \dfrac{-1}{\tau + 1} & \tau_4 = \dfrac{\tau - 1}{\tau} & \tau_5 = \dfrac{\tau}{\tau - 1}, \\
x_0 = x & x_1 = \dfrac{x}{x - 1} & x_2 = 1 - x & x_3 = \dfrac{1}{1 - x} & x_4 = \dfrac{x - 1}{x} & x_5 = \dfrac{1}{x}.
\end{array}\right.$$

Si dans l'intégrale de Wirtinger on effectue une substitution de ce tableau, les formules de transformation des fonctions $\mathfrak{S}$, conduisent immédiatement à une formule de transformation de $\mathcal{F}$; S_1 redonne la formule d'Euler (11_2); S_2 et S_5 donnent les formules (15_1) et (15_2). Cette méthode élégante a été suivie par F. Graf, K. Petr, A. Čermak.

Signalons encore que les formules de transformation d'ordre supérieur (exemple $\tau_1 = 2\tau$) conduisent pour x aux transformations algébriques, auxquelles correspondent pour $\mathcal{F}$ les formules du paragraphe X.

VI. — L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE D'EULER ET DE GAUSS.

18. Les diverses formes de l'équation différentielle hypergéométrique. — XVIII. *La fonction $\mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$ vérifie l'équation différentielle linéaire à coefficients rationnels en x et α, β, γ*

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left[\frac{\gamma}{x} + \frac{\alpha+\beta+1-\gamma}{x-1}\right]\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha\beta}{x(x-1)}y = 0. \tag{2}$$

Cette propriété découverte par Euler (b), retrouvée par Gauss (b) (pour la *série* hypergéométrique) est le point central de la théorie : l'étude de l'équation différentielle hypergéométrique a fait l'objet de nombreux travaux, dont plusieurs ont marqué une date dans le développement de l'Analyse et ont préparé l'élaboration de la théorie générale des équations différentielles linéaires.

L'équation (1) est susceptible par des changements simples de fonction et de variable de prendre plusieurs formes remarquables ; par exemple, en posant

$$y(x) = x^{\rho}(1-x)^{\sigma} z(x),$$

on obtient cette nouvelle forme qui intervient souvent

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{dx^2} &+ \left[\frac{2\rho+\gamma}{x} + \frac{2\sigma+\alpha+\beta+1-\gamma}{x-1}\right]\frac{dz}{dx} \\ &+ \left[\frac{\rho(\rho+\gamma-1)}{x^2} + \frac{\sigma(\sigma+\alpha+\beta-\gamma)}{(x-1)^2}\right. \\ &\qquad \left. + \frac{\rho(\sigma+\alpha+\beta+1-\gamma)+\sigma(\rho+\gamma)+\alpha\beta}{x(x-1)}\right] z = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

En prenant $2\rho = -\gamma$, $2\sigma = \gamma - \alpha - \beta - 1$, on fait disparaître la dérivée première, ce qui conduit à la *forme normale* (ou réduite) de l'équation hypergéométrique

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2Y}{dx^2} = -\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1-\lambda^2}{x^2} + \dfrac{1-\nu^2}{(x-1)^2} - \dfrac{1-\lambda^2+\mu^2-\nu^2}{x(x-1)}\right] Y = R(\lambda, \mu, \nu, x)Y; \\ y(x) = x^{-\frac{\gamma}{2}}(1-x)^{\frac{\gamma-\alpha-\beta-1}{2}}\,Y(x); \\ \lambda^2 = (1-\gamma)^2, \qquad \mu^2 = (\alpha-\beta)^2, \qquad \nu^2 = (\gamma-\alpha-\beta)^2: \end{cases}$$

La fraction rationnelle $R(\lambda, \mu, \nu, x)$ se comporte d'une manière très simple vis-à-vis des six substitutions (17_1) de la variable x qui échangent les points $x=0, 1, \infty$; d'où cette proposition qui fait l'intérêt de la réduction à la forme (4).

XIX. *Si la fonction* $Y(\lambda, \mu, \nu, x)$ *vérifie l'équation hypergéométrique normale*, *il en est de même des quarante-huit fonctions*.

$$Y(\pm\lambda, \pm\mu, \pm\nu, x), \qquad \frac{1}{1-x}\,Y\left(\pm\lambda, \pm\nu, \pm\mu, \frac{x}{x-1}\right),$$

$$Y(\pm\nu, \pm\mu, \pm\lambda, 1-x), \qquad (1-x)Y\left(\pm\mu, \pm\nu, \pm\lambda, \frac{1}{1-x}\right),$$

$$\left(1-x\right)Y(\pm\nu, \pm\lambda, \pm\mu, \frac{x-1}{x}\right), \qquad xY\left(\pm\mu, \pm\lambda, \pm\nu, \frac{1}{x}\right).$$

On trouvera dans W. Heymann (*c*) un certain nombre d'équations du deuxième ordre et de systèmes d'équations du premier ordre se ramenant à l'équation hypergéométrique.

19. Intégrale générale de l'équation hypergéométrique. Tableau de Kummer. — Les fonctions rationnelles $p(x)$ et $q(x)$, coefficients de y' et y dans (18_2), admettent comme pôles simples les points $x=0$ et 1; dans le domaine de $x=\infty$, leurs développements commencent par $(\alpha+\beta+1):x$ et $\alpha\beta:x^2$. Les racines des équations déterminantes relatives aux points $0, 1, \infty$ sont : $0, 1-\gamma$; $0, \gamma-\alpha-\beta$; α, β. Donc d'après les théorèmes généraux aujourd'hui classiques.

XX. *Une intégrale de l'équation hypergéométrique est holomorphe dans le domaine de tout point sauf peut être des trois points* $x=0, 1, \infty$, *qui sont singuliers réguliers; lorsque aucun des nombres* γ, $\gamma-\alpha-\beta$, $\alpha-\beta$ *n'est nul ou entier*, *il existe deux intégrales indépendantes régulières dans le domaine de chacun* *des points singuliers :*

$$y_1^{(0)} = \mathfrak{P}_1(x) \qquad y_2^{(0)} = x^{1-\gamma}\mathfrak{P}_2(x),$$
$$y_1^{(1)} = \mathfrak{P}_3(x-1) \qquad y_2^{(1)} = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\mathfrak{P}_4(x-1),$$
$$y_1^{(\infty)} = x^{-\alpha}\mathfrak{P}_5\left(\frac{1}{x}\right) \qquad y_2^{(\infty)} = x^{-\beta}\mathfrak{P}_6\left(\frac{1}{x}\right).$$

$\mathfrak{P}(x-a)$ désignant une fonction holomorphe dans le domaine de $x=a$, $\mathfrak{P}(0)\neq 0$.

Réciproquement J. Tannery a démontré que toute équation linéaire du deuxième ordre, n'admettant que trois points singuliers réguliers peut se ramener à l'équation hypergéométrique par une substitution linéaire sur la variable, suivie d'un changement de fonction du type (18_3).

Gauss (b) a développé les six fonctions $\mathfrak{P}$ en séries hypergéométriques; puis Kummer (b) en appliquant à chacune de ces six séries, les formules de transformation $(11_{1,2,3})$ a formé un tableau de vingt-quatre intégrales exprimées par des séries hypergéométriques de la forme

$$x^{\rho_i}(1-x)^{\sigma_i}\mathrm{F}(\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i,\ x_i),$$

α_i, β_i, γ_i, ρ_i, σ_i étant linéaires en α, β, γ et x_i désignant une des six substitutions (17_1).

Le procédé le plus simple pour former le tableau de Kummer est de partir de la proposition XIX et de remarquer, qu'en vertu de XVIII on connaît une intégrale de l'équation hypergéométrique normale

$$\mathrm{Y}(\lambda,\mu,\nu,x) = x^{\frac{1-\lambda}{2}}(1-x)^{\frac{1-\nu}{2}}\mathcal{F}\left(\frac{1-\lambda-\mu-\nu}{2}, \frac{1-\lambda+\mu-\nu}{2}, 1-\lambda, x\right);$$

on en déduit, presque sans calcul, quarante-huit intégrales et à chacune correspond une intégrale de l'équation (18_1) elle-même; cependant on convient de négliger la permutation de signe de μ, qui revient à échanger le rôle de α et β dans $\mathcal{F}$, ce qui réduit le tableau à vingt-quatre intégrales. *Chaque intégrale*

$$y_{m,n}^{(a)} = x^{\rho_i}(1-x)^{\sigma_i}\mathcal{F}[\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i,\ x_i(x)]$$

est une fonction multiforme de x; l'indice $a=0,1,\infty$ indique le point $x=a$ pour lequel $x_i(a)=0$. La colonne 2 fournit le domaine du plan (X), correspondant à l'intérieur du cercle $|x_i(x)|\leqq 1$; on

$y_1^{(0)} = \mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$	(C_0)	(X_1)
$y_{1,1}^{(0)} = (1-x)^{-\alpha}\mathcal{F}\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$	(E_0)	»
$y_{1,2}^{(0)} = (1-x)^{-\beta}\mathcal{F}\left(\gamma-\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$	»	»
$y_{1,3}^{(0)} = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\mathcal{F}(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x)$	(C_0)	»
$y_2^{(0)} = x^{1-\gamma}\mathcal{F}(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x)$	»	(X_3)
$y_{2,1}^{(0)} = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}\mathcal{F}\left(\alpha+1-\gamma, 1-\beta, 2-\gamma, \frac{x}{x-1}\right)$	(E_0)	»
$y_{2,2}^{(0)} = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1}\mathcal{F}\left(1-\alpha, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, \frac{x}{x-1}\right)$	»	»
$y_{2,3}^{(0)} = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\mathcal{F}(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, x)$	(C_0)	»
$y_1^{(1)} = \mathcal{F}(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x)$	(C_1)	(X_2)
$y_{1,1}^{(1)} = x^{-\alpha}\mathcal{F}\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, \frac{x-1}{x}\right)$	(E_1)	»
$y_{1,2}^{(1)} = x^{-\beta}\mathcal{F}\left(\beta+1-\gamma, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, \frac{x-1}{x}\right)$	»	»
$y_{1,3}^{(1)} = x^{1-\gamma}\mathcal{F}(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x)$	(C_1)	»
$y_2^{(1)} = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\mathcal{F}(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, 1-x)$	»	(X_3)
$y_{2,1}^{(1)} = x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\mathcal{F}\left(\gamma-\alpha, 1-\alpha, \gamma+1-\alpha-\beta, \frac{x-1}{x}\right)$	(E_1)	»
$y_{2,2}^{(1)} = x^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\mathcal{F}\left(1-\beta, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, \frac{x-1}{x}\right)$	»	»
$y_{2,3}^{(1)} = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\mathcal{F}(1-\alpha, 1-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, 1-x)$	(C_1)	»
$y_1^{(\infty)} = (-x)^{-\alpha}\mathcal{F}\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}\right)$	(C'_0)	(X_4)
$y_{1,1}^{(\infty)} = (1-x)^{-\alpha}\mathcal{F}\left(\alpha, \gamma-\beta, \alpha+1-\beta, \frac{1}{1-x}\right)$	(C'_1)	»
$y_{1,2}^{(\infty)} = (-x)^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}\mathcal{F}\left(1-\beta, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{1-x}\right)$	»	»
$y_{1,3}^{(\infty)} = (-x)^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\mathcal{F}\left(1-\beta, \gamma-\beta, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}\right)$	(C'_0)	»
$y_2^{(\infty)} = (-x)^{-\beta}\mathcal{F}\left(\beta+1-\gamma, \beta, \beta+1-\alpha, \frac{1}{x}\right)$	»	»
$y_{2,1}^{(\infty)} = (1-x)^{-\beta}\mathcal{F}\left(\gamma-\alpha, \beta, \beta+1-\alpha, \frac{1}{1-x}\right)$	(C'_1)	»
$y_{2,2}^{(\infty)} = (-x)^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\mathcal{F}\left(\beta+1-\gamma, 1-\alpha, \beta+1-\alpha, \frac{1}{1-x}\right)$	»	»
$y_{2,3}^{(\infty)} = (-x)^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\mathcal{F}\left(\gamma-\alpha, 1-\alpha, \beta+1-\alpha, \frac{1}{x}\right)$	(C'_0)	»

précise la *branche principale* $\overline{y}^{(a)}_{m,n}$, à l'intérieur de ce domaine, en prenant pour $\mathcal{F}$ la série hypergéométrique convergente selon les puissances de x_i; en outre on choisit, si $a = 0$ ou 1, $\arg x = \arg(1-x) = 0$ sur $(0, +1)$ et si $a = \infty$, $\arg(-x) = \arg(1-x) = 0$ sur $(-\infty, 0)$. La colonne 3 indique le domaine de (X) dans lequel le prolongement de la branche $\overline{y}^{(a)}_{m,n}$ reste uniforme; si x franchit une des coupures de ce domaine, le prolongement fournit une nouvelle branche de $y^{(a)}_{n,m}$.

Pour chaque valeur de a, m prend les valeurs 1 et 2, n les valeurs 0, 1, 2, 3 (si $n = 0$, on supprime cet indice), le choix des indices étant fait de telle manière que les branches principales $\overline{y}^{(a)}_{1,n'}$ et $\overline{y}^{(a)}_{2,n''}$ soient deux intégrales indépendantes régulières dans le domaine de $x = a$.

20. Relations linéaires entre trois intégrales du tableau de Kummer. — Trois des vingt-quatre fonctions du tableau sont nécessairement liées par une relation linéaire à coefficients constants; il suffit évidemment de connaître les relations qui unissent les branches principales. Le système complet de ces relations a été formé pour la première fois avec toute la précision désirable pour les déterminations des fonctions multiformes, par E. Goursat (a).

En vertu des formules de transformation d'Euler ($11_{1,2,3}$) *on a d'abord*

$$\overline{y}^{(a)}_{m,n} = \overline{y}^{(a)}_{m,n'};$$

ce qui permet de se ramener toujours aux six intégrales, pour lesquelles $n = 0$.

Les formules de transformation du n° 15 donnent immédiatement l'expression des intégrales régulières dans le domaine de $x = 0$, en fonction des intégrales régulières dans le domaine de $x = 1$ ou de $x = \infty$

$$(1)\quad B(\beta, \gamma-\beta)\overline{y}^{(0)}_1 = B(\beta, \gamma-\alpha-\beta)\overline{y}^{(1)}_1 + B(\gamma-\beta, \alpha+\beta-\gamma)\overline{y}^{(1)}_2,$$

$$(2)\quad B(\beta+1-\gamma, 1-\beta)\overline{y}^{(0)}_2$$
$$= B(\beta+1-\gamma, \gamma-\alpha-\beta)\overline{y}^{(1)}_1 + B(1-\beta, \alpha+\beta-\gamma)\overline{y}^{(1)}_2,$$

ces relations sont valables dans (X_3) où les branches principales sont simultanément uniformes :

$$(3)\qquad B(\beta, \gamma-\beta)\bar{y}_1^{(0)} = B(\beta-\alpha, \gamma-\beta)\bar{y}_1^{(\infty)} + B(\beta, \alpha-\beta)\bar{y}_2^{(\infty)},$$

$$(4)\qquad e^{\pm\pi i(1-\gamma)}B(\beta+1-\gamma, 1-\beta)\bar{y}_2^{(0)}$$
$$= B(\beta-\alpha, 1-\beta)\bar{y}_1^{(\infty)} + B(\beta+1-\gamma, \alpha-\beta)\bar{y}_2^{(\infty)},$$

(3) est valable dans (X_4) où les branches sont uniformes; au contraire (4) a deux formes : il faut prendre — ou + selon que $\mathfrak{I}(x) > 0$ ou < 0, cela tient à ce que tout segment de l'axe réel est une coupure pour une au moins des trois branches $\bar{y}_2^{(0)}, \bar{y}_1^{(\infty)}, \bar{y}_2^{(\infty)}$.

21. Groupe de l'équation hypergéométrique. — XXI. *Une branche d'une intégrale régulière dans le domaine d'un point singulier est multipliée par une constante lorsque x décrit un circuit autour de ce point.*

Un circuit direct, autour de $x = 0, 1, \infty$ respectivement, transforme les branches régulières dans le domaine du point correspondant

$$\bar{y}_1^{(0)} \text{ et } \bar{y}_2^{(0)};\qquad \bar{y}_1^{(1)} \text{ et } \bar{y}_2^{(1)};\qquad \bar{y}_1^{(\infty)} \text{ et } \bar{y}_2^{(\infty)}$$

en

$$\bar{y}_1^{(0)} \text{ et } e^{2\pi i(1-\gamma)}\bar{y}_2^{(0)};\qquad \bar{y}_1^{(1)} \text{ et } e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}\bar{y}_2^{(1)};$$
$$e^{2\pi i\alpha}\bar{y}_1^{(\infty)} \text{ et } e^{2\pi i\beta}\bar{y}_2^{(\infty)}.$$

Ce résultat très simple, joint aux formules du n° 20, permet d'obtenir le prolongement des six branches principales, quand x franchit une des coupures et de proche en proche le prolongement d'une branche quelconque.

On peut donner une forme élégante aux calculs en introduisant *le groupe de l'équation*. Les intégrales $y_1^{(0)}$ et $y_1^{(1)}$ sont indépendantes et toutes deux uniformes sur la surface de Riemann $[\tau]$. Toute intégrale peut se mettre sous la forme

$$y(x) = My_1^{(0)} + Ny_1^{(1)}.$$

XXII. *L'intégrale $y(x)$ est uniforme sur la surface de Riemann $[\tau]$, sa branche principale étant définie sur le feuillet principal par*

$$\bar{y}(x) = M\bar{y}_1^{(0)} + N\bar{y}_1^{(1)} \equiv Mu + Nv,$$

quand x décrit un contour fermé dans le plan, le point représen-

tatif passant sur $[\tau]$ *d'un feuillet à un autre, sa valeur est donnée par*

$$y(x) = \mathrm{M}u' + \mathrm{N}v',$$

où u', v' *se déduisent de* u, v *par une des substitutions du groupe dérivant des substitutions fondamentales*

$$(\mathrm{U}_1)\quad u_1 = u, \qquad v_1 = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}\left[1-e^{2\pi i(1-\gamma)}\right]u + e^{2\pi i(1-\gamma)}v,$$

$$(\mathrm{V}_1)\quad u_1 = e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}u + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\left[1-e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}\right]v, \qquad v = v_1.$$

Les substitutions U_1 et V_1^{-1} correspondent au passage du bord supérieur au bord inférieur des coupures $(-\infty, 0)$ et $(1, +\infty)$ respectivement. Le groupe de l'équation hypergéométrique est évidemment holoédriquement isomorphe au groupe Γ_6.

22. Intégration par des intégrales définies. — 1° *Intégrales d'Euler.* — On doit à Jacobi cette élégante proposition (les notations restent celles du n° 10).

XXIII. *L'intégrale définie*

$$(1)\qquad y(x) = \int_g^h \mathrm{U}(u)\,du,$$

où g et h sont deux des quatre quantités $0, \infty, 1, 1:x$ *représente* (*lorsqu'elle a un sens*) *une branche uniforme d'une intégrale particulière de l'équation hypergéométrique.*

En prenant comme chemin d'intégration les segments $(0, 1)$ $(1:x.\ +\infty)$ $(0, -\infty)$ $(1, 1:x)$ $(1, +\infty)$ $(0, 1:x)$ on obtient ainsi une représentation respectivement des branches $\overline{y}_1^{(0)}, \overline{y}_2^{(0)}, \overline{y}_1^{(1)}, \overline{y}_2^{(1)}$, $\overline{y}_1^{(\infty)}, \overline{y}_2^{(\infty)}$, valable dans tout le domaine où elles sont uniformes; on trouvera le tableau des déterminations à préciser dans chaque cas pour $\mathrm{U}(u)$ et des conditions que doivent vérifier $\mathcal{R}(\alpha)$, $\mathcal{R}(\beta)$, $\mathcal{R}(\gamma)$ pour que l'intégrale ait un sens, dans E. Goursat (a). Il est souvent commode de mettre l'intégrale d'Euler sous la forme (13_1)

$$y(x) = \int_{g'}^{h'} (v a_3 a_1 a_2)^{\beta} (v a_1 a_3 a_4)^{\gamma-\beta-1} (v a_1 a_4 a_2)^{-\alpha}\, d\log(v a_3 a_1 a_2)$$
$$x = (a_4 a_3 a_2 a_1),$$

g' et h' désignant deux des quantités $a_1 a_2 a_3 a_4$, de simples permutations conduisent ainsi à une représentation des branches principales des vingt-quatre intégrales du tableau de Kummer.

2° *Intégrales de Jordan-Pochhammer.* — Les intégrales d'Euler donnent des représentations très maniables des intégrales; néanmoins elles ont le grand inconvénient de ne pas être valables quels que soient α, β, γ. On échappe à cette objection en utilisant l'intégrale de Jordan-Pochhammer.

XXIV. *Quels que soient* α, β, γ, *l'intégrale*

$$y(x) = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{U}(u)\,du \tag{2}$$

représente une intégrale particulière de l'équation hypergéométrique, si $\mathcal{C}$ *est un contour fermé tel que* $\mathrm{U}(u)$ *revienne à sa détermination initiale quand* u *a parcouru ce contour* (Jordan).

Si $\mathcal{C}$ ne contient aucun point de ramification de $\mathrm{U}(u)$ on a $y = 0$; mais s'il en contient au moins deux, on obtient effectivement une intégrale particulière; Pochhammer (c, d, e) a explicitement indiqué six double-lacets qui conduisent aux intégrales $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, etc.

3° *Intégrales de Wirtinger.* — En faisant dans l'intégrale (1) le changement de variable du n° **16** :

XXV. *La fonction*

$$w(\tau) = \pi^{2\beta}\mathfrak{S}_3(0 \mid \tau)^{4\beta} \int_{v_1}^{v_2} \Phi(v \mid \tau)\,dt \tag{3}$$

où v_1 *et* v_2 *sont deux des quatre quantités* $0, \frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{1+\tau}{2}$, *est uniforme dans tout le demi-plan* ($\mathfrak{T}$), *qui est son domaine d'existence et représente une intégrale particulière de l'équation hypergéométrique lorsqu'on exprime* x *par la fonction modulaire* $x = \varphi(\tau)^8$.

Cette formule résout ainsi le problème de l'uniformisation des 24 intégrales du tableau de Kummer.

4° *Intégrales de Mellin.* — Au lieu de la fonction multiforme

$U(u)$, considérons la fonction méromorphe

$$G(s) = \Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(1-\gamma-s)\Gamma(-s).$$

XXVI. *Dans tout le domaine* (X_4), *l'intégrale*

$$(4) \qquad y(x) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} G(s)[M \sin \pi(\gamma+s) - N \sin \pi s](-x)^s ds$$

représente une intégrale particulière de l'équation hypergéométrique, M *et* N *étant des constantes arbitraires* (Mellin).

Le contour d'intégration se compose de l'axe imaginaire complété par des lacets de manière à laisser à sa gauche les pôles des deux premières fonctions Γ et à sa droite ceux des deux dernières. En se reportant à (14_1) on voit que les coefficients de M et N sont proportionnels à $\bar{y}_1^{(0)}$ et $\bar{y}_2^{(0)}$. Mais l'intégrale (4) se laisse mettre aisément sous une forme équivalente

$$y(x) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} G(s)[M' \sin \pi(\beta+s) + N' \sin \pi(\alpha+s)](-x)^s ds,$$

en posant

$$M \sin \pi\gamma = M' \sin \pi\beta + N' \sin \pi\alpha, \qquad M \cos \pi\gamma - N = M' \cos \pi\beta + N' \cos \pi\alpha;$$

les coefficients de M' et N' sont proportionnels à $\bar{y}_1^{(\infty)}$ et $\bar{y}_2^{(\infty)}$; cette facilité du passage des intégrales régulières dans le domaine de $x=0$ aux intégrales régulières pour $x=\infty$ est un des avantages marquants de la représentation de Hj. Mellin.

23. Modification du tableau de Kummer quand γ ou $\gamma-\alpha-\beta$ ou $\alpha-\beta$ est un entier. — Lorsque la différence $1-\gamma$, $\gamma-\alpha-\beta$, $\alpha-\beta$ des racines de l'une des équations déterminantes est entière ou nulle, il peut exister une intégrale, régulière dans le domaine du point singulier correspondant, qui contienne un *logarithme;* il se peut aussi que le point devienne *apparemment singulier*. Gauss (*b*) a déterminé, par passage à la limite, ce que deviennent certaines intégrales quand γ tend vers une valeur entière; cette méthode a été développée systématiquement par J. Tannery et E. Goursat; E. Lindelöf, au contraire, cherche directement le développement en série des nouvelles intégrales; des formules intéressantes ont été données par S. Spitzer (*a*), Michaëlsen, A. Winter, W. Johnson.

Dans le tableau de Kummer les branches $\overline{y}_1^{(0)}$ et $\overline{y}_2^{(0)}$ fournissent deux intégrales indépendantes régulières dans le domaine de $x = 0$; mais si $\gamma = 1$ ces deux fonctions sont confondues; si $1 - \gamma$ est entier positif ou négatif la fonction $y_1^{(0)}$ ou $y_2^{(0)}$ respectivement peut ne plus avoir de sens.

Pour déterminer les modifications du tableau il suffit de substituer au couple d'intégrales $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}$ le couple constitué par celle de ces fonctions qui conserve un sens et par la fonction

$$y_3^{(0)} = C[\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)y_1^{(0)} + \Gamma(\gamma-1)\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)y_2^{(0)}],$$

qui est manifestement une intégrale, mais qui conserve un sens quand $1-\gamma$ tend vers une valeur nulle ou entière (positive ou négative). Pour exposer les résultats nous désignerons par k, k', k'' trois entiers tels que $0 \leqq k' < k \leqq k''$; par $P(\alpha, \beta, k, x)$ le polynome de degré $k-1$

$$P(\alpha, \beta, k, x) = -\sum_{n=1}^{n=k} \frac{(1, n-1)(-k, n)}{(1-\alpha, n)(1-\beta, n)} x^{k-n};$$

par $\Phi(\alpha, \beta, \gamma, x)$ la fonction dont la branche principale, uniforme dans (X_1), est représentée à l'intérieur de (C_0) par la série convergente

$$\overline{\Phi}(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{(\alpha, n)(\beta, n)}{(\gamma, n)(1, n)} \times [\Psi(\alpha+n) + \Psi(\beta+n) - \Psi(\gamma+n) - \Psi(1+n)]x^n;$$

1° $\gamma = 1$:

$$y_1^{(0)} = y_2^{(0)} = \mathcal{F}(\alpha, \beta, 1, x),$$
$$y_3^{(0)} = \mathcal{F}(\alpha, \beta, 1, x)\log x + \Phi(\alpha, \beta, 1, x);$$

2° $\gamma = 1 + k$, $\alpha(\text{ou } \beta) \neq 1 + k'$:

$$y_1^{(0)} = \mathcal{F}(\alpha, \beta, 1+k, x),$$
$$y_3^{(0)} = \mathcal{F}(\alpha, \beta, 1+k, x)\log x + \Phi(\alpha, \beta, 1+k, x) + x^{-k}P(\alpha, \beta, k, x);$$

3° $\gamma = 1 + k$, $\alpha(\text{ou } \beta) = 1 + k'$:

$$y_1^{(0)} = \mathcal{F}(1+k', \beta, 1+k, x),$$
$$y_2^{(0)} = x^{-k}\mathcal{F}(1+k'-k, \beta-k, 1-k, x);$$

4° $\gamma = 1 - k$, $\alpha(\text{ou } \beta) \neq -k'$:

$$y_2^{(0)} = x^k\mathcal{F}(\alpha+k, \beta+k, 1+k, x),$$
$$y_3^{(0)} = x^k\mathcal{F}(\alpha+k, \beta+k, 1+k, x)\log x + x^k\Phi(\alpha+k, \beta+k, 1+k, x) + P(\alpha+k, \beta+k, k, x);$$

et

5° $\gamma = 1 - k$, α (ou β) $= -k'$:

$$y_1^{(0)} = \mathcal{F}(-k', \beta, 1 - k, x),$$
$$y_2^{(0)} = x^k \mathcal{F}(\alpha + k, \beta + k, 1 + k, x).$$

Dans les cas 1°, 2° et 4° il y a donc une intégrale régulière dans le domaine de $x = 0$, qui contient un *terme logarithmique*. Dans le cas 3°, le tableau de Kummer n'est pas modifié, l'intégrale $y_2^{(0)}$ conservant son sens; en effet $1 + k' - k$ est un entier négatif supérieur ou égal à $1 - k$: $\mathcal{F}$ se réduit donc à un polynome. *L'intégrale générale est uniforme dans le domaine de $x = 0$ et admet ce point pour pôle d'ordre k.* De même dans le cas 5° l'intégrale $y_1^{(0)}$ conserve son sens, car la fonction $\mathcal{F}$ est un polynome de degré k'; en outre $y_2^{(0)}$ admet $x = 0$ comme zéro d'ordre k. *L'intégrale générale est holomorphe dans le domaine de $x = 0$, qui devient apparemment singulier.*

Deux cas particuliers de 3° et 5° offrent un grand intérêt :

6° $\gamma = 1 + k$, α (ou β) $= 1 + k'$, et en outre β (ou α) $= 1 + k''$:

$$y_1^{(0)} = \mathcal{F}(1 + k', 1 + k'', 1 + k, x) = (1 - x)^{k - k' - k'' - 1} \mathcal{F}(k - k', k - k'', 1 + k, x),$$
$$y_2^{(0)} = x^{-k} \mathcal{F}(1 + k' - k, 1 + k'' - k, 1 - k, x),$$

les fonctions $y_1^{(0)}$ et $y_2^{(0)}$ sont rationnelles, admettant pour pôle respectivement $x = 1$ et $x = 0$.

L'intégrale générale de l'équation hypergéométrique est dans ce cas une fonction rationnelle [H. Schwarz (b)].

7° $\gamma = 1 - k$, α (ou β) $= -k'$, et en outre β (ou α) $= -k''$:

$$y_1^{(0)} = \mathcal{F}(-k', -k'', 1 - k, x),$$
$$y_2^{(0)} = x^k \mathcal{F}(k - k', k - k'', 1 + k, x);$$

$y_1^{(0)}$ est un polynome de degré k', $y_2^{(0)}$ un polynome de degré k''. *Dans ce cas l'intégrale générale de l'équation hypergéométrique est un polynome* [H. Schwarz (b)].

L'étude des couples $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}$ ou $y_1^{(\infty)}, y_2^{(\infty)}$ quand $\gamma - \alpha - \beta$ ou $\alpha - \beta$ est entier se déroule identiquement à la précédente; nous n'en retiendrons que les résultats suivants :

8° $\gamma - \alpha - \beta = k$, α (ou β) $= -k'$, *le point* $x = 1$ *est apparemment singulier;*

9° $\beta - \alpha = \pm k$, α (ou β) $= -k'$, *le point* $x = \infty$ *est un pôle d'ordre* k'; *si* $k' = 0$ *c'est un point apparemment singulier.*

En accord avec ce qui précède, S. Spitzer, Borchardt, Michaëlsen, puis d'une manière très générale A. Winter, ont déterminé comment sont modifiées les intégrales d'Euler dans les cas envisagés; de même J. Tannery, E. Goursat, E. Lindelöf ont donné les relations qui unissent trois intégrales du tableau de Kummer modifié; en partant de là il est facile de trouver dans chaque cas ce que devient le groupe de l'équation; par exemple dans le cas 5, la substitution U_1 se réduit à la substitution identique.

24. Résultats divers. 1° *Déterminant de Wronski.* — Le déterminant de deux intégrales a pour valeur

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} = Cx^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1};$$

en remarquant que la dérivée logarithmique d'une intégrale $y^{(a)}_{m,n}$ est de la forme

$$\frac{\rho_i}{x} + \frac{\sigma_i}{x-1} + \frac{\alpha_i \beta_i}{\gamma_i} \frac{dx_i}{dx} \frac{\mathcal{F}(\alpha_i+1, \beta_i+1, \gamma_i+1, x_i)}{\mathcal{F}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, x_i)},$$

on en déduit pour chaque couple d'intégrales du tableau de Kummer une relation où figurent les produits deux à deux des quatre fonctions $\mathcal{F}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, x_i)$, $\mathcal{F}(\alpha_i+1, \beta_i+1, \gamma_i+1, x_i)$, $\mathcal{F}(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, x_k)$, $\mathcal{F}(\alpha_k+1, \beta_k+1, \gamma_k+1, x_k)$; Gauss a donné quelques-unes de ces formules.

2° *Dérivée* $n^{ième}$. — En dérivant n fois l'équation hypergéométrique, on obtient pour la dérivée $n^{ième}$ de y une équation qui se déduit simplement de la première en y remplaçant α, β, γ par $\alpha + n$, $\beta + n$, $\gamma + n$ (à rapprocher du n° 7).

3° *Rapport de deux fonctions associées.* — Le rapport des fonctions associées

$$u = \frac{\mathcal{F}(\alpha+m, \beta+n, \gamma+p, x)}{\mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)}$$

vérifie l'équation de Riccatti

$$\frac{du}{dx} + A(x)u^2 + B(x)u + C(x) = 0,$$

A, B, C étant des fonctions rationnelles de x. Ce résultat est évident pour la dérivée logarithmique de $\mathcal{F}$, qui correspond à $m=n=p=1$; le cas général s'en déduit en remarquant que toute fonction associée s'exprime linéairement au moyen de $\mathcal{F}$ et de $\frac{d\mathcal{F}}{dx}$; T. J. Stieltjes (c) a fait d'élégantes remarques sur le cas $m=0$, $n=p=1$, qui correspond à la fraction de Gauss.

4° *Fonctions elliptiques.* — En gardant les notations du n° 16, *les périodes de la fonction* pu *vérifient l'équation hypergéométrique correspondant à* $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=1$

$$x(1-x)\frac{d^2\omega}{dx^2}+(1-2x)\frac{d\omega}{dx}-\frac{1}{4}\omega=0; \tag{1}$$

les trois équations déterminantes admettent une racine double; on a donc les intégrales

$$y_1^{(0)}=\mathcal{F}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,x\right),$$

$$y_3^{(0)}=\mathcal{F}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,x\right)\log x+\Phi\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,x\right),$$

$$y_1^{(1)}=\mathcal{F}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,1-x\right),$$

$$y_3^{(1)}=\mathcal{F}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,1-x\right)\log(1-x)+\Phi\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,1-x\right);$$

$$y_1^{(\infty)}=(-x)^{-\frac{1}{2}}\mathcal{F}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\frac{1}{x}\right),$$

$$y_3^{(\infty)}=(-x)^{-\frac{1}{2}}\left[\mathcal{F}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\frac{1}{x}\right)\log\frac{1}{x}+\Phi\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\frac{1}{x}\right)\right].$$

Les relations qui lient ces intégrales ont été déterminées par L. Fuchs, J. Tannery, E. Goursat, E. Lindelöf [les log prenant leur valeur réelle sur (0, 1)]

$$\overline{y}_1^{(0)}=-\frac{1}{\pi}\overline{y}_3^{(1)},\qquad \overline{y}_3^{(0)}=-\pi\overline{y}_0^{(1)},$$

$$\overline{y}_1^{(0)}=i\overline{y}_1^{(\infty)}\mp\frac{1}{\pi}\overline{y}_3^{(\infty)},\quad \overline{y}_3^{(0)}=i\overline{y}_3^{(\infty)},$$

qui sont valables dans (X_3) sauf la 3ᵉ où il faut prendre — ou + selon que $\mathcal{I}(x)>0$ ou <0. Les intégrales de Mellin se prêtent particulièrement bien à la détermination de ces relations [E. W. Barnes (e)].

La fonction $\Omega(x) = x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\omega(x)$ vérifie l'équation hypergéométrique réduite où $\lambda = \mu = \nu = 0$.

VII. — La fonction P de Riemann.

25. Le problème de Riemann. — Dans un mémoire célèbre B. Riemann (a) pose le problème suivant :

Soient a, b, c trois points donnés et α, α', β, β', γ, γ' des nombres complexes tels que

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1,$$

aucune des différences $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$, $\gamma - \gamma'$ n'étant entière; déterminer une fonction $P(x)$ telle que :

1° *toute branche de $P(x)$ soit holomorphe dans tout le plan (l'infini compris) sauf dans le domaine des trois points a, b, c;*

2° *trois branches quelconques de $P(x)$, soient liées par une relation linéaire à coefficients constants;*

3° *dans le domaine de $x = a$, b, c toute branche de $P(x)$ soit respectivement de la forme*

$$C_\alpha P_\alpha(x) + C_{\alpha'} P_{\alpha'}(x), \quad C_\beta P_\beta(x) + C_{\beta'} P_{\beta'}(x), \quad C_\gamma P_\gamma(x) + C_{\gamma'} P_{\gamma'}(x),$$

les C_λ désignant des constantes et les P_λ étant telles que

$$\begin{aligned} P_\alpha(x) &= (x-a)^{\alpha}\mathfrak{P}_\alpha(x-a), & P_{\alpha'}(x) &= (x-a)^{\alpha'}\mathfrak{P}_{\alpha'}(x-a), \\ P_\beta(x) &= (x-b)^{\beta}\mathfrak{P}_\beta(x-b), & P_{\beta'}(x) &= (x-b)^{\beta'}\mathfrak{P}_{\beta'}(x-b), \\ P_\gamma(x) &= (x-c)^{\gamma}\mathfrak{P}_\gamma(x-c), & P_{\gamma'}(x) &= (x-c)^{\gamma'}\mathfrak{P}_{\gamma'}(x-c), \end{aligned}$$

les fonctions $\mathfrak{P}_\lambda(\xi)$ étant holomorphes dans le domaine de $\xi = 0$, avec $\mathfrak{P}_\lambda(0) \neq 0$.

Riemann a montré (et c'était un progrès capital pour la théorie des fonctions) que ce problème admet une solution (déterminée à une constante multiplicative près), qu'il désigne par le symbole

$$P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}$$

mettant en évidence les points de ramification a, b, c et les couples d'exposants (α, α'), (β, β'), (γ, γ'); il est clair qu'on peut permuter deux exposants d'un même couple ou bien deux colonnes : ce qui donne 48 formes différentes pour le symbole de la même fonction. Si l'on effectue une transformation linéaire $x_1 = x_1(x)$ on a

$$P\begin{Bmatrix} x_1(a) & x_1(b) & x_1(c) & \\ \alpha & \beta & \gamma & x_1(x) \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix};$$

d'autre part $(\rho + \sigma + \tau = 0)$

$$(x-a)^{\rho}(x-b)^{\sigma}(x-c)^{\tau} P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}$$
$$= P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha+\rho & \beta+\sigma & \gamma+\tau & x \\ \alpha'+\rho & \beta'+\sigma & \gamma'+\tau & \end{Bmatrix};$$

on en conclut

$$(1)\quad P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}$$
$$= (xcab)^{\alpha}(xacb)^{\gamma} P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \alpha+\beta+\gamma & 0 & (xcab) \\ \alpha'-\alpha & \alpha+\beta'+\gamma & \gamma'-\gamma & \end{Bmatrix}$$

qui ramène le problème au cas où les points de ramification sont 0, ∞, 1, deux des exposants étant nuls.

26. Équation différentielle de la fonction P. — L'énoncé même du problème montre que la fonction P se comporte comme l'intégrale d'une équation différentielle

$$(1)\qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0,$$

dont les seuls points singuliers sont les points « réguliers » a, b, c, les racines des équations déterminantes étant (α, α'), (β, β'), (γ, γ'). En partant des intégrales particulières P_α et $P_{\alpha'}$ on détermine l'allure de p et q pour $x = a$, puis d'une façon analogue pour $x = b$ et c; en écrivant en outre que ∞ est un point ordinaire, Riemann a pu montrer que p et q étaient deux fractions rationnelles, dont il n'a explicitement calculé les coefficients que dans le cas $a = 0$, $b = \infty$, $c = 1$, $\gamma = 0$. E. Papperitz (a) a donné le résultat général sous une forme élégante :

XXVII. *La fonction* $P(x)$ *vérifie l'équation différentielle* (1) *où*

$$p(x) = \frac{1-\alpha-\alpha'}{x-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{x-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{x-c}$$

$$q(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)} \times \left[\alpha\alpha'\frac{(a-b)(a-c)}{x-a} + \beta\beta'\frac{(b-c)(b-a)}{x-b} + \gamma\gamma'\frac{(c-a)(c-b)}{x-c}\right].$$

On voit immédiatement que l'équation vérifiée par la fonction

$$(2) \qquad P\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & A & 0 & x \\ 1-C & B & C-A-B & \end{matrix}\right\}$$

s'identifie avec celle de la fonction hypergéométrique $\mathcal{F}(A, B, C, x)$; grâce à (25_1) on exprime ainsi la fonction P au moyen de la fonction hypergéométrique

$$(3) \quad P(x) = (xcab)^{\alpha}(xacb)^{\gamma}\mathcal{F}[\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha+\beta'+\gamma,\ 1+\alpha-\alpha',\ (xcab)];$$

en effectuant dans P les permutations permises, on obtient 48 expressions distinctes de P par une fonction hypergéométrique; par rapport à l'équation de Papperitz, ce tableau est équivalent à celui de Kummer (doublé); dans le cas de la fonction spéciale (2) il lui devient identique; ce procédé de formation du tableau de Kummer, n'exigeant que des permutations, est l'un des plus simples [*voir* L. W. Thomé (c)].

Le point $x = \infty$ est apparemment singulier pour l'équation, car P est holomorphe dans son domaine, mais le déterminant de Wronski $C(x-a)^{\alpha+\alpha'-1}(x-b)^{\beta+\beta'-1}(x-c)^{\gamma+\gamma'-1}$ possède ce point comme zéro d'ordre 2. Si $\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma$ sans être égal à 1 est néanmoins entier, l'intégrale générale reste uniforme dans le domaine de $x = \infty$ [*voir* F. Klein (e)]; F. Schilling (mémoire posthume développé par E. Ritter) a étudié spécialement le cas où cette somme est nulle.

La formule (3) montre que *la surface de Riemann de la fonc-*

tion multiforme $\mathrm{P}(x)$ *se ramène immédiatement à la surface* $[\tau]$ (n° 17); *quant au groupe de monodromie de* $\mathrm{P}(x)$ *il est complètement déterminé par les formules du n°* 22. Riemann a formé ce groupe par un raisonnement direct; d'autres auteurs [J. Thomae (a), O. Bolza, E. W. Barnes (e), K. Abramovič (b)] sont partis des représentations des diverses branches par des intégrales définies (n° 28).

27. Équations aux différences finies entre fonctions P contiguës et associées. — Riemann dit que deux fonctions P ayant mêmes points de ramification sont *contiguës* si la deuxième se déduit de la première en ajoutant l'unité à un exposant et en la retranchant à un autre; en généralisant la locution du n° 6, nous dirons que deux fonctions P (ayant pour points de ramification a, b, c) sont *associées* si leurs exposants sont de la forme

$$(\alpha, \alpha'), \quad (\beta, \beta'), \quad (\gamma, \gamma'), \quad (\alpha + m, \alpha' + m'), \quad (\beta + n, \beta' + n'), \quad (\gamma + p, \gamma' + p'),$$

les six entiers $m, m', \ldots$ étant tels que $m + m' + n + n' + p + p' = 0$.

XXVIII. *Une fonction* P *et deux de ses fonctions associées sont liées par une équation linéaire homogène dont les coefficients sont des polynomes en* x.

Il existe notamment 435 relations entre P et ses 30 fonctions contiguës.

Klein (e) a formulé quelques critiques sur la définition des fonctions associées, préférant la faire reposer sur l'identité du groupe de monodromie (*voir* une note de M. Winston).

28. Représentation des branches de la fonction P par des intégrales définies. — Comme Riemann l'a remarqué [*voir* aussi J. Thomae (a)] (26_3) permet de représenter les branches de P par des intégrales définies; le résultat le plus général s'obtient en partant de l'intégrale de Jordan-Pochhammer.

XXIX. *La fonction*

$$y(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma} \times \int_C (v-a)^{\alpha'+\beta+\gamma-1}(v-b)^{\alpha+\beta'+\gamma-1}(v-c)^{\alpha+\beta+\gamma'-1}(v-x)^{\alpha'+\beta'+\gamma'-1}\,dv$$

est une intégrale particulière de l'équation de Papperitz et, par conséquent, une branche de la fonction P, *si* C *est un contour fermé tel que la fonction multiforme de* v *revienne à sa détermination initiale quant* v *l'a parcouru.*

On obtient effectivement une branche non nulle en prenant pour C un double lacet entourant 2 des 4 points a, b, c, x. F. Klein (d) a fait un usage systématique de ces représentations, mais en introduisant, comme au n° 12, des variables homogènes $(a_1 a_2)(b_1 b_2)(c_1 c_2)(x_1 x_2)$; il ramène ainsi P à une forme normale qui est une forme covariante des quatres séries de variables binaires et une fonction entière des exposants (*voir* un travail étendu de C. Schellenberg).

VIII. — La fonction s de Schwarz.

29. L'équation différentielle de Schwarz et la fonction $s(\lambda, \mu, \nu, x)$. — L'expression [formée avec les dérivées s', s'', s''' d'une fonction $s(x)$]

$$(1) \qquad [s]_x = \frac{s'''}{s'} - \frac{3}{2}\left(\frac{s''}{s'}\right)^2.$$

avait été utilisée (implicitement) par Jacobi, puis par Kummer (*voir* au n° 37), enfin par Riemann dans son enseignement oral; A. Cayley l'appelle un schwarzien, à cause du rôle fondamental que lui a fait jouer H. Schwarz (a, b).

La propriété caractéristique du schwarzien est son invariance vis-à-vis d'une transformation linéaire effectuée sur $s(x)$

$$(2) \qquad \left[\frac{as+b}{cs+d}\right]_x = [s]_x \qquad (a,\ b,\ c,\ d \text{ constantes arbitraires}).$$

L'effet d'un changement de variable est donné par (15, d)

$$(3) \qquad [s]_x = [s]_\xi \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + [\xi]_x.$$

XXX. *Le rapport* $s(x)$ *de deux intégrales particulières de l'équation hypergéométrique vérifie l'équation différentielle de*

Schwarz

$$(4)\qquad [s]_x = \frac{1}{2}\left[\frac{1-\lambda^2}{x^2} + \frac{1-\nu^2}{(x-1)^2} - \frac{1-\lambda^2+\mu^2-\nu^2}{x(x-1)}\right] = -2R(\lambda, \mu, \nu, x),$$

$$\lambda^2 = (1-\gamma)^2, \qquad \mu^2 = (\alpha-\beta)^2, \qquad \nu^2 = (\gamma-\alpha-\beta)^2.$$

Réciproquement si $s(x)$ est une intégrale particulière de cette équation, les fonctions

$$(5)\qquad Y_1(x) = \left(\frac{ds}{dx}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad Y_2(x) = s\left(\frac{ds}{dx}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

sont deux intégrales indépendantes de l'équation hypergéométrique normale (18_4) (H. Schwarz).

Il est d'usage de désigner l'intégrale générale de l'équation du troisième ordre (4) sous le nom de « fonction » de Schwarz $s(\lambda, \mu, \nu, x)$; il convient d'observer que ce symbole représente non une fonction analytique déterminée, mais un *ensemble* de fonctions analytiques; nous choisirons en général une intégrale particulière qui sera la détermination principale de la « fonction » de Schwarz et que nous désignerons par $S(\lambda, \mu, \nu, x)$; toute autre détermination sera de la forme

$$(6)\qquad s(x) = \frac{aS(\lambda, \mu, \nu, x)+b}{cS(\lambda, \mu, \nu, x)+d} \qquad (a, b, c, d \text{ constantes}).$$

Toute détermination est évidemment uniforme sur la surface de Riemann $[\tau]$, ses seules singularités possibles, sur cette surface, étant des pôles d'ordre 1. On peut choisir la détermination $S(\lambda, \mu, \nu, x)$ de manière que sa branche principale $\overline{S}(\lambda, \mu, \nu, x)$ prenne des valeurs données en trois points arbitraires du feuillet principal; les autres branches se déduisent de $\overline{S}$ par une substitution telle que (6). Sur un feuillet quelconque, dans le domaine des points de ramification $x = 0$, 1, ∞, il y a toujours une détermination respectivement de la forme

$$x^{\lambda}\mathfrak{P}_1(x), \quad (x-1)^{\mu}\mathfrak{P}_2(x), \quad x^{-\nu}\mathfrak{P}_3(x),$$

avec toutefois la possibilité d'un terme logarithmique si λ, μ ou ν est nul ou entier :

$$x^{\lambda}\mathfrak{P}_1(x) + \log x, \quad (x-1)^{\mu}\mathfrak{P}_2(x) + \log(x-1), \quad x^{-\nu}\mathfrak{P}_3(x) + \log\frac{1}{x}.$$

Toutes ces propriétés, déduites par Schwarz d'une étude directe, sont des conséquences immédiates du paragraphe VI. En particulier de XIX on tire de suite les 48 relations fonctionnelles.

$$s(\pm\lambda, \pm\mu, \pm\nu, x) = s\left(\pm\lambda, \pm\nu, \pm\mu, \frac{x}{x-1}\right) = s(\pm\nu, \pm\mu, \pm\lambda, 1-x)$$
$$= s\left(\pm\mu, \pm\nu, \pm\lambda, \frac{1}{1-x}\right) = s\left(\pm\nu, \pm\lambda, \pm\mu, \frac{x-1}{x}\right) = s\left(\pm\mu, \pm\lambda, \pm\nu, \frac{1}{x}\right).$$

On peut déterminer $S(\lambda, \mu, \nu, x)$, par exemple, en prenant sa branche principale $\overline{S}(\lambda, \mu, \nu, x)$ égale au quotient des branches principales de deux des 24 intégrales du tableau de Kummer, représentées sur tout le feuillet principal par le quotient de deux intégrales de Jordan-Pochhammer; ces intégrales étant des fonctions entières de α, β, γ, *il est clair que la branche* $\overline{S}(\lambda, \mu, \nu, x)$ *est une fonction méromorphe de* λ, μ, ν *dans tout le domaine* (X_3).

Exemples de fonctions de Schwarz. — 1° *Fonctions élémentaires*

$$(7)\qquad \begin{cases} S(\lambda, \lambda, 1, x) = x^{\lambda}, \qquad S(0, 0, 1, x) = \log x, \\ S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, x\right) = \log \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}. \end{cases}$$

2° *Fonction du triangle rectiligne.* — La fonction (n° **13**) qui donne la représentation conforme du demi-plan $\mathcal{J}(x) > 0$ sur un triangle rectiligne d'angles $\pi\lambda$, $\pi\mu$, $\pi\nu$ ($\lambda, \mu, \nu > 0$, $\lambda+\mu+\nu = 1$) a pour expression

$$(8)\qquad x^{\lambda}\overline{\mathcal{F}}(1-\nu, \lambda, \lambda+1, x) = \overline{S}(\lambda, 1-\lambda-\nu, \nu, x).$$

3° *Fonction modulaire.* — D'après le n° **24**, 4° *Le rapport* τ *des périodes de la fonction* $\wp u$ (avec les notations du n° **16**) *correspond au cas remarquable*

$$(9)\qquad \tau(x) = S(0, 0, 0, x).$$

Remarque. — Le quotient de deux intégrales de l'équation de Papperitz, c'est-à-dire de deux branches de la fonction P, vérifie l'équation (87-*a*).

$$[s]_x = \frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$
$$\left[(1-\lambda^2)\frac{(a-b)(a-c)}{x-a} + (1-\mu^2)\frac{(b-c)(b-a)}{x-b} + (1-\nu^2)\frac{(c-a)(c-b)}{x-c}\right]$$
$$\lambda^2 = (\alpha'-\alpha)^2, \qquad \mu^2 = (\beta'-\beta)^2, \qquad \nu^2 = (\gamma'-\gamma)^2,$$

qui contient comme cas particulier l'équation (4).

30. Représentation conforme du demi-plan sur un triangle d'arcs de cercle. — Étant donné sur la surface $[\tau]$ un domaine intérieur à une courbe fermée sans points doubles, une détermination $S(\lambda, \mu, \nu, x)$ lui fait évidemment correspondre sur le plan (S) un autre domaine, mais qui peut contenir le point à l'infini et se recouvrir partiellement lui-même.

En supposant λ, μ, ν *réels*, Schwarz a établi une propriété géométrique remarquable de cette correspondance; α, β, γ devant être réels, nous pouvons prendre : $\lambda = |1-\gamma|$, $\mu = |\alpha - \beta|$, $\nu = |\gamma - \alpha - \beta|$ puisque leurs carrés seuls interviennent. Considérons sur le feuillet principal le contour $C(\varepsilon)$ formé par les segments $(-1:\varepsilon, -\varepsilon)$, $(+\varepsilon, 1-\varepsilon)$, $(1+\varepsilon, +1:\varepsilon)$ et les trois demi-cercles : $|x| = \varepsilon$, $|x-1| = \varepsilon$, $|x| = 1:\varepsilon$. $\mathcal{J}(x) > 0$. Quand x décrit dans le sens positif la courbe $C(\varepsilon)$, en partant du point $+\varepsilon$, $S = \overline{S}(\lambda, \mu, \nu, x)$ décrit, en marchant toujours dans un même sens, un contour $A^+C^-C^+B^-B^+A^-$, composé de trois arcs de cercle A^+C^-, C^+B^-, B^+A^- (qui peuvent chacun contenir plusieurs circonférences entières) et de trois courbes A^-A^+, B^-B^+, C^-C^+, qui tendent respectivement vers trois points A, B, C (intersections des cercles) si ε tend vers zéro; lorsque S décrit les courbes A^-A^+, B^-B^+, C^-C^+ l'argument de $S-A$, $S-B$, $S-C$ diminue respectivement de $\pi\lambda$, $\pi\mu$, $\pi\nu$.

Pour établir cette proposition, il suffit de remarquer que, α, β, γ étant réels, sur chacun des 3 segments de l'axe réel, il y a 2 intégrales du tableau de Kummer qui sont réelles : par exemple, sur $(+\varepsilon, 1-\varepsilon)$: $\overline{y}_1^{(0)}$ et $\overline{y}_2^{(0)}$; la détermination de $s(\lambda, \mu, \nu, x)$ qui leur correspond décrit donc un segment de l'axe réel, toujours dans un même sens $\left(\text{puisque } \frac{ds}{dx} \text{ ne peut s'annuler que pour } x = 0, 1, \infty\right)$, l'axe réel pouvant d'ailleurs être décrit plusieurs fois, puisque s va à l'infini chaque fois que x traverse un zéro de $\overline{y}_2^{(0)}$. La détermination $\overline{S}(\lambda, \mu, \nu, x)$ se déduisant de cette détermination particulière par une transformation linéaire, il en résulte bien qu'elle décrira simultanément un arc de cercle.

XXXI. *Les paramètres* λ, μ, ν *étant réels.* $0 \leqq \lambda, \mu, \nu < 2$, *la branche principale d'une détermination* $\overline{S}(\lambda, \mu, \nu, x)$ *donne la représentation conforme du demi-plan* $\mathcal{J}(x) > 0$ *sur l'intérieur d'un triangle d'arcs de cercle* ABC, *les sommets* A, B, C *corres-*

pondant respectivement aux points o, ∞, 1, *les côtés* BA, AC, CB *aux segments* $(-\infty, 0)$, $(0, +1)$, $(+1, +\infty)$, *les angles mesurés vers l'intérieur étant* $\pi\lambda$, $\pi\mu$, $\pi\nu$ (H. Schwarz).

Soient $\pi\lambda_0$, $\pi\mu_0$, $\pi\nu_0$ les angles du triangle *rectiligne* ABC; la fonction (29_8) $\overline{\mathrm{S}}(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, x)$ donne la représentation conforme du demi-plan sur l'intérieur de ce triangle. En posant,

$$\lambda(t) = \lambda_0 + (\lambda - \lambda_0)t, \qquad \mu(t) = \mu_0 + (\mu - \mu_0)t,$$
$$\nu(t) = \nu_0 + (\nu - \nu_0)t, \qquad 0 \leqq t \leqq 1,$$

pour chaque valeur de t on peut construire un triangle d'arcs de cercle ABC d'angles $\pi\lambda(t)$, $\pi\mu(t)$, $\pi\nu(t)$. Le domaine intérieur au triangle rectiligne se transforme ainsi d'une manière continue. sans que le contour présente jamais de point double, puisque pendant la déformation $\lambda(t)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$, ne passent pas par les valeurs o ou 2.

La correspondance entre l'axe réel et le contour étant donc biunivoque, $\overline{\mathrm{S}}(\lambda, \mu, \nu, x)$ donne effectivement, en vertu d'un théorème fondamental bien connu, la représentation conforme du demi-plan sur le domaine intérieur au contour simple ABC (limite de $A^+C^-C^+B^-B^+A^-$).

En prenant le *symétrique* du triangle ABC par rapport à ses trois côtés, on obtient trois triangles d'arcs de cercle ABC', AB'C, A'BC; la branche principale $\overline{\mathrm{S}}$ donne la représentation conforme du demi-plan $\mathcal{I}(x) < 0$ sur AB'C; ses prolongements à travers les coupures $(-\infty, 0)$ ou $(+1, +\infty)$ donnent les représentations du même demi-plan sur ABC' et A'BC.

La branche principale $\overline{\mathrm{S}}$ *donne ainsi la représentation conforme du feuillet principal de* $[\tau]$ *sur le quadrilatère* ABCB', *les côtés* BA, B'A *correspondant aux bords supérieur et inférieur de la coupure* $(-\infty, 0)$, *les côtés* CB *et* CB' *aux bords supérieur et inférieur de la coupure* $(+1, +\infty)$; *on passe des côtés* AB *et* CB *aux côtés* AB' *et* CB', *par les substitutions linéaires qui correspondent pour* $\overline{\mathrm{S}}$ *à l'effet d'une rotation autour de* $x = 0$ *et* $x = 1$; ces substitutions sont du type elliptique, ou exceptionnellement parabolique, lorsque les côtés sont tangents.

Pour $\lambda = \mu = \nu = 0$ on retrouve le quadrilatère fondamental du groupe modulaire (nº 16).

31. Les triangles d'arcs de cercle les plus généraux. — Pour se débarrasser de la restriction λ, μ, $\nu < 2$, il est indispensable d'élargir la notion de triangle d'arcs de cercle : nous désignerons désormais ainsi *un domaine du plan* (S) (*Membrandreieck*, F. Klein), *dont la frontière* ABC *est constituée par trois arcs de cercle qui se coupent, ce domaine pouvant se recouvrir lui-même et contenir le point à l'infini;* il est souvent plus commode dans leur étude de remplacer (S) par une sphère (Σ), qui lui correspond stéréographiquement, le point ∞ ne jouant plus un rôle particulier; la frontière du domaine de (Σ) est encore composée de 3 arcs de cercle $\mathcal{ABC}$. Si l'on veut éviter le recouvrement il suffit de subsistuer à (S) [ou (Σ)] une surface de Riemann, dont les points de ramification sont les *sommets* A, B, C [ou $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$]. Dans l'étude actuelle tous les triangles qui ont les mêmes *angles* $\pi\lambda$, $\pi\mu$, $\pi\nu$ sont équivalents, leurs sommets pouvant être amenés en coïncidence par une transformation linéaire.

F. Klein et E. Schilling ont montré que, λ, μ, ν étant arbitraires, le triangle correspondant se déduit par déformation continue d'un triangle où $\lambda = \mu = \nu = 0$. Soient $\lambda \geqq \mu \geqq \nu \geqq 0$, posons

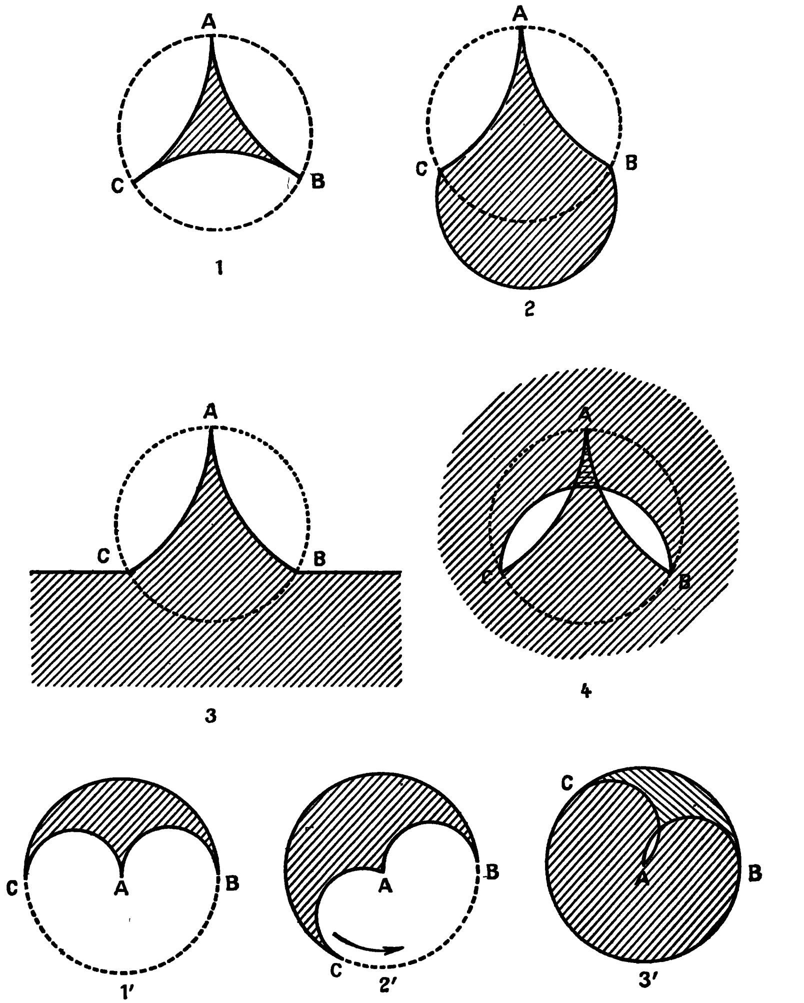
$$2a = |\mu + \nu - \lambda|, \qquad 2b = \nu + \lambda - \mu, \qquad 2c = \lambda + \mu - \nu.$$

Triangle de première espèce : $\lambda \leqq \mu + \nu$. — Partant de 1, on lui fait subir l'opération qui, sur (Σ), consiste à faire tourner le plan du côté $\mathcal{BC}$ de πa autour de la droite $\mathcal{BC}$, le côté « tirant » le domaine à la manière d'une *membrane;* le triangle 4 a ainsi pour angles $0, \pi a, \pi a$; en faisant tourner les plans de $\mathcal{CA}$, $\mathcal{AB}$ de πb et πc on aboutit au triangle cherché, où $\lambda = b + c$, $\mu = c + a$, $\nu = a + b$.

Triangle de deuxième espèce : $\lambda > \mu + \nu$. — Partant de 1', on fait tourner le diamètre AC de $2\pi a$, le côté tirant la *membrane;* le triangle 3' a pour angles $2\pi a$, 0, 0; puis laissant A, B, C fixes, on opère sur AB et AC comme dans 1 : faisant tourner $\mathcal{AC}$ de $\pi(b - a)$ et $\mathcal{AB}$ de $\pi(c - a)$, on obtient le triangle cherché, où $\lambda = b + c$, $\mu = c - a$, $\nu = b - a$.

Dans les deux cas, le domaine formé par la membrane ainsi étiree (le « triangle ») peut se recouvrir; dans le cas 1 aucun des 3 arcs ne peut dépasser une circonférence; dans le cas 2 cette circonstance peut se présenter pour le seul côté BC, opposé au plus grand angle : il comprend un nombre entier de circonférences égal à $E\left(\frac{\lambda - \mu - \nu + 1}{2}\right)$.

XXXII. *Les paramètres* λ, μ, ν *étant réels* $\lambda \geqq \mu \geqq \nu \geqq 0$, *la branche principale d'une détermination* $\overline{S}(\lambda, \mu, \nu, x)$ *fait correspondre au demi-plan* $\mathfrak{I}(x) > 0$, *un triangle d'arcs de cercle* ABC, *les*



sommets correspondant aux points 0, ∞, 1, *les angles ayant pour valeur* $\pi\lambda$, $\pi\mu$, $\pi\nu$; *si l'on n'a pas* $\lambda, \mu, \nu < 2$ *la correspondance n'est pas biunivoque, le domaine du triangle se recouvrant lui-même; pour la rendre telle, il suffit de remplacer le plan* (S) *par une* *surface de Riemann ramifiée en* A, B, C; $\overline{S}$ *définit alors la représentation conforme du demi-plan sur ce domaine.*

Cette proposition se justifie par la même méthode de continuité que XXXI; on part, selon le cas, de 1 ou 1′, qui est la représentation conforme de $\mathcal{I}(x) > 0$ fournie par la branche d'une détermination convenablement choisie $\overline{S}(0, 0, 0, x)$, puis on déforme par continuité le domaine de manière à aboutir au triangle correspondant à (λ, μ, ν).

H. Schwarz a indiqué que *si* λ, μ, ν *sont purement imaginaires* le domaine qui correspond à $\mathcal{I}(x) > 0$ est encore limité par 3 arcs de cercle, mais qui ne se coupent pas, le domaine se recouvrant. Enfin F. Schilling a étudié le cas où λ, μ, ν sont des nombres complexes par une belle méthode géométrique.

32. Triangle minimum, triangles réduits, triangles associés. — Soit ABC un triangle correspondant à (λ, μ, ν); on obtient son triangle « *réduit* » (λ', μ', ν') en « *détendant la membrane* » de la manière suivante :

Première espèce : on fait tourner, sur (Σ), chaque côté d'autant de fois π que possible, en sens inverse de celui qui a servi à tendre la membrane

$$\lambda = \lambda' + b_0 + c_0, \qquad \mu = \mu' + c_0 + a_0, \qquad \nu = \nu' + a_0 + b_0$$
$$(0 \leqq \lambda', \mu', \nu' < 1, \ a_0, b_0, c_0 \text{ entiers}).$$

Deuxième espèce : on opère sur AC et AB comme au cas 1, puis on fait revenir le diamètre AC en arrière d'autant de tours complets que possible :

$$\lambda = \lambda' + 2a_0 + b_0 + c_0, \qquad \mu = \mu' + c_0, \qquad \nu = \nu' + b_0$$
$$(0 \leqq \lambda' < 2, \ 0 \leqq \mu', \nu' < 1, \ a_0, b_0, c_0 \text{ entiers}).$$

Tout triangle réduit satisfait donc aux conditions

$$0 \leqq \lambda' < 2, \qquad 0 \leqq \mu', \nu' < 1.$$

D'autre part sur les cercles qui portent les côtés d'un triangle, on peut construire une infinité de triangles $(\lambda'', \mu'', \nu'')$ (membranes), parmi lesquels il y en a une seule paire pour laquelle les conditions

$$0 \leqq \lambda'', \mu'', \nu'' < 1, \qquad 0 \leqq \mu'' + \nu'', \nu'' + \lambda'', \lambda'' + \mu'' \leqq 1$$

sont satisfaites : tout triangle vérifiant ces conditions se nomme un *triangle minimum* (Minimaldreieck, F. Klein). Un triangle minimum $(\lambda'', \mu'', \nu'')$ étant donné, construisons les 16 triangles :

$$(\lambda'', \mu'', \nu''),\ (\lambda'', 1-\mu'', 1-\nu''),\ (1-\lambda'', \mu'', 1-\nu''),\ (1-\lambda'', 1-\mu'', \nu'');$$
$$(2-\lambda'', \mu'', \nu''),\ (2-\lambda'', 1-\mu'', 1-\nu''),\ (1+\lambda'', \mu'', 1-\nu''),\ (1+\lambda'', 1-\mu'', \nu'');$$
$$(\lambda'', 2-\mu'', \nu''),\ (\lambda'', 1+\mu'', 1-\nu''),\ (1-\lambda'', 2-\mu'', 1-\nu''),\ (1-\lambda'', 1+\mu'', \nu'');$$
$$(\lambda'', \mu'', 2-\nu''),\ (\lambda'', 1-\mu'', 1+\nu''),\ (1-\lambda'', \mu'', 1+\nu''),\ (1-\lambda'', 1-\mu'', 2-\nu'');$$

ce sont des triangles réduits. *A tout triangle* (λ, μ, ν) *on peut ainsi attacher un triangle minimum* $(\lambda'', \mu'', \nu'')$ *en posant comme condition que le triangle réduit* (λ', μ', ν') *de* (λ, μ, ν) *soit l'un des* 16 *triangles réduits correspondant au triangle minimum* $(\lambda'', \mu'', \nu'')$ *par le procédé précédent.*

Deux triangles qui ont même triangle minimum sont *associés* et on nomme fonctions associées les fonctions S correspondantes [*voir* E. Papperitz (a)].

La proposition suivante joue un rôle important :

XXXIII. *Le cercle orthogonal aux trois côtés d'un triangle est imaginaire, réduit à un point ou réel selon que pour son triangle minimum* $(\lambda''. \mu'', \nu'')$ *la somme* $\lambda''+\mu''+\nu''$ *est supérieure, égale ou inférieure à un* (H. Schwarz).

L'existence du cercle orthogonal est encore équivalente aux faits géométriques suivants. Dans (S), transformons deux des cercles du triangle en droites : les trois cas correspondent à la position intérieure, frontière ou extérieure du point d'intersection des droites par rapport au troisième cercle; dans la position frontière, une nouvelle inversion rend le triangle rectiligne. Sur (Σ) les trois cas correspondent à la position intérieure, frontière, ou extérieure du point d'intersection des 3 plans des côtés, par rapport à la sphère.

33. Inversion de la fonction $s(\lambda, \mu, \nu, x)$. — L'inversion de la fonction $\tau(x) = S(0, 0, 0, x)$ conduit à une fonction uniforme, la fonction modulaire, définie dans le demi-plan $\mathcal{J}(\tau) > 0$, et invariante par rapport aux substitutions du groupe Γ_6 (n° 16). H. Schwarz a fait faire un progrès fondamental à la théorie en établissant que :

XXXIV. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'inver-*

sion d'une détermination S *de la fonction* $s(\lambda, \mu, \nu, x)$ *fournisse pour* x *une fonction uniforme de* s, *c'est que les paramètres* λ, μ, ν *soient égaux à zéro ou à l'inverse d'un entier.*

Le triangle correspondant $(1:l, 1:m, 1:n)$ (l, m, n entiers) est réduit mais non nécessairement minimum; les propriétés de la fonction inverse $x(s)$, étroitement liées à celles du *réseau* déduit par *symétrie* de ce triangle, sont très différentes selon que son triangle minimum $(\lambda'', \mu'', \nu'')$ se trouve dans chacun des trois cas énoncés dans XXXIII.

Premier cas : $\lambda'' + \mu'' + \nu'' > 1$, *fonctions polyédriques.*

XXXV. *Lorsque les entiers* l, m, n *vérifient l'équation*

$$(1) \qquad \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{2}{N} \cdot \qquad (\text{N entier positif}),$$

l'inversion de la fonction $s(1:l, 1:m, 1:n, x)$ *donne pour* x *une fonction rationnelle de* s.

L'équation (1) admet, pour l, m, n, les cinq solutions :

$1, n, n$ $(N = n)$; $2, 2, n$ $(N = 2n)$; $2, 3, 3$ $(N = 12)$;
$2, 3, 4$ $(N = 24)$; $2, 3, 5$ $(N = 60)$.

La première conduit à la fonction $x = s^n$, demeurant invariante pour les substitutions du groupe cyclique, le réseau se compose de n angles de sommet O et d'ouverture $\pi:n$; dans les autres cas, il est possible, sur (Σ), de choisir $\mathcal{ABC}$ de manière que les plans de ses côtés soient des plans de symétrie de l'un des polyèdres réguliers de (Σ), respectivement *du dièdre n-gonal*, *du tétraèdre*, *du cube et de l'octaèdre*, *de l'icosaèdre et du dodécaèdre*. Le réseau ne comprend qu'un nombre fini de triangles, égal à 2N, couvrant une fois tout le plan; à une valeur x ne correspond qu'un nombre fini de valeurs de s. La fonction uniforme $x(s)$ est rationnelle; on la nomme *fonction polyédrique* parce qu'elle demeure invariante pour les 2N substitutions linéaires du groupe qui correspond au groupe des rotations du polyèdre régulier. A. Cayley (*d*), G. Halphen, F. Klein ont démontré cette élégante proposition : l, m, n désignant une solution de (1), on peut former 3 polynomes $P(s)$, $Q(s)$, $R(s)$, de degrés égaux ou inférieurs à $N:l$, $N:m$, $N:n$, vérifiant l'équation

$$P(s)^l + Q(s)^m + R(s)^n = 0;$$

la fonction polyédrique correspondante s'obtient en posant :

$$x = - P(s)^l R(s)^{-n}; \qquad \text{d'où} \qquad x - 1 = Q(s)^m R(s)^{-n}.$$

Remarque. — Les équations différentielles hypergéométriques se déduisant des valeurs $\lambda = 1:l$, $\mu = 1:m$, $\nu = 1:n$ (pour chaque système, il y en a 24) portent le nom du polyèdre régulier correspondant; l'équation du *tétraèdre* notamment :

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{7}{6}x\right)\frac{dy}{dx} + \frac{1}{48}y = 0,$$

a fait l'objet de nombreux travaux de A. Cayley (*b*), J. Cockle (*b*, *d*), S. Spitzer (*b*), D. Besso, F. Brioschi (*b*).

Deuxième cas : $\lambda'' + \mu'' + \nu'' = 1$, *fonctions elliptiques.*

XXXVI. *Lorsque les entiers* l, m, n *vérifient l'équation*

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1, \tag{2}$$

l'inversion de la fonction $s(1:l,\ 1:m,\ 1:n,\ x)$ *donne pour* x *une fonction elliptique de* s.

L'équation (2) admet pour l, m, n les 5 solutions :

$$1, \infty, \infty; \quad 2, 2, \infty; \quad 2, 3, 6; \quad 2, 4, 4; \quad 3, 3, 3.$$

Le triangle ABC peut être pris rectiligne; dans le premier cas il a 2 sommets à l'infini (bande); dans le deuxième cas, un seul (demi-bande); dans les autres cas, c'est respectivement un triangle rectangle, rectangle isoscèle, équilatéral. Le réseau se compose d'une infinité de triangles égaux couvrant tout le plan. Les deux premiers cas donnent pour $x(s)$ une fonction périodique (pour le premier, par exemple : $x = e^{2\pi i s}$) : ce sont des dégénérescences; dans les autres la double périodicité se met facilement en évidence, (*voir* des expressions élégantes dans G. Halphen).

Troisième cas : $\lambda'' + \mu'' + \nu'' < 1$, *fonctions fuchsiennes.*

XXXVII. *Lorsque les entiers l, m, n vérifient l'équation*

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1 - \frac{2}{N} \qquad \text{(N entier positif)}, \tag{3}$$

l'inversion de la fonction $s(1:l,\ 1:m,\ 1:n,\ x)$ donne pour x une fonction fuchsienne de s.

L'équation (3) admet une infinité de solutions. Les côtés du triangle ABC sont orthogonaux à un même cercle (γ); le réseau comprend une infinité de triangles tous orthogonaux à (γ) qui couvrent le domaine du plan, limité par (γ), contenant ABC. La fonction uniforme $x(s)$, admettant (γ) pour coupure, et prenant la même valeur en tous les points homologues du réseau, fournit l'exemple le plus simple des fonctions fuchsiennes, introduites dans l'Analyse par H. Poincaré.

Les fonctions modulaires $x = \varphi(\tau)^8$ (n° 16) et $J(\tau)$ (n° 17) correspondent respectivement aux solutions ∞, ∞, ∞ et $2, 3, \infty$.

IX. — Cas où la fonction hypergéométrique est algebrique en x.

34. Cas où l'équation hypergéométrique admet une seule intégrale particulière algébrique. — Une intégrale algébrique de l'équation hypergéométrique ne saurait admettre d'autres points de ramification que $x = 0, 1, \infty$; si elle est la seule intégrale algébrique un circuit autour d'un de ces points a pour effet de la multiplier par une constante : elle doit donc être régulière dans le domaine des trois points; par conséquent elle est de la forme

$$y(x) = x^{\rho}(1-x)^{\sigma} g(x),$$

ρ et σ étant des nombres rationnels, $g(x)$ un polynome de degré n; d'après le n° 19, ρ ne peut prendre que les valeurs 0 et $1-\gamma$, σ les valeurs 0 et $\gamma-\alpha-\beta$, $\rho+\sigma+n$ les valeurs $-\alpha$ et $-\beta$. Tous les cas possibles sont donc contenus dans ce tableau (H. Schwarz) où l'on peut permuter α et β

ρ	σ	α	β	γ
0	0	$-n$	β	γ
0	$\gamma-\alpha-\beta$	$-(n+\sigma)$	$\gamma+n$	γ
$1-\gamma$	0	$-(n+\rho)$	β	$1-\rho$
$1-\gamma$	$\gamma-\alpha-\beta$	$-(n+\sigma+\rho)$	$n+1$	$1-\rho$

L'entier positif n et les nombres rationnels ρ et σ étant choisis on constatera qu'*il y a une des 24 fonctions hypergéométriques du tableau de Kummer* (n° 19) *qui est effectivement algébrique;* toutefois si l'un des nombres γ, $\gamma-\alpha-\beta$, $\alpha-\beta$ est entier on se reportera au n° 23.

35. Cas où l'intégrale générale de l'équation hypergéométrique est algébrique. — Pour que l'intégrale générale soit algébrique, il faut et il suffit que l'équation admette deux intégrales indépendantes algébriques; l'expression (n° 24) du déterminant fournit une condition nécessaire : α, β, γ *doivent être réels et rationnels.*

1° *Méthode de Schwarz.* — Il considère la fonction $s(\lambda, \mu, \nu, x)$ correspondante, pour laquelle λ, μ, ν sont évidemment réels. *Pour que l'intégrale générale soit algébrique il est nécessaire et suffisant qu'une détermination de $s(\lambda, \mu, \nu, x)$ soit elle-même algébrique;* la proposition directe est évidente, la réciproque résulte de (29_5). A chaque fonction s algébrique correspondent 48 fonctions $\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$ algébriques.

XXXVIII. *Pour que $s(\lambda, \mu, \nu, x)$ soit algébrique il faut et il suffit qu'à une valeur de x corresponde un nombre fini de valeurs de s, c'est-à-dire que le réseau déduit de* ABC *ne comporte qu'un nombre fini de triangles, recouvrant un nombre fini de fois le plan* (S).

Supposons d'abord qu'aucun des λ, μ, ν ne soit entier; le triangle minimum $(\lambda'', \mu'', \nu'')$ est alors, sur (Σ), déterminé par trois plans de symétrie d'un polyèdre régulier; d'où le tableau des 15 cas possibles; N indique le nombre de quadrilatères du réseau et N' combien de fois le plan est recouvert :

Polyèdre.	N° du cas.	λ''.	μ''.	ν''.	N.	N'.
Dièdre n-gonal	1...	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{p}{n}$	n	p
Tétraèdre	2...	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	12	1
	3...	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	12	2
Cube et Octaèdre	4...	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	24	1
	5...	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	24	2
Icosaèdre et dodécaèdre	6...	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	60	1
	7...	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	60	2
	8...	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	60	2
	9...	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	60	3
	10...	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	60	4
	11...	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	60	6
	12...	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	60	6
	13...	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	60	6
	14...	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	60	7
	15...	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	60	10

A chacun de ces 15 triangles minimum correspondent 16 triangles réduits (λ', μ', ν'), desquels se déduisent par « extension de la membrane » une infinité de triangles (λ, μ, ν), pour lesquels $s(\lambda, \mu, \nu, x)$ est algébrique. Comme il fallait s'y attendre, les cas où $x(s)$ est rationnelle (n° 33) figurent dans ce tableau : cas 1 (si $p = 1$), 2, 4, 6.

Lorsqu'un des λ, μ, ν est entier, le triangle minimum a deux côtés tangents ou portés par un même cercle ; le premier cas, qui donne pour s un point singulier logarithmique, est à exclure ; en particulier aucun des paramètres ne pourra être nul. Si λ seul est entier les côtés AB et AC seront portés par un même cercle à condition que $\lambda - \mu - \nu$ ou $\lambda - \mu + \nu$ soit un nombre impair; le réseau est alors fini et s est algébrique. Si deux des paramètres sont entiers, il doit en être de même du troisième; les trois côtés seront portés par un même cercle à condition que $\lambda + \mu + \nu$ soit un nombre impair et que chacun des paramètres soit plus petit que la somme des deux autres; le réseau ne comporte que deux triangles qui couvrent le plan

$$N' = \frac{1}{2}(\lambda + \mu + \nu - 1) \text{ fois;}$$

s est une fonction rationnelle de degré N' *et ce cas est le seul où il en est ainsi.*

2° *Méthode de E. Goursat.* — Cette méthode, plus élémentaire, part du groupe de l'équation hypergéométrique (n° 21); l'intégrale générale étant mise sous la forme $y(x) = M\bar{y}_1^{(0)} + N\bar{y}_1^{(1)}$, un contour fermé la transforme en $M'\bar{y}_1^{(0)} + N'\bar{y}_1^{(1)}$; Goursat ($a$) établit que *la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale générale soit algébrique c'est que le rapport* $M : N = z$ *étant arbitraire, le rapport* $M' : N' = z'$ *ne puisse prendre qu'un nombre fini de valeurs.* Or, un circuit direct autour de $x = 0$ ou 1 se traduit respectivement pour ce rapport par les substitutions

$$z_1 - a = e^{-2\pi i(1-\gamma)}(z - a), \qquad \frac{1}{z_1} - b = e^{-2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}\left(\frac{1}{z} - b\right),$$

$$a = -\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}, \qquad b = -\frac{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}.$$

Le problème est donc ramené à la recherche des cas où le groupe, déduit de ces deux substitutions elliptiques, est fini : ce qui conduit tout naturellement aux polyèdres réguliers.

36. Recherches de E. Landau. — Quelle que soit la beauté du résultat de Schwarz, on doit reconnaître qu'il n'est obtenu que par un long détour; les coefficients de la série hypergéométrique déterminant la fonction, on est tenté de chercher une méthode purement arithmétique mettant sur eux-mêmes en évidence les cas où la fonction est algébrique. Le point de départ de E. Landau a été le théorème d'Eisenstein : *Si la fonction* $y(x)$, *définie par l'élément* $\Sigma a_n x^n$, *où les* a_n *sont rationnels, est algébrique, il existe une valeur de* x *pour laquelle tous les termes de la série sont des entiers.* Écartant le cas banal où α, β, $\gamma - \alpha$ ou $\gamma - \beta$ est un entier il suppose α, β, γ rationnels : $\alpha = a : m$, $\beta = b : m$, $\gamma = c : m$ (a, b, c, m premiers entre eux).

La condition nécessaire et suffisante pour que le théorème d'Eisenstein s'applique à la série hypergéométrique c'est que pour tout nombre ρ *premier avec* m *le plus petit reste positif* $(\bmod m)$ *de* ρc *soit compris entre ceux de* ρa *et* ρb.

Landau a d'abord (a) établi cette proposition pour $\rho = 1$, puis (b) simultanément avec E. Stridsberg (a, b) pour ρ quelconque. En formant les valeurs de a, b, c, m correspondant au tableau de Schwarz, on voit que la condition est toujours vérifiée : donc elle est nécessaire. Réciproquement A. Errera, ayant formé tous les systèmes de quatre nombres vérifiant cette condition, a constaté qu'il n'y en a pas d'autres que ceux de Schwarz : donc elle est suffisante.

X. — Transformations rationnelles et algébriques de la fonction hypergéométrique.

37. L'équation de Kummer. — L'équation différentielle du troisième ordre

$$(1)\qquad [x]_\xi - 2\mathrm{R}(\lambda, \mu, \nu, x)\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 = -2\mathrm{R}(\lambda', \mu', \nu', \xi),$$

rencontrée pour la première fois par Kummer, joue un rôle fondamental dans le problème de la transformation de l'équation hypergéométrique; en effet, étant données les équations de Schwarz

$$(2)\qquad [s]_x = -2\mathrm{R}(\lambda, \mu, \nu, x), \qquad [s]_\xi = -2\mathrm{R}(\lambda', \mu', \nu', \xi),$$

il est clair, d'après (29_3), que la première se transforme dans la deuxième, si l'on y fait un changement de variable en prenant pour x une intégrale $x(\xi)$ de l'équation (1).

XXXIX. — *La connaissance d'une intégrale* $x(\xi)$ *de l'équation de Kummer conduit à une formule de transformation de la* *fonction hypergéométrique; en effet, la relation*

$$(3)\qquad S[\lambda, \mu, \nu, x(\xi)] = S(\lambda', \mu', \nu', \xi)$$

entraîne, d'après (29_5), *pour deux intégrales des équations hypergéométriques normales correspondantes*

$$(4)\qquad Y[\lambda, \mu, \nu, x(\xi)] = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{\frac{1}{2}} Y(\lambda', \mu', \nu', \xi)$$

ou, d'après (18_4), *pour deux intégrales des équations hypergéométriques elles-mêmes*

$$(5)\quad x^{\frac{1-\lambda}{2}}(1-x)^{\frac{1-\nu}{2}} y[\lambda, \mu, \nu, x(\xi)] = \xi^{\frac{1-\lambda'}{2}}(1-\xi)^{\frac{1-\nu'}{2}}\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{\frac{1}{2}} y(\lambda', \mu', \nu', \xi).$$

Remarquons que l'équation (1) reste invariante si l'on effectue sur x ou sur ξ l'une des six substitutions linéaires qui permutent les points 0, 1, ∞, en permutant simultanément λ, μ, ν ou λ', μ', ν'; d'une seule intégrale, on en déduit ainsi 36, qui peuvent d'ailleurs n'être pas toutes distinctes.

38. **Intégrales rationnelles de l'équation de Kummer.** — Kummer a formé un nombre considérable d'intégrales de l'équation (37_1) qui sont des fonctions rationnelles de ξ et pour chacune d'elles il a donné la formule de transformation rationnelle correspondante de $\mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$; par exemple :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathcal{F}\left[\alpha, \beta, \alpha+\beta+\frac{1}{2}, 4\xi(1-\xi)\right] = \mathcal{F}\left(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta+\frac{1}{2}, \xi\right), \\ &\qquad\qquad \mathcal{R}(\xi) < \frac{1}{2}, \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathcal{F}\left[\alpha, \beta, \alpha+\beta+\frac{1}{2}, 4\xi(1-\xi)\right] = \mathcal{F}\left(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta+\frac{1}{2}, 1-\xi\right), \\ &\qquad\qquad \mathcal{R}(\xi) > \frac{1}{2}; \end{aligned}\right.$$

mais il ne précisait pas, comme nous venons de le faire, les branches des fonctions multiformes, ce qui pouvait conduire à des méprises; Gauss se demandait notamment pourquoi en égalant les deuxièmes membres de ces équations on obtenait une absurdité; la raison en est manifeste : quand ξ traverse la droite $\mathcal{R}(\xi) = \frac{1}{2}$, la variable

$$x = 4\xi(1-\xi)$$

franchit la coupure $(+1, +\infty)$ et le premier membre de (1) ne reste pas égal à celui de (2).

Il était évident que les calculs de Kummer n'épuisaient pas toutes les intégrales rationnelles; dans une suite d'importants Mémoires E. Goursat (b, c. d, g) a entièrement résolu ce problème.

En prenant pour x une fonction rationnelle $x(\xi)$, le premier membre de (37_1) est lui-même une fonction rationnelle dont le développement se déduit immédiatement de celui de $x - x_0 = A_0(\xi - \xi_0)^k + \ldots$; en l'identifiant avec le développement de $-2R(\lambda', \mu', \nu', \xi)$, on obtient ces conditions nécessaires et suffisantes :

1° *x étant arbitraire, mais différent de* 0, 1, ∞, *les racines de l'équation $x(\xi) = x$. différentes de* 0, 1, ∞, *sont toutes simples;*

2° *les racines des équations* $x(\xi) = 0$, $x(\xi) = 1$, $x(\xi) = \infty$, *différentes de* 0, 1, ∞ *ont toutes respectivement un même degre de multiplicité.*

Soient N le degré de la fonction rationnelle, a le nombre des racines de l'équation $x(\xi) = 0$ égales à 0, 1, ∞; r le nombre de ses racines différentes de 0, 1, ∞ et l leur degré commun de multiplicité; b, s, m et c, t, n les nombres analogues relatifs à $x(\xi) = 1$ et $x(\xi) = \infty$.

XL. *Toute solution en nombres entiers du système*

$$(3)\quad N = a + rl = b + sm = c + tn = 1 + r + s + t \qquad (a + b + c \geqq 3)$$

fournit une intégrale rationnelle et réciproquement; les valeurs correspondantes de λ, λ', ... *se déterminent ainsi : si* $r = 0$, λ reste arbitraire, si $r > 0$, $\lambda = 1 : l$; *puis* $\lambda' = k\lambda$, *où k désigne le nombre des racines de l'équation $x(\xi) = 0$ égales à* 0.

Premier cas : $r = s = t = 0$; d'où $N = a = b = c = 1$; on obtient les six fonctions linéaires $x = \xi$, $x = 1 - \xi$, $x = 1 : \xi \ldots$; λ, μ, ν *sont arbitraires* et λ', μ', ν' s'en déduisent par permutation.

Deuxième cas : $r \neq 0$, $s = t = 0$; d'où $a = 0$, $N = b = c = 2$; toutes les intégrales se déduisent de celle-ci : $x = (2\xi - 1)^2$, $\lambda = 1 : 2$,

μ, ν *arbitraires;* $\lambda' = \mu' = \mu$, $\nu' = 2\nu$; Kummer les avait toutes obtenues.

Troisième cas : $r \neq 0$, $s \neq 0$, $t = 0$; on obtient sept solutions de degré $N = 2k+2$, $2k+1$, 3, 4, 6, 4, 3 (k arbitraire) pour lesquelles respectivement $\lambda = \mu = 1:2$ (deux premières); $\lambda = 1:2$, $\mu = 1:3$ (trois suivantes); $\lambda = 1:2$, $\mu = 1:4$; $\lambda = \mu = 1:3$; ν *demeurant seul arbitraire.*

Quatrième cas : r, s, $t \neq 0$; λ, μ, ν sont alors tous les trois déterminés; les valeurs de l, m, n sont données par le tableau

	$\lambda+\mu+\nu>1$.				$\lambda+\mu+\nu=1$.			$\lambda+\mu+\nu<1$.			
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
l	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2
m	2	3	3	3	3	4	3	4	3	3	3
n	arbit.	3	4	5	6	4	3	5	7	8	9
	∞	∞	∞	∞	3	1	1	1	6	2	1

La dernière ligne indique combien de valeurs de λ', μ', ν' correspondent à chaque valeur de λ, μ, ν; à chaque système de valeurs de λ, μ, ν, λ', μ', ν' correspond une seule intégrale rationnelle dans les quatre premiers et quatre derniers cas, une infinité dans les trois cas intermédiaires; il n'y a donc qu'un très petit nombre d'intégrales rationnelles, lorsque $\lambda + \mu + \nu < 1$.

39. **Intégrales algébriques de l'équation de Kummer.** — La connaissance de deux formules de transformation rationnelles équivaut à celle d'une transformation algébrique; E. Goursat a montré que toutes les transformations algébriques s'obtiennent par ce procédé lorsqu'un au moins des paramètres λ, λ', ... est laissé arbitraire; par contre il existe des transformations algébriques qui ne se déduisent pas de deux transformations rationnelles, lorsque tous les paramètres ont certaines valeurs numériques déterminées. E. Papperitz (c) a abordé directement la recherche des intégrales algébriques de l'équation de Kummer. Soit $f(x, \xi) = 0$ la relation algébrique irréductible définissant une intégrale $x(\xi)$, de degré N en ξ, N$'$ en x et de genre p; à l'ensemble des points analytiques (x_0, ξ_0), vérifiant cette relation, correspondent biunivoquement deux surfaces de Riemann $[\xi]$ et $[x]$, à N et N$'$ feuillets respectivement. *Les points de ramification de* $[\xi]$

et $[x]$ *correspondent aux points analytiques où l'une au moins des deux variables* x *ou* ξ *prend une des valeurs* 0, 1, ∞; si l'une des variables est égale à 0, 1, ∞ sans qu'il en soit de même de l'autre, le point de ramification est de première espèce; dans le cas contraire, de deuxième espèce. Supposons qu'il y ait respectivement r, s, t, r', s', t' points de première espèce de la forme $(0, \xi_0)$, $(1, \xi_0)$, (∞, ξ_0). $(x_0, 0)$, $(x_0, 1)$, (x_0, ∞); la surface $[\xi]$ doit être ramifiée de la manière suivante : $x = 0$, r cycles de l feuillets; $x = 1$, s cycles de m feuillets; $x = \infty$, t cycles de n feuillets; aux r' points correspondants à $(x_0, 0)$, 1 cycle de l'_1 feuillets; aux s' points $(x_0, 1)$, 1 cycle de m'_1 feuillets; aux t' points (x_0, ∞), 1 cycle de n'_1 feuillets; la ramification de $[x]$ est symétrique. Les paramètres ont les valeurs suivantes :

$$\lambda = l_1 : l, \qquad \mu = m_1 : m, \qquad \nu = n_1 : n,$$
$$\lambda' = l'_1 : l', \qquad \mu' = m'_1 : m', \qquad \nu' = n'_1 : n';$$

toutefois si r, par exemple, est nul, λ est arbitraire. En considérant les points de deuxième espèce on obtient encore neuf équations

$$\lambda\,\delta_{0,0} = \lambda'\,\delta'_{0,0}, \qquad \lambda\,\delta_{0,1} = \mu'\,\delta'_{0,1}, \qquad \lambda\,\delta_{0,\infty} = \nu'\,\delta'_{0,\infty}, \qquad \mu\,\delta_{1,0} = \lambda'\,\delta'_{1,0}, \qquad \ldots,$$

où $\delta_{0,0}$ et $\delta'_{0,0}$ indiquent le nombre des feuillets passant par le point $(0,0)$, respectivement sur $[\xi]$ et $[x]$: en désignant par q le nombre des cycles de deuxième espèce, puis en posant

$$a = \delta_{0,0} + \delta_{0,1} + \delta_{0,\infty}$$

et les analogues, on obtient le systeme d'équations

$$\mathrm{N} = a + rl = b + sm = c + tn \qquad (a + b + c \geqq q,\ l_1,\ m_1,\ n_1 \leqq \mathrm{N}'),$$
$$\mathrm{N}' = a' + r'l' = b' + s'm' = c' + t'n' \qquad (a' + b' + c' \geqq q,\ l'_1,\ m'_1,\ n'_1 \leqq \mathrm{N}),$$
$$2p + q - 2 = \mathrm{N} - r - s - t + r'(l'_1 - 1) + s'(m'_1 - 1) + t'(n'_1 - 1),$$
$$2p + q - 2 = \mathrm{N}' - r' - s' - t' + r\,(l_1 - 1) + s\,(m_1 - 1) + t\,(n_1 - 1),$$

qui contiennent comme cas particulier celles du n° 38; contrairement à celles-ci elles fournissent seulement des *conditions nécessaires*, *mais non suffisantes*.

L'existence d'une formule de transformation algébrique prend un aspect intuitif si l'on introduit les réseaux de quadrilatères que les fonctions $\mathrm{S}(\lambda, \mu, \nu, x)$ et $\mathrm{S}(\lambda', \mu', \nu', \xi)$ font correspondre aux plans des x et des ξ : il faut et il suffit qu'il existe un domaine du plan (S) qui se décompose en N quadrilatères du premier réseau et N′ du deuxième. En particulier l'équation

$$N(1-\lambda-\mu-\nu) = N'(1-\lambda'-\mu'-\nu'),$$

conséquence importante des équations ci-dessus, a une interprétation immédiate ([1]). On retrouvera l'étude de ce point de vue dans E. Goursat (*f*).

40. Méthode élémentaire de E. Goursat. — Dans sa Thèse (*a*), E. Goursat a résolu le même problème par une voie plus élémentaire en remarquant que pour obtenir une formule de transformation rationnelle ou algébrique, il suffit de déterminer une fonction $x(\xi)$ rationnelle ou algébrique telle qu'en faisant le changement de variable $x = x(\xi)$ dans l'équation (18_3) vérifiée par la fonction

$$z(x) = x^{\rho}(1-x)^{\sigma}\mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

elle se transforme en une équation du même type vérifiée par

$$Z(\xi) = \xi^{\rho'}(1-\xi)^{\sigma'}\mathcal{F}(\alpha', \beta', \gamma', \xi).$$

XI. — Résultats divers.

41. Les racines de la fonction hypergéométrique. — F. Klein (*a*) a déterminé le nombre N des racines réelles, comprises entre 0 et 1, de $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ en partant du théorème de Sturm sur les racines des intégrales réelles des équations linéaires du deuxième ordre. Supposant α, β, γ *réels*, soient $y_1(x)$ et $y_2(x)$ deux intégrales de l'équation hypergéométrique, réelles sur le segment $(0, +1)$: leurs racines se séparent mutuellement. Si y_1 s'annule au point $x = 0$ et en χ points intérieurs à $(0, +1)$, toute autre intégrale réelle possédera dans cet intervalle au moins χ et au plus $\chi+1$ racines; χ est le *nombre caractéristique* de l'intervalle $(0, +1)$.

Si l'on considère le triangle ABC que fait correspondre à $\mathcal{I}(x) > 0$ la branche $\overline{S}(\lambda, \mu, \nu, x) = y_2 : y_1$, il est clair que le côté AC se

---

([1]) Le problème du n° 35 rentre comme cas très particulier dans celui ci en y faisant $\lambda' = \mu' = \nu' = 1$; on peut constater que les nombres du tableau de la page 60 vérifient l'équation $N(1-\lambda-\mu-\nu) = -2N'$.

recouvre ainsi χ fois lui-même. Le résultat de la page 52 fournit immédiatement la valeur

$$\chi = \mathrm{E}\left(\frac{|\alpha-\beta|-|1-\gamma|-|\gamma-\alpha-\beta|+1}{2}\right),$$

une discussion très simple montre ensuite dans quels cas on doit prendre $N = \chi$ ou $N = \chi + 1$.

A. Hurwitz (*b*) a déterminé N, d'une façon élémentaire, en formant une suite de Sturm. D'abord si α, β, $\gamma > 0$, F reste évidemment positive dans $(0, +1)$; soit ensuite

$$F_k = F(\alpha + k, \beta + k, \gamma + k, x),$$

considérons la suite $F_0, F_1, \ldots, F_n$, n étant tel que $\alpha + n$, $\beta + n$, $\gamma + n > 0$: N *est égal à la différence du nombre des termes négatifs, pour* $x = 0$ *et pour* $x = 1$, *de la suite*

$$\frac{(\alpha, 1)(\beta, 1)}{\gamma} F_0 F_1, \quad -\frac{(\alpha, 2)(\beta, 2)}{\gamma + 1} F_1 F_2, \quad \ldots, \quad (-1)^{n-1}\frac{(\alpha, n)(\beta, n)}{\gamma + n - 1} F_{n-1} F_n,$$

en supposant $\alpha \geq \beta$, $\gamma - \alpha - \beta > 0$, cas auquel on peut toujours se ramener [*voir* L. Gegenbauer (*b*), P. Porter (*a*, *b*) et W. Heal].

En supposant toujours α, β, γ réels A. Hurwitz (*d*) a déterminé le nombre des racines de $\mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$ situées dans le domaine (X_1); sa méthode, très générale, est basée sur l'étude de la variation du logarithme d'une fonction le long d'un contour fermé. E. Van Vleck (*b*, *c*) avait abordé le même problème par une méthode géométrique comme celle de Klein. G. Herglotz a étudié, par une méthode géométrique intéressante, les racines d'une branche de la fonction P situées à l'intérieur du cercle qui passe par les points de ramification.

42. Polynomes hypergéométriques de Jacobi. — Lorsque α (ou β) est un entier négatif, sans qu'il en soit de même de γ, la fonction hypergéométrique se réduit à un polynome; la classe des polynomes hypergéométriques a fait l'objet de travaux nombreux; voici une simple énumération des principaux résultats. Soit

$$\mathcal{F}_n(\alpha, \gamma, x) = F(-n, \alpha + n, \gamma, x);$$

Jacobi (b) a d'abord établi que ce polynome s'exprime par la formule

$$(1)\qquad \mathcal{F}_n(\alpha, \gamma, x) = \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}}{(\gamma, n)} \frac{d^n}{dx^n}[x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}]$$

qui contient comme cas particulier celle d'O. Rodrigues pour les polynomes de Legendre; en développant en fraction continue la fonction

$$B(\alpha, \gamma-\alpha)\frac{1}{x}F\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{1}{x}\right) = \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}}{x-u}du,$$

il obtient pour dénominateur de la réduite de rang n, précisément $\mathcal{F}_n(\gamma-1, \alpha, x)$. Ce fait est lié à cette propriété fondamentale : $P(x)$ *étant un polynome arbitraire de degré inférieur à* n,

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}\mathcal{F}_n(\alpha, \gamma, x)P(x)\,dx = 0;$$

il en résulte en particulier que *les polynomes* $\mathcal{F}_n$ *forment une suite de polynomes orthogonaux*, l'intégrale

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}\mathcal{F}_m\mathcal{F}_n\,dx$$

étant nulle tant que m est différent de n. On peut donc calculer par la méthode de Fourier les coefficients du développement d'une fonction arbitraire; les conditions pour que ce développement converge en un point x de $(0, +1)$ et y représente la fonction ont été étudiées notamment par W. Steckloff (a, b), N. Kryloff, E. Kogbeliantz, W. Myller-Lebedeff (a, b, c).

T. J. Stieltjes (b) a démontré, que α et γ étant réels, $\gamma > 0$ et $\alpha + 1 - \gamma > 0$, $\mathcal{F}_n$ a ses racines réelles et comprises entre 0 et 1; il en a formé diverses fonctions symétriques. D. Hilbert a également étudié les racines de $\mathcal{F}_n$ et formé leur discriminant [*voir* C. Possé (a, b) et L. Gegenbauer (b)].

43. Expression de $\mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$ par une dérivée généralisée. — En introduisant le symbole $D^{(\lambda)}f(x)$ de la dérivée de Riemann-Liouville (défini quel que soit le nombre complexe λ), J. Kampé de Fériet a montré que la branche principale s'exprimait, dans tout (X_1), de la manière suivante :

$$\bar{\mathfrak{F}}(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} x^{1-\gamma} D^{(\alpha-\gamma)}[x^{\alpha-1}(1-x)^{-\beta}]$$
$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} D^{(-\alpha)}[x^{\gamma-\alpha-1}(1-x)^{\beta-\gamma}],$$

la seconde formule coïncide avec celle de Jacobi (42_1) lorsque α est un entier négatif.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

OUVRAGES A CONSULTER.

KLEIN (F.). — Ueber die hypergeometrische Function (*Vorlesungen*, 1893-1894) [2].

PICARD (E.). — *Traité d'Analyse*, t. II et III.

WHITTAKER (E. T.) and WATSON (G. N.). — *A course of Modern Analysis*, 3e édition, Chap. X et XIV.

BIBLIOGRAPHIE.

1. ABRAMOVIČ (K. F.). — *a*. Sur les fonctions hypergéométriques (russe) (*Kiev, Izv. Univ.*, t. 52, 1912, p. 1-118).
   b. Sur quelques formules de Riemann, concernant les fonctions hypergéométriques (polonais) (*Wiad. matem. Warszawa*, t. 16, 1913, p. 185-195).
2. ANDOYER (H.). — Démonstration directe d'un théorème de Tisserand relatif au développement de la fonction perturbatrice (*C. R. Acad. Sc.*, t. 172, 1921, p. 1546).
3. APPELL (P.). — *a*. Évaluation d'une intégrale définie (*C. R. Acad. Sc.*, t. 87, 1878, p. 874).
   b. Sur la série hypergéométrique et les polynomes de Jacobi (*C. R. Acad. Sc.*, t. 88, 1879, p. 31).
   c. Sur une classe de polynomes (*Ann. Sc. Ec. Norm.*, 2e série, t. 9, 1880, p. 119).
4. BARANIECKI (M. A.). — *a*. Démonstration d'une proposition de la théorie des fonctions hypergéométriques (polonais) (*Denkschriften Pariser Gesell.*, t. 8, 1876).
5. BARNES (E. W.). — *a*. The Maclaurin sumformula (*Proc. London Math. Soc.*, 2e série, t. 3, 1905, p. 253-272).

---

[1] Cette bibliographie ne contient que les travaux parvenus à ma connaissance avant le 1er janvier 1928, date à laquelle j'ai terminé mon manuscrit. D'autres obligations ne m'ayant pas permis de continuer à me tenir au courant des publications dans ce domaine, seule la très amicale insistance de M. Villat a pu obtenir que je livre à la presse ces feuilles, dans l'état où elles se trouvaient depuis que je les avais abandonnées pour d'autres recherches.

[2] Une rééditition de cet ouvrage fondamental a paru chez Springer en 1933 dans la collection *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, t. XXXIX.

b. The asymptotic expansion of integral functions defined by Taylors series (*Phil. Trans.*, t. 206, 1906, p. 249-297).

c. The use of factorial series in an asymptotic expansion (*Quart. Journ. Math.*, t. 38, 1907, p. 108-140).

d. On functions defined by simple types of hypergeometric sieess (*Trans. Cambridge Phil. Soc.*, t. 20, 1907, p. 253-279).

e. A new development of the theory of the hypergeometric functions (*Proc. London Math. Soc.*, 2e série, t. 6, 1908, p. 141-177).

6. BATSCHELDER (P. M.). — The hypergeometric difference equation (*Bul. American Math. Soc.*, 2e série, t. 19, 1913, p. 500).

7. BESSO (D.). — Intorno ad un'equazione differenziale ipergeometrica (*Att. R. Acad. Lincei*, 3e série, t. 7, 1883, p. 230).

8. BACKER (B. B.). — On the relations between Pincherle's polynomials and the hypergeometric function (*Proc. Edinburgh Math. Soc.*, t. 39, 1920).

9. BOLZA (O.). — Ueber die linearen Relationen zwischen den zu verschiedenen singulären Punkten gehörigen Fundamentalsystemen von Integralen der Riemann'schen Differentialgleichung (*Math. Ann.*, t. 42, 1893, p. 526-536).

10. BORCHARDT (C. W.). — Bemerkungen zur vorstehenden Note (*voir* 120 *a*) (*Journ. reine ang. Math.*, t. 57, 1860, p. 81).

11. BOYD (J. H.). — A study of certain special cases of the hypergeometric differential equation (*Ann. of Math.*, t. 7, 1893, p. 145-186).

12. BRIOSCHI (F.). — *a.* Sur la théorie des équations différentielles du deuxième ordre (*C. R. Acad. Sc.*, t. 93, 1881, p. 941).

b. Sulle equazioni differenziali del tetraedro, dell'octaedro et dell' icosaedro (*Ann. Math. pura appli.*, 2e série, t. 10, 1881, p. 104-128).

13. CAILLER (C.). — *a.* La fonction hypergéométrique de Gauss (*Arch. Sc. Phys. nat. Genève*, 4e série, t. 18, 1904, p. 613).

b. Une propriété de la série hypergéométrique (*Bul. Sc. Math.*, 2e série, t. 30, 1906, p. 21-30).

14. CALLANDREAU (O.). — Sur une intégrale définie (*C. R. Acad. Sc.*, t. 89, 1879, p. 90).

15. CAYLEY (A.). — *a.* On reciprocants and differential Invariants (*Philos. Mag.*, t. 16, 1858, p. 356-394).

b. Note on a hypergeometric series (*Quart. Journ. Math.*, t. 16, 1879, p. 268-270).

c. On the Schwarzian derivative and the polyhedral functions (*Proc. Cambridge Phil. Soc.*, t. 3, 1880, p. 349).

d. On the Schwarzian derivative and the polyhedral functions (*Trans. Cambridge Phil. Soc.*, t. 13, 1881, p. 5-68).

e. On a particular case of Kummer's differential equation of the third order (*Mess. Math.*, 2e série, t. 20, 1890, p. 75-79).

16. CERMAK (A.). — Théorie de la fonction hypergéométrique basée sur les propriétés des fonctions thêta (tchèque) (*Čas. Math. Fys. Prag.*, t. 36, 1906-1907, p. 441-460).

17. Christoffel (E. B.). — Sul problema delle temperature stazionare e la rappresentazione di una data superficie (*Ann. Math. pura appli*, t. 1, 1867, p. 97).

18. Clausen (Th.). – *a.* Ueber die Fàlle, wenn die Reihe von der Form $y = 1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma} x, \ldots$ ein quadrat von der Form $z = 1 + \frac{\alpha'.\beta'.\gamma'}{1.\delta'.\varepsilon'} x + \ldots$ hat (*Journ. reine ang. Math.*, t. 3, 1828, p. 89).

b. Beitrag zur Theorie der Reihen (*Journ. reine ang. Math.*, t. 3, 1828, p. 92).

19. Cockle (J.). — *a.* On a binomial biordinal and the constants of its complete solution (*Proc. London Math. Soc.*, t. 11, 1880, p. 123-131).

b. On a equation of Schwarz (*Quart. Journ. Math.*, t. 17, 1881, p. 293-301).

c. Transformation of differential equations (*Mess. Math.*, 2e série, t. 11, 1881, p. 109-111).

d. Transformation of a biordinal of Schwarz's (*Mess. Math.*, 2e série, t. 11, 1881, p. 49-52).

e. Supplement on binomial biordinals (*Proc. London Math. Soc.*, t. 12, 1881, p. 63-72).

20. Curtiss (D. R.). — *a.* Binary families in a triply connected region, with especial reference to hypergeometric families (*Mem. Amer. Acad. Arts Sc. Boston*, t. 13, 1904, p. 1-59).

V6 *b.* La théorie des fonctions hypergéométriques (*Ann. Sc. Éc. Norm.*, 3e série, t. 23, 1906, p. 121-143).

21. Cwojdzinski (T.). — Anwendung der Fuchs' schen Theorie auf die Differentialgleichung der Gauss' schen hypergeometrischen Reihe (*Jahresber, Obergymn. Brody*, t. 16, 1894).

22. Darboux (G.). — Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en série (*Journ. Math. pures appliq.*, 3e série, t. 4, 1878, p. 5-57 et 377-417).

23. Deruyts (J.). — Sur une classe de polynomes analogues aux fonctions de Legendre (*Mém. Soc. Sc. Liége*, 2e série, t. 14, 1888).

24. Dixon (A. C.). — On the value of $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1}\theta \cos n\theta \, d\theta$ (*Mess. Math.*, 2e série, t. 31, 1902, p. 158).

25. Errera (A.). — Zahlentheoretische Lösung einer funktionentheoretischen Frage (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. 35, 1913, p. 107-144).

26. Euler (L.). — *a.* Institutiones Calculi Integrali (vol. II, sect. I, Chap. X), 1769.

b. Specimen transformationis singularis Serierum (*Nova Acta Acad. Petrop*, t. 12, 1778, p. 58).

27. Falkenhagen (J. M. H.). — Das bestimmte Integral $\int_0^{2\pi} \frac{\cos x\theta}{(1+k^2-2k\cos\theta)^s} d\theta$ als Funktion von k, s, x (*Niew. Arch. Wisk. Amsterdam*, 2e série, t. 7, 1907, p. 424-437).

28. FÖRSTER (R.). — Beiträge zur speciellen Theorie der Riemannschen P Funktion III-o' (*Diss. Leipzig*, 1908).

29. FORSYTH (A. R.). — *a.* Note on a differentialequation due to Kummer (*Quart. Journ. Math.*, t. 19, 1883, p. 125-131).

b. A particular method for the solution of some linear differential equations of the second order (*Mess. Math.*, t. 15, 1885, p. 44-48).

c. Evaluation of two definite integrals (*Quart. Journ. Math.*, t. 27, 1895, p. 216-225).

30. FOWLER (R. H.). — The cubie transformation of Riemann's P. Function (*Quart. Journ. Math.*, t. 44, 1913, p. 205-218).

31. FRANZ (K.). — Ueber die hypergeometrische Differentialgleichung mit Nebenpunkten (*Program Friedrichs Gymn.*, n° 58, 1903).

32. FRICKE (R.). — Ueber den arithmetischen Charakter der zu den Verzweigungen (2, 3, 7) und (2, 4, 7) gehörenden Dreiecksfunctionen (*Math. Ann.*, t. 41, 1893, p. 443 468).

33. FROBENIUS (G.). — Ueber Entwicklung analytischer Funktionen in Reihen, die nach gegebenen Functionen fortschreiten (*Journ. reine angew. Math.*, t. 73, 1871, p. 1-30).

34. FUCHS (R.). — Lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei in Endlichen gelegenen wesentlich singulären Stellen (*Math. Ann.*, t. 63, 1907, p. 301-321).

35. GAUSS (C. F.). — *a.* Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha.\beta}{\gamma.1} x \ldots$ (*Werke*, t. III, p. 123).

b. Determinatio seriei nostri per aequationem differentialem secundi ordinis (*Werke*, t. III, p. 207).

36. GEGENBAUER (L.). — *a.* Ueber einige bestimmte Integrale (*Sitz. berichte math. nat. Clas. Ak. Wis. Wien.* [Abt. II *a*], t. 72, 1875).

b. Zur Theorie der hypergeometrischen Reihe (*Sitz. berichte math. nat. Clas. Ak. Wis. Wien*, t. 100, 1891, p. 225-244).

c. Zur Theorie der Näherungsbrüche (*Sitz. berichte math. nat. Clas. Ak. Wis. Wien*, t. 100, 1891, p. 635-703).

d. Ueber die Wurzeln der hypergeometrischen Reihe (*Mon. hefte Math. Wien*, t. 2, 1891, p. 125-130).

37. GODEFROY (M.). — Sur la convergence de la série hypergéométrique (*Nouv. Ann. Math.*, 4^e série, t. 2, 1902, p. 64).

38. GOURSAT (E.). — *a.* Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique (*Ann. Sc. Éc. Norm.*, 2^e série, t. 10, 1881, p. 3-142).

b. Sur une équation différentielle du troisième ordre (*C. R. Acad. Sc.*, t. 98, 1884, p. 419 et 609).

c. Sur une équation analogue à celle de Kummer (*C. R. Acad. Sc.*, t. 99, 1884, p. 777 et 858).

d. Sur les intégrales rationnelles de l'équation de Kummer (*Math. Ann.*, t. 24, 1884, p. 445-460).

e. Sur les intégrales algébriques de l'équation de Kummer (*C. R. Acad. Sc.*, t. 103, 1886, p. 993).

f. Recherches sur les intégrales algébriques de l'équation de Kummer (*Journ. Math. pures appliq.*, 4e série, t. 3, 1887, p. 255-305).

g. Recherches sur l'équation de Kummer (*Acta Soc. Sc. Fennicae*, t. 15, 1888, p. 47-127).

39. GRAF (F.). — *a*. Sur le groupe de l'équation différentielle hypergéométrique (tchèque) (*Čas. Math. Fys. Prag.*, t. 36, 1906-1907, p. 354-360).

b. Sur le groupe de l'équation différentielle hypergéométrique (tchèque) (*Rozpr. České Ak. Frant. Jos. Prag*, 1908).

c. Sur le développement en série d'intégrales hypergéométriques (tchèque) (*Rozpr. Ceské Ak. Frant. Jos. Prag*, 1908).

d. Sur la détermination des substitutions fondamentales du groupe hypergéométrique par la formule de Wirtinger (tchèque) (*Čas. Math. Fys. Prag.*, t. 37, 1908, p. 8-13).

40. GRAF (J. H.). — Quelques notions sur la série hypergéométrique de Gauss (*Giorn. Mat. Battaglini*, t. 36, 1898, p. 233-261).

41. GRÜNERT (J. A.). — Summirung der Reihe $1 + \frac{x}{z} + \frac{x(x-1)}{z(z-1)} + \ldots$ (*Journ. reine angew. Math.*, t. 2, 1827, p. 358).

42. GUDERMANN (C.). — Umformung einer Reihe von sehr allgemeiner Form. (*Journ. reine angew. Math.*, t. 7, 1831, p. 306).

43. HABAN (M.). — *a*. Ueber die Fälle der Gauss'schen Differentialgleichung, in welchen die unabhängige Variable eine eindeutige und doppeltperiodische Funktion der Integralquotienten ist. (*Math. natw. Ber. Ungarn, Leipzig*, t. 19, 1903, p. 224-241).

b. Application des méthodes de Poincaré à l'intégration de certains cas de l'équation différentielle de Gauss (hongrois) (*Math. phys. Lapok, Budapest*, t. 13, 1904, p. 1-29 et 55-86).

44. HALPHEN (G.). — *a*. Sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables (*Mém. sav. Acad. Sc.*, 2e série, t. 28, 1884, p. 1).

b. Sur des fonctions qui proviennent de l'équation de Gauss (*C. R. Acad. Sc.*, t. 92, 1881, p. 856).

45. HATHAWAY (R. M.). — On some points in the theory of the hypergeometric function expressed as a double circuit integral (*Ann. Math. pure applied., Harvard*, 2e série, t. 2, 1901, p. 137-145).

46. HEAL (W. E.). — Expression of Riemann's P. function (*American Math., Montly*, t. 7, 1900, p. 155-160).

47. HEINE (E.). — *a*. Verwandlung von Reihen in Kettenbrüche (*Journ. reine angew. Math.*, t. 32, 1846, p. 205-209).

b. Auszug eines Schreibens über Kettenbrüche (*Journ. reine angew. Math.*, t. 53, 1857, p. 284).

c. Ueber die Zähler und Nenner die Näherungswerthe von Kettonbrüche (*Journ. reine angew. Math.*, t. 57, 1860, p. 231-247).

d. *Handbuch der Kugelfunctionen.*

48. Herglotz (G.). — Ueber dir Nullstellen der hypergeometrischen Funktiön (*Ber. Sächs, Gesell. Wiss., Leipzig*, t. 69, 1917, p. 510-534).

49. Hering (A. G.). — Summation der *n* ersten Glieder der binomischen Reihe mittelst der Theorie der hypergeometrischen Reihe (*Prog. Gym. Chemnitz*, 1868).

50. Heymann (W.). — *a.* Ueber lineare simultane Differentialgleichungen welche durch hypergeometrische Functionen integrirt werden können (*Zeitsch. Math. Phys.*, t. 32, 1887, p. 176-182).

b. Ueber hypergeometrische Functionen deren letztes Element speziell ist (*Zeitsch. Math. Phys.*, t. 44, 1899, p. 280-288).

c. Ueber Differential und Differenzengleichungen welche durch die hypergeometrische Reihe integrirt werden können (*Journ. reine angew. Math.*, t. 122, 1900, p. 164-171).

51. Hilbert (D.). — Ueber die Discriminante der im Endlichen abbrechenden hypergeometrischen Reihe (*Journ. reine angew. Math.*, t. 103, 1888, p. 337-345).

52. Hill (M. J. M.). — *a.* A formula for the sum of a finite number of terms of the hypergeometric series when the fourth element is equal to unity (*Proc. London Math. Soc.*, 2e série, t. 5, 1907, p. 335-341).

b. A formula for the sum of a finite number of terms of the hypergeometric series when the fourth element is equal to unity (*Proc. London Math. Soc.*, 2e série, t. 6, 1908, p. 339-348).

c. On the continuation of the hypergeometric series (*Proc. int. Congress Math., Cambridge*, t. 1, 1912, p. 375-383).

53. Hobson (E. W.). — On a type of spherical harmonics of unrestricted degree order and argument (*Phil. Trans.*, t. 187, 1896, p. 443-531).

54. Hodgkinson (J.). — *a.* The conformal representation of the various triangles bounded by the arcs of three intersecting circles (*Proc. London Math. Soc.*, 2e série, t. 15, 1916, p. 166-181).

b. An application of conformal representation to certain hypergeometric series (*Proc. London Math. Soc.*, t. 17, 1918, p. 17-24).

55. Humbert (G.). — Sur l'équation hypergéométrique (*Bul. Soc. Math.*, t. 8, 1880, p. 112-120).

56. Humbert (P.). — *a.* Sur des polynomes associés aux polynomes de Legendre (*Bul. Soc. Math.*, t. 46, 1918, p. 120-151).

b. Sur les équations de Didon (*Nouv. Ann. Math.*, t. 19, 1919, p. 443-451).

c. Sur les polynomes hypergéométriques (*C. R. Acad. Sc.*, t. 172, 1921, p. 1282).

d. Sur certains polynomes orthogonaux (*C. R. Acad. Sc.*, t. 176, 1923, p. 1282).

57. Hurwitz (A.). — *a.* Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe (*Nachr. Gesell. Wiss. Göttingen*, 1890, p. 557-564).

b. Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe (*Math. Ann.*, t. 38, 1891, p. 452-458).

c. Ueber die imaginären Nullstellen der hypergeometrischen Funktion (*Nachr. Gesell. Wiss. Göttingen*, 1906, p. 275-277).

d. Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Funktion (*Math. Ann.*, t. 64, 1907, p. 517-560).

58. Ince (E. L.). — *a.* On certain theorems in continued fractions to Riemann's and other transformations of the P. functions (*Proc. Edinburgh Math. Soc.*, t. 32, 1913 1914).

b. On the continued fractions associated with the hypergeometric equation (*Proc. Edinburg Math. Soc.*, t. 34, 1915-1916, p. 146-154).

59. Jackson (F. H.). — *a.* Certain expansions of x^n in hypergeometric series (*Proc. Edinburgh Math. Soc.*, t. 95, 1897, p. 90-96).

b. Certain fundamental power series and their differential equations (*Trans. Royal Soc. Edinburgh*, t. 41, 1904, p. 1-28 et 29-38).

60. Jacobi (C. G. J.). — Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe (*Journ. reine angew. Math.*, t. 56, 1859, p. 149-165).

61. Jecklin (L.). — Historisch-kritische Untersuchung uber die Theorie der hypergeometrischen Reihe bis zu den Entdeckungen von E. E. Kummer (*Inaug. Diss. Bern.*, 1901-1902).

62. Johnson (W. W.). — On the second solution of the differential equation of the hypergeometric series and the series for K′, E′, etc., in elliptic functions (*Mess. Math.*, 2e série, t. 17, 1887, p. 35-50).

63. Jordan (C.). — *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. III (1887).

64. Kampé de Fériet (J.). — *a.* Sur les fonctions hypersphériques et sur l'expression de la fonction hypergéométrique par une dérivée généralisée (*Acta Mathem.*, t. 43, p. 197-207).

b. Sur une application des dérivées généralisées à la formation et à l'intégration de certaines équations différentielles linéaires (*C. R. Acad. Sc.*, t. 170, 1920, p. 569).

c. Sur l'emploi des dérivées généralisées pour la formation et l'intégration de certaines équations différentielles linéaires (*C. R. Acad. Sc.*, t. 170, 1920, p. 1045).

65. Klein (F.). — *a.* Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe (*Math. Ann.*, t. 37, 1890, p. 573-590).

b. Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe (*Nach. Gesell. Wiss. Göttingen*, 1890, p. 382).

c. Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe (*Verh. Gesell. Naturforscher, Bremen*, 1890, n° 4).

d. Ueber die Normirung der linearen Differentialgleichungen zweiten Ordnung (*Math. Ann.*, t. 38, 1891, p. 144-152).

e. Ueber die hypergeometrische Function (*Vorles. Wint. sem.*, 1893-1894).

f. Ueber lineare Differentialgleichungen der Zweiter Ordnung (*Vorles*, 1894).

66. Kokott (P.). — Ueber die conforme Abbildung der Polygone auf die positive Halbebene (*Prog. Matthias. Gymn., Breslau*, n° 168).

67. Kryloff (N.). — Sur les développements procédant suivant les polynomes hypergéométriques (*C. R. Acad. Sc.*, t. 150, 1910, p. 316).

68. KUMMER (E. E.). — *a.* De generali quadam acquatione differentiali tertii ordinis (1834) (*Journ. reine angew. Math.*, t. 100, 1886, p. 1-9).

b. Ueber die hypergeometrische Reihe $1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\ldots$ (*Journ. reine angew. Math.*, t. 15, 1836, p. 39-83 et 127-172).

c. De integralibus quibusdam definitis et seriebus infinitis (*Journ. reine angew. Math.*, t. 17, 1837, p. 228).

69. LACHTINE (L. K.). — Sur les équations algébriques vérifiées par la fonction hypergéométrique (russe) (*Soc. Math. russe, Moscou*, t. 16, 1893, p. 597-812 et t. 17, 1894, p. 1 216).

70. LANDAU (E.). — *a.* Eine Anwendung der Eisenstein'schen Satzes auf die Theorie der Gauss'schen Differentialgleichung (*Journ. reine angew. Math.*, t. 127, 1904, p. 92-102).

b. Ueber eine Zahlentheoretischen Satz und seine Anwendung auf die hypergeometrische Reihe (*Sitz. berich. Heidelberger Ak. Wiss.*, 1911, Abh. 18).

71. LINDNER (P.). — Ueber Differentiation mit komplexem Index und ihre Beziehungen zur hypergeometrischen Funktion (*Sitz. berich. math. Gesell., Berlin*, t. 7, 1908, p. 77-83).

72. LETTNIKOFF (A. W.). — Sur les intégrales définies qui vérifient l'équation, différentielle hypergéométrique (russe) (*Soc. Math. russe*, t. 11, 1884, p. 327-414).

73. LINDELÖF (E.). — Sur l'intégration de l'équation différentielle de Kummer (*Acta Soc. Sc. Fennicae*, t. 19, 1893).

74. MAC ROBERT (T. M.). — Relations between the integrals of the hypergeometric equation (*Proc. Edinburgh Math. Soc.*, t. 37, 1918-1919).

75. MARKOFF (A. A.). — *a.* Sur l'équation différentielle de la série hypergéométrique (*Math. Ann.*, t. 28, 1887, p. 247-258 et 586-593).

b. Sur l'équation différentielle de la série hypergéométrique (russe) (*Bul. Soc. Math. Kharkoff*, t. 2, 1887, p. 51-62 et 95-113).

c. Sur un polynome égal au produit de deux séries hypergéométriques (russe) (*Bul. Soc. Math. Kharkoff*, 2ᵉ série, t. 3, 1892, p. 252-254).

d. Sur la série hypergéométrique (*Math. Ann.*, t. 40, 1892, p. 313-316).

e. Sur la série hypergéométrique (*C. R. Acad. Sc.*, t. 114, 1892, p. 54).

f. Sur le polynome

$$x^n F\left(-\frac{n-\Delta}{2}, \frac{2x-n+1-\Delta}{2}, 1-\Delta, \frac{1}{x}\right)$$
$$\times F\left(-\frac{n+\Delta}{2}, \frac{2x-n+1+\Delta}{2}, 1+\Delta, \frac{1}{x}\right)$$

(russe) (*Mem. Saint-Pétersbourg*, 7ᵉ série, t. 41, 1893, nº 2).

76. MATHIEU (E.). — Sur l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction F $(\alpha, \beta, \gamma, x)$ de Gauss (*Journ. Math. pures appliq.*, 3ᵉ série, t. 8, 1882, p. 357-383).

77. MELLIN (Hj.). — *a.* Sur certaines intégrales définies propres à représenter

les fonctions hypergéométriques (finlandais) (*Acta Soc. Sc. Fennicae*, t. 20, 1895, nº 7).

b. Ueber die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorien der Gamma und hypergeometrischen Functionen (*Acta Soc. Sc. Fennicae*, t. 21, 1896, nº 1).

c. Ueber gewisse, durch bestimmte Integrale vermittelte Beziehungen zwischen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten (*Acta Soc. Sc. Fennicae*, t. 21, 1896, nº 6).

d. Grundzüge einer einheitlichen Theorie der Gamma und hypergeometrischen Funktionen (*Ann. Acad. Sc. Fennicae*, 1re série A., nº 3, 1909, p. 1-54).

e. Abriss einer einheitlichen Theorie der Gamma und hypergeometrischen Funktionen (*Math. Ann.*, t. 68, 1910, p. 305-337).

78. Michaelsen. — Der logarithmische Grenzfall der hypergeometrischen Differentialgleichungen (*Inaug. Diss. Kiel*, 1889).

79. de Montessus de Ballore (R.). — Recherche effective des racines réelles des séries hypergéométriques (*Bul. Soc. Math.*, t. 37, 1909, p. 101-108).

80. Muir (Th.). — Transformation of Gauss's hypergeometrical series into a continued fraction (*Proc. London Math. Soc.*, t. 7, 1876, p. 112-118).

81. Myller Lebedeff (Mme W.). — *a.* Die Theorie der Integralgleichungen in Anwendung auf einige Reihenentwicklungen (*Math. Ann.*, t. 64, 1907, p. 388-416).

b. Sur l'équation hypergéométrique (*C. R. Acad. Sc.*, t. 149, 1909, p. 561).

c. Orthogonale hypergeometrische Funktionen (*Math. Ann.*, t. 70, 1910, p. 87-93).

82. Nekrasov (P. A.). — *a.* Ueber lineare Differentialgleichungen, welche mittelst bestimmter Integrale integriert werden (*Math. Ann.*, t. 38, 1891, p. 508-560).

b. Les fonctions hypergéométriques et les classes d'équations différentielles non linéaires intégrables par ces fonctions (à propos d'une lettre de I. R. Brajcev) (*Matem. Sborn. Moskva*, t. 27, 1904, p. 515-522).

83. Nielsen (N.). — *a.* Sur les séries de fonctions sphériques et hypergéométriques (*Ann. Sc. Acad. Polytech., Porto*, t. 2, 1907, p. 5-18).

b. Théorie des fonctions métasphériques (Paris, 1911).

c. Sur une série de fonctions hypergéométriques (*Nieuw. Arch. Wisk., Amsterdam*, 2e série, t. 10, 1912, p. 223-232).

d. Recherches sur le développement d'une fonction analytique en série de fonctions hypergéométriques (*Ann. Sc. Éc. Norm.*, 3e série, t. 30, 1913, p. 121-171).

84. Nörlund (N. E.). — *a.* Fractions continues et différences réciproques (*Acta Mathem.*, t. 34, 1911, p. 1-108).

b. Sur une classe de fonctions hypergéométriques (*Bul. Acad. Danemark, Copenhague*, 1913).

c. Sur une classe d'intégrales définies (*Journ. Math. pures appliq.*, 6e série, t. 9, 1913, p. 77-88).

d. Sur les séries de facultés (*Acta Mathem.*, t. 37, 1914, p. 327-387).

e. Sur l'état actuel de la théorie des équations aux différences finies (*Bul. Sc. Math.*, 2e série, t. 44, 1920, p. 174-192 et 200-220).

f. Vorlesungen uber Differenzenrechnung (Berlin, 1924).

85. ORR (W. Ma. F.). — *a*. On divergent (or semi-convergent) hypergeometric series (*Trans. Cambridge Phil. Soc.*, t. 17, 1899, p. 171-199 et 283-290).

b. Theorems relating to the product of two hypergeometric series (*Trans. Cambridge Phil. Soc.*, t. 17, 1899, p. 1-15).

c. On divergent hypergeometric series (*Trans. Cambridge Phil. Soc.*, t. 19, 1900, p. 151-155).

86. PADÉ (H.). — *a*. Sur le développement en fraction continue de la fonction $F(h, 1, h', u)$ et la généralisation des fonctions sphériques (*C. R. Acad. Sc.*, t. 141, 1905, p. 819).

b. Sur la convergence des fractions continues régulières de la fonction $F(h, 1, h', u)$ et de ses dégénérescences (*C. R. Acad. Sc.*, t. 141, 1905, p. 997).

87. PAPPERITZ (E.). — *a*. Ueber verwandte s-Functionen (*Math. Ann.*, t. 25, 1885, p. 212-221 et t. 26, p. 97-105).

b. Zur algebraischen Transformation der hypergeometrischen Functionen (*Berich. Ver. Gesell. Wiss., Leipzig*, 1885, p. 60-69).

c. Untersuchungen über die algebraische Transformation der hypergeometrischen Functionen (*Math. Ann.*, t. 27, 1886, p. 315-357).

d. Ueber die historische Entwickelung der hypergeometrischen Functionen (*Gesell. Isis Dresden*, 1899, Abh. 4).

e. Ueber die Darstellung der hypergeometrischen Transcendenten durch eindeutige Functionen (*Math. Ann.*, t. 34, 1889, p. 247-296).

88. PEARSON (K.). — On certain propeities of the hypergeometrical series and on the fitting of such series to observation polygons in the theory of chance (*Phil. Mag.*, 5e série, t. 47, 1899, p. 236-246).

89. PÉPIN (Th.). — Méthode pour obtenir les intégrales algébriques des équations différentielles linéaires du deuxième ordre (*Atti. Acad. Pont, Nuovi Lincei*, t. 34, 1882, p. 243-389).

90. PERRON (O.). — Ueber das Verhalten der hypergeometrischen Reihe bei unbegrenztem Wachstum eines oder mehrerer Parameter (*Sitz. berich. Heidelberger Ak.*, 1916, n° 9, et 1917, n° 1).

91. PETR (K.). — Remarques sur les intégrales de l'équation hypergéométrique (tchèque) (*Čas. Math. Fys. Prag.*, t. 38, 1909, p. 294-306).

92. PETROVICH (M.). — Séries hypergéométriques (*C. R. Acad. Sc.*, t. 156, 1913, p. 1823).

93. PFAFF (J.). — Disquisitiones analyticae (Helmstadii, 1797).

94. PICK (G.). — *a*. Zur Theorie der hypergeometrischen Integrale am elliptischen Gebilde (*Mon. hefte Math. Wien*, t. 18, 1907, p. 317-320).

b. Zur hypergeometrischen Differentialgleichung (*Sitz. berich. math. nat. Clas. Ak. Wien*, Abt. II, t. 117, 1908, p. 103-109).

c. Ueber die Differentialgleichung der hypergeometrischen Funktion (*Atti IV Congr. Intern. Matem. Roma*, t. 2, 1909, p. 74).

95. Pincherle (S.). — *a.* Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate (*Rend. Ac. Lincei*, t. 4, 1888, p. 694-700 et 792-799).
b. Una nuova estensione delle funzioni sferiche (*Mem. Ac. Sc. Ist., Bologna*, 5e série, t. 1, 1891, p. 337-369).
c. Delle funzioni ipergeometriche et di varie questioni ad esse attinenti (*Giorn. mat. Bataglini*, t. 32, 1894, p. 209-291).

96. Pochhammer (L.). — *a.* Notiz über die Herleitung der hypergeometrischen Differentialgleichungen (*Journ. reine angew. Math.*, t. 73, 1871, p. 85).
b. Notiz über die Abbildung der Kreisbogenpolygone (*Journ. reine angew. Math.*, t. 76, 1873, p. 170-174).
c. Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf (*Math. Ann.*, t. 35, 1890, p. 470-494).
d. Zur Theorie der Eulers'chen Integrale (*Math. Ann.*, t. 35, 1890, p. 495-526).
e. Ueber eine Classe von Integral mit geschlossener Integrationscurve (*Math. Ann.*, t. 37, 1890, p. 500-511).

97. Poliakov (A. P.). — *a.* Sur l'inversion de la fonction hypergéométrique et sa réduction aux intégrales elliptiques (russe) (*Mat. Sborn. Moskva* t. 27, 1911, p. 424-432).
b. Sur la réduction de la fonction hypergéométrique aux intégrales, hyperelliptiques (russe) (*Mat. Sborn. Moskva*, t. 28, 1912, p. 235-265).

98. Porter (M. B.). — On the number of roots of the hypergeometric series between zero and one (*Proc. American Math. Soc.*, 2e série, t. 3, 1897, p. 274-278).

99. Possé (C.). — *a.* Sur certaines fonctions analogues à celles de Legendre (russe) (*Bul. Soc. Math. Kharkoff*, t. 2, 1885, p. 155-169).
b. Sur quelques applications des fractions continues algébriques (Saint-Pétersbourg, 1886).

100. Pringsheim (A.). — Ueber Konvergenz-kriterien für Reihen mit complexen Gliedern (*Archiv. Math. Phys.*, 3e série, t. 4, 1903, p. 1-19).

101. Radau (R.). — Sur une notation propre à représenter certains développements (*C. R. Acad. Sc.*, t. 98, 1884, p. 39).

102. Radicke (E. A.). — Ueber die mathematische. Darstellung der Riemann'schen P. Function (*Progr., Bromberg*, 1875).

103. Rajewski (J.). — Intégration de l'équation

$$(c_2 x^2 + b_2 x + a_2) y'' + (b_1 x + a_1) y' + a_0 y = 0$$

par la méthode de Laplace (polonais) (*Mém. Acad. Sc., Cracovie*, t. 9, 1884).

104. Riemann (B.). — *a.* Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, darstellbaren Functionen (1857) (*Gesammelte Werke*, 1876, p. 62).
b. Sullo svogilmento del quoziente di due serie ipergeometriche in frazione continua infinita (1863) (*Gesammelte Werke*, 1876, p. 400).

105. Ritter (E.). — Ueber die hypergeometrische Function mit einem Nebenpunkt (*Math. Ann.*, t. 48, 1896, p. 1-36).

106. RUTGERS (J. G.). — Bijtrage tot de theorie der faculteitenreeksen (*Nieuw. Archiv. Wisk., Amsterdam*, t. 8, 1907, p. 104-115).

107. SCHAEFFER. — Adnotationes ad seriem $1 + \frac{x}{y} v + \frac{x(x+1)}{y(y+1)} v^2 + \ldots$ (*Journ. reine angew. Math.*, t. 37, 1848, p. 127-160).

108. SCHAFHEITLIN (P.). — *a.* Ueber eine gewisse classe Klasse linearer Differentialgleichungen (*Inaug. Diss. Halle*, 1885).

b. Ueber die Darstellung der hypergeometrischen Reihe durch ein bestimmtes Integral (*Math. Ann.*, t. 30, 1887, p. 157 178).

c. Ueber die Gaussische und Besselsche Differentialgleichung und eine neue Integralform der Letzteren (*Journ. reine angew. Math.*, t. 114, 1894, p. 31).

d. Ueber die Producte der Lösungen homogener linearer Differentialgleichungen (*Progr. Sophien Real. Gym., Berlin*, n° 99, 1895).

e. Die Nullstellen der hypergeometrischen Funktion (*Sitz. berich. math. Gesell., Berlin*, t. 7, 1908, p. 19 28).

f. Bemerkung zu dem Vortrage; die Nullstellen der hypergeometrischen Funktion (*Sitz. berich. math. Gesell., Berlin*, t. 7, 1908, p. 88).

109. SCHELLENBERG (C.). — Neue Behandlung der hypergeometrischen Function auf Grund ihrer Definition durch das bestimmte Integral (*Diss. Göttingen*, 1892).

110. SCHENDEL (L.). — Ueber eine Kettenbruchentwickelung (*Journ. reine angew. Math.*, t. 80, 1875, p. 95).

111. SCHILLING (Fr.). — *a.* Beiträge zur geometrischen Theorie der Schwarz' schen s-Function (*Math. Ann.*, t. 44, 1894, p. 162-260).

b. Die geometrische Theorie der Schwarz' schen s-Function für complexe Exponenten (*Math. Ann.*, t. 46, 1895, p. 62-76 et 529-538).

c. Ueber Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt (*Jahr. berich. Deut. Mat. Ver.*, t. 5, 1897, p. 73).

d. Geometrisch-analytische Theorie der symmetrischen s-Functionen mit einem einfachen Nebenpunkt (*Nova Acta Leop Carol. Akad.*, t. 71, 1897, p. 207-300).

e. Ueber die Theorie der symmetrischen s-Functionen mit einem einfachen Nebenpunkt (*Math. Ann.*, t. 51, 1898, p. 481-522).

112. SCHLAFLI (L.). — *a.* Ueber die Gauss'sche hypergeometrische Reihe (*Math. Ann.*, t. 3, 1870, p. 286-295).

b. Ueber die allgemeine Möglichkeit der conformen Abbildung einer von geraden begrenzten ebenen Figur in eine Halbebene (*Journ. reine angew. Math.*, t. 78, 1873, p. 63).

113. SCHULZE. — Zur Geschichte der hypergeometrischen Reihe (*Mitt. Hamburger Math. Gesell.* n° 5, 1885, p. 110).

114. SCHWARZ (H. A.). — *a.* Ueber einige Abbildungsaufgaben (*Journ. reine angew. Math.*, t. 70, 1869, p. 105-121).

b. Ueber diejenigen Fälle in welchen die Gauss'sche hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres viertes Elementes darstellt (*Journ. reine angew. Math.*, t. 75, 1873, p. 292-335).

115. Sheppard (W. F.). — Summation of the coefficients of some terminating hypergeometric series (*Proc. London Math. Soc.*, 2e série, t. 10, 1912, p. 469-478).

116. Smith (O. A.). — Quelques remarques sur la fonction hypergéométrique (danois) (*Mat. Tids. Kobenhavn.*, t. 22, 1911, p. 29 32).

117. Steckloff (W.). — *a.* Sur le développement d'une fonction donnée en série procédant suivant les polynomes de Jacobi (*C. R. Acad. Sc.*, t. 136, 1903, p. 1230).

b. Sur le développement d'une fonction donnée en série suivant les polynomes de Tchebichef et en particulier suivant les polynomes de Jacobi (*Journ. reine angew. Math.*, t. 125, 1903, p. 207-236).

c. Sur une application de la théorie de fermeture au problème du développement d'une fonction arbitraire en série procédant suivant les polynomes de Tchebichef (*Bul. Acad. Sc., Saint Pétersbourg*, 6e série, t. 7, 1913, p. 87).

118. Stieltjes (T. J.). — *a.* Sur quelques théorèmes d'algèbre (*C. R. Acad. Sc.*, t. 100, 1885, p. 439).

b. Sur les polynomes de Jacobi (*C. R. Acad. Sc.*, t. 100, 1885, p. 620).

c. Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, t. 2, p. 132, 134, 142.

119. Stridsberg (E.). — *a.* Sur quelques propriétés arithmétiques de certaines fonctions transcendantes (*Acta Matem.*, t. 33, 1910, p. 233-292).

b. Sur le théorème d'Eisenstein et l'équation différentielle de Gauss (*Ark. Matem., Stockolm*, t. 6, no 35, 1911).

120. Spitzer (S.). — *a.* Note über die Differentialgleichung der hypergeometrichen Reihe (*Journ. reine angew. Math.*, t. 57, 1860, p. 78).

b. Note über lineare Differentialgleichungen (*Arch. Math. Phys.*, t. 65, 1880, p. 306 321).

121. Svanberg (A. F.). — Mémoire sur quelques intégrales définies (*Journ. reine angew. Math.*, t. 18, 1838, p. 55).

122. Tannery (J.). — Sur une équation différentielle linéaire du deuxième ordre (*Ann. Sc. Éc. Norm.*, 2e série, t. 8, 1879, p. 169-194).

123. Theisinger (L.). — Ueber einige Reihenentwickelungen der hypergeometrischen Funktion (*Arch. Math. Phys.*, 3e série, t. 24, 1915, p. 131-138).

124. Thomae (J.). — *a.* Beitrag zur Theorie der Funktion $P\begin{pmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma \\ \alpha'\,\beta'\,\gamma' \end{pmatrix} x$ (*Zeit. Math. Phys.*, t. 14, 1869, p. 48-61).

b. Integration der Differenzengleichung

$$(n+k+1)(n+\lambda+1)\Delta^2\varphi(n)+(a+bn)\Delta\varphi(n)+c\varphi(n)=0$$

(*Zeit. Math. Phys.*, t. 16, 1871, p. 146-158 et 428-439).

c. Elementare Behandlung der hypergeometrischen Reihe (*Zeit. Math. Phys.*, t. 26, 1881, p. 314 333).

d. Elementare Behandlung der hypergeometrischen Reihe (*Zeit. Math. Phys.*, t. 27, 1882, p. 41-56).

e. Bemerkungen über die Gauss'sche Reihe (*Nachr. Gesell. Wis., Göttingen*, 1884, p. 493).

f. Ueber eine Gaussische Reihe in verschiedenen Theilen ihres Convergenzgebietes (*Nachr. Gesell. Wis., Göttingen*, 1904, p. 465).

125. Thomé (L. W.). — *a.* Ueber die Kettenbruchentwickelung der Gauss'schen Function $F\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{1}{x}\right)$ (*Journ. reine angew. Math.*, t. 66, 1866, p. 322-336).

b. Ueber die Kettenbruchentwickelung der Gauss'schen Quotienten

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1\, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$$

(*Journ. reine angew. Math.*, t. 67, 1867, p. 299-309).

c. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen (*Journ. angew. Math.*, t. 87, 1879, p. 222-349).

126. Tichomandritzky (M.). — Sur les séries hypergéométriques (russe) (*Thèse Saint-Pétersbourg*, 1876).

127. Torelli (G.). — Su qualche proprieta degli integrali definiti trinomii che soddisfano all'equazione differenziale lineare di 2° ordine illustrata da Gauss (*Mém. Soc. Italiana Sc.*, 3e série, t. 7, 1889).

128. Van Vleck (E. B.). — *a.* On the roots of Bessel and P. functions (*American Journ. Math.*, t. 19, 1897, p. 75-85).

b. On the convergence of the continued fraction of Gauss and other continued fractions (*Ann. Math. Cambridge*, 2e série, t. 3, 1901, p. 1-18).

c. Determination of the nomber of real and imaginary roots of the hypergeometric series (*Trans. American Math. Soc.*, t. 3, 1902, p. 110-131).

129. Wallis (J.). — Opera Mathematica I. (Oxoniae, 1695).

130. Watson (G. N.). — *a.* The Expansions of products of hypergeometric functions (*Quart. Journ. Math.*, t. 39, 1907, p. 27-51).

b. A series for the square of the hypergeometric function (*Quart. Journ. Math.*, t. 40, 1908, p. 46-57).

c. The cubic transformation of the hypergeometric function (*Quart. Journ. Math.*, t. 41, 1909, p. 70-79).

d. Asymptotic expansions of hypergeometric functions (*Cambridge Phil. Trans.*, t. 22, 1918, p. 277-308).

131. Weierstrass (K.). — Ueber die Theorie der analytischen Facultäten (*Journ. reine angew. Math.*, t. 51, 1855, p. 1-60).

132. Winston (M.). — Eine Bemerkung zur Theorie der hypergeometrischen Function (*Math. Ann.*, t. 46, 1895, p. 159).

133. Winter (A.). — Ueber die logarithmischen Grenzfälle der hypergeometrischen Differentialgleichungen mit zwei endlichen singulären Punkten (*Diss. Kiel.*, 1905).

134. Wirtinger (W.). — *a.* Zur Darstellung der hypergeometrischen Function durch bestimmte Integrale (*Sitz. berich. math. natur. Clas. Ak. Wis. Wien.*, Abt. II *a*, t. 111, 1902, p. 894-900).

b. Eine neue Verallgemeinerung der hypergeometrischen Integrale (*Sitz. berich. math. natur. Clas. Ak. Wis. Wien.*, t. 112, 1903, p. 1721-1733).

c. Riemann Vorlesungen über die hypergeometrische Reihe und ihre Bedeutung (*Verh. intern. Math. Kongr., Leipzig*, t. 3, 1904, p. 121-139).

135. Wolstenholme (J.). — On the summation of certain series (*Proc. London Math. Soc.*, t. 4, 1873, p. 283 287).

TABLE DES MATIÈRES.