MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

GUSTAVE JUVET

Mécanique analytique et mécanique ondulatoire

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 83 (1937)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1937__83__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADEMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT
Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées »

FASCICULE LXXXIII

Mécanique analytique et mécanique ondulatoire

Par M. Gustave JUVET
Professeur à l'Université de Lausanne

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1937

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

MÉCANIQUE ANALYTIQUE

ET

MÉCANIQUE ONDULATOIRE

Par M. Gustave JUVET,

Professeur à l'Université de Lausanne.

INTRODUCTION.

La Mécanique ondulatoire créée par MM. L. de Broglie et E. Schrödinger a des racines profondes dans la Mécanique analytique classique. Ses géniaux fondateurs ont montré comment leurs nouvelles conceptions s'apparentent aux idées esquissées il y a un siècle par Hamilton [27, 28]. Interprétant le principe d'Hamilton et celui de Maupertuis, ils ont montré comment la notion d'onde peut être juxtaposée, en Mécanique classique, à celle de trajectoire. L'avance prodigieuse de ces découvreurs dans les nouveaux pays qu'ils ont acquis à la science, les a éloignés considérablement des principes qui avaient guidé leurs premières tentatives. La Mécanique ondulatoire a pris un aspect si différent de celui qu'avait la Mécanique analytique que, malgré les exposés qu'on en a donnés pour faire voir la solidarité de la théorie de Jacobi-Hamilton avec celle des ondes de de Broglie et de l'équation de Schrödinger, et nous pensons ici à la belle *Introduction à l'étude de la Mécanique ondulatoire* de M. L. de Broglie lui-même, le néophyte sera toujours plus frappé par les différences que par les ressemblances et il sera plus séduit par les succès des nouvelles théories en physique quantique que par leurs glorieuses origines.

Cependant, si l'on utilise, avec les travaux d'Hamilton, ceux de Delassus, de Beudon et de M. Hadamard sur les caractéristiques des équations aux dérivées partielles du second ordre, on peut montrer, qu'avant même la naissance de la physique quantique, il eût été possible, à un esprit subtil, ami des belles formes mathématiques, de créer, nous ne disons pas la Mécanique ondulatoire, mais un cadre dans lequel il eût été ensuite naturel de placer le principe de quantum et les ondes de de Broglie.

Il est facile, dira-t-on, de prophétiser après coup. La tentation est cependant bien forte de montrer derrière la discontinuité des démarches du génie, la continuité des efforts d'un esprit immanent au monde savant.

Et même si l'on nie cette continuité, si l'on ne veut voir dans cette conception de l'histoire qu'une manifestation d'une espèce d'esprit d'escalier, il faut bien qu'on reconnaisse l'utilité — disons pédagogique — des tentations qui ont pour but de rechercher cette continuité. A dire le vrai, l'origine de ce fascicule est précisément un cours de physique mathématique dans lequel nous avons cherché à montrer, à des auditeurs qui étaient très au fait de la Mécanique analytique et de l'Optique physique, comment il était possible d'arriver sans heurt au seuil même de la nouvelle Mécanique. Nous nous rappelons le bel essai où M. Levi-Civita avait fait voir naguère [21] comment on peut passer, par des approximations élégamment arrangées, de la Mécanique de Newton à celle d'Einstein. Inspiré par cet exemple, nous avons cherché, à notre tour, à faire voir comment il est possible de passer, sans sortir des voies anciennement connues de la Mécanique analytique, à la brillante et audacieuse Mécanique ondulatoire.

C'est à M. Vessiot que l'on doit un exposé parfaitement rigoureux et élégant de l'interprétation de la théorie de Jacobi-Hamilton par le moyen des concepts de la théorie des ondes. Nous suivrons, dans les deux premiers chapitres, les deux Mémoires [39, 40] écrits en 1906 et 1909 par M. Vessiot et tout particulièrement le second dont nous donnons un résumé assez étendu. Le principe des ondes enveloppes y est exposé avec une rigueur qu'on ne trouve guère dans les traités de physique et son importance pour l'intégration des équations aux dérivées partielles y est mise en pleine lumière. Nous avons laissé de côté, comme peu utile pour notre but, les conséquences relatives aux principes de moindre action, tirées par l'auteur de ses principes; mais si nous en avions eu la place, il eût été facile de montrer en passant la parenté du principe de Fermat et du principe de Maupertuis. Nous insistons davantage sur le problème des géodésiques dont l'importance est grande pour la gravitation et nous rappelons la forme jacobienne des équations du mouvement de l'électron.

Le troisième chapitre est relatif aux découvertes de Beudon, Delassus et M. Hadamard sur les équations aux dérivées partielles de second ordre. Nous introduisons la notion de caractéristique, celle de bicaractéristique et nous montrons que les caractéristiques définissent les surfaces d'égale phase dans une propagation d'ondes périodiques dont la fréquence est infinie.

Ayant ainsi, d'une part, attaché selon M. Vessiot, une propagation d'ondes à tout mouvement défini par la dynamique analytique, et, d'autre part, selon M. Hadamard, attaché des trajectoires, à l'approximation, dite de l'optique géométrique, aux équations aux dérivées partielles du second ordre, il était loisible de faire une synthèse ondulatoire de la Mécanique et nous avons rappelé à ce propos quelques tentatives pour fonder dans une théorie unitaire l'électromagnétisme et la gravitation et par surcroît celle des ondes matérielles. Nous avons vite abandonné ces spéculations pour exploiter, par l'idée de périodicité, la théorie de M. Hadamard; grâce à l'équation du second ordre la plus simple que l'on puisse attacher au mouvement d'un électron dans un champ électromagnétique, nous avons pu faire voir, d'une part, comment la notion de probabilité peut s'introduire dans ces théories classiques, grâce à l'idée due à M. L. de Broglie, d'un fluide fictif défini par une *classe* de mouvements et d'autre part comment, sans heurt, l'introduction de la constante de Planck relie la fréquence hypothétique des ondes matérielles à l'énergie bien réelle des particules par le principe de de Broglie. Enfin le rappel de la notion de *vitesse de groupe* fait voir que des ondes dispersées transportent de l'énergie à une vitesse qui n'est pas celle de leurs phases, mais précisément à une vitesse égale à celle du point matériel au mouvement duquel elles sont attachées. Ainsi se terminent les dernières ramifications où un historien un peu habile ou un pédagogue subtil peuvent apercevoir l'une des racines maîtresses de la Mécanique analytique, se mêlant et peut-être s'anastomosant à celles de la nouvelle Mécanique.

CHAPITRE I.

LA PROPAGATION DES ONDES ET L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE [1].

Principe des ondes enveloppes.

1. Soit un espace euclidien E_n, ensemble des points $P(x_1, \ldots, x_n)$, ou $P(x)$ plus simplement, rapporté à un système d'axes rectangulaires. E_n est un *milieu* dans lequel certains ébranlements se propagent par ondes. Cela signifie que les points de E_n peuvent acquérir instantanément une propriété; si cette propriété s'est manifestée, à l'instant t, en tous les points d'une multiplicité $\mathcal{M}$, elle cessera, aux instants suivants, d'appartenir aux points de $\mathcal{M}$, et se manifestera, en $t + \Delta t$, aux points d'une autre multiplicité $\mathcal{M}'$. L'apparition de la propriété en un point (x) s'appelle un *ébranlement*; toute multiplicité, lieu de points ébranlés à un même instant, est une *onde*.

Nous posons le principe suivant :

La multiplicité $\mathcal{M}'$ est déterminée par la nature du milieu (relative à la propriété considérée), par l'instant t, par l'intervalle Δt et par la multiplicité $\mathcal{M}$.

2. On définit la *nature* du milieu en se donnant le système des *ondes dérivées* (ou des ondes élémentaires) qui ont pour origines les divers points du milieu à l'instant t. Soit $P(x)$ le seul point ébranlé à l'instant t, en $t + \Delta t$, le lieu des points ébranlés est une multiplicité $M(x/t, \Delta t)$ dont on dit que P est l'*origine*, ou qu'elle est *issue* de P; on en prend l'homothétique relativement à P, dans le rapport $\frac{1}{\Delta t}$, et l'on fait tendre Δt vers zéro. La multiplicité limite, si elle existe — ce que nous supposons être le cas — est justement l'*onde dérivée* qui a P pour origine, à l'instant t.

---

[1] Pour un exposé des divers aspects de la notion d'onde, on se reportera à l'excellent article de MM. Levi-Civita et Amaldi [20] à l'amabilité desquels je dois d'en avoir eu la primeur en épreuves.

L'homothétique de l'onde dérivée, relativement à P, dans le rapport dt est l'*onde élémentaire*, ayant P comme origine, et correspondant à l'instant t.

En général le système des ondes dérivées dépend de t (*régime variable*); mais il peut arriver qu'il en soit indépendant (*régime permanent*).

Nous supposerons, ce qui est le cas le plus fréquent dans les applications, que chaque onde dérivée a ∞^{n-1} points.

3. La propagation est régie par la loi suivante, dite des ondes enveloppes :

Soit $\mathcal{M}$ une onde quelconque, à l'instant t; soit $\mathcal{M}'$ l'onde qui en provient à l'instant $t+dt$. Chacun des points $P(x)$ de $\mathcal{M}$, s'il était ébranlé seul à l'instant t, aurait émis, au bout du temps dt, une onde élémentaire $M(x/t, dt)$; l'enveloppe $\mathcal{M}''$ de toutes les ondes élémentaires, issues à l'instant t de tous les points de $\mathcal{M}$ représente $\mathcal{M}'$, aux infiniment petits près d'ordre supérieur à l'ordre de dt, considéré comme l'infiniment petit principal.

Nous n'insisterons pas sur la différence entre $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$, ni sur la non-contradiction du principe des ondes enveloppes. On peut établir en toute rigueur, comme M. Vessiot le fait, que la représentation de $\mathcal{M}'$ par $\mathcal{M}''$ est une véritable identification qui n'implique pas contradiction. Un lecteur averti lira cela derrière les calculs qui suivent.

4. Soit [1]

$$u_i \xi_i - 1 = 0$$

l'équation d'un plan rapporté à un système d'axes rectangulaires ayant $P(x)$ comme origine et parallèles aux axes de E_n. Les ξ_i sont les coordonnées ponctuelles courantes.

L'équation

$$H(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid u_1, \ldots, u_n) = 0$$

ou

$$H(t \mid x \mid u) = 0$$

[1] Lorsque deux indices sont égaux dans un monome, on doit entendre qu'il faut sommer de 1 à n par rapport à cet indice commun, sauf mention expresse du contraire.

est l'équation tangentielle de l'onde dérivée issue de $P(x)$, rapportée précisément au système d'axes ayant P comme origine.

Le plan tangent à l'onde élémentaire est

$$u_i \xi_i - dt = 0$$

et par suite l'équation tangentielle de l'onde élémentaire est

$$H(t \mid x \mid u\, dt) = 0.$$

En prenant des coordonnées homogènes $U_1, U_2, \ldots, U_n, U_{n+1}$, telles que

$$u_i = \frac{U_i}{U_{n+1}},$$

l'équation tangentielle, une fois posée $U_{n+1} = 1$, et de nouveau $U_i = u_i$, s'écrira

$$\pi(t \mid x \mid u) = 1;$$

π est homogène de degré 1 en les u_i, ce qui revient à définir cette fonction par l'identité

$$H\left(t \mid x \mid \frac{u}{\pi}\right) = 0.$$

L'onde élémentaire aura pour équation

$$\pi(t \mid x \mid u)\, dt = 1.$$

Les coordonnées du point de contact du plan $p(u)$ avec l'onde dérivée sont

$$\xi_i = \frac{\partial \pi}{\partial u_i}$$

et avec l'onde élémentaire

$$\xi_i = \frac{\partial \pi}{\partial u_i}\, dt;$$

les rapports des u_i entrent seuls dans ces expressions, car elles sont de degré zéro en les u_i; elles donnent donc les coordonnées du point de contact d'un plan tangent parallèle à un plan donné. Il y a, en général, plusieurs fonctions π, elles représentent les diverses nappes de l'onde dérivée, séparées de manière que chacune d'elles n'ait qu'un plan tangent parallèle à un plan donné.

Rapportées au système d'axes primitif, les coordonnées du point de contact du plan tangent à l'onde élémentaire sont

$$X_i = x_i + \frac{\partial \pi(t \mid x \mid q)}{\partial q_i} dt,$$

l'équation de ce plan tangent étant

$$u_i(X_i - x_i) - 1 = 0$$

ou

$$q_i X_i - 1 = 0$$

et l'on voit que l'équation tangentielle de l'onde élémentaire est

$$(1) \qquad \pi(t \mid x \mid q)\, dt + q_i x_i = 1.$$

5. Il faut chercher l'enveloppe de toutes les ondes élémentaires représentées par cette dernière équation lorsque $P(x)$ décrit $\mathfrak{M}$. Soient $p_1, \ldots . p_n$ les paramètres directeurs de la normale au plan tangent à $\mathfrak{M}$ en P; pour un déplacement $\overrightarrow{\delta P}$ sur $\mathfrak{M}$, on a

$$p_i\, \delta x_i = 0,$$

mais, on aura aussi

$$\frac{\partial \pi(t \mid x \mid q)}{\partial x_i} \delta x_i\, dt + q_i\, \delta x_i = 0$$

et cette équation doit être une conséquence de la précédente pour tous les δx_i qui y satisfont. Donc

$$\frac{\partial \pi(t \mid x \mid q)}{\partial x_i} dt + q_i = m p_i,$$

m étant un facteur qui se détermine en tenant compte de (1).

Il est facile dès lors de voir que parmi les éléments de contact communs à l'onde élémentaire (1) et à toutes les ondes infiniment voisines, il y en a un et un seul qui tend, lorsque dt tend vers zéro, vers l'élément de contact $(x_1, \ldots, x_n / p_1, \ldots, p_n)$ de l'onde $\mathfrak{M}$.

Si l'on astreint les p_i qui sont définis par leurs rapports, à vérifier l'équation

$$(2) \qquad \pi(t \mid x \mid p) = 1,$$

ils seront parfaitement définis. Si (x'/p') sont les coordonnées de l'élément de contact qui tend vers (x/p) lorsque dt tend vers zéro, on posera encore pour définir les p' :

$$\pi(t' \mid x' \mid p') = 1$$

et si l'on désigne par dx_i la partie principale de $x'_i - x_i$, par dp_i celle de $p'_i - p_i$, il est facile de voir que

$$dx_i = \frac{\partial \pi(t \mid x \mid p)}{\partial p_i} dt,$$

$$dp_i = -\frac{\partial \pi(t \mid x \mid p)}{\partial x_i} dt + p_i \, d\mu,$$

$d\mu$ étant un infiniment petit, qui se détermine en tenant compte de ce que

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} dt + \frac{\partial \pi}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \pi}{\partial p_i} dp_i = 0;$$

on trouve

$$d\mu = -\frac{\partial \pi}{\partial t} dt.$$

Dès lors :

A chaque élément de contact (x/p) d'une onde $\mathfrak{M}$, considérée à l'instant t, correspond sur l'onde infiniment voisine qui en résulte au bout du temps dt, un nouvel élément de contact, qui est donné, aux infiniment petits près du second ordre, par les formules :

$$(3) \qquad dx_i = \frac{\partial \pi(t \mid x \mid p)}{\partial p_i} dt,$$

$$(4) \qquad dp_i = -\left[\frac{\partial \pi(t \mid x \mid p)}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \pi(t \mid x \mid p)}{\partial t}\right] dt,$$

en supposant qu'on ait toujours

$$\pi(t \mid x \mid p) = 1.$$

Si l'on revient à l'équation non-homogène

$$H(t \mid x \mid p) = 0,$$

on aura, en posant

$$w_i = \frac{p_i}{\pi},$$

les identités

$$\frac{\partial H(t \mid x \mid w)}{\partial t} - \frac{w_i}{\pi} \frac{\partial H(t \mid x \mid w)}{\partial w_i} \frac{\partial \pi}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial H(t \mid x \mid w)}{\partial x_k} - \frac{w_i}{\pi} \frac{\partial H(t \mid x \mid w)}{\partial w_i} \frac{\partial \pi}{\partial x_k} = 0,$$

$$\frac{\partial H(t \mid x \mid w)}{\partial w_k} - w_i \frac{\partial H(t \mid x \mid w)}{\partial w_i} \frac{\partial \pi}{\partial p_k} = 0$$

qui se réduisent, si

$$\pi(t \mid x \mid p) = 1$$

à des formes simples que nous n'écrirons pas, et les équations qui définissent les dx_i et les dp_i prennent la forme

$$(3'), (4') \qquad \frac{dx_i}{\dfrac{\partial H}{dp_i}} \overset{(1)}{=} \frac{dp_i}{-\left(\dfrac{\partial H}{\partial x_i} + p_i \dfrac{\partial H}{\partial t}\right)} \overset{(1)}{=} \frac{dt}{\displaystyle\sum_1^n p_k \frac{\partial H}{\partial p_k}}.$$

Intégration. Théorie des caractéristiques.

6. Connaissant une onde origine $\mathfrak{M}_0$, donnée à l'instant t_0, trouver l'onde $\mathfrak{M}$ qui en résulte à l'instant t. Tel est le problème général de la propagation par ondes. On imagine que $\mathfrak{M}$ se déduit de $\mathfrak{M}_0$ par l'intégration des équations différentielles obtenues plus haut, la donnée $\mathfrak{M}_0$ définissant les conditions initiales. Ce qui rend l'intégration un peu compliquée, c'est que les équations différentielles (3) et (4) sont accompagnées de l'équation (2).

On voit immédiatement que si (2) est vérifiée par les conditions initiales, on aura toujours $\pi(t \mid x \mid p) = 1$, en vertu des équations différentielles elles-mêmes pour chaque instant t, car

$$\begin{aligned} d(\pi - 1) &= \frac{\partial \pi}{\partial t}\, dt + \frac{\partial \pi}{\partial x_i}\, dx_i + \frac{\partial \pi}{\partial p_i}\, dp_i \\ &= \frac{\partial \pi}{\partial t}\left(1 - p_i \frac{\partial \pi}{\partial p_i}\right) dt \\ &= \frac{\partial \pi}{\partial t}(1 - \pi)\, dt. \end{aligned}$$

Dès lors, la fonction $\pi - 1$ satisfait à l'équation homogène

$$\frac{d(\pi - 1)}{dt} + \pi_1(\pi - 1) = 0 \qquad \left(\pi_1 = \frac{\partial \pi}{\partial t}\right)$$

et l'on voit que, si $(\pi - 1)_0 = 0$, on aura toujours $\pi - 1 = 0$ quel que soit t.

L'équation

$$\pi(t \mid x \mid p) = 1$$

(1) Ne pas sommer.

est invariante par la transformation

$$x_i = A_i(t \mid x^0 \mid p^0 \mid t_0), \tag{5}$$

$$p_i = B_i(t \mid x^0 \mid p^0 \mid t_0) \tag{6}$$

qui définit l'intégrale générale de (3) et (4), c'est-à-dire l'intégrale qui, pour $t = t_0$, se réduit à

$$x_i = x_i^0, \qquad p_i = p_i^0.$$

Remarquons, en passant. que les fonctions A_i et les rapports des fonctions B_i sont homogènes de degré zéro par rapport à $p_1^0, \ldots, p_n^0$. On le démontre en substituant dans (3) et (4), A_i à x_i et mB_i à p_i; on voit d'abord que

$$dm = m(1 - m)\pi_1 \, dt.$$

On détermine l'intégrale M de cette équation qui se réduit pour $t = t_0$, à la constante m_0. Les fonctions

$$x_i = A_i, \qquad p_i = MB_i$$

constituent la solution de (3) et (5) qui est définie par les conditions initiales

$$x_i = x_i^0. \qquad p_i = m_0 p_i^0;$$

mais cette solution est évidemment donnée par les équations

$$x_i = A_i(t \mid x^0 \mid m_0 p^0 \mid t_0),$$
$$p_i = B_i(t \mid x^0 \mid m_0 p^0 \mid t_0),$$

donc

$$A_i(t \mid x^0 \mid p^0 \mid t_0) = A_i(t \mid x^0 \mid m_0 p^0 \mid t_0),$$
$$MB_i(t \mid x^0 \mid p_0 \mid t_0) = B_i(t \mid x^0 \mid m_0 p^0 \mid t_0),$$

ce qui démontre notre assertion.

7. Les x_i^0 et les p_i^0 constituent la multiplicité $\mathfrak{M}_0$; montrons que les formules (5), (6) qui définissent l'intégrale de (3). (4) définissent à chaque instant une multiplicité $\mathfrak{M}$. Il suffit de démontrer que l'équation

$$p_i \, \delta x_i = 0$$

est invariante par la transformation (5), (6), δ étant un symbole de différentiation indépendante de d, en particulier $d\delta x_i = \delta d x_i$.

On voit immédiatement que

$$\frac{d}{dt}(p_i\,\delta x_i) + \pi_1(p_i\,\delta x_i) = 0,$$

en vertu des équations différentielles (3) et (4) elles-mêmes. Si donc les x_i^0 et les p_i^0 sont des fonctions de $n-1$ paramètres $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ vérifiant la relation

$$p_i^0\,\delta x_i^0 = 0,$$

les fonctions

$$x_i = A_i, \qquad p_i = B_i$$

seront des fonctions des mêmes paramètres vérifiant la relation

$$p_i\,\delta x_i = 0,$$

où δ est un symbole de différentiation provenant des variations des α seulement.

La transformation (5) et (6) où t et t_0 sont des constantes arbitraires change toute multiplicité en une multiplicité. C'est une *transformation de contact.*

7. On appelle *trajectoire* ou *rayon* le lieu des points dont les coordonnées sont

$$x_i = A_i(t \mid x_1^0, \ldots, x_n^0 \mid p_1^0, \ldots, p_n^0 \mid t_0),$$

lorsque t varie seul, les grandeurs x_i^0, p_i^0, t_0 étant constantes. A chaque point de la trajectoire correspond un instant t, mais ce point n'est considéré qu'à l'instant qui lui correspond.

Par chaque point de la trajectoire passe un élément de contact défini par les équations

$$p_i = B_i(t \mid x_1^0, \ldots, x_n^0 \mid p_1^0, \ldots, p_n^0 \mid t_0);$$

on a d'ailleurs

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \pi}{\partial p_i},$$

ce qui montre que le point $P(x)$ d'une trajectoire, qui existe à l'instant t, est, à cet instant, l'origine d'une onde dérivée, et la direction de la trajectoire en $P(x)$ est celle qui va de P au point de contact du plan tangent à l'onde dérivée qui est parallèle à l'élément de contact porté par le point $P(x)$ de la trajectoire, à l'instant t.

L'ensemble d'une trajectoire et des éléments de contact ainsi portés par ses points est une *caractéristique*. Les équations (5) et (6), où t varie seul, définissent une caractéristique.

On comprendra aisément dès lors l'énoncé suivant :

Une multiplicité M à un instant t résulte du transport simultané des éléments de contact d'une multiplicité $\mathfrak{M}_0$ donnée à l'instant t_0. Ce transport est défini spatialement et temporellement par les caractéristiques qui ont pour éléments, à l'instant t_0. les éléments de contact de $\mathfrak{M}_0$.

8. La famille des multiplicités $\mathfrak{M}'$ qui résulte de la multiplicité $\mathfrak{M}_0$, par le transport au moyen des caractéristiques, et la famille des ondes $\mathfrak{M}'$ issues, dans le mode de propagation envisagé, de $\mathfrak{M}_0$ sont telles que l'on passe, dans chaque famille, d'une multiplicité à la multiplicité infiniment voisine grâce à la variation définie aux équations (3) et (4), (2) étant toujours satisfaite, et l'on voit ainsi que le principe des ondes enveloppes n'implique pas contradiction; — il reste à prouver que ces deux familles sont identiques.

On va démontrer ce fait en remarquant que la famille des $\mathfrak{M}'$ est la seule qui soit définie par la variation (3) et (4), (2) étant satisfaite. Imaginons, en effet, qu'une famille de multiplicités soit définie par l'équation

$$F(x_1, \ldots, x_n) = t, \tag{7}$$

t étant le paramètre variable d'une multiplicité à l'autre. Soit

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = P_i$$

et

$$\pi(F \mid x_1, \ldots, x_n \mid P_1, \ldots, P_n) = \bar{\pi}.$$

Posons, pour un élément de contact de (7),

$$p_i = \frac{P_i}{\bar{\pi}}, \tag{8}$$

(2) sera vérifiée par ces valeurs. De plus, on tire de (7), en tenant compte de (3)

$$dt = P_i\, dx_i = P_i \frac{\partial \pi}{\partial p_i} dt = P_i \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial P_i} dt = \bar{\pi}\, dt,$$

car les dérivées $\frac{\partial \pi}{\partial p_i}$ ne dépendent que du rapport des p_i, qui est celui des P_i, et par conséquent, elles sont égales aux dérivées $\frac{\partial \pi}{\partial P_i}$: de plus $\bar{\pi}$ est homogène de degré 1 en les P_i. On voit donc que

$$\bar{\pi} = 1. \tag{9}$$

Par suite

$$p_i = P_i.$$

On trouve, en vertu de (4),

$$dP_i = -\left(\frac{\partial \pi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \pi}{\partial t}\right) dt = -\left(\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_i} + P_i \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial F}\right) dt$$

ou

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} dx_k + \left(\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial x_i}\right) dt = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0.$$

Or ces équations écrites en tenant compte de (3) et (4) résultent de (9) par différentiation relativement à x_i. On a ainsi démontré que les relations (3) et (4) résultent de la différentiation de (7) et de (8).

La famille (7) satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\pi\left(F \mid x_1, \ldots, x_n \mid \frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) = 1, \tag{10}$$

qui n'est que l'équation (2) où l'on a posé

$$p_i = \frac{\partial t}{\partial x_i}.$$

Comme l'équation aux dérivées partielles du premier ordre la plus générale

$$H(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) = 0 \qquad \left(p_i = \frac{\partial t}{\partial x_i}\right) \tag{11}$$

se ramène à la forme (10), on voit que la théorie des caractéristiques permet de construire, en intégrant (3) et (4), ou (3'), (4'), une solution de (11) prenant la valeur donnée t_0 en tous les points d'une multiplicité $\mathfrak{M}_0$ arbitrairement choisie.

Qu'il n'y en ait qu'une, c'est ce qui résulte de l'analyse suivante.

Soit la famille $\mathfrak{M}$ définie par (7) satisfaisant à (9) où $P_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$. Par chaque point $P(x)$ de E_n, passe une $\mathfrak{M}$ et une seule à laquelle correspond une valeur de t. Construisons l'onde dérivée issue de P à cet instant, menons le plan qui lui est tangent et qui est parallèle au plan tangent en P à $\mathfrak{M}$ et menons la droite qui joint P au point de contact Q. En chaque point de E_n on a une direction D; il existe une famille de courbes tangentes en chacun de leurs points à la direction correspondante. A chaque point correspond aussi une valeur de t et un élément de contact, celui de la multiplicité $\mathfrak{M}$ qui y passe, je dis que, par là, on a défini des caractéristiques et ainsi toute famille (7) satisfaisant à (9) est fournie par la construction du paragraphe 6.

Les courbes dont il vient de s'agir sont en effet des courbes intégrales du système

$$dx_i = \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial P_i} dt$$

et l'on en tire en vertu de (8)

$$dF = P_i\, dx_i = \bar{\pi}\, dt = dt,$$

d'où (7), pourvu que $x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0$, satisfassent à (7).

Les éléments de contact sont définis par les équations

$$p_i = P_i. \tag{12}$$

je dis qu'elles entraînent les équations (4) c'est-à-dire qu'on doit avoir en vertu de (7), (9), des équations

$$P_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

et de (12)

$$dP_i = -\left(\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_i} + P_i \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial F}\right) dt$$

ou

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_k}\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial P_k} + \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_i} + P_i \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial F} = 0$$

ou encore

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial x_i} = 0,$$

car

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_k} = \frac{\partial P_k}{\partial x_i}.$$

Mais cela résulte de (9) par dérivation relativement à x_i, et (9) est identiquement vérifiée par hypothèse.

Toute solution de (9) prenant la valeur t_0, aux divers points d'une $\mathfrak{M}_0$, s'obtient par la construction du paragraphe **6** au moyen des caractéristiques; il n'y a par suite qu'une seule solution satisfaisant à cette condition initiale.

A toute équation aux dérivées partielles du premier ordre correspond une propagation d'ondes et réciproquement.

Théorème de Jacobi.

9. Théorème de Jacobi. — Si l'on remarque que la transformation (5), (6) opère sur l'élément de contact (x^0/p^0) sans qu'on ait à préciser qu'il appartient à $\mathfrak{M}_0$, on peut affirmer alors que si deux ondes origines ont un élément de contact commun, les ondes qui en proviennent à un instant quelconque ont aussi un élément de contact commun, qui est le transformé du précédent, et, dès lors, on voit sans peine que le principe des ondes enveloppes est rigoureusement vérifié pour une variation finie du temps. L'onde $\mathfrak{M}$, au temps t, est donc l'enveloppe des ondes émises en t_0, et considérées à l'instant t, par tous les points de $\mathfrak{M}_0$; si donc on connaît ces dernières, on peut sans intégration connaître $\mathfrak{M}$.

Il y a plus. Imaginons que l'on connaisse la propagation de ∞^n ondes origines quelconques; ce sera évidemment par la donnée d'une intégrale

$$t = G(x_1, \ldots, x_n \mid a_1, \ldots, a_n)$$

de l'équation aux dérivées partielles (10), dépendant de n constantes arbitraires qui, si elles sont essentielles, servent à définir ∞^n ondes et, par conséquent, G est une ***intégrale complète*** de (10).

Il y a ∞^{2n-1} éléments de contact dans l'espace; pour $t = t_0$, on peut tous les déterminer : chacun d'eux est défini comme commun à la multiplicité

$$t_0 = G(x \mid a) \tag{13}$$

et à toutes celles qui en résultent par les variations infiniment petites des a_i liées par une seule relation

$$b_i \, \delta a_i = 0.$$

On a donc ainsi $2n+1$ conditions

$$G = t_0, \qquad \frac{\partial G}{\partial a_i} = mb_i, \qquad p_i = h\frac{\partial G}{\partial x_i}$$

qui se réduisent à $2n-1$ définissant un seul élément de contact lorsque les rapports des b_i sont donnés; réciproquement, l'élément de contact étant donné, on tire de là les a_i et les rapports des b_i.

A l'instant t, il correspondra à cet élément un élément commun aux multiplicités issues des premières et qu'on obtient en donnant à G la valeur t et en fixant les a_i et les b_i comme il a été dit. Dès lors, les équations

$$(14) \qquad G(x \mid a) = t, \qquad \frac{\partial G}{\partial a_i} = mb_i, \qquad p_i = h\frac{\partial G}{\partial x_i}$$

définissent cet élément et, par suite aussi, si l'on y considère les a_i et les rapports des b_i comme $2n-1$ constantes arbitraires, elles représentent les équations générales des ∞^{2n-1} caractéristiques possibles; elles donnent l'intégrale générale des équations différentielles des caractéristiques et sont équivalentes aux équations (5) et (6). Ces propositions constituent le *théorème de Jacobi* sur l'interprétation des équations des caractéristiques.

Si $\mathcal{M}_0$ est donnée comme l'enveloppe de ∞^{n-1} multiplicités (12), les a_i vérifiant l'équation

$$\Phi(a_1, \ldots, a_n) = 0,$$

l'onde $\mathcal{M}$ à l'instant t sera l'enveloppe des ∞^{n-1} multiplicités

$$t = G(x \mid a)$$

avec $\Phi(a) = 0$.

10. Dans le cas du régime permanent, les équations

$$H(x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) = 0$$

ou

$$\pi(x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) = 1$$

ne contiennent pas t. Nous laissons au lecteur le soin d'écrire les équations des caractéristiques et de remarquer que leur intégrale générale a la forme

$$x_i = \mathcal{A}_i(t - t_0 \mid x^0 \mid p^0),$$
$$p_i = \mathcal{B}_i(t - t_0 \mid x^0 \mid p^0).$$

L'onde émise à l'instant t par $\mathfrak{M}_0$ ne dépend que de l'intervalle $t - t_0$ et non de t_0 ; un élément de contact est toujours transporté par la même trajectoire quel que soit l'instant auquel il part de sa position initiale.

La famille des transformations de contact qui donnent la loi de la propagation forme alors un groupe à un paramètre $t - t_0$. (*Cf.* Lie [25 et 26].)

Trajectoires.

11. Trajectoires. — On peut définir les trajectoires indépendamment des éléments de contact qu'elles transportent ; il suffit d'éliminer les p_i des équations (3), (4) et (2).

On y arrive aisément en partant de l'équation ponctuelle de l'onde dérivée issue de P(x) ; soit

$$\Omega(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid \xi_1, \ldots, \xi_n) = 1, \tag{15}$$

cette équation écrite sous forme homogène de degré 1 en les ξ_i. Les coordonnées du plan tangent à cette onde en $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sont

$$u_i = \frac{\partial \Omega(t \mid x \mid \xi)}{\partial \xi_i}$$

de même que

$$\xi_i = \frac{\partial \pi(t \mid x \mid u)}{\partial u_i}$$

étaient les coordonnées du point de contact du plan tangent de coordonnées u_i.

Récrivons les équations (3) et (4) en désignant les dérivées, par rapport à t, par des accents

$$x'_i = \frac{\partial \pi}{\partial p_i}, \tag{3'}$$

$$p'_i = -\frac{\partial \pi}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial \pi}{\partial t}. \tag{4'}$$

Les équations (3′) et (2) sont équivalentes au système

$$\Omega(t \mid x \mid x') = 1, \tag{16}$$

$$p_i = \frac{\partial \Omega(t \mid x \mid x')}{\partial x'_i}.$$

D'autre part, de l'identité

$$\Omega\left(t \mid x \mid \frac{\partial \pi}{\partial p}\right) = 1,$$

on tire

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial x'_k} \frac{\partial^2 \pi}{\partial p_k \partial t} = 0$$

ou

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + p_k \frac{\partial^2 \pi}{\partial p_k \partial t} = 0,$$

mais $\frac{\partial \pi}{\partial t}$ est homogène de degré 1 en les p_i, dès lors

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \pi}{\partial t} = 0;$$

puis, de même,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_i} + \frac{\partial \pi}{\partial x_i} = 0.$$

et les équations (4′) deviennent

$$\frac{d \frac{\partial \Omega}{\partial x'_i}}{dt} - \frac{\partial \Omega}{\partial t} \frac{\partial \Omega}{\partial x'_i} - \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = 0. \tag{17}$$

Les trajectoires sont donc définies par le système (16) et (17), qui est surabondant. Pour le simplifier, remarquons que, Ω étant homogène en les x'_i,

$$\frac{\partial \Omega(t \mid x \mid x')}{\partial x'_i} = \frac{\partial \Omega(t \mid x \mid dx)}{\partial dx_i},$$

$$\frac{\partial \Omega(t \mid x \mid x')}{\partial x_i} = \frac{\partial \Omega(t \mid x \mid dx)}{\partial x_i} \frac{1}{dt},$$

$$\frac{\partial \Omega(t \mid x \mid x')}{\partial t} = \frac{\partial \Omega(t \mid x \mid dx)}{\partial t} \frac{1}{dt},$$

et si l'on pose

$$\mathfrak{L} = \Omega(t \mid x \mid dx),$$

on aura, au lieu de (17),

$$d \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\, dx_i} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\, dx_i} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_i} = 0, \tag{18}$$

En multipliant par dx_i et sommant par rapport à i, il vient :

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}(dt - \mathfrak{L}) = 0.$$

Donc, en régime variable, les trajectoires sont définies par le système (18) aussi bien quant à leur forme que quant à la loi suivant laquelle elles sont décrites.

En régime permanent, c'est le système

$$d\frac{\partial\Omega}{\partial\,dx_i} - \frac{\partial\Omega}{\partial x_i} = 0$$

qui définit leur forme; il se réduit à $n - 1$ équations; la loi suivant laquelle les trajectoires sont parcourues est donnée par l'équation

$$dt = \Omega.$$

On appelle *rayon* une trajectoire dont on ne considere que la forme. Un rayon étant donné, on trouve la caractéristique correspondante en remarquant que

$$p_i = \frac{\partial\Omega}{\partial\,dx_i}.$$

12. La forme eulérienne des équations que nous avons obtenues — tout au moins dans le cas du régime permanent — suggère l'idée de rechercher s'il n'y a pas des propriétés de maxima ou de minima en rapport avec la propagation par ondes. Nous n'aurons pas à recourir dans la suite à ces propriétés, nous nous bornerons donc à signaler ce problème traité par M. Vessiot en toute rigueur.

13. Il n'est pas nécessaire d'insister sur la théorie de l'intégration des équations aux derivées partielles qu'on peut tirer des considérations précédentes. A dire le vrai, cette théorie se confond avec les théories ordinaires, à cela près que le langage qu'on y adopte fait image et rend plus intuitif l'emploi des caractéristiques et des intégrales complètes. On peut résoudre sans difficulté le problème de Cauchy qui consiste à trouver une surface intégrale passant par une courbe donnée qui n'est pas une caractéristique.

CHAPITRE II.

APPLICATIONS DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE A LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE ET A LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE.

Dynamique des systèmes holonomes.

14. Soit un système holonome à $n-1$ degrés de liberté. Désignons par $x_1, \ldots, x_{n-1}$ les paramètres lagrangiens qui en fixent la position et par x_n le temps, qui se comporte en mécanique analytique comme un paramètre lagrangien. Admettons qu'il existe une fonction de forces U, et désignons par $2\mathrm{T}$ la force vive

$$2\mathrm{T} = \sum_{i=1}^{i=n-1} \sum_{k=1}^{k=n-1} a_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k + 2 \sum_{i=1}^{i=n-1} b_i \dot{x}_i + c \qquad \left(\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dx_n}\right).$$

Soit τ un paramètre quelconque au moyen duquel on représente le mouvement du système par des équations de la forme

$$x_i = x_i(\tau) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Les équations de Lagrange s'écrivent alors

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x'_i}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_i} = 0, \tag{1}$$

où

$$x'_i = \frac{dx_i}{d\tau}$$

et

$$\mathrm{L} = (\mathrm{T} + \mathrm{U}) x'_n.$$

Posons dès lors

$$\begin{aligned} \Omega(x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n) &= (\mathrm{T} + \mathrm{U})\, dx_n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n-1} \sum_{k=1}^{k=n-1} a_{ik} \frac{dx_i}{dx_n} dx_k + \sum_{i=1}^{i=n-1} b_i\, dx_i + \left(\mathrm{U} + \frac{c}{2}\right) dx_n. \end{aligned}$$

Ω est homogène et de degré 1 en les dx_i. Posons, de plus,

$$u_i = \frac{\partial \Omega}{\partial\, dx_i} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n-1} a_{ik}\, dx_k}{dx_n} + b_i \qquad (i = 1, \ldots, n-1),$$

$$u_n = \frac{\partial \Omega}{\partial\, dx_n} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n-1} \sum_{k=1}^{k=n-1} a_{ik} \frac{dx_i\, dx_k}{dx_n^2} + \mathrm{U} + \frac{c}{2}.$$

On tire de là, en éliminant les rapports $\dfrac{dx_i}{dx_n}$,

$$u_n = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=n-1} \sum_{k=1}^{k=n-1} \mathrm{A}_{jk}(u_j - b_j)(u_k - b_k) + \mathrm{U} + \frac{c}{2}, \tag{2}$$

où les A_{jk} sont les mineurs du déterminant $|a_{ik}|$ divisés par ce déterminant lui-même.

L'équation précédente s'écrit

$$u_n + \mathrm{H}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n;\ u_1, \ldots, u_{n-1}) = 0, \tag{3}$$

H étant la fonction hamiltonienne du système considéré, les $u_1, \ldots, u_{n-1}$ étant les variables conjuguées des $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Considérons cette équation comme l'équation tangentielle (sous forme non homogène) de l'onde dérivée issue du point $\mathrm{P}(x_1, \ldots, x_n)$ de l'espace à n dimensions qu'il est loisible d'attacher à un système à $n-1$ degrés de liberté en ajoutant la coordonnée $t = x_n$. A tout problème de dynamique (tout au moins si le système considéré est holonome et s'il existe une fonction de forces) correspond donc un problème de propagation d'ondes en régime permanent. Le temps en rapport avec la propagation d'ondes est en effet, la variable S définie par l'équation

$$d\mathrm{S} = \Omega = (\mathrm{T} + \mathrm{U})\, dx_n; \tag{4}$$

c'est l'*action hamiltonienne* qui ne figure pas explicitement dans les équations du mouvement, non plus que dans l'équation des ondes. Ainsi donc, les surfaces d'onde attachées au problème de dynamique considéré sont les surfaces d'égale action hamiltonienne.

15. Les équations de Lagrange sont les équations des trajectoires le long desquelles se propagent les éléments de contact $(x \mid u)$. Pour obtenir les équations des caractéristiques sous la forme habituelle, on peut rendre l'équation $u_n + \mathrm{H} = 0$ homogène, mais il suffit, pour notre objet actuel, de prendre la forme (3′), (4′) du Chapitre Ier. Ici la fonction $\mathrm{H}(t \mid x \mid p)$ est

$$u_n + \mathrm{H}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n; u_1, \ldots, u_{n-1}) = 0$$
$$(p_i = u_i, \quad i = 1, \ldots, n)$$

et l'on trouve immédiatement le système différentiel des caractéristiques sous la forme

$$\frac{dx_i}{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u_i}} = \frac{du_i}{-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i}} = \frac{dx_n}{1} = \frac{du_n}{-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_n}} = \frac{d\mathrm{S}}{u_n + \sum_{i=1}^{i=n-1} u_i \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u_i}}; \tag{5}$$

les équations

$$\frac{dx_i}{dx_n} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u_i}, \quad \frac{du_i}{dx_n} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i} \quad (i = 1, \ldots, n-1) \tag{6}$$

sont les équations canoniques de la mécanique, elles sont donc une partie du système qui définit les caractéristiques de la propagation d'ondes attachée au problème de dynamique.

16. Il va être très facile, grâce à la propagation en question, de trouver l'intégrale générale des équations canoniques (6). L'intégrale complète, dont il est question au paragraphe 9, est relative à l'équation homogène $\pi = 1$, mais elle est aussi une intégrale complète de l'équation $\mathrm{H} = 0$, où l'on a posé

$$u_i = \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x_i} \quad (i = 1, \ldots, n-1).$$

Soit donc

$$\mathrm{G}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n; a_1, \ldots, a_{n-1}) + a_n$$

une intégrale complète de l'équation

$$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x_n} + \mathrm{H}\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n; \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x_{n-1}}\right) = 0. \tag{7}$$

Les éléments de contact dans la propagation dans l'espace $(x_1, \ldots; x_n)$ sont définis par les équations (14) du Chapitre Ier. Soit, si

$$\mathrm{S} = \mathrm{G}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n; a_1, \ldots, a_{n-1}) + a_n$$

est l'intégrale complète,

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_n} = mb_n = 1, & h\dfrac{\partial G}{\partial x_n} = u_n = -H = -hH \quad (h=1), \\ \dfrac{\partial G}{\partial a_i} = mb_i = c_i, & \dfrac{\partial G}{\partial x_i} = u_i \quad (i = 1\ \ldots,\ n-1). \end{cases}$$

Les équations (8) où les c_i sont arbitraires définissent donc l'intégrale générale des équations canoniques (6) au moyen d'une intégrale complète de (7). On a ainsi obtenu le *théorème de Jacobi* par une voie très simple.

17. Dans le cas où les liaisons sont indépendantes de x_n et où U ne contient que $x_1, \ldots, x_{n-1}$, on sait que les équations du mouvement admettent l'intégrale première

$$T = U + h.$$

Considérons les mouvements où h est fixé ; on peut, en changeant U qui n'est définie qu'à une constante près, écrire

$$T = U,$$

et dans ce cas T, par un choix convenable des paramètres, peut être ramenée à une forme quadratique des $x_i\ (i = 1, \ldots, n-1)$:

$$2T = \sum_{i=1}^{i=n-1} \sum_{k=1}^{k=n-1} a_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k.$$

Posons

$$\overline{T} = T\, dx_n^2.$$

On voit facilement que si

$$\Omega = 2\sqrt{U\overline{T}},$$

les équations de Lagrange s'écrivent

$$d\frac{\partial \Omega}{\partial\, dx_i} - \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

et que l'on peut faire correspondre au mouvement du système une propagation d'ondes en prenant pour le temps de la propagation la variable W définie par l'équation

$$dW = \Omega = 2\sqrt{U\overline{T}}.$$

Cette variable est l'*action maupertuisienne*, et l'équation tangentielle des ondes dérivées se met immédiatement sous la forme homogène

$$\pi(x_1, \ldots, x_{n-1};\ u_1, \ldots, u_{n-1}) = 1$$

avec

$$\pi = \sqrt{\frac{\mathfrak{T}}{\mathrm{U}}}, \tag{9}$$

où $\mathfrak{T}$ est la forme adjointe de $\overline{\mathrm{T}}$.

Remarquons que les surfaces d'égale action maupertuisienne sont aussi des surfaces d'égale action hamiltonienne, car

$$d\mathrm{W} = 2\sqrt{\mathrm{UT}}\,dx_n, \qquad d\mathrm{S} = (\mathrm{U}+\mathrm{T})\,dx_n$$

et avec l'hypothèse conforme à la définition de W :

$$\mathrm{T} = \mathrm{U},$$

on a donc

$$d\mathrm{W} = d\mathrm{S},$$

En remplaçant U par $\mathrm{U} + h$, on revient au cas où la constante des forces vives a une valeur quelconque.

On sait que, dans les cas où H ne contient pas x_n, on peut obtenir une intégrale complète de (7) qui ait la forme

$$\mathrm{S} = -a_n x_n + \mathrm{V}(x_1, \ldots, x_{n-1};\ a_1, \ldots, a_n),$$

où aucune constante n'est additive. On voit qu'à $x_n =$ const., les multiplicités $\mathrm{S} =$ const., déterminent précisément dans l'espace E_{n-1} ($x_1, \ldots, x_{n-1}$) les multiplicités $\mathrm{V} =$ const. et réciproquement. Par suite, pour un observateur qui aurait décomposé l'espace E_n en « espace et en temps », la propagation lui apparaîtrait dans E_{n-1} comme le mouvement d'une multiplicité $\mathrm{V} =$ const., satisfaisant encore au principe des ondes enveloppes, le temps avec lequel ce mouvement est repéré étant le temps x_n lui-même, lié au temps S de la propagation dans E_n par une simple relation linéaire.

Si l'on fait la décomposition en espace E_{n-1} et en temps x_n dans le cas général où H contient x_n, les traces des multiplicités $\mathrm{S} =$ const. dans les « espaces » $x_n =$ const. c'est-à-dire dans l'espace $x_1, \ldots, x_{n-1}$ ne se propagent plus à la Huygens, c'est-à-dire suivant le principe des ondes enveloppes.

Dynamique de la relativité restreinte.

18. Nous n'avons pas encore parlé de la mécanique einsteinienne, mais la suite y pourvoira, tout au moins pour ce qui concerne la relativité générale. Il convient cependant de donner quelques indications précises sur la dynamique de la relativité restreinte dont l'utilité est considérable pour l'étude des phénomènes où n'interviennent pas des champs de gravitation intenses.

Soit m_0 la masse au repos d'un point matériel; désignons par s son *temps propre* et rappelons qu'on a, dans un système minkowskien servant à repérer l'univers :

$$c^2\, ds^2 = c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \tag{10}$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide. Soit, par hypothèse, $U(x, y, z, t)$ la fonction de forces d'où dérive le champ agissant sur le point considéré, c'est-à dire la fonction telle que

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \frac{\partial U}{\partial t}$$

soient les composantes d'un quadrivecteur dont les trois premières servent à représenter la force. Si l'on pose, en un point de la ligne d'univers de la particule m_0.

$$\beta^2 = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}{c^2},$$

les équations du mouvement s'écrivent, en prenant t comme variable indépendante :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{dx}{dt}\right] = \frac{\partial U}{\partial x},$$

et de même avec y et z. On peut les mettre sous forme canonique en posant

$$q_1 = x, \qquad q_2 = y, \qquad q_3 = z,$$

$$p_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{dx}{dt},$$

$$p_2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{dy}{dt},$$

$$p_3 = \frac{m^0}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{dz}{dt},$$

et l'on voit sans peine que la fonction hamiltonienne est

$$\begin{aligned} H &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - U(q_1, q_2, q_3, t) \\ &= c\sqrt{m_0^2 c^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} - U(q_1, q_2, q_3, t). \end{aligned}$$

L'équation de Jacobi sera

$$\frac{\partial S}{\partial t} + c\sqrt{m_0^2 c^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial q_3}\right)^2} - U(q_1, q_2, q_3, t) = 0$$

ou encore

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} - U\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial q_3}\right)^2 = m_0^2 c^2. \tag{11}$$

On peut rendre cette équation homogene (§ 4) et l'interpréter comme l'équation tangentielle de l'onde dérivée pour une propagation dans l'univers (x, y, z, t) le temps de la propagation étant S, et le régime étant permanent. En posant

$$p_1 = \frac{\pi_1}{\pi_5}, \qquad p_2 = \frac{\pi_2}{\pi_5}, \qquad p_3 = \frac{\pi_3}{\pi_5}, \qquad p_4 = \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\pi_4}{\pi_5},$$

l'équation (11) s'écrit :

$$\pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2 - \frac{1}{c^2}\pi_4^2 + \frac{2U}{c^2}\pi_4\pi_5 - \left(\frac{U^2}{c^2} - m_0^2 c^2\right)\pi_5^2 = 0. \tag{12}$$

Cette manière de procéder qui permet de passer de la mécanique newtonienne à la mécanique de la relativité restreinte n'est pas suffisante. l'équation (11) n'est pas invariante pour les transformations de Lorentz, bien qu'elle soit fort utile dans les problèmes les plus simples [1]. La présence du scalaire U trouble précisément cette invariance. On sait que l'électromagnétisme conduit à des équations beaucoup plus symétriques; grâce à l'introduction de quadrivecteur potentiel, dont la composante d'ordre quatre est le potentiel ordinaire et les trois autres, le potentiel vecteur de la théorie de Maxwell, le mouvement d'un point matériel électrisé de masse m_0 et de charge ε

[1] On sait qu'il y a là un des obstacles qui ont retenu les théoriciens qui entre 1905 et 1912 ont cherché à faire entrer la gravitation dans la relativité restreinte.

est donné par les équations suivantes dont on trouvera la démonstration dans le grand traité de M. de Donder [9], par exemple.

Équation de Jacobi :

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x_4} - \varepsilon A_4\right)^2 - \sum_{i=1}^{i=3}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \varepsilon A_i\right)^2 = m_0^2 c^2, \tag{13}$$

où A_1, A_2, A_3, A_4 sont les composantes covariantes du potentiel d'univers.

Intégrale générale des équations du mouvement :

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = p_i, \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i,$$

où $S(x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ est une intégrale complète de (13); p_1, p_2, p_3, p_4 sont les composantes covariantes du quadrivecteur quantité de mouvement-énergie. Les composantes contravariantes en sont les expressions de la forme [cf. p. 90]

$$p_i = \varepsilon A_i - \frac{m_0}{c}\frac{dx_i}{ds}, \qquad p_4 = \varepsilon A_4 + m_0 c \frac{dx_4}{ds} \tag{14}$$

et dès lors

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} - \varepsilon A_i = -\frac{m_0}{c}\frac{dx_i}{ds} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_4} - \varepsilon A_4 = m_0 c \frac{dx_4}{ds},$$

où les seconds membres sont les composantes covariantes divisées par c du quadrivecteur $\overrightarrow{V}$, dont les composantes contravariantes sont

$$m_0 \frac{dx_i}{ds} \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Dans l'espace $E_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, on peut attacher aux mouvements considérés une propagation d'ondes dont l'équation est manifestement

$$\sum_{i=1}^{i=3} \pi_i^2 - \frac{1}{c^2}\pi_4^2 - 2\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{i=3} A_i \pi_i - \frac{1}{c^2} A_4 \pi_4\right)\pi_5 + \left[\varepsilon^2\left(\sum_{i=1}^{i=3} A_i^2 - \frac{1}{c^2} A_4^2\right) + m_0^2 c^2\right]\pi_5^2 = 0 \tag{16}$$

C'est sous cette forme que nous emploierons l'équation des ondes au paragraphe **11**. Son premier membre homogène et du second degré la rend particulièrement utile dans la théorie des équations du second ordre. La forme $\pi = 1$ du paragraphe **4**, n'aurait pas la même utilité pour ce but; cependant c'est par elle et par la forme $\Omega = 1$ du paragraphe **11**, qu'il faut passer pour justifier les équations (14) (¹).

Géodésiques d'un espace riemannien.

19. La détermination des géodésiques d'un espace riemannien dont le ds^2 est donné sous la forme

$$ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{17}$$

conduit aussi à la considération d'une propagation d'ondes dans l'espace $(x_1, \ldots, x_n)$. Comme nous n'avons établi aucune relation métrique en rapport avec la théorie des ondes, il est loisible de considérer les surfaces d'ondes

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \text{const.}$$

comme tracées dans l'espace riemannien lui-même ou dans un espace euclidien auxiliaire avec des coordonnées rectangulaires $x_1, \ldots, x_n$. Il sera bien entendu plus naturel et plus simple de les imaginer dans l'espace riemannien lui-même.

Le régime est encore permanent et le temps de la propagation est la variable s elle-même. On fera

$$\Omega = \sqrt{g_{ik}\, dx_i\, dx_k} = ds,$$

et l'équation tangentielle des ondes dérivées sera

$$\pi(x \mid p) = 1 \tag{18}$$

avec

$$\pi(x \mid p) = \sqrt{g^{ik} p_i p_k},$$

(¹) Rappelons que la manière la plus rapide d'écrire les équations du mouvement d'un point est de partir du principe de moindre action de l'électromagnétisme

$$\delta S\, m_0\, d\sigma + \sum_{i=1}^{i=4} A_i\, dx_i = 0.$$

les g^{ik} étant les coefficients de la forme adjointe du ds^2; le calcul différentiel absolu les a rendus familiers.

Le théorème de Jacobi permet de déterminer toutes les géodésiques de la variété donnée moyennant la connaissance d'une intégrale complète de l'équation (18), où $p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}\cdot$ Il est facile de voir alors que les géodésiques issues d'un point sont normales aux surfaces d'ondes issues de ce point, la perpendicularité s'entendant ici au sens de la métrique riemannienne (17).

20. Il se présente quelques difficultés lorsque la forme (17) n'est pas définie; c'est ce qui arrive en relativité lorsqu'on cherche les géodésiques de longueur nulle qui représentent le mouvement des photons. Sur ces géodésiques, $ds = 0$, et l'on ne voit pas immédiatement la signification des surfaces d'ondes.

On parvient à la notion d'onde de la façon suivante : les géodésiques ayant une signification invariante et, d'autre part, le ds^2 pouvant toujours, par un changement de variables, se mettre sous la forme suivante lorsqu'on connaît les géodésiques issues d'un point :

$$(19) \qquad ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n-1} \sum_{\beta=1}^{\beta=n-1} g_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta - dx_n^2,$$

il suffit de considérer la forme (19) et d'écrire les équations des géodésiques qui en dépendent.

Si $ds^2 \neq 0$, ces équations s'obtiennent en éliminant les p_i entre les équations

$$dx_i = g^{ij} p_j\, d\lambda,$$
$$dp_k = -\frac{1}{2}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x_k} p_i p_j\, d\lambda,$$

qu'on écrit en partant de l'équation (18). Si $ds^2 = 0$, on prend x_n comme paramètre de représentation et les équations des géodésiques prennent la forme

$$(20) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dx_n} = \dfrac{g^{ij} p_j}{g^{nn} p_n} & (i = 1, \ldots, n-1), \\[2ex] \dfrac{dp_k}{dx_n} = -\dfrac{\frac{1}{2}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x_k} p_i p_j}{g^{nn} p_n} & (k = 1, \ldots, n-1), \end{cases}$$

qui a un sens dans tous les cas.

Or il est visible que ces équations sont les équations des caractéristiques dans la propagation en régime variable d'ondes dans l'espace $E_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ lorsqu'on écrit l'équation tangentielle des surfaces d'ondes sous la forme

$$\pi \equiv \sqrt{\sum_1^{k-1} \sum_1^{n-1} g^{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta} = 1.$$

Il suffit, en effet, de poser $\frac{p_\alpha}{p_n} = -P_\alpha$ dans (18) pour vérifier cette assertion.

Ainsi donc : aux géodésiques de longueur non nulle correspond dans E_n une propagation d'ondes à régime permanent, le temps de la propagation étant s (en relativité le temps propre); aux géodésiques de longueur nulle, correspond dans un espace $E_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ défini par la forme (19) du ds^2, une propagation d'ondes à régime variable, en général, le temps de la propagation étant x_n; si les $g_{\alpha\beta}$ de (19) ne dépendent pas de x_n, la propagation est à régime permanent dans E_{n-1} et l'on voit que les géodésiques de longueur nulle de la variété E_n se projettent dans E_{n-1} suivant les géodésiques de E_{n-1} lui-même. On reconnaît là une proposition classique des ds^2 statiques d'univers (¹).

CHAPITRE III.

LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE ET LA PROPAGATION DES ONDES QUI LEUR EST ATTACHÉE.

Indétermination du problème de Cauchy-Kowalesky.

21. Il convient de rappeler quelques termes utiles. Une fonction z de n variables $x_1, \ldots, x_n$ admettant des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $p+1$ vérifiera ainsi que ses dérivées des relations de la forme

$$(1) \qquad d\frac{\partial^k z}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} = \sum_{\iota=1}^{\iota=n} \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_\iota^{\alpha_\iota+1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\,dx_\iota \qquad (\alpha_1+\ldots+\alpha_n = k)$$

pour $k = 0, 1, \ldots, p$.

(¹) *Cf.* par exemple, Chazy [7].

On dit que ces variables

$$x_1, \quad \ldots, \quad x_n, \qquad z, \quad \frac{\partial z}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^k z}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \qquad \ldots$$

considérées comme indépendantes déterminent lorsqu'on leur a fixé une valeur *un élément de contact d'ordre p de l'espace à $n+1$ dimensions* $E_{n+1}(z, x_1, \ldots, x_n)$.

Deux éléments infiniment voisins qui vérifient toutes les relations (1) sont dits *unis*.

Tout système d'équations entre les coordonnées d'un élément qui vérifient les équations (1) définit une *multiplicité* M^p; le *support* de M^p est défini par les équations du système qui ne lient que les variables $x_1, \ldots, x_n, z$ entre elles.

Si q est le nombre de dimensions du support de M^p tellement choisi qu'à chaque point du dit support ne corresponde qu'un élément de contact d'ordre p la multiplicité est dite M_q^p.

22. Considérons l'équation du second ordre, linéaire par rapport aux dérivées d'ordre 2 :

$$(2) \qquad \Phi \equiv A_{ik} p_{ik} + \varphi = 0 \qquad \left(p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \ p_{ik} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} \right),$$

les A_{ik} et φ étant des fonctions données de $x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$.

Si on résoud l'équation (2) par rapport à p_{nn}, et si certaines conditions d'holomorphie sont réalisées, sur lesquelles nous ne nous appesantirons pas, il existe une intégrale de (2), et une seule, qui pour $x_n = x_n^0$ se réduit à une fonction donnée $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ alors que $\dfrac{dz}{dx_n}$ se réduit à une autre fonction donnée $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$. La détermination de cette intégrale, assurée par le théorème de Cauchy-Kowalesky, se fait au moyen d'un développement taylorien dont le théorème affirme à la fois l'unicité et la convergence.

Géométriquement, ce problème revient à trouver une multiplicité intégrale M_n contenant la multiplicité M_{n-1}^1 définie par les équations

$$x_n = x_0^n, \qquad z = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}), \qquad p_n = \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

On a pu résoudre (1) par rapport à p_{nn} et ainsi mettre l'équation proposée sous *forme normale*. On peut se demander, s'il n'est pas possible de se donner une M_{n-1}^1 par des conditions moins particulières. Le rôle que joue le plan $x_n = x_n^0$ serait joué par une surface Σ

$$x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

ou encore

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

On cherche à se ramener au cas précédent par un changement de variables

$$(x_1, \ldots, x_n) \rightleftarrows (y_1, \ldots, y_n)$$

tel que la surface Σ ait l'équation

$$y_n = \text{const.}$$

φ et ψ deviendraient sur Σ des fonctions connues de $y_1, \ldots, y_{n-1}$. Or, pour qu'on puisse être ramené au cas précédent, il faut qu'on puisse résoudre l'équation qui résulte de la transformation de (1) par rapport à $\frac{\partial^2 z}{\partial y_n^2}$ ce qui suppose que le coefficient de $\frac{\partial^2 z}{\partial y_n^2}$ n'est pas nul et par suite que F n'a pas été trop mal choisie. Nous laisserons cette méthode de coté; elle a été magistralement développée par M. Levi-Civita dans son bel ouvrage [23] et nous exposerons plutôt la méthode de Beudon [1] à laquelle les travaux de M. Hadamard [16, 17] ont donné une grande importance.

23. Cherchons donc l'intégrale de (1) qui contient une multiplicité M_{n-1}^1 donnée arbitrairement. Soient

$$(3) \qquad \frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i + p_n \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \qquad (i = 1, \ldots, n-1),$$

où z, x_n et p_n sont des fonctions arbitraires de $x_1, \ldots, x_{n-1}$ les équations qui représentent M_{n-1}^1.

Pour trouver la multiplicité intégrale contenant M_{n-1}^1, il faut pouvoir déterminer toutes les dérivées partielles de z sur le support Σ de M_{n-1}^1.

Elles entrent dans le développement taylorien de la solution. Nous ne nous occuperons pas des cas où la solution est déterminée par les données, mais bien plutôt des cas où elle est indéterminée. Les conditions d'indétermination caractériseront certaines multiplicités M_{n-1}^1 dont l'importance pour les applications est considérable.

On calcule les dérivées secondes au moyen des formules suivantes :

$$(4)\qquad \frac{\partial p_\rho}{\partial x_i} = p_{\rho i} + p_{\rho n}\frac{\partial x_n}{\partial x_i}$$

$$(\rho = 1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, n-1)$$

qui donnent

$$(5)\qquad p_{\rho n} = \frac{\partial p_n}{\partial x_\rho} - p_{nn}\frac{\partial x_n}{\partial x_\rho},$$

$$(6)\qquad p_{\rho i} = \frac{\partial p_\rho}{\partial x_i} - \frac{\partial x_n}{\partial x_i}\frac{\partial p_n}{\partial x_\rho} + p_{nn}\frac{\partial x_n}{\partial x_i}\frac{\partial x_n}{\partial x_\rho}.$$

On substitue ces expressions dans (2) et l'on doit obtènir p_{nn} au moyen de quoi toutes les dérivées secondes se calculent. Il vient

$$\left(\sum_{\rho=1}^{\rho=n-1}\sum_{i=1}^{i=n-1} A_{\rho i}\frac{\partial x_n}{\partial x_i}\frac{\partial x_n}{\partial x_\rho} - 2\sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} A_{\rho n}\frac{\partial x_n}{\partial x_\rho} + A_{nn}\right)p_{nn}$$
$$+\sum_{\rho=1}^{\rho=n-1}\sum_{i=1}^{i=n-1} A_{\rho i}\left(\frac{\partial p_\rho}{\partial x_i} - \frac{\partial x_n}{\partial x_i}\frac{\partial p_n}{\partial x_\rho}\right) + 2\sum A_{\rho n}\frac{\partial p_n}{\partial x_\rho} + \varphi = 0.$$

Le problème de Cauchy est impossible si le coefficient de p_{nn} est nul sans que la seconde ligne du premier membre le soit. Pour qu'il soit indéterminé, il faut que le dit coefficient et la seconde ligne en question soit nuls à la fois. Ainsi donc les premières conditions nécessaires de l'indétermination s'écrivaient :

$$(7)\qquad \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1}\sum_{i=1}^{i=n-1} A_{\rho i}\frac{\partial x_n}{\partial x_i}\frac{\partial x_n}{\partial x_\rho} - 2\sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} A_{\rho n}\frac{\partial x_n}{\partial x_\rho} + A_{nn} = 0,$$

$$(8)\qquad \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1}\sum_{i=1}^{i=n-1} A_{\rho i}\left(\frac{\partial p_\rho}{\partial x_i} - \frac{\partial x_n}{\partial x_i}\frac{\partial p_n}{\partial x_\rho}\right) - 2\sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} A_{\rho n}\frac{\partial p_n}{\partial x_\rho} + \varphi = 0.$$

Les multiplicités M_{n-1}^1 définies par les équations (3), (7) et (8) où z_1 x_n et p_n sont des fonctions de $x_1, \ldots, x_{n+1}$ sont les *multiplicités caractéristiques* ou simplement les *caractéristiques* de l'équation (2).

Caractéristiques et bicaractéristiques.

24. Si la multiplicité M_{n-1}^1 qui figure la donnée du problème de Cauchy est une caractéristique, les éléments du second ordre dans le développement taylorien de la solution du dit problème sont indéterminés; on peut se donner arbitrairement p_{nn} sur M^1_{n-1}, les autres p_{ik} se déduisent alors des équations (5) et (6). En supposant qu'on puisse continuer à déterminer les éléments du troisième ordre sur la multiplicité intégrale et ensuite les éléments d'un ordre quelconque, et si le développement taylorien est convergent, on dira que la multiplicité intégrale contient la caractéristique M^1_{n-1}.

Mais ce fait là ne nous importe guère. Il nous suffit d'étudier les caractéristiques placées sur une multiplicité intégrale donnée.

Or le calcul que nous avons fait prouve que l'on peut trouver une infinité de caractéristiques M^1_{n-1} sur une intégrale. L'équation (7) lorsque z est connue en fonction de $x_1, \ldots, x_n$ définit x_n comme fonction de $x_1, \ldots, x_{n-1}$; on sait que cela est possible d'une infinité de manières; il passe toujours une intégrale de (7) par une multiplicité définie par les fonctions

$$\begin{aligned} x_{n-1} &= x^0_{n-1}, \\ x_n &= f(x_1, \ldots, x_{n-2}), \end{aligned}$$

f étant arbitraire. Mais si (2) est vérifiée par z, l'équation (8) est une conséquence de l'équation (7) et notre affirmation est démontrée.

On pourrait poursuivre l'étude de l'indétermination du problème de Cauchy en passant aux éléments du troisième ordre; c'est ce que Beudon a fait dans le Mémoire cité et il définit facilement des multiplicités M^2_{n-1}, M^3_{n-1}, $\ldots$, qui sont des caractéristiques d'ordre 2, 3, ...

25. Remarquons que les équations des caractéristiques ne sont déterminées en général que pour des intégrales z données, car les coefficients A_{ik} dépendent de z et des p_i. Il arrive cependant que ces caractéristiques sont indépendantes de toute intégrale particulière de (1) lorsque les A_{ik} ne dépendent que des $x_1, \ldots, x_n$; c'est ce qui se passe pour les équations linéaires auxquelles nous allons vouer la suite de notre étude.

A toute équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre correspond une équation du premier ordre (7) qui définit évidemment une propagation d'ondes où x_n est le temps de la propagation; l'espace où les ondes se propagent est l'espace $x_1, \ldots, x_{n-1}$ et les surfaces d'ondes sont définies par les équations

$$x_n = x_n(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

où $x_n(x_1, \ldots, x_{n-1})$ est une solution quelconque de (7). On remplacera n par $n-1$ dans la théorie du premier chapitre et t par x_n. L'équation tangentielle des ondes dérivées est (7); pour la mettre sous forme homogène $\pi = 1$, on posera dans (7) :

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_i} = \frac{P_i}{\pi} \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

et l'on résoudra par rapport à π.

Les caractéristiques de la propagation seront dites, par M. Hadamard, *loc. cit.*, les *bicaractéristiques* de l'équation (1). Elles sont définies par les équations

$$(9) \qquad \frac{dx_i}{2\left(\sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} A_{\rho i} P_\rho - A_{in}\right)} = \frac{dP_i}{-\left(\frac{\partial H}{\partial x_i} + P_i \frac{\partial H}{\partial x_n}\right)} = \frac{dx_n}{2\left(\sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} A_{\rho n} P_\rho - A_{nn}\right)}$$

$$(i = 1, \ldots, n-1).$$

26. Il est utile de mettre l'équation (7) sous une forme différente. Au lieu de supposer que les équations des ondes sont données sous la forme

$$x_n = x_n(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

on peut imaginer qu'elles sont données par l'équation

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

et dès lors (7) prend la forme

$$(7') \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} A_{ik} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_k} = 0$$

et les bicaractéristiques sont définies, comme un calcul facile le montre, par les équations

$$(9') \qquad \frac{dx_i}{\sum_{k=1}^{k=n} A_{ik}\pi_k} = \frac{d\pi_j}{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_j}\pi_i\pi_k} \qquad (i, j = 1, \ldots, n),$$

si $\pi_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$.

Remarquons que, dès l'instant où l'on se borne à ne considérer que des caractéristiques sur des intégrales de (2), l'équation (8) ne joue aucun rôle, elle est satisfaite dès que (7) ou (7') le sont.

Systèmes d'équations aux dérivées partielles.

27. La notion de caractéristique peut s'étendre à un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre, comme l'a montré M. Hadamard [16] (1).

Il sera possible aussi d'attacher une propagation d'ondes à un système définissant k fonctions inconnues $z_1, \ldots, z_k$ de n variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$ et cette propagation se fera dans l'espace $x_1, \ldots, x_{n-1}$, le temps sera encore x_n.

Soit, en effet,

$$(10) \qquad \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=n} A_{ij}^{(ml)} p_{ij}^{(l)} + \varphi^{(m)} = 0 \qquad (m = 1, \ldots, k)$$

le système proposé; on a

$$p_i^{(l)} = \frac{\partial z_l}{\partial x_i}, \qquad p_{ik}^{(l)} = \frac{\partial^2 z_l}{\partial x_i \partial x_k},$$

et les coefficients $A_{ij}^{(ml)}$ ainsi que les $\varphi^{(m)}$ sont des fonctions des x, des z et des $p_i^{(l)}$. On considère une multiplicité M_{n-1}^1 :

$$x_n = x_n(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

et l'on se propose de résoudre le problème de Cauchy pour le système donné. On suppose que les éléments du premier ordre sont donnés

(1) *Cf.* aussi Janet [29].

pour chaque z_l et l'on cherche les éléments $p_{ij}^{(l)}$ du second ordre. Tout revient, comme on le voit facilement, à déterminer les $p_{nn}^{(l)}$ au moyen du système

$$\sum_{l=1}^{l=k} \mathrm{H}^{(ml)} p_{nn}^{(l)} + \mathrm{K}^{(m)} = 0 \qquad (m = 1, \ldots, k),$$

où

$$\mathrm{H}^{(ml)} = \sum_{i=1}^{i=n-1} \sum_{j=1}^{j=n-1} \mathrm{A}_{ij}^{(ml)} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \frac{\partial x_n}{\partial x_j} - 2 \sum_{i=1}^{i=n-1} \mathrm{A}_{in}^{(ml)} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} + \mathrm{A}_{nn}^{(ml)}$$
$$(m,\ l = 1, \ldots, k)$$

et où les $\mathrm{K}^{(m)}$ sont certaines expressions dont il est inutile de donner la forme explicite; elles ne contiennent aucun des $p_{ij}^{(m)}$.

Si le déterminant Δ des $\mathrm{H}^{(ml)}$ est nul, le problème de Cauchy est impossible ou indéterminé. Les conditions nécessaires de l'indétermination sont assez compliquées à écrire; elles font intervenir le rang du tableau des $\mathrm{H}^{(ml)}$ et elles lient les $\mathrm{K}^{(m)}$ entre eux. Si l'on se borne à l'étude des variétés définies par l'équation

$$(11) \qquad \Delta = 0,$$

qui se trouvent sur les multiplicités intégrales du système, les conditions en question sont vérifiées identiquement.

Les multiplicités de M_{n-1} définies par (11) sont dites encore les *caractéristiques* du système (10).

L'équation $\Delta = 0$ définit bien dans l'espace $x_1, \ldots, x_{n-1}$ une propagation d'ondes, où x_n est le temps, qui est indépendante des solutions z_l considérées si les $\mathrm{A}_{ij}^{(lm)}$ ne dépendent que des $x_1, \ldots, x_n$; nous supposerons qu'il en soit ainsi à moins de mention expresse du contraire.

Dans ce cas, on peut encore définir des *bicaractéristiques* du système (10); ce sont les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (11).

Interprétation physique des équations de second ordre. Discontinuité des solutions.

28. Dans les conditions respectives où nous nous sommes placé, on peut dire que la donnée d'une intégrale de (2) ou de (10) revient à la donnée d'une, ou de k, fonctions z, ou $z_1, \ldots, z_k$, de $x_1, \ldots, x_n$ dont on peut suivre la variation sur les surfaces d'ondes consécutives en parcourant chaque bicaractéristique. Ainsi une bicaractéristique, considérée comme une trajectoire, sert au transport des éléments de contact des surfaces d'ondes et au transport des valeurs de certaines fonctions $z_1, \ldots . z_k$ qui peuvent dès lors caractériser les intensités de certains ébranlements (concomitants si $k > 1$, comme dans le cas des équations de Maxwell, où ces ébranlements sont les perturbations de l'éther causées par les champs électrique et magnétique, c'est-à-dire, en fait, ces champs eux-mêmes).

La théorie du premier Chapitre est, en effet, impuissante à représenter toutes les circonstances d'une propagation; en particulier elle ne donne aucun détail sur *l'intensité* de l'ébranlement qui se propage. Il faut recourir aux équations du second ordre pour suppléer à cette carence et la théorie que nous venons d'esquisser montre nettement de quelle manière la théorie cinématographique du premier Chapitre intervient dans la théorie, qu'on peut dire dynamique, des équations de second ordre.

Remarquons que, considérées comme des fonctions de x_n le long d'une bicaractéristique, les fonctions z_l n'ont une valeur non nulle que lorsque x_n a atteint la valeur qui correspond au point considéré de la bicaractéristique. A ce moment-là, l'ébranlement a atteint le point et les z_l y prennent des valeurs appréciables alors qu'elles sont nulles au delà.

D'une façon plus précise, les multiplicités à $n-2$ dimensions que sont les surfaces d'ondes dans l'espace $x_1, \ldots, x_{n-1}$ sont des multiplicités de *discontinuité* (pour $n = 4$, ce sont des *surfaces de discontinuité*) du milieu physique à $n-1$ dimensions où se propagent les ébranlements.

L'étude des discontinuités et surtout l'étude des circonstances où ces discontinuités sont compatibles a été faite par de nombreux géomètres au premier rang desquels il faut placer Riemann, Christoffel, Hugoniot et M. Hadamard ([16], où se trouve la biographie relative aux trois premiers auteurs cités).

Partant alors des équations de la physique mathématique, ils ont montré que l'équation des caractéristiques de l'une ou l'autre d'entre elles exprime qu'il y a effectivement des discontinuités compatibles sur les caractéristiques.

Nous nous bornons à ces remarques; les conditions de compatibilité sont hors du cadre de notre étude, il suffit que nous ayons rappelé qu'elles conduisent aussi aux caractéristiques. (*Cf.* aussi l'ouvrage de M. Van Mieghem [33]).

29. Il y a cependant d'autres discontinuités qu'il convient d'examiner avec plus de soin, ce sont celles qui affectent les intégrales z_l dans les régions où elles deviennent infinies. Plus précisément, suivant Delassus [8], M. Le Roux [18] et M. Hadamard [16] cherchons dans quelles circonstances une *équation linéaire* (1)

$$(12)\qquad P(z) \equiv A_{ik} p_{ik} + A_i p_i + A z = 0,$$

peut posséder une intégrale de la forme

$$z = Z\,F(\pi),$$

Z et π étant des fonctions finies, continues et dérivables deux fois au moins, mais où F considérée comme fonction de π est singulière pour $\pi = 0$, cette singularité étant telle que $F'(\pi)$ est infiniment grand vis-à-vis de $F(\pi)$ et $F''(\pi)$ vis-à-vis de $F'(\pi)$ si π est infiniment petit, par exemple

$$\pi^{\frac{p}{q}},\quad \frac{1}{\pi^m},\quad \log\pi,\quad e^{\frac{1}{\pi}},\quad \ldots.$$

En substituant dans l'équation proposée, il vient, si l'on pose $\dfrac{\partial\pi}{\partial x_i} = \pi_i$,

$$(13)\qquad \begin{aligned}&(A_{ik}\pi_i\pi_k)Z\,F''(\pi)\\ &\quad+\left[2\frac{\partial Z}{\partial x_i}A_{ij}\pi_j + Z[P(\pi) - A\pi]\right]F'(\pi) + P(Z)F(\pi) = 0.\end{aligned}$$

Or, dans les circonstances où nous nous sommes placé, le coefficient de $F''(\pi)$ doit être nul si $\pi = 0$, donc

$$A_{ik}\pi_i\pi_k = 0.$$

Autrement dit, s'il existe une solution du type indiqué, la multiplicité $\pi = 0$ est une caractéristique de l'équation proposée. Il en serait

---

(1) La sommation n'est pas indiquée; il faut la faire de 1 à n.

de même si l'on cherchait z de la forme

$$z = \mathrm{Z}\,\mathrm{F}(\pi) + \zeta, \tag{14}$$

ζ étant une fonction régulière. M. Hadamard (*loc. cit.*, [16], p. 333) a montré que, si $\pi = 0$ est une caractéristique, on peut effectivement trouver des solutions de la forme (14); nous n'aurons pas besoin de ce résultat pour la suite de notre étude.

Ondes périodiques. Approximation de l'optique géométrique.

30. Une remarque très importante, dans le même ordre d'idées, a été faite par M. Hadamard (*loc. cit.*, [16], p. 345); elle est relative aux *ondes périodiques* et elle touche au problème fondamental de l'approximation dite de l'optique géométrique que l'on peut faire dans l'étude de certains phénomènes.

En physique, il convient dans un grand nombre de cas, de se borner aux ondes périodiques. Elles sont représentées par des fonctions z de la forme

$$z = \sin\mu\pi \qquad (\mu = \text{const.}),$$

où π est une fonction de $x_1, \ldots, x_n$, linéaire le plus souvent par rapport à x_n.

Elles peuvent être aussi de la forme

$$z = \mathrm{Z}\sin\mu\pi + \zeta, \tag{15}$$

Z et ζ étant des fonctions régulières de $x_1, \ldots, x_n$ et l'on imaginera alors que le phénomène que représente la variable z est dû à la superposition de deux ébranlements, l'un ζ, et l'autre $\mathrm{Z}\sin\mu\pi$ qui est périodique en x_n si Z n'en dépend pas, et si π est linéaire en x_n, ou si Z en dépend, qui est une modulation qu'on pourra parfois considérer comme périodique dans un court laps de temps.

Lorsque μ a une valeur très grande la fonction $\sin\mu\pi$ passe, pour de petites variations de π, de la valeur $+1$ à la valeur -1; elle se comporte pratiquement comme une fonction singulière dont la dérivée est de l'ordre de μ, dont la dérivée seconde est de l'ordre de μ^2, etc. Le physicien qui utilise souvent de telles fonctions négligera dans ses calculs les termes en μ devant les termes en μ^2, et par suite z vis-à-vis de $\frac{\partial z}{\partial x_n}$, $\frac{\partial z}{\partial x_n}$ vis-à-vis de $\frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2}$.

D'une façon plus précise, et sans faire d'abord d'hypothèses sur la forme de π relativement à x_n, cherchons une solution de (12) qui ait la forme (15) dans le cas où μ est très grand. En substituant et ordonnant, on trouve

$$(16)\quad -\mu^2 Z \sin\mu\pi\left(A_{ik}\frac{\partial\pi}{\partial x_i}\frac{\partial\pi}{\partial x_k}\right) + \mu\cos\mu\pi\left(2A_{ik}Z\frac{\partial Z}{\partial x_i}\frac{\partial\pi}{\partial x_k} + A_i Z\frac{\partial\pi}{\partial x_i} + A_{ik}Z\frac{\partial^2\Pi}{\partial x_i\,\partial x_k}\right) + P(Z)\sin\mu\pi + P(\zeta) = 0.$$

L'annulation du terme en μ^2 donne

$$(17)\qquad A_{ik}\frac{\partial\pi}{\partial x_i}\frac{\partial\pi}{\partial x_k} = 0.$$

Donc l'équation

$$\pi = \text{const.}$$

représente encore une caractéristique.

Les surfaces d'égale phase, comme on appelle dans une propagation périodique, ou dans une modulation, les multiplicités sur lesquelles l'argument de la fonction périodique a une valeur constante donnée, sont donc des multiplicités caractéristiques lorsque le paramètre μ est très grand et qu'on peut le négliger vis-à-vis de son carré.

31. Choisissons π de cette façon; le terme en μ^2 étant nul, annulons le terme en μ. Or, sur une caractéristique, on peut considérer les bicaractéristiques définies par les équations

$$\frac{dx_i}{2A_{ik}\dfrac{\partial\pi}{\partial x_i}} = du \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

et l'on peut alors calculer Z sur chaque bicaractéristique par l'équation

$$\frac{dZ}{du} + MZ = 0,$$

où

$$M = A_i\frac{\partial\pi}{\partial x_i} + A_{ik}\frac{\partial\pi}{\partial x_i\,\partial x_k};$$

c'est une fonction connue. On trouve alors

$$Z = Z_0 e^{\int_{u_0}^{u} M\,du},$$

où Z_0 est une fonction arbitraire du point variable situé sur une multiplicité M_{n-2} de chaque M_{n-1} caractéristique [1] qui se propage de M_{n-1} en M_{n-1}

$$\pi = \text{const.},$$

c'est-à-dire qui conserve. si π est linéaire en fonction de x_n, ce que nous supposerons dorénavant, la même équation,

$$\psi(x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0.$$

Z est alors déterminée dans tout l'espace $x_1, \ldots, x_n$.

On déterminera ζ enfin par la condition

$$P(\zeta) = -P(Z) \sin \mu \pi,$$

où $P(Z)$ est une fonction connue de $x_1, \ldots, x_n$; dans un grand nombre de cas ζ est négligeable (*cf.* Hadamard, *loc. cit.*, p. 346).

Remarquons que Z_0 est la valeur fixée de Z sur une bicaractéristique. Si l'on considère un *pinceau* de bicaractéristiques issues, par exemple, d'un ensemble de points, tellement choisis qu'elles traversent une certaine région de l'espace $x_1, \ldots, x_n$, on peut alors supposer que Z_0 est nulle partout sauf sur l'ensemble en question, qui peut correspondre à $u = u_0$ pour chaque bicaractéristique; dès lors Z ne sera différent de zéro que sur le pinceau. Or le choix de l'ensemble de points considérés peut physiquement se faire au moyen d'un écran percé d'un trou (si $n = 4$) et l'on voit que le phénomène *périodique* ne se propage que sur le pinceau pour autant que l'approximation qui consiste à négliger μ vis-à-vis de μ^2 est légitime. Une telle approximation est celle que l'on se permet lorsqu'en optique on se borne à la considération des rayons (optique géométrique).

Les remarques précédentes dues à M. Hadamard éclairent d'une vive lumière les prolégomènes physiques de la mécanique ondulatoire; on en verra des applications dans l'ouvrage de M. L. de Broglie [4]; nous n'aurons pas à y revenir.

32. On pourrait étendre sans difficulté cette théorie des singularités et celle des ondes périodiques à un système d'équations aux dérivées partielles. Le lecteur verra bien sous quelle forme cette

---

[1] Si $n = 3$, les M_{n-2} ne doivent pas être des caractéristiques; pour n quelconque elles n'en doivent pas contenir.

extension peut se faire; elle ne nous sera pas nécessaire dans la suite, parce que notre propos n'est pas d'entrer plus que nous ne l'avons fait au paragraphe 27, dans la théorie des systèmes ([1]), le cadre de ce petit livre ne le permet pas. Cependant nous tenons à citer les travaux de M. Levi-Civita [22 et 23] et celui de M. Racah [35] qui ont traité de ce point de vue, d'une part, les équations de la gravitation einstérienne et, d'autre part, celles de Dirac relatives au photon et à l'électron.

CHAPITRE IV.

RETOUR A L'INTERPRÉTATION ONDULATOIRE DE LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE. GÉODÉSIQUES D'UNIVERS. CONSIDÉRATIONS PROBABILISTES. ONDES DE DE BROGLIE.

Équations du second ordre et mécanique.

33. Dans le deuxième chapitre, nous avons vu comment, prolongeant une belle idée d'Hamilton, M. Vessiot a attaché une propagation d'ondes à tout mouvement d'un système holonome avec fonction de forces. Jusqu'aux travaux de M. Louis de Broglie, qui ont transformé la mécanique, on n'avait que faire physiquement de ces ondes, si bien que leur introduction dans la dynamique analytique pouvait paraître plus un raffinement d'élégance qu'un véritable enrichissement, et d'ailleurs dans le cas le plus simple du point matériel, la vitesse de propagation d'onde n'étant pas la même que la vitesse du point matériel, cette élégance même avait paru illusoire.

Il est intéressant, en poursuivant la ligne des travaux de M. Vessiot au travers des idées de Beudon et surtout de M. Hadamard, de rechercher quelles équations du second ordre on peut proposer de manière que la propagation d'ondes qui leur correspond, au sens du chapitre précédent, soit précisément celle qui est attachée au mouvement que le problème de dynamique analytique considéré définit.

Il est évident cependant que si l'on passe nécessairement de l'équation (2) du Chapitre III à l'équation (7) ou à l'équation (7'), on ne

---

([1]) La théorie générale des caractéristiques des systèmes a donné lieu récemment à d'importantes recherches, citons celles de M. Cartan, [6], de MM. Thomas et Titt [38].

peut pas passer *nécessairement* d'une équation du premier ordre définissant les ondes à *une* équation du second ordre; si l'équation de propagation est du second degré par rapport aux dérivées on peut passer à une équation du type (2) mais tous les termes qu'on a groupés dans la notation φ y sont indéterminés. Il faudra de nouveaux principes pour assurer l'unicité de l'équation du second ordre qu'on se propose de trouver pour réaliser le programme dont nous venons d'exprimer les grandes lignes.

34. Soit le système à $n-1$ degrés de liberté, défini au Chapitre II, paragraphe **14**. L'équation des ondes dérivées est l'équation de Jacobi

$$(\mathrm{J}) \qquad u_n + \mathrm{H}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n;\, p_1, \ldots, p_n) = 0$$

et le « temps » de la propagation étant l'action S, on pose dans (J)

$$u_k = \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x_k} \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

L'équation de Jacobi ne peut être identifiée à l'équation (7) qui définit les caractéristiques de (2) que si l'on écrit (2) et (7) avec $n+1$ variables indépendantes, en faisant $\mathrm{S} = x_{n+1}$:

$$(1) \qquad \sum_{1}^{n+1} \sum_{1}^{n+1} \mathrm{G}_{ik} p_{ik} + \varphi = 0$$

et

$$(2) \qquad \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{G}_{\rho i} \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x_\rho} \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x_i} - 2 \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \mathrm{G}_{\rho, n+1} \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x_\rho} + \mathrm{G}_{n+1, n+1} = 0.$$

Cela étant posé, il convient de rappeler que H est précisément du second degré en les $u_i (i = 1 \ldots, n-1)$. On peut écrire l'équation (J) sous la forme

$$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{i=n-1} \sum_{k=1}^{k=n-1} \mathrm{B}_{ik} \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x_k} + 2 \sum_{i=1}^{i=n-1} \mathrm{B}_i \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x_i} + \mathrm{B} = 0,$$

où [*cf.* équations (2), § **14**]

$$\mathrm{B}_{ik} = \frac{1}{2} \mathrm{A}_{ik}, \qquad \mathrm{B}_i = -\sum_{k=1}^{k=n-1} \mathrm{A}_{ik} b_k \qquad (i = 1, \ldots, n-1),$$

$$\mathrm{B} = \sum_{j=1}^{j=n-1} \sum_{k=1}^{k=n-1} \mathrm{A}_{jk} b_j b_k - \mathrm{U} - \frac{c}{2}.$$

L'identification à l'équation (2) donnera

$$
\begin{aligned}
&G_{\rho i} = B_{\rho i} && (\rho, i = 1, \ldots, n-1),\\
&G_{ni} = G_{in} = G_{nn} = 0 && (i = 1, \ldots, n-1),\\
&G_{i,n+1} = - B_i && (i = 1, \ldots, n-1),\\
&G_{n\, n+1} = -\frac{1}{2},\\
&G_{n+1,n+1} = B.
\end{aligned}
$$

On peut formuler le théorème suivant :

A tout système holonome avec fonction de forces, ayant $n-1$ degrés de liberté et dont la description se fait au moyen de $n-1$ paramètres $x_1, \ldots, x_{n-1}$, on fait correspondre un espace à $n+1$ dimensions $E_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, S)$ où x_n est le temps et S l'action hamiltonienne. L'équation de Jacobi du système définit dans l'espace $E_n(x_1, \ldots, x_n)$ une propagation d'ondes à régime permanent; les surfaces d'ondes sont les caractéristiques de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre dont les termes de second ordre, linéaires par rapport à la fonction inconnue z sont parfaitement déterminés; les termes restant constituent une fonction arbitraire de z, de $\frac{\partial z}{\partial x_i}$, de $\frac{\partial z}{\partial S}$, de $x_1, \ldots, x_{n-1}$, x_n et S; les équations de Lagrange du système sont les bicaractéristiques, au sens de M. Hadamard, de cette équation du second ordre.

En bref, l'équation

$$
(3) \quad B\frac{\partial^2 z}{\partial S^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial S\, \partial x_n} - \sum_{i=1}^{i=n-1} B_i \frac{\partial^2 z}{\partial S\, \partial x_i} + \sum_{i=1}^{i=n-1}\sum_{j=1}^{j=n-1} B_{ij}\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\, \partial x_j} + \varphi = 0
$$

a des caractéristiques

$$
S = S(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)
$$

qui sont définies par l'équation de Jacobi

$$
\frac{\partial S}{\partial x_n} + H = 0,
$$

et des bicaractéristiques qui sont définies par les équations de Lagrange ou celles d'Hamilton.

Dans le cas particulier d'un point matériel de masse m et de coordonnées cartésiennes x, y, z soumis à la force dérivant du potentiel U, l'équation du second ordre s'écrit en désignant par ψ la fonction inconnue :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial S\, \partial t} - 2U \frac{\partial^2 \psi}{\partial S^2} + \varphi = 0,$$

où φ est une fonction arbitraire de

$$x, \quad y, \quad z, \quad t, \quad S, \quad \psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial S},$$

35. Si les liaisons du système holonome considéré sont indépendantes de x_n et si U ne contient que les variables $x_1, \ldots, x_{n-1}$, le problème se simplifie. On sait alors que les surfaces $S = \text{const.}$ ou $W = \text{const.}$ sont confondues avec les surfaces $x_n = \text{const.}$ de sorte qu'il suffit de considérer un espace qui contient une dimension de moins. On sait en effet que l'équation de propagation est

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{T}}{U}} = 1,$$

où $\mathfrak{T}$ est une forme quadratique en les $p_1, \ldots, p_{n-1}$. L'équation précédente s'écrit

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{i=n-1} \sum_{k=1}^{k=n-1} B_{ik} \frac{\partial W}{\partial x_i} \frac{\partial W}{\partial x_k} - 2U = 0;$$

or si l'on pose

$$2U = 2U \left(\frac{\partial W}{\partial W}\right)^2,$$

on voit que (4) est l'équation, sous la forme (7') du Chapitre III, des caractéristiques,

$$W(x_1, \ldots, x_{n-1}) - W = 0$$

de l'équation du second ordre

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{i=n-1} \sum_{k=1}^{k=n-1} B_{ik} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i\, \partial x_k} - 2U \frac{\partial^2 z}{\partial W_n^2} + \varphi = 0;$$

les B_{ik} sont les coefficients de la forme adjointe $\mathfrak{T}$ ou T.

Or ni U ni les B_{ik} ne dépendant de x_n, on pourrait supposer que φ n'en dépende pas non plus et l'on simplifierait l'équation précédente en cherchant des solutions de la forme

$$z = \lambda(W)\, \zeta(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Supposons que φ soit linéaire en z et même pour simplifier encore que

$$\varphi = \rho(x_1, \ldots, x_{n-1})z;$$

alors on aura

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} \sum_{k=1}^{k=n-1} B_{ik} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_i \partial x_k} + \rho\zeta - 2U \frac{\lambda''(W)}{\lambda(W)} \zeta = 0,$$

ce qui n'est possible que si

$$\frac{\lambda''(W)}{\lambda(W)} = \text{const.}$$

On voit apparaître, dans ce cas très simple, des solutions z qui sont fonctions exponentielles, donc, dans certaines circonstances, *périodiques* de W.

Dans ces considérations, la variable x_n ne joue aucun rôle. Cependant on sait que

$$dW = 2\sqrt{UT}\, dx_n,$$

c'est-à-dire que $W = \text{const.}$ si $x_n = \text{const.}$ ce qui permet, comme on le sait, d'éliminer W pour n'avoir à s'inquiéter que de x_n. Nous n'y insisterons pas car la suite permet de préciser dans le cas le plus intéressant pour la mécanique ondulatoire le rôle de l'action et celui du temps.

Conditions d'invariance.

36. Considérons maintenant le mouvement d'un point matériel du point de vue de la relativité générale. La ligne d'univers est une certaine géodésique d'un ds^2 :

$$(6) \qquad ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

On y peut attacher (*cf.* § 19) une propagation d'ondes dont l'équation est

$$(7) \qquad \pi(x \mid p) = \sqrt{g^{ik} p_i p_k} = 1;$$

le régime est permanent; le temps de la propagation est la variable s elle-même.

Considérons une multiplicité à cinq dimensions $M_5(x_1, \ldots, x_4, x_5)$, dont le ds^2 est

$$dx_5^2 - g_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

Les géodésiques de longueur nulle de cette M_5 se projettent dans l'univers $x_1, \ldots, x_4$ selon des géodésiques de (6).

A ces géodésiques de longueur nulle de M_5, correspond une propagation d'ondes qui est précisément celle qui est attachée dans l'univers $x_1, \ldots, x_4$ à la ligne d'univers du point matériel considéré; le régime est permanent, le temps de la propagation étant x_5, c'est-à-dire le *temps propre* du point matériel.

L'équation tangentielle des ondes dérivées est, dans l'univers, l'équation (7), mais en posant $\frac{\pi_i}{\pi_5} = -p_i$, elle devient dans M_5

$$(8) \qquad g^{\alpha\beta}\pi_\alpha \pi_\beta - \pi_5 \pi_5 = 0,$$

à laquelle correspondent des équations aux dérivées partielles du second ordre dont la plus simple est

$$(9) \qquad g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 z}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} - \frac{\partial^2 z}{\partial x_5^2} = 0.$$

37. Cependant il convient d'ajouter ici quelques conditions nouvelles. Dans les calculs que nous avons développés, il était à peu près indifférent que les variables représentassent des coordonnées rectangulaires. La théorie de la propagation est une théorie de contact et si les variables représentaient des coordonnées curvilignes quelconques dans l'espace de la propagation, il n'y aurait pas grand chose à changer dans les développements des chapitres précédents; seules les relations en Ω et π (Chap. I, § 11) seraient à transformer en tenant compte de la métrique définie par le ds^2 de l'espace de propagation.

Il est préférable encore de faire davantage; au lieu de considérer l'univers, considérons M_5 dont le ds^2 est

$$(10) \qquad \sum_{i=1}^{i=5}\sum_{k=1}^{k=5}\gamma_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

L'équation (8) relative aux géodésiques de longueur nulle de M_5 s'écrira, avec les notations bien connues du calcul différentiel absolu, relatives à la forme (10) :

$$\sum_1^5 \sum_1^5 \gamma^{ik} \pi_i \pi_k = 0, \tag{11}$$

mais l'équation (9) doit être transformée si l'on veut que sa relation avec (11) soit invariante lorsqu'on change de coordonnées dans la M_5, la fonction z étant elle-même un invariant. La forme invariante la plus simple est évidemment

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sum_{i=1}^{i=5} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{\gamma}\, \gamma^{ik} \frac{\partial z}{\partial x_k}\right) = 0, \tag{12}$$

où γ est le déterminant des γ_{ik}. Cette équation qui s'écrit au moyen de la dérivée covariante

$$z^r \mid_r = 0,$$

où $z^r = g^{ri} \dfrac{\partial z}{\partial x_i}$, est bien invariante.

Si le ds^2 est de la forme particulière

$$dx_5^2 - g_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

on aura, en utilisant la forme fondamentale (6),

$$\sqrt{\gamma} = \sqrt{g}; \qquad \gamma^{ik} = -g^{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$
$$\gamma^{5k} = \gamma^{k5} = 0; \qquad \gamma^{55} = 1$$

et par suite (12) s'écrira

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{g}\, g^{ik} \frac{\partial z}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial^2 z}{\partial x_5^2} = 0$$

ou encore

$$g^{ik}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\, \partial x_k} - \Gamma^l_{ik} \frac{\partial z}{\partial x_l}\right) - \frac{\partial^2 z}{\partial x_5^2} = 0 \tag{13}$$

car

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\, g^{ik})}{\partial x_k} = -g^{rs} \Gamma^i_{rs},$$

Γ^i_{rs} étant la notation des symboles de Christoffel de deuxième espèce du ds^2 d'univers (6). L'équation (13) devra alors, pour des raisons d'invariance que nous avons indiquées, remplacer l'équation (9) (1).

(1) *Cf.* KLEIN, [32].

Électromagnétisme et gravitation.

38. Il est possible de faire d'autres suggestions encore. La multiplicité M_5 qui s'est introduite assez naturellement dans nos calculs peut être considérée d'un point de vue plus élevé.

Primitivement x_5 est un paramètre qui est constant quand l'action est constante; plus précisément, si l'on examine tous les mouvements possible d'un point matériel passant à un même instant en un même point (¹), les diverses trajectoires définissent des valeurs de l'action W. Le lieu des points W = const. correspond à des points où x_5 = const., ce paramètre x_5 est le temps propre s sur chaque ligne d'univers relative à chacun des mouvements considérés. L'idée de faire de x_5 une *variable indépendante*, au même titre que x_1, x_2, x_3, x_4 bouleverse naturellement d'une manière assez profonde les bases de la mécanique.

Il faut remarquer tout d'abord que ce bouleversement peut être fait sans violence. On considère un ds^2 de cet univers nouveau qui ait la forme

$$ds^2 = dx_5^2 - g_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

où les g_{ik} ne dépendent pas de x_5. C'est exactement ce qu'on a fait plus haut.

Généralisons d'un degré et introduisons une forme où le coefficient de dx_5^2 ne soit plus une constante mais une fonction de x_1, x_2, x_3, x_4, les autres g_{ik} $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ ne dépendant pas non plus de x_5. On écrira (²)

$$g_{55} = \psi^2$$

et

$$ds^2 = \psi^2\, dx_5^2 - g_{ik}\, dx_i\, dx_k. \tag{14}$$

Proposons-nous dès lors de généraliser la théorie d'Einstein et de trouver des équations définissant les g_{ik} et ψ^2. L'idée la plus simple, tout au moins pour les régions d'univers vides de matière, est d'écrire

$$R_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4, 5), \tag{15}$$

(¹) Il est nécessaire de préciser davantage la classe de ces mouvements, mais nous nous bornons à une suggestion.

(²) *Cf.* [13 et 14].

les $R_{\alpha\beta}$ étant les composantes du tenseur de Riemann contracté relatif au ds^2 défini par (14).

Or, pour $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$, les équations (15) sont précisément celles d'Einstein pour un ds^2 d'univers à quatre dimensions dont les g_{ik} ($i, k = 1, 2, 3, 4$) sont les coefficients, pourvu qu'on néglige les dérivées $\frac{\partial\psi}{\partial x_l}$ vis-à-vis des $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l}$, c'est-à-dire « pourvu que ψ^2 ne soit pas trop variable ».

Les équations

$$R_{\alpha 5} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

sont identiquement vérifiées et l'équatiòn

$$R_{55} = 0$$

s'écrit

$$g^{hl}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^l\,\partial x^h} + \left(\Gamma^h_{lh}g^{ll} + \frac{\partial g^{hl}}{\partial x^h}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x^l} = 0, \tag{16}$$

où les Γ^k_{li} sont les symboles de Christoffel de la forme $g_{ik}\,dx_i\,dx_k$, les g^{ik} étant relatifs à la même forme.

On peut formuler dès lors le théorème suivant qui attache au mouvement d'un point matériel une propagation d'ondes par un procédé invariantif différent de celui que nous avons vu aux paragraphes précédents :

Si l'on considère un univers einsteinien comme une section $x_5 = \text{const.}$ d'un univers à cinq dimensions (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) dont le ds^2 est de la forme (14), les équations de la gravitation dans le vide sont les équations $R_{ik} = 0$ ($i, k = 1, 2, 3, 4$), $\left(\text{si les dérivées } \frac{\partial\psi^2}{\partial x_l} \text{ sont négligeables vis-à-vis des dérivées } \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l}\right)$ relatives à ce ds^2, et les lignes d'univers d'un point matériel, dans un tel champ, sont les bicaractéristiques de l'équation $R_{44} = 0$ qui détermine ψ lorsque les g_{ik} sont connus.

L'équation $R_{44} = 0$ pourrait jouer le rôle de l'équation de Schrödinger [1]. Si l'on ne néglige plus les $\frac{\partial\psi^2}{\partial x_l}$ vis-à-vis des $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l}$, on peut admettre que les termes laissés de côté dans $R_{ik} = 0$ ($i, k = 1, 2, 3, 4$) traduisent l'influence sur le champ de gravitation des champs

[1] Dans ce cas il est préférable de remplacer ψ^2 par $\psi\bar{\psi}$ où ψ est une fonction complexe, $\bar{\psi}$ étant la quantité conjuguée.

d'ondes que l'équation $R_{55} = 0$ définit. On pourrait dire alors que le point matériel trouble le champ défini par les $g_{ik}(i, k = 1, 2, 3, 4)$ d'abord par les ondes qui lui sont attachées avant de le faire par sa masse.

39. Il pouvait venir immédiatement à l'esprit des chercheurs d'examiner à quelles équations on est conduit si l'on considère un ds^2 de la multiplicité M_5 dont les g_{i5} ne fussent plus nuls. On retrouve ainsi la théorie unitaire de M. Kaluza [30] et l'extension qu'en ont donnée MM. Gonseth et Juvet [13 et 14]. Si l'on pose

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4, 5)$$

avec $g_{55} = \psi^2$ ou $\psi\overline{\psi}$, on est conduit en admettant d'abord que les $g_{5i}(i = 1, 2, 3, 4)$ soient très petits, à écrire des équations généralisant celles d'Einstein

$$(17) \qquad R_{\alpha\beta} = k\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T\right) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4, 5),$$

dont les dix premières $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ sont les équations ordinaires de la gravitation, dont les quatre suivantes $(\alpha = 5, \beta = 1, 2, 3, 4)$ sont les équations de Maxwell définissant les potentiels φ_i en fonction du courant, pourvu qu'on pose

$$g_{5i} = \tau\varphi_i,$$

τ étant une constante; enfin si $\alpha = \beta = 5$ on retrouve une équation du second ordre pour ψ. Cela suppose qu'on néglige les dérivées par rapport à x_5 devant les autres dérivées. Ces conclusions impliquent qu'on a défini le tenseur d'énergie-matière $T_{\alpha\beta}$ de manière à généraliser celui qu'Einstein a introduit dans sa théorie. On y arrive en posant

$$(18) \qquad dx_5 = \frac{\sigma}{\rho}\, ds,$$

qui définit le cinquième paramètre directeur, dans la M_5, de la ligne d'univers d'un point d'un milieu continu dont la densité massique est ρ et la densité électrique σ.

Cette dernière équation s'impose de plus, si l'on part des équations du mouvement de l'électricité écrit au moyen de la force de Lorentz, et qu'on cherche à les interpréter comme celles qui définissent un déplacement parallèle dans M_5 au sens de M. Levi-Civita. La notion de force est ainsi bannie. M. L. de Broglie a fait une remarque analogue [3].

Ce qu'on peut retenir de cette théorie unitaire, c'est qu'il est possible de tenir compte dans les équations de la gravitation des champs d'ondes créés par le mouvement de la matière. Dès l'instant où ces champs ne sont plus un simple artifice formel, mais qu'on leur accorde une véritable signification physique, leur influence sur les champs de gravitation peut n'être pas négligeable et les remarques précédentes montrent comment on pourrait en tenir compte.

L'équation (18), appliquée à un électron, suggérerait que le rapport de la charge à la masse pourrait varier. Physiquement, il y a là une grosse difficulté, mais en restant dans le cadre d'une théorie des milieux continus qui est proprement celui d'une théorie des champs, cette difficulté disparaît.

Enfin, si l'on établit une théorie invariantive fondée sur le ds^2 de M_5 en considérant les dérivées par rapport à x_5 au même titre que les dérivées par rapport aux autres variables, la simplicité des rapports entre l'équation (17) pour laquelle $\alpha = \beta = 5$ et les géodésiques du ds^2, qui devraient définir alors les lignes d'univers des mouvements d'un point épreuve chargé, disparaît. Ces géodésiques ne sont plus les bicaractéristiques de l'équation d'indices 55. Mais dans ce cas, le champ électromagnétique est prédominant et probablement déjà, l'approximation de l'optique géométrique n'est plus admissible.

Périodicité des ondes de la mécanique.

40. Quoi qu'il en soit des tentatives précédentes très formelles encore, d'unification des théories des champs (¹), on peut essayer de se placer à un tout autre point de vue, plus conforme à l'histoire de la mécanique ondulatoire et plus propre à en faire comprendre l'état actuel. On sait que l'idée essentielle de M. L. de Broglie réside dans le postulat très hardi d'attacher une fréquence, ou si l'on préfère, une *périodicité* à toute particule en mouvement.

(¹) On verra dans un fascicule de cette collection, dû à M. de Donder, [10], un exposé de tentatives semblables.

Dès lors, il convient d'examiner quelles conséquences on peut tirer de l'hypothèse d'après laquelle les ondes d'Hamilton-Vessiot seraient elles-mêmes périodiques. Et tout d'abord, de même qu'en optique c'est le *rayon* qui fut la première notion à laquelle s'accrocha la théorie, puis lorsqu'il devint évident, pour les phénomènes à petite échelle, que cette notion était insuffisante et que celle d'une onde périodique devenait nécessaire, de même peut-on penser que la *trajectoire*, ou la *ligne d'univers* d'un point matériel sont des notions insuffisantes pour des phénomènes qui se déroulent à l'échelle atomique, et que la notion d'*onde* convenablement introduite en dynamique servirait à mettre de l'ordre dans la physique quantique.

Le problème conservera pour nous un aspect très formel; dans ce petit livre, il n'est pas possible de colorier, par des touches physiques, l'esquisse très dépouillée que les considérations précédentes nous permettent de faire. Il faut dire simplement que les longueurs d'ondes attachées aux mouvements étudiés par la mécanique classique doivent être d'une extrême petitesse : les effets « physiques » de ces ondes doivent être si faibles que l'on doit comprendre immédiatement pourquoi pas plus le mécanicien que l'astronome ne purent jadis les observer.

Notre but est donc d'introduire la notion d'onde périodique comme prolégomène à une mécanique qui admettrait la mécanique analytique comme première approximation de même que l'optique physique admet l'optique géométrique comme première approximation.

41. Naturellement, de même que c'est par l'équation de d'Alembert que se compléta l'optique lorsqu'elle passa, grâce à Kirchhoff, du stade « géométrique » au stade « physique » le plus évolué, c'est par une équation du second ordre qu'il conviendra de compléter la mécanique analytique.

Pour préciser toutes les circonstances dans lesquelles une telle équation du second ordre a été utilement employée, le mieux est de se placer dans le cadre de la relativité restreinte. L'équation de Jacobi, dans l'hypothèse d'un champ dérivant d'un potentiel, a été rappelée au paragraphe **18**. L'équation (13) de ce paragraphe doit être l'équation des caractéristiques d'une équation du second ordre. La plus simple équation de propagation qu'on puisse proposer est évidemment (1) :

$$(19)\quad \sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x_4^2}-2\varepsilon\left(\sum A_i\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\,\partial x_5}-\frac{1}{c^2}A_4\frac{\partial^2 z}{\partial x_4\,\partial x_5}\right)$$
$$-\left[\varepsilon^2\left(\sum A_i^2-\frac{1}{c^2}A_4^2\right)-m_0^2c^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial x_5^2}=0.$$

La variable x_5 provient de ce que le temps de la propagation est, dans l'interprétation indiquée au paragraphe 18, la variable S; nous l'appellerons x_5 et nous nous souviendrons que les équations des surfaces d'ondes sont de la forme

$$S=f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$$

puisque le régime est permanent, ou encore

$$x_5+\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=\text{const.}$$

Introduire dans le débat l'idée d'ondes périodiques, c'est chercher des solutions de (19) qui seraient des fonctions z contenant en facteur un sinus, la fonction sous le signe sin devant être constante sur les surfaces d'ondes, ce qui revient à poser

$$z=a\sin\mu[x_5+\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)],$$

où a est une fonction de x_1, x_2, x_3 et x_4. Il est naturel, en effet, d'admettre qu'elle ne dépend pas de x_5 à cause de la permanence du régime de propagation. Le facteur μ dans la *phase* est une constante.

Il est préférable d'ailleurs d'écrire

$$z=e^{i\mu x_5}\psi(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$$

et l'on voit sans peine que ψ vérifie l'équation suivante d'où procèdent toutes les *équations dites de Schrödinger :*

$$(20)\quad \sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_4^2}-2\varepsilon i\mu\left(\sum_{i=1}^{i=3}A_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i}-\frac{A_4}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial x_4}\right)$$
$$+\mu^2\left[\varepsilon^2\left(\sum_{i=1}^{i=3}A_i^2-\frac{1}{c^2}A_4^2\right)-m_0^2c^2\right]\psi=0,$$

(1) Comparer avec de Donder [10] et Géhéniau [11 et 12].

qui ne contient plus x_5 (*cf.* Gordon [15], qui a donné le premier une équation relativiste de Schrödinger).

On devra dès lors chercher des solutions ψ de la forme

$$\psi = a(x_1, x_2, x_3, x_4)\, e^{i\mu\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)}, \tag{21}$$

mais, afin de ne pas introduire des longueurs d'ondes trop grandes, nous supposerons que μ est un très grand nombre. En reprenant les calculs du paragraphe 30, et en changeant le sinus en exponentielle, on trouve que, si l'on peut négliger μ devant μ^2 et les termes indépendants de μ devant les termes en μ (1), φ doit vérifier l'équation

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_4} - \varepsilon A_4\right)^2 - \sum_{i=1}^{i=3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - \varepsilon A_i\right)^2 = m_0^2 c^2, \tag{22}$$

qui se trouve précisément être l'équation de Jacobi (13) du paragraphe 18 (2). Les surfaces d'égale phase, dans une propagation d'ondes périodiques dont la fréquence en $x_5 = S$, soit $\frac{\mu}{2\pi}$, est très grande, sont les caractéristiques de l'équation (20). Avec la même approximation, les bicaractéristiques de (22) sont les lignes d'univers d'un point de masse m_0 et de charge ε qui se déplace dans le champ de potentiel $\vec{A}$. On voit donc bien que si l'on admet que l'équation du second ordre (20) régit la dynamique du point matériel, dans une mécanique où les ondes jouent un rôle essentiel, la notion de rayon, c'est-à dire de trajectoire, conserve un sens utile en première approximation.

Interprétation probabiliste.

42. Il est naturel de rechercher ce qui signifient les équations qu'on obtient en annulant le terme en μ et le terme indépendant de μ par la substitution de (21) dans (20).

---

(1) Il faut remarquer que dans le problème actuel certains coefficients sont de l'ordre de μ.

(2) Il convient de citer que M. Debye avait fait une remarque fort intéressante sur la relation entre l'équation de propagation et celle de l'optique géométrique; il avait déjà signalé que cette dernière résulte de la première par un passage à la limite lorsque la longueur d'onde de la lumière considérée tend vers zéro. Cette remarque a été citée par MM. Sommerfed et Runge [37].

M. L. de Broglie en a donné une interprétation fort élégante pour le cas où l'on se borne à l'approximation newtonienne de la dynamique [4, p. 85]. Il est possible de l'étendre au cas de la relativité restreinte. L'équation fournie par le terme en μ, qui est d'ailleurs aussi celle qu'on obtient en annulant le terme en i après la substitution de (21) dans (20), est

$$(23)\quad \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial a}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial a}{\partial x_4}\frac{\partial \varphi}{\partial x_4} + \frac{a}{2}\left[\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_4^2}\right] - \varepsilon\left[\sum_{i=1}^{i=3} A_i\frac{\partial a}{\partial x_i} - \frac{1}{c^2}A_4\frac{\partial a}{\partial x_4}\right] = 0,$$

qui s'écrit, après multiplication par $2a$,

$$(24)\quad \sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \varepsilon A_i\right)\right] - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial x_4}\left[a^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_4} - \varepsilon A_4\right)\right] = 0,$$

car, d'après la relation de Lorentz entre les potentiels, on a (¹)

$$\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial A_i}{\partial x_i} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial A_4}{\partial x_4} = 0.$$

Considérons le quadrivecteur $\overrightarrow{W}$ dont les composantes covariantes sont

$$(25)\qquad W_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \varepsilon A_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

L'équation (24) peut s'écrire

$$\sum_{i=1}^{i=4}\frac{\partial(a^2 W^i)}{\partial x_i} = 0.$$

Soit

$$(26)\qquad \operatorname{Div} a^2\overrightarrow{W} = 0,$$

(¹) Cette relation s'écrit $\sum_{i=1}^{i=4}\frac{\partial A^i}{\partial u_i}$ en utilisant les notations habituelles du calcul tensoriel. Or $A_i = -A^i$ $(i = 1, 2, 3)$ et $A_4 = c^2A^4$, car la forme fondamentale est $d\sigma^2 = c^2\,dx_4^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$.

où Div est le symbole de la divergence d'univers, car

$$W^i = -W_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

et

$$W^4 = \frac{1}{c^2} W_4.$$

Il y a donc un fluide fictif, dont il faut trouver la définition, qui a pour quantité de mouvement quadridimensionnelle le vecteur $a^2 \overrightarrow{W}$; l'équation (26) est l'équation de continuité de ce fluide.

43. Définissons, relativement à une équation de Jacobi quelconque, des *classes de mouvements*. Soit une intégrale complète

$$S(q_1, \ldots, q_n; a_1, \ldots, a_n)$$

d'une équation de Jacobi. On sait qu'il faut encore n constantes arbitraires pour définir l'intégrale générale des équations du mouvement. Nous dirons que tous les mouvements pour lesquels $a_1, \ldots, a_n$ sont fixés font partie d'une même classe. On considérera alors des corpuscules identiques dont les mouvements sont tous d'une seule classe; il y en a ∞^n (correspondant aux valeurs des n constantes qui n'interviennent pas dans l'intégrale complète). Ces points matériels forment un fluide qui remplit une région de l'espace des q_i. C'est de la vitesse, par suite de la quantité de mouvement, des points de ce fluide que nous allons nous occuper dans le cas particulier du problème précédent. Remarquons que ce fluide fictif est formé de particules matérielles qui n'ont aucune action les unes sur les autres.

La donnée des constantes a_i dans l'intégrale complète définit parfaitement, en chaque point de l'espace des q_i, les valeurs des p_i relatives à la particule qui s'y trouve (¹). Or les p_i sont les composantes d'un champ qui, dans le fluide, servent à caractériser la quantité de mouvement. On peut donc dire que l'on connaît, lorsqu'on se donne une classe de mouvements, un champ de vitesses d'un certain fluide. Si, dès lors, d'un point matériel on sait à quelle classe son

(¹) Dans le cas d'un régime stationnaire, l'un des q_i est le temps ordinaire; le temps de la propagation a été éliminé; en décomposant E_n en « espace » et en temps, on détermine avec les p_i l'état d'une grandeur en un point de « l'espace » à un instant.

mouvement appartient, on ne connaît rien de sa position. On sait seulement qu'il est une particule d'un certain fluide, défini par des variables d'Euler.

Or supposons que la densité de ce fluide soit très grande dans une petite région et très faible ailleurs. Ne sachant rien sur la position du point matériel qui nous occupe, ne pourrions-nous pas dire qu'il y a des chances pour qu'on le trouve précisément dans les régions où la densité du fluide est grande ?

Il est donc naturel de considérer la densité du fluide fictif, qui est en quelque sorte le *collectif* des mouvements de toute une classe, comme une *probabilité relative*, comme une *densité de probabilité*, ou encore comme une mesure de la *probabilité de présence* en un point, à un instant, de notre corpuscule.

On voit donc que c'est en se posant une question bien naturelle qu'on est conduit à introduire le calcul des probabilités dans la mécanique analytique, ou plutôt dans la conception ondulatoire de la mécanique analytique.

Une étude plus systématique de ce qu'il a appelé la *méthode eulérienne* d'étude des champs de forces a été faite tout récemment par M. J. Ullmo [42].

44. Reprenons le calcul du paragraphe 42 et cherchons l'interprétation du quadrivecteur $\overrightarrow{W}$. Il suffit pour cela de se reporter au paragraphe 18. On voit que

$$\overrightarrow{W} = \frac{\overrightarrow{V}}{c} \tag{27}$$

et, par suite, l'équation de continuité (26) s'écrit

$$\sum_{i=1}^{i=4} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^2 m_0 \frac{dx_i}{ds}\right) = 0.$$

Or le vecteur d'univers dont les composantes contravariantes sont $m_0 \frac{dx}{ds}$ est la quantité de mouvement généralisée du point que nous considérons. Le fluide fictif que nous considérons a une densité égale à $a^2 m_0$, et l'on peut dire que $a^2 = \psi\bar{\psi}$ mesure la probabilité qu'à l'instant x_4, le point matériel de masse m_0, dont on ne sait qu'une chose, c'est que son mouvement est de la classe déterminée par le choix des constantes qui entrent dans l'intégrale complète φ de l'équation de Jacobi (22), se trouve au point (x_1, x_2, x_3).

Remarquons que la fonction a est déterminée par l'équation

$$(28) \qquad \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial^2 a}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 a}{\partial x_4^2} = 0,$$

qu'on obtient en écrivant que le terme indépendant de μ dans (20) où l'on a substitué (21) est nul.

Il est naturel, puisque a est déterminé à un facteur constant près, de le normer de manière que la probabilité totale de trouver le point considéré à quelque endroit à un instant x_4 soit précisément l'unité. On n'aurait qu'à écrire, en intégrant sur tout l'espace,

$$\iiint \psi\overline{\psi}\, d\tau = 1.$$

Mais cette équation n'est pas invariante vis-à-vis des transformations de Lorentz. On pourrait écrire aussi

$$\iiiint_{\mathrm{U}} \psi\overline{\psi}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 = 1,$$

où le domaine d'intégration est tout l'univers, mais en général, cette intégrale est divergente.

Il y a là une difficulté assez grave qui a conduit, avec d'autres d'ailleurs, à une nouvelle théorie de la mécanique ondulatoire, due à M. Dirac et dans laquelle l'équation du second ordre (20) est remplacée par un système d'équations du premier ordre qui, itéré, conduit à (20). Comme M. Racah [35] l'a montré, il y a une relation entre le nouveau système et l'équation de Jacobi qui définit précisément les caractéristiques du système. Il est impossible, dans le cadre de cet ouvrage, d'exposer la théorie de Dirac. On sait son importance et sa fécondité. M. L. de Broglie a montré qu'elle conduit, à son tour, à des difficultés provenant encore du rôle dissymétrique qu'elle fait jouer, malgré son origine, à l'espace et au temps [5].

45. Il faut remarquer que si l'on abandonne l'approximation de l'optique géométrique, il n'est plus possible de déterminer a et φ par les deux équations à une inconnue (22) et (28). Cependant l'équation (23) persiste car elle provient aussi bien de l'annulation du terme en i que de celle du terme en μ dans la substitution de (21) dans (20) ([1]).

Elle peut toujours s'interpréter par (26), mais $\overrightarrow{W}$ a maintenant un sens différent puisqu'on ne peut plus l'exprimer avec une solution de l'équation de Jacobi. La relation entre a et φ, qu'on obtient en annulant le terme réel après avoir substitué (21) dans (20), s'écrit

$$\mu^2\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_4}-\varepsilon A_4\right)^2-\sum_{i=1}^{i=3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}-\varepsilon A_i\right)^2-m_0^2c^2\right]$$
$$-\frac{1}{a}\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 a}{\partial x_4^2}-\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial^2 a}{\partial x_i^2}\right]=0.$$

On donne, dans les traités, une autre forme à $\overrightarrow{W}$ que celle que nous avons donnée plus haut (27). On part de l'équation (20), on y change i en $-i$, ψ en $\bar{\psi}$, les A_k, φ et a restant inchangés. On obtient une équation (20′) qu'il est inutile d'écrire. On multiplie les deux membres de (20) par $\bar{\psi}$, ceux de (20′) par ψ et l'on soustrait membre à membre les équations obtenues. On trouve sans peine [5, p. 93], après avoir tenu compte de la relation de Lorentz :

$$\sum_{i=1}^{i=4}\frac{\partial C^i}{\partial x^i}=0; \tag{29}$$

les composantes covariantes de $\overrightarrow{C}$ sont :

$$C_k=2\mu\varepsilon i A_k\psi\bar{\psi}-\left(\bar{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}-\psi\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_k}\right)\qquad (k=1,2,3),$$
$$C_4=2\mu\varepsilon i A_4\psi\bar{\psi}-\left(\bar{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x_4}-\psi\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_4}\right).$$

On retrouve (26) en remplaçant ψ par $ae^{i\varphi}$ et $\bar{\psi}$ par $ae^{-i\varphi}$ dans (29).

Le vecteur $\overrightarrow{C}$ s'appelle parfois le *courant de probabilité* (d'univers).

46. Le lecteur verra sans peine comment les équations des paragraphes précédents se simplifient lorsqu'on se borne à l'approxima-

([1]) Bien entendu, après simplification par $e^{i\mu\varphi}$.

tion newtonienne. En particulier, l'équation de continuité devient

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \operatorname{div} a^2 \vec{v} = 0,$$

où $a^2 = \psi\bar{\psi}$ et $\vec{v}$ est la vitesse ordinaire du point dans le fluide fictif. On norme ici a sans avoir de difficultés concernant l'invariance

$$\int\int\int_E a^2\, dx\, dy\, dz = 1,$$

le domaine d'intégration étant tout l'espace. Notre propos n'est pas d'entrer plus avant dans la mécanique ondulatoire, mais nous pouvons remarquer que l'équation du second ordre au moyen de laquelle on détermine $\psi = ae^{i\mu\varphi}$ est l'*équation de Schrödinger*. ψ doit en être une solution *uniforme*, *finie* dans tout l'espace, telle que

$$\int\int\int \psi\bar{\psi}\, dv = 1.$$

Ces conditions déterminent des fonctions fondamentales de l'équation de Schrödinger après qu'on ait déterminé les valeurs des paramètres dynamiques qui y entrent afin que l'équation ait des solutions de l'espèce indiquée [36].

Onde plane et constante de Planck. Principe de de Broglie.

47. Il reste à dire quelques mots du nombre μ, supposé très grand, que nous avons introduit pour passer de l'équation du second ordre à l'équation de Jacobi, c'est-à-dire pour obtenir aisément l'approximation « géométrique » de la mécanique ondulatoire.

Puisque toute l'évolution de la physique quantique a prouvé que, lorsqu'on peut négliger la constante h de Planck dans telle ou telle relation exprimant une loi quantique, on retrouve une loi de la physique classique, on peut penser que μ doit être une fonction de h, considéré comme un paramètre, qui tend vers l'infini lorsque h tend vers zéro.

---

(1) Dans ce cas on part de l'équation (12) du paragraphe 18 et on fait les simplifications habituelles lorsqu'on passe de la relativité restreinte à la mécanique newtonienne.

Essayons, pour préciser ces remarques, de prendre le cas d'un point matériel de masse m_0 se déplaçant dans l'univers, avec l'hypothèse d'un potentiel $\vec{A}$ nul.

L'équation de propagation est alors

$$\sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_4^2} - \mu^2 m_0^2 c^2 \psi = 0. \tag{30}$$

Les solutions les plus simples en sont

$$\psi = a\, e^{i\mu(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4)}, \tag{31}$$

où a et les a_i sont des constantes. L'onde représentée par cette fonction est une onde plane [1]. On sait d'autre part que les rayons de la propagation, à l'approximation géométrique, sont des droites; les trajectoires du point matériel sont, en effet, en l'absence du champ, rectilignes et elles sont parcourues d'un mouvement uniforme; les lignes d'univers sont donc rectilignes; on substitue (31) dans (30) et l'on trouve

$$\frac{a_4^2}{c^2} - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = m_0^2 c^2. \tag{32}$$

Mais les nombres a_1, a_2, a_3, a_4 sont des paramètres covariants de la normale à l'onde plane, ils sont proportionnels aux paramètres covariants de la quantité de mouvement généralisée. On aura, k étant un facteur à déterminer,

$$a_i = -k m_0 \frac{dx_i}{ds}, \qquad a_4 = k m_0 c^2 \frac{dx_4}{ds}.$$

En substituant dans (32), on trouve $k^2 = 1$.

D'autre part, la fréquence de l'onde considérée étant ν, relativement au temps x_4, on doit avoir [2]

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_4} = 2\pi i \nu \psi.$$

---

[1] Si $m_0 = 0$, on a l'équation de l'optique. A propos de cette équation, il convient de citer l'étude très pénétrante de M. Le Roux [19] dont les considérations s'apparentent à celles que nous faisons ici.

[2] Il pourrait y avoir ici quelque incertitude sur la voie à suivre. Nous avons remarqué plus haut que ψ doit être périodique en x_5, si l'on veut utiliser la théorie de MM. Delassus et Hadamard. Lorsque l'on traite des problèmes simples, la

Or, on a

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_4} = i\mu a_4 \psi = i\mu m_0 c^2 \frac{dx_4}{ds}\psi = i\mu \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\psi,$$

où $\beta = \frac{c}{v}$, v étant la vitesse de la particule (dans l'espace). On pourra donc poser

$$2\pi\nu = \mu \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{33}$$

La quantité $\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ représente l'*énergie* E du point matériel. Dans un très grand nombre de phénomènes, en particulier dans ceux qui concernent le rayonnement, on a été amené à attacher une fréquence aux éléments d'énergie qui semblent émis ou absorbés d'une manière discontinue. M. L. de Broglie, on le sait [2], a pensé qu'il convenait d'étendre la relation du quantum dont Planck, Einstein et Bohr avaient fait un si fécond usage. Il a proposé de faire correspondre, à tout phénomène où la quantité d'énergie E est mise en jeu, une fréquence ν par la condition

$$E = h\nu \quad (^1). \tag{34}$$

Dès lors la relation (33) qui s'écrit, si précisément l'on admet que l'onde de la mécanique analytique a la fréquence indiquée par le principe de de Broglie,

$$2\pi\nu = \mu E = \mu h\nu,$$

prouve que

$$\mu = \frac{2\pi}{h}.$$

---

fonction φ est linéaire en x_4, donc la périodicité relativement à x_5 entraîne la périodicité relativement à x_4. Il serait intéressant, dans les cas les plus généraux, de s'en tenir à la périodicité en x_5, et de ne pas ajouter l'hypothèse de la périodicité en x_4. Cela reviendrait, dans le développement ultérieur de la mécanique quantique, à ne pas faire jouer un rôle privilégié à l'énergie et peut-être gagnerions nous par surcroît cette théorie tant souhaitée aujourd'hui où l'espace et le temps ne joueraient pas des rôles trop différents. Il y aurait même des chances pour que la signification de la constante h fût éclairée par le rôle essentiel joué par x_5, c'est à dire par *l'action*.

(1) Il convient de citer ici un travail de M. Persico [34]; cet auteur a montré que si l'on admet que l'énergie est une fonction de la fréquence, une théorie de la propagation, toute semblable à celle que nous avons développée ci dessus, conduit finalement à la relation $E = h\nu$.

Vitesse de groupe.

48. Il se présente cependant dès l'abord une difficulté assez grave dont M. L. de Broglie est venu à chef d'une géniale manière. Nous l'avons d'ailleurs signalée il y a longtemps déjà ; elle se présente dès l'instant où l'on introduit le mouvement par ondes dans la mécanique analytique (*cf.* Chap. IV, § 33). *La vitesse de propagation d'une onde attachée au mouvement d'un point matériel n'est pas égale à la vitesse du point matériel.*

On peut s'en rendre compte immédiatement sur l'exemple que nous venons de traiter en calculant la vitesse de l'onde plane. Le plus simple est de remarquer que pour cette onde plane

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_4^2} = -4\pi^2\nu^2\psi;$$

dès lors l'équation (30) peut s'écrire

$$(35) \qquad \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_4^2} = 0$$

avec

$$n^2 = \frac{4\pi^2\nu^2 - \mu^2 m_0^2 c^4}{4\pi^2\nu^2} = 1 - \frac{m_0^2 c^4}{h^2\nu^2} = 1 - \frac{\nu_0^2}{\nu^2},$$

si l'on pose $m_0 c^2 = h\nu_0$, ν_0 étant la fréquence attachée au point matériel pour un observateur par rapport auquel il est au repos ; dans ce cas, en effet, la masse m_0 est équivalente à l'énergie $E_0 = m_0 c^2$ (1).

La vitesse de l'onde est dès lors, d'après (35),

$$V = \frac{c}{n},$$

c'est-à-dire qu'elle est supérieure à c car $n < 1$. On a, d'autre part,

$$1 - \frac{\nu_0^2}{\nu^2} = 1 - \frac{E_0^2}{E^2} = 1 - \frac{m_0^2 c^4}{\dfrac{m_0^2 c_4}{1-\beta^2}} = \beta^2 = \frac{v^2}{c^2};$$

(1) La relation $W = h\nu$ pour l'énergie, en entraîne naturellement par covariance d'autres pour les composantes de la quantité de mouvement, comme M. L. de Broglie l'a montré. De plus, nous nous bornons ici au cas très simple de l'onde plane; la généralisation aux cas où le champ de forces est quelconque a été poursuivie aussi avec succès par le fondateur de la mécanique ondulatoire. Dans le cas d'un champ einsteinien, M. Levi-Civita a introduit la notion d'onde au sens local [24].

donc

$$V = \frac{c^2}{v}.$$

Le produit de la vitesse du point matériel par la vitesse de l'onde plane qui lui est associée est égal au carré de la vitesse de la lumière.

En optique, on savait déjà depuis longtemps que la vitesse de phase dans un milieu dispersif n'est pas égale à la vitesse de transport de l'énergie. On avait reconnu, depuis Lord Rayleigh, que si n, l'*indice de réfraction* du milieu où se propagent les ondes, est une fonction de la fréquence, la vitesse U, dite *vitesse de groupe*, suivant laquelle se propage l'énergie est donnée par la formule

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{c}\,\frac{d(n\nu)}{d\nu}.$$

Or, dans notre problème, on voit que

$$U = v.$$

La vitesse du point matériel est égale, dans le cas simple qui nous occupe, à la vitesse de groupe des ondes planes qui sont attachées au mouvement du point.

Ce principe, très général, placé avec le principe de la fréquence, à la racine de la mécanique ondulatoire, a été étudié, d'une manière exhaustive, par M. L. de Broglie, dans son *Introduction à l'étude de la Mécanique ondulatoire;* nous y renvoyons le lecteur. Il nous suffit d'avoir montré le début du chemin qui, partant de la mécanique analytique, conduit à la mécanique ondulatoire. Pressentie par Hamilton, préparée par MM. Vessiot et Hadamard, cette voie nouvelle dans laquelle MM. L. de Broglie et Schrödinger se sont hardiment avancés, a pénétré au cœur d'une province nouvelle de la philosophie naturelle. On peut l'explorer plus complètement par d'autres voies, mais il nous semble qu'aucune n'est plus attrayante que celle que nous avons décrite au cours de cet essai.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. J. Beudon. — Sur les caractéristiques des équations aux dérivées partielles (*Bull. de la Soc. Math. de France*, t. 25, 1897).
2. L. de Broglie. — Recherches sur la théorie des quanta (*Thèse de Paris*, nº 1819, 1924. Insérée aux *Annales de Physique*).
3. L. de Broglie. — L'Univers à cinq dimensions et la mécanique ondulatoire (*Journ. de Phys.*, 6e série, t. 8, 1927).
4. L. de Broglie. — Introduction à l'étude de la mécanique ondulatoire 1 vol., Paris, 1930.
5. L. de Broglie. — L'électron magnétique (*Théorie de Dirac*). 1 vol., Paris, 1934).
6. E. Cartan. — Sur la théorie des systèmes en involution et ses applications à la relativité (*Bull. de la Soc. Math. de France*, t. 59, 1931).
7. J. Chazy. — La théorie de la Relativité et la Mécanique céleste. 2 vol., Paris, 1928 et 1930.
8. E. Delassus. — Sur les équations linéaires aux dérivées partielles (*Ann, École norm. sup.*, 3e série, t. 13, 1896).
9. Th. de Donder. — La gravifique einsteinienne. 1 vol., Paris, 1921.
10. Th. de Donder. — Applications de la gravifique einsteinienne (*Mém. Sc. Math.*, fasc. XLIII, 1930).
11. J. Géhéniau. — Sur les ondes de L. de Broglie dans un champ gravifique et électromagnétique quelconque (*C. R.*, t. 197, 1933).
12. J. Géhéniau. — Les lois fondamentales de l'onde de L. de Broglie dans la gravifique de Th. de Donder (*C. R.*, t. 197, 1933).
13. F. Gonseth et G. Juvet. — Sur les équations de l'électromagnétisme. Sur la métrique de l'espace à cinq dimensions de l'électromagnétisme et de la gravitation. Sur l'équation de M. Schrödinger. Les équations de l'électromagnétisme et l'équation de M. Schrödinger dans l'Univers à cinq dimensions. Quatre notes aux *Comptes rendus*, t. 185, 1927.
14. F. Gonseth et G. Juvet. — Sur la relativité à cinq dimensions et sur une interprétation de l'équation de Schrödinger (*Helv. Phys. Acta.*, t. 1, 1928).
15. W. Gordon. — Der Compton effekt nach der Schrödingerschen Theorie (*Zs. f. Phys.*, t. 33, 1926, p. 40).
16. J. Hadamard. — Leçons sur la propagation des ondes. 1 vol., Paris, 1903.
17. J. Hadamard. — Lectures on Cauchy's problem and linear partial differential equations (*Silliman Memorial Lectures*. 1 vol., New-Haven, 1923). Cet ouvrage a été traduit en français, avec des compléments, par Mlle J. Hadamard, sous le titre : *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*. 1 vol., Paris, 1932.

18. J. Le Roux. — Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes (*Thèse de Paris*, n° 835, 1894).

19. J. Le Roux. — Considérations sur une équation aux dérivées partielles de la physique mathématique (*Proceedings of the International Math. Congress. Toronto*, t. 1, 1924).

20. T. Levi-Civita et U. Amaldi. — Article *Onde*, de l'*Enciclopedia Italiana.*

21. T. Levi-Civita. — Comment un conservateur pourrait-il arriver au succès de la mécanique nouvelle (*Ens. math.*, vol. 21, 1920).

22. T. Levi Civita. — Caratteristiche e bicaratteristiche delle equationi gravitasionali di Einstein. Deux notes des *Rend. dei Lincei*, 6e série, t. XI, 1930.

23. Levi-Civita. — Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa. 1 vol., Bologna, 1931. Cet ouvrage a été traduit en français par M. M. Brelot sous le titre : *Caractéristiques des systèmes différentiels et propagation des ondes.* 1 vol., Paris, 1932.

24. Levi-Civita. — Some mathematical aspects of the new mechanics (*Bull. Amer. Math. Soc.*, Aug. 1933).

25. S. Lie. — Berträge zur allgemeinen Transformations (*Theorie Leipziger Berichte*, 1895).

26. S. Lie. — Die infinitesimalen Berührungstransformationen der Optik (*Theorie Leipziger Berichte*, 1896).

Les œuvres de Lie sont en cours de publication, sous le titre : *Gesammelte Abhandlungen* (Leipzig et Oslo). Les mémoires précédents se trouvent dans le sixième volume (*Zweite Abteilung*), édité par M. F. Engel.

27. W. R. Hamilton. — Theory of systems of rays (*Trans. Ray. Irish Acad.* vol. 15, 1828).

28. W. R. Hamilton. — On a general method expressing the paths of light, and of planets, by the coefficients of a characteristic function (*Dublin Univ. Rev.*, 1833).

Les œuvres du grand mathématicien irlandais ont paru en partie sous le titre : *The Mathematical Papers of Sir Williams Rowan Hamilton.* Ce sont MM. A. W. Conway et J. L. Synge qui se sont chargés de ce travail d'édition. 1 volume : *Geometrical optics*, a paru. Cambridge, 1931. Les éditeurs l'ont enrichi de notes. Citons pour notre profit : *On the relation of Hamilton's optical method to dynamics*, p. 484, et : *On the group velocity and wave mechanics*, p. 500.

29. M. Janet. — Leçons sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles. 1 vol., Paris, 1929.

30. Th. Kaluza. — Zum Unitäts problem der Physik (*Sitzungsber. d. preuss. Akad. d. Wiss.*, t. 2, 1921).

31. F. Klein. — Ueber neuere englische Arbeiten zur Mechanik (*Jahresb. d. D. Math. Ver.*, Bd. 1, 1891,-1892; *On Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Bd. 2, Berlin, 1922).

32. O. Klein. — Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie. (*Zs. f. Phys.*, Bd 37, 1926).

33. J. van Mieghem. — Étude sur la théorie des ondes (*Institut belge de recherches radioscientifiques*, vol. I, 1934).
34. E. Persico. — Sulla relazione $E = h\nu$ nella meccanica ondulatoria (*Rend. dei Lincei*, 6e série, t. 11, 1930).
35. G. Racah. — Caratteristiche delle equazioni di Dirac el principio di indeterminazione (*Rend. dei Lincei*, 6e série, t. 13, 1931).
36. E. Schrödinger. — Quantisierung als Eigenwertproblem (*Annalen der Phys.*, IV, Folge, Bd 79, 1926, p. 489). Cette deuxième communication contient l'analyse des rapports entre la théorie de Jacobi et la propagation des ondes. Elle a été traduite en français avec les autres mémoires fondamentaux de M. Schrödinger par M. Al. Proca, sous le titre : *Mémoires sur la mécanique ondulatoire*. 1 vol., Paris, 1933.
37. A. Sommerfeld et J. Runge. — Trawendung der Vektorrechung auf der Grundlagen der geometrischen Optik (*Annalen der Phys.*, 4te Folge, Bd 35, 1911).
38. T. Y. Thomas et E. W. Titt. — Systems of partial differential equations and their characteristic surfaces (*Ann. of Math.*, 2e série, vol. 34, 1933).
39. E. Vessiot. — Sur l'interprétation mécanique des transformations de contact (*Bull. Soc. Math. de France*, t. 34, 1906).
40. E. Vessiot. — Essai sur la propagation par ondes (*Ann. Ec. norm. sup.*, 3e série, t. 26, 1909).
41. E. Vessiot. — Sur la propagation par ondes et sur la théorie de la relativité générale (*C. R.*, t. 166, 1918).
42. J. Ullmo. — La méthode eulérienne d'étude des champs de forces (*Journ. École Pol.*, 2e série, 31e cahier, 1933).

TABLE DES MATIÈRES.