Mémorial des sciences mathématiques

J. Dubourdieu

Questions topologiques de géométrie différentielle

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 78 (1936)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1936__78__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,
DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT
Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées »

FASCICULE LXXVIII

Questions topologiques de géométrie différentielle

Par M. J. DUBOURDIEU

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1936

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

QUESTIONS TOPOLOGIQUES

DE

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Par M. J. DUBOURDIEU.

INTRODUCTION.

Le titre du présent fascicule n'est que la traduction de celui de *Topologische Fragen der Differentialgeometrie* sous lequel ont été publiés ces dernières années, à l'instigation de W. Blaschke, divers travaux de géométrie dont nous nous proposons de présenter ici quelques exemples typiques. Parmi ces travaux, on peut d'ailleurs distinguer deux catégories assez différentes.

Les uns, de géométrie pure, auxquels se rattachent tout naturellement des questions d'axiomatique, consistent à étudier les propriétés des figures géométriques qui restent invariantes par toute transformation dite « topologique ». Tels sont, pour en citer quelques-uns, les travaux de W. Blaschke sur les réseaux de courbes à configuration hexagonale (Sechseckgeweke) [1] et les réseaux de surfaces à configuration octaédrale (Achtflachgewebe) [2], ou ceux de K. Reidemeister et Podehl sur les réseaux et groupes [39] à [44].

Les autres, de géométrie différentielle, procèdent par voie analytique et supposent que les figures géométriques et les transformations par rapport auxquelles on étudie leurs propriétés d'invariance, soient de plus astreintes à satisfaire à certaines conditions de régularité et d'analyticité permettant de leur appliquer les procédés habituels du calcul différentiel. Même lorsqu'on aura restreint de la sorte la généralité du groupe fondamental de transformations, nous continuerons, d'ailleurs avec W. Blaschke, à désigner ces dernières sous la dénomination de « transformations topologiques » et les invariants différentiels des figures envisagées seront dits « invariants topologiques ». En particulier, nous dirons qu'une figure F est topologiquement applicable sur une figure F' ou encore qu'elle lui est topologiquement équivalente, s'il existe une transformation topologique, au sens restreint que nous venons d'attribuer à cette expression, qui transforme F en F'.

Nous laisserons complètement de côté, dans cet exposé, les problèmes de géométrie pure, et nous nous bornerons à étudier quelques problèmes simples de géométrie différentielle appartenant à la seconde catégorie et relatifs aux familles de courbes et de surfaces dans le plan et l'espace à trois dimensions. Dans ce genre de recherches, la méthode analytique conduit d'ailleurs assez souvent à des résultats que l'on peut, en fait, démontrer sous des conditions beaucoup moins restrictives par une voie purement géométrique et qui suggèrent alors des recherches rentrant dans le cadre des questions de la première catégorie, que nous signalerons incidemment.

D'autre part, nous traiterons ces questions par une méthode un peu différente de celle des mémoires originaux, mais qui présente l'avantage de les faire rentrer dans un type de problèmes qui a été étudié dans toute sa généralité par E. Cartan au début de son Mémoire sur les « sous-groupes des groupes continus de transformations », à savoir celui de l'équivalence de deux systèmes de n formes de Pfaff à n variables par rapport aux substitutions linéaires d'un groupe à r variables [25].

Limité ainsi à l'étude de ces quelques problèmes particuliers, le présent fascicule n'a d'autre prétention que de montrer la nature des études de géométrie différentielle publiées sous le titre de *Topologische Fragen der Differentialgeometrie*, et d'attirer l'attention du lecteur sur les méthodes de E. Cartan qui apparaissent particulièrement bien adaptées à ce genre de recherches.

CHAPITRE I.

PROBLÈME GÉNÉRAL DE L'ÉQUIVALENCE ET INVARIANTS D'UN SYSTÈME DE PFAFF.

I. — Produits symboliques. Covariants bilinéaires et trilinéaires.

1. Étant données deux séries de n différentielles

$$dx_1,\quad dx_2,\quad \ldots,\quad dx_n, \tag{1}$$

$$\delta x_1,\quad \delta x_2,\quad \ldots,\quad \delta x_n, \tag{2}$$

nous poserons, suivant la notation des produits extérieurs de Grassmann,

$$[dx_i,\ dx_j] = dx_i\,\delta x_j - dx_j\,\delta x_i. \tag{3}$$

Si, aux séries (1) et (2), on adjoint une troisième série de n différentielles

$$\mathrm{D}x_1,\quad \mathrm{D}x_2,\quad \ldots,\quad \mathrm{D}x_n, \tag{4}$$

on posera de même

$$[dx_i,\ dx_j,\ dx_k] = \begin{vmatrix} dx_i & dx_j & dx_k \\ \delta x_i & \delta x_j & \delta x_k \\ \mathrm{D}x_i & \mathrm{D}x_j & \mathrm{D}x_k \end{vmatrix} \tag{5}$$

Soit, d'autre part, deux expressions de Pfaff :

$$\begin{cases} \omega(d) = a_1\,dx_1 + a_2\,dx_2 + \ldots + a_n\,dx_n, \\ \varpi(d) = b_1\,dx_1 + b_2\,dx_2 + \ldots + b_n\,dx_n; \end{cases} \tag{6}$$

on appelle « produit extérieur » ou encore « produit symbolique » de ces deux expressions de Pfaff, et l'on note $[\omega, \varpi]$ l'expression bilinéaire par rapport aux deux séries de variables (1) et (2)

$$[\omega,\ \varpi] = \omega(d)\,\varpi(\delta) - \omega(\delta)\,\varpi(d). \tag{7}$$

De même, si ω, ϖ, χ sont trois expressions de Pfaff, on désignera par la notation symbolique $[\omega, \varpi, \chi]$ la forme trilinéaire par rapport aux trois séries de variables (1), (2), (4)

$$[\omega,\ \varpi,\ \chi] = \begin{vmatrix} \omega(d) & \varpi(d) & \chi(d) \\ \omega(\delta) & \varpi(\delta) & \chi(\delta) \\ \omega(\mathrm{D}) & \varpi(\mathrm{D}) & \chi(\mathrm{D}) \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Avec ce système de notations, il est clair que l'on a

$$(9) \qquad [\omega, \varpi] = -[\varpi, \omega],$$

$$(10) \qquad \begin{aligned} [\omega, \varpi, \chi] &= \quad [\varpi, \chi, \omega] = \quad [\chi, \omega, \varpi] \\ &= -[\varpi, \omega, \chi] = -[\omega, \chi, \varpi] = -[\chi, \varpi, \omega]. \end{aligned}$$

Les produits symboliques (7) et (8) s'expriment linéairement en fonctions des produits extérieurs (3) et (5), en multipliant symboliquement les expressions de Pfaff ω, ϖ, χ suivant les règles de la multiplication symbolique de Grassmann, qui ne diffèrent des règles ordinaires de l'algèbre que par la condition que, dans chaque produit partiel, on doit prendre soin de ne pas intervertir l'ordre des facteurs ou de tenir compte des relations (9) et (10) si l'on intervertit cet ordre.

2. Étant donnée l'expression de Pfaff à n variables

$$\omega(d) = a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2 + \ldots + a_n\, dx_n,$$

on appelle « covariant bilinéaire » ou « dérivée symbolique » de cette expression de Pfaff, et nous désignerons par ω', l'expression covariante bilinéaire par rapport aux deux systèmes de différentielles caractérisés par les symboles d et δ, définie comme suit :

$$(11) \qquad \begin{aligned} \omega' = d\,\omega(\delta) - \delta\,\omega(d) &= \sum_{i=1}^{n} da_i\, \delta x_i - \delta a_i\, dx_i \\ &= \sum_{(ik)} \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)[dx_i, dx_j]. \end{aligned}$$

De même, étant donnée une expression différentielle bilinéaire alternée quelconque,

$$\Omega(d, \delta) = \sum_{(ik)} a_{ik}[dx_i, dx_k] \qquad (a_{ik} = -a_{ki},\ a_{ii} = 0),$$

on appelle « covariant trilinéaire » ou « dérivée symbolique » de cette expression bilinéaire l'expression covariante trilinéaire par rapport aux trois systèmes de différentielles caractérisés par les symboles d, δ et D, définie comme suit :

$$(12) \quad \Omega' = d\,\Omega(\delta, \mathrm{D}) + \delta\,\Omega(\mathrm{D}, d) + \mathrm{D}\,\Omega(d, \delta) = \Sigma a_{ijk}[dx_i, dx_j, dx_k]$$

avec

$$a_{ijk} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j}.$$

Si A désigne une fonction quelconque des x, le covariant bilinéaire de $A\omega$ est

$$(A\omega)' = [dA, \omega] + A\omega', \tag{13}$$

et le covariant trilinéaire de l'expression bilinéaire $A[\omega, \varpi]$ est

$$\big[A[\omega, \varpi]\big]' = [dA, \omega, \varpi] + A[\omega', \varpi] - A[\omega, \varpi']. \tag{14}$$

Les coefficients du covariant bilinéaire d'une expression de Pfaff satisfont à des relations qui résultent du théorème fondamental suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une expression différentielle bilinéaire $\Omega(d, \delta)$ *soit le covariant bilinéaire d'une expression de Pfaff* ω *est que son covariant trilinéaire* Ω' *soit identiquement nul.* (*Théorème fondamental.*)

L'identité exprimée par le théorème précédent est l'analogue de l'identité de Jacobi dans la théorie des systèmes complets d'équations aux dérivées partielles. Nous l'appellerons « identité fondamentale ». (E. Cartan [**26**].)

3. La notion de covariant bilinéaire joue un rôle essentiel dans la théorie des systèmes d'équations de Pfaff.

Rappelons tout d'abord que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une expression de Pfaff soit une différentielle totale est que son covariant bilinéaire soit nul.

Considérons maintenant un système de s équations de Pfaff indépendantes à n ($n > s$) variables, dont on regarde s comme des fonctions inconnues des $n - s$ autres variables supposées indépendantes. Un tel système est dit complètement intégrable s'il admet une solution et une seule telle que, pour des valeurs numériques données des variables indépendantes, les fonctions inconnues prennent des valeurs numériques arbitrairement choisies.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de

Pfaff soit complètement intégrable est que les covariants bilinéaires des premiers membres des équations du système s'annulent quand on y suppose les différentielles liées par les équations du système. (*Théorème de Frobenius.*)

Les systèmes complètement intégrables ne constituent qu'une classe très particulière des systèmes généraux d'équations de Pfaff. La recherche de l'existence et du degré d'indétermination des multiplicités intégrales les plus générales d'un système de Pfaff constitue la théorie des systèmes de Pfaff en involution mise au point par E. Cartan [26]. Comme nous n'aurons pas à y faire appel dans l'exposé des quelques problèmes particulièrement simples que nous étudierons par la suite, nous n'insisterons pas ici sur cette théorie, bien que la connaissance en apparaisse indispensable à qui se proposerait de poursuivre des travaux dans cette voie.

Nous n'insisterons pas davantage ici sur les applications que E. Cartan a fait de cette théorie à celle de la structure des groupes finis ou infinis de transformations [26]. Nous nous bornerons à rappeler que cette théorie consiste essentiellement à définir les groupes continus finis ou infinis de transformations, comme ensembles de transformations qui laissent invariantes un certain nombre de fonctions et d'expressions de Pfaff, et nous donnerons dans ce qui suit des exemples de ce mode de définition pour des groupes continus finis.

II. — Système complet d'invariants de n formes de Pfaff à n variables.

4. On dit que deux systèmes de n expressions de Pfaff linéairement indépendantes à n variables, l'un $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, aux variables x_1, x_2, x_n, l'autre $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$, aux variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$, sont équivalents s'il existe une transformation ponctuelle

$$(15)\quad (\mathrm{T})\qquad X_i = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

telle que, par cette transformation, $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ se déduisent respectivement de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.

Les formes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ étant supposées linéairement indépendantes, leurs covariants bilinéaires peuvent être mis sous la forme

$$\omega'_s = \sum_{(ik)}^{1,2,\ldots n} c_{iks}[\omega_i, \omega_k] \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{16}$$

et l'on sait que les coefficients c_{iks} restent invariants par rapport à toute transformation ponctuelle (T). Ce sont des invariants du premier ordre en ce sens qu'ils s'expriment au moyen des dérivées premières des coefficients des ω_i. D'autre part, étant donné un invariant u d'ordre quelconque, sa différentielle peut être mise sous la forme

$$du = \sum_{i=1}^{n} u_i \omega_i, \tag{17}$$

et les coefficients u_i sont manifestement eux-mêmes des invariants de l'ordre immédiatement supérieur.

Du système fondamental d'invariants c_{iks} on déduit ainsi, par différentiations successives, des invariants d'ordre de plus en plus élevé. Ces derniers sont d'ailleurs liés par les identités que l'on obtient en écrivant, d'une part (relation fondamentale) que les covariants trilinéaires des $(\omega_i)'$ sont identiquement nuls, et d'autre part que les covariants bilinéaires des différentielles de chacun d'eux sont identiquement nuls.

Supposons que, parmi les invariants ainsi formés, il y en ait $p \leqq n$, soient $y_1, y_2, \ldots, y_p$ qui, considérés comme fonctions des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, soient indépendants, ce qui revient à dire que tous les autres sont des fonctions de ceux-là. Les coefficients c_{iks} des formules (16) sont alors des fonctions des y, ainsi d'ailleurs que les coefficients h_{ik} des différentielles dy_i,

$$dy_i = \sum_{k=1}^{k} h_{ik}\omega_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{18}$$

exprimées en fonction linéaire des ω_i.

En effectuant les mêmes opérations sur les formes $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$, aux variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$, on aura des identités analogues

$$\Omega'_s = \sum_{(ik)}^{1,2,\ldots n} C_{iks}[\Omega_i, \Omega_k], \tag{16'}$$

et des C_{iks} on déduira par différentiation des invariants d'ordre supérieur comme pour les ω_i. Dès lors, il est évident que le système de Pfaff (Ω) ne pourra être équivalent au système de Pfaff (ω) que si ces opérations conduisent au même nombre p d'invariants indépendants $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$, et si les coefficients C_{iks} des formules (16'), ainsi que les coefficients H_{ik} des Ω_i dans les développements linéaires des dY_i, sont les mêmes fonctions des Y que les quantités correspondantes c_{iks} et h_{ik} étaient fonctions des y. Mais de plus, s'il en est ainsi, les deux systèmes sont effectivement équivalents, car si l'on suppose que $dy_1, dy_2, \ldots, dy_p$ sont linéairement indépendants par rapport à $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$, le système différentiel

$$\Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_2 = \omega_2, \qquad \ldots, \qquad \Omega_n = \omega_n,$$

qui exprime l'équivalence des deux systèmes de Pfaff, et où l'on considère les X comme fonctions inconnues des x, est équivalent au système mixte

$$(19) \qquad \left\{ \begin{array}{l} Y_1 = y_1, \qquad Y_2 = y_2, \qquad \ldots, \qquad Y_p = y_p, \\ \qquad \Omega_{p+1} = \omega_{p+1}, \qquad \ldots, \qquad \Omega_n = \omega_n, \end{array} \right.$$

et l'on aperçoit immédiatement que ce dernier est complètement intégrable.

Supposons en particulier $p < n$. La solution générale du système (19) dépend alors de $n-p$ constantes arbitraires et l'on aperçoit que chacun des systèmes (ω) et (Ω) admet un groupe continu fini de transformations à $n-p$ paramètres, qui peuvent être caractérisées par la propriété de laisser invariantes d'une part les p fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_p$, et d'autre part les formes de Pfaff ω_i qui satisfont aux identités

$$(20) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \omega'_s = \sum\limits_{(ik)}^{1.2\ldots n} c_{iks}[\omega_i \omega_k], \\ dy_i = \sum\limits_{k=1}^{n} h_{ik}\omega_k, \end{array} \right.$$

dans lesquelles les c_{iks} et les h_{ik} sont des fonctions connues des y.

On peut montrer que tout groupe continu fini peut, en ajoutant au besoin des variables auxiliaires, être défini de cette manière; d'autre part deux groupes, pour lesquels le nombre des invariants y est le même et pour lesquels les c_{iks} et les h_{ik} sont les mêmes fonctions de ces invariants, sont semblables. D'où le nom « d'équations de structure » donné par M. Cartan aux relations (20).

D'ailleurs, la condition nécessaire et suffisante pour que le groupe soit transitif est que les c_{iks} soient des constantes ; celles-ci sont alors assujetties à satisfaire aux mêmes conditions que les constantes de structure qui se présentent dans la théorie ordinaire de la structure des groupes finis de Lie.

On exprime généralement l'ensemble des résultats précédents en disant que les invariants c_{iks} et ceux qui s'en déduisent par différentiation, comme il a été indiqué ci-dessus, constituent un *système complet d'invariants* du système de Pfaff (ω).

5. Les problèmes particuliers que nous traiterons dans ce qui suit rentrent dans le type plus général suivant :

Étant données n expressions de Pfaff $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ *linéairement indépendantes aux n variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *déterminer un système complet d'invariants de ce système :*

1° *par rapport à une transformation ponctuelle quelconque;*

2° *par rapport à une substitution linéaire quelconque des formes* ω_i *appartenant à un groupe à r paramètres* (Γ), *soit*

$$(\Gamma) \qquad \overline{\omega}_i = \alpha_{i1}(u)\omega_1 + \alpha_{i2}(u)\omega_2 + \ldots + \alpha_{in}(u)\omega_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où les α_{ik} *sont des fonctions données des paramètres* $u_1, u_2, \ldots, u_r$ *qui définissent le groupe* Γ.

Par système complet d'invariants il faut entendre un système d'invariants qui, comme au paragraphe précédent, fournisse la solution du problème d'équivalence suivant :

Étant donnés deux systèmes de Pfaff, l'un $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ *aux variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *l'autre* $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ *aux variables* $X_1, X_2, \ldots, X_n$, *rechercher s'il existe une transformation ponctuelle* (T) *telle que, par cette transformation,* $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ *se déduisent de* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ *par une substitution du groupe* (Γ), *c'est-à-dire telle que l'on ait*

$$\Omega_i = \alpha_{i1}(u)\omega_1 + \alpha_{i2}(u)\omega_2 + \ldots + \alpha_{in}(u)\omega_n,$$

les u étant pour une transformation (T) *répondant à la question certaines fonctions de* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ce problème a été traité à fond par E. Cartan [25] et fait intervenir dans sa généralité la théorie des systèmes de Pfaff en involution. Nous nous bornerons à indiquer ici que le principe de la méthode de E. Cartan consiste à considérer les r paramètres du groupe (Γ) comme r variables auxiliaires et à poser

$$\overline{\omega_i} = \alpha_{i1}(u)\omega_1 + \alpha_{i2}(u)\omega_2 + \ldots + \alpha_{in}(u)\omega_n,$$
$$\overline{\Omega_i} = \alpha_{i1}(\mathrm{U})\Omega_1 + \alpha_{i2}(\mathrm{U})\Omega_2 + \ldots + \alpha_{in}(\mathrm{U})\Omega_n.$$

Le problème primitif revient alors au suivant :

Déterminer pour $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n, \mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \ldots, \mathrm{U}_r$ *un système de* $u+r$ *fonctions indépendantes de* $x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r$ *telles que les expressions* $\overline{\Omega_i}$ *deviennent égales aux expressions* $\overline{\omega_i}$.

On est donc ramené, en somme, à l'étude des invariants des expressions $\overline{\omega_i}$. Les exemples simples que nous traiterons dans ce qui suit, et plus particulièrement celui du Chapitre III, feront comprendre le mécanisme de la méthode préconisée par E. Cartan pour élucider ce problème, et, pour une étude plus approfondie, nous ne pouvons que renvoyer le lecteur au mémoire original.

CHAPITRE II.

I. — Réseaux de trois familles de courbes dans le plan.

6. Considérons trois familles à un paramètre de courbes, définies dans un certain domaine du plan (u, v) par trois équations de Pfaff

$$\theta_1 = 0, \qquad \theta_2 = 0, \qquad \theta_3 = 0.$$

Nous dirons qu'elles forment un réseau si les formes de Pfaff θ_i sont deux à deux linéairement indépendantes en tout point du domaine considéré. Les expressions θ_i n'étant définies qu'à un facteur près, on peut alors toujours imaginer que les trois familles de courbes sont représentées par les équations

$$(21) \quad \theta_1 = \omega_1 - \omega_2 = 0, \qquad \theta_2 = \varepsilon\omega_1 - \varepsilon^2\omega_2 = 0, \qquad \theta_3 = \varepsilon^2\omega_1 - \varepsilon\omega_2 = 0,$$

où 1, ε, ε^2 sont les trois racines cubiques de l'unité

$$1+\varepsilon+\varepsilon^2=0,$$

et où ω_1 et ω_2 sont deux expressions de Pfaff, linéairement indépendantes, qui ne sont d'ailleurs définies qu'à un facteur commun λ près, c'est-à-dire auxquelles on peut encore faire subir la transformation

$$(22)\quad (\Gamma)\qquad \overline{\omega_1}=\lambda\omega_1,\qquad \overline{\omega_2}=\lambda\omega_2.$$

L'étude des invariants du réseau se ramène ainsi à l'étude des invariants de deux formes de Pfaff linéairement indépendantes ω_1, ω_2 par rapport à un changement de variables quelconque d'une part, et aux transformations du groupe linéaire (Γ) d'autre part.

On remarquera que l'on peut toujours, par un changement de variables convenable, représenter les trois familles de courbes du réseau sous la forme

$$x=\text{const.},\qquad y=\text{const.},\qquad \frac{dy}{dx}=f(x,y).$$

L'étude des invariants du réseau se ramène alors à celle des invariants de l'équation différentielle du premier ordre

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),$$

par rapport au groupe infini de transformations

$$X=X(x),\qquad Y=Y(y),$$

et elle a été faite incidemment sous cette forme par E. Cartan dans le mémoire cité au chapitre précédent [25].

Les covariants bilinéaires des formes ω_i peuvent être mis sous la forme

$$(\omega_1)'\equiv\rho_1[\omega_1,\omega_2],\qquad (\omega_2)'\equiv\rho_2[\omega_1,\omega_2].$$

Si alors on considère dans les relations (22), λ comme une nouvelle variable auxiliaire, on aperçoit que les covariants bilinéaires des expresssions $\overline{\omega_i}$ ont pour expressions

$$(\overline{\omega_1})'\equiv[d\lambda\,\omega_1]+\lambda(\omega_1)'\equiv\left[\frac{d\lambda}{\lambda}-\rho_1\omega_2,\ \overline{\omega_1}\right],$$

$$(\overline{\omega_2})'\equiv[d\lambda\,\varpi_2]+\lambda(\omega_2)'\equiv\left[\frac{d\lambda}{\lambda}+\rho_2\omega_1,\ \overline{\omega_2}\right]$$

ou

$$(\overline{\omega_1})' \equiv [\overline{\varpi}, \overline{\omega_1}], \qquad (\overline{\omega_2})' \equiv [\overline{\varpi}, \overline{\omega_2}], \tag{23}$$

relations dans lesquelles

$$\overline{\varpi} \equiv \frac{d\lambda}{\lambda} + \rho_2 \omega_1 - \rho_1 \omega_2,$$

représente une nouvelle forme de Pfaff en du, dv, $d\lambda$, linéairement indépendante de $\overline{\omega_1}$ et $\overline{\omega_2}$.

En écrivant (relation fondamentale) que les covariants trilinéaires de $(\overline{\omega_1})'$ et $(\overline{\omega_2})'$ sont identiquement nuls, il vient

$$[\overline{\varpi}', \overline{\omega_1}] \equiv [\overline{\varpi}', \overline{\omega_2}] \equiv 0.$$

D'où l'on conclut que $\overline{\varpi}'$ est de la forme

$$(\overline{\varpi})' \equiv \bar{\rho}[\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}]. \tag{24}$$

Imaginons alors que l'on effectue sur $\overline{\omega_1}$ et $\overline{\omega_2}$ la transformation infinitésimale qui engendre le groupe linéaire (Γ), soit

$$\delta\overline{\omega_1} = e\,\overline{\omega_1}, \qquad \delta\overline{\omega_2} = e\,\overline{\omega_2}. \tag{22'}$$

En écrivant que l'on a, comme il est bien connu,

$$\delta(\overline{\omega_i})' = (\delta\overline{\omega_i})',$$

il vient

$$[\delta\overline{\varpi} - de, \overline{\omega_1}] = [\delta\overline{\varpi} - de, \overline{\omega_2}] = 0.$$

D'où l'on déduit que la forme $\overline{\varpi}$ subit la transformation

$$\delta\overline{\varpi} = de$$

et l'identité

$$\delta(\varpi)' = (\delta\overline{\varpi})',$$

montre alors que ρ subit elle-même la transformation

$$\delta\bar{\rho} + 2\bar{\rho}e = 0.$$

La quantité $\bar{\rho}$ est donc un invariant relatif, du second ordre en ce sens qu'il s'exprime en fonction des dérivées secondes des coefficients des formes ω_i.

7. Supposons tout d'abord

$$\bar{\rho} \equiv 0.$$

Il vient alors

(25) $$(\overline{\omega_1})' \equiv [\overline{\varpi}, \overline{\omega_1}], \qquad (\overline{\omega_2})' \equiv [\overline{\varpi}, \overline{\omega_2}], \qquad (\overline{\varpi})' \equiv 0.$$

Soit d'autre part (R) un autre réseau, défini dans un système de coordonnées (UV) par des expressions de Pfaff Ω_1, Ω_2. Si l'on pose, comme pour le réseau (r) défini par ω_1 et ω_2,

$$\overline{\Omega_1} = \Lambda\Omega_1, \qquad \overline{\Omega_2} = \Lambda\Omega_2,$$

on aura en considérant Λ comme une nouvelle variable auxiliaire adjointe à U et V, des identités de la forme

(25′) $$(\overline{\Omega_1})' \equiv [\overline{\Pi}, \overline{\Omega_1}], \qquad (\overline{\Omega_2})' \equiv [\overline{\Pi}, \overline{\Omega_2}], \qquad (\overline{\Pi})' \equiv \overline{R}[\overline{\Omega_1}, \overline{\Omega_2}].$$

Pour que ce nouveau réseau soit topologiquement équivalent au réseau (r) défini par ω_1 et ω_2, il faut et il suffit que l'on puisse trouver trois fonctions de u, v, λ, soit

$$U = U(u, v, \lambda), \qquad V = V(u, v, \lambda), \qquad \Lambda = \Lambda(u, v, \lambda),$$

de manière à avoir

(26) $$\overline{\Omega_1} = \overline{\omega_1}, \qquad \overline{\Omega_2} = \overline{\omega_2}, \qquad \overline{\Pi} = \overline{\pi}.$$

On aperçoit alors que le problème n'a de solution que si $\overline{R}$ est lui aussi identiquement nul, ce qui était évident *a priori* puisque c'est l'invariant relatif correspondant à $\bar{\rho}$. Mais de plus, si cette condition est réalisée, le système formé par les équations (26) où l'on considère U, V, Λ comme fonctions inconnues de u, v, λ est complètement intégrable et sa solution générale dépend de trois constantes arbitraires.

THÉORÈME A. — *Tous les réseaux pour lesquels l'invariant relatif $\bar{\rho}$ s'annule identiquement sont donc topologiquement équivalents et chacun d'eux admet un groupe continu transitif à trois paramètres dont la structure, au sens de E. Cartan, est définie par les équations* (25).

Or, on constate immédiatement que ces équations de structure sont satisfaites en particulier par les formes de Pfaff

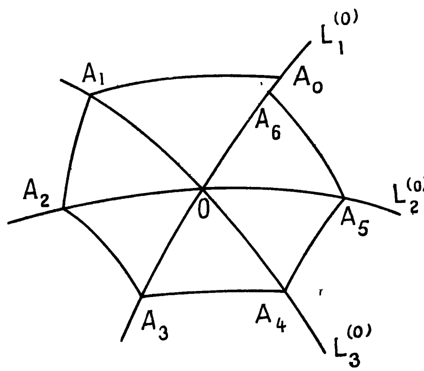
$$\overline{\omega_1} = du, \qquad \overline{\omega_2} = dv, \qquad \overline{\varpi} = 0,$$

auxquelles correspond dans le plan (u, v) un réseau formé par trois familles de droites parallèles.

Théorème B. — *Tout réseau pour lequel l'invariant relatif* ρ *s'annule identiquement est donc topologiquement applicable sur un réseau formé par trois familles de droites parallèles* [3].

8. Ces réseaux peuvent être caractérisés par une propriété de pure configuration, due à M. A. Thomsen [48] et qui fournit l'interprétation géométrique de l'identité invariante $\bar{\rho} \equiv 0$.

Fig. 1.



Soient O un point du domaine dans lequel est défini le réseau et $L_1^{(0)}$, $L_2^{(0)}$, $L_3^{(0)}$ les trois courbes qui passent par ce point appartenant respectivement à la première, deuxième et troisième famille du réseau.

Sur $L_1^{(0)}$ on choisit un point A_0 distinct de O. La courbe L_2 de la deuxième famille qui passe par A_0 vient couper $L_3^{(0)}$ en A_1. La courbe L_1 qui passe par A_1 vient couper L_2^0 en A_2 et en continuant de la sorte on définit un contour polygonal $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_6$, dont le dernier sommet A_6 qui se trouve sur la ligne $L_1^{(0)}$ est en général distinct du point A_0 d'où l'on est parti.

Théorème C. — *La condition nécessaire et suffisante pour que les trois familles de courbes du réseau soient topologiquement applicables sur trois familles de droites parallèles* (*condition qui équivaut à* $\bar{\rho} \equiv 0$) *est que cette ligne polygonale se ferme, c'est-à-dire que* A_6 *coïncide avec* A_0.

Ce théorème dont la démonstration analytique ne présente aucune difficulté a été démontré par une voie purement géométrique et sous des conditions moins restrictives que celles de la démonstration analytique par M. W. Blaschke [1].

9. Supposons maintenant que $\bar{\rho}$ soit différent de zéro. Désignons par ρ ce que devient $\bar{\rho}$ quand on y fait $\lambda = 1$. On a alors

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\lambda},$$

et l'on peut profiter de l'indétermination de la variable auxiliaire λ pour réduire $\bar{\rho}$ à l'unité. Il suffit de prendre

$$(27) \qquad \lambda = \pm\sqrt{\rho}, \qquad \text{d'où} \qquad \bar{\rho} = 1.$$

Le groupe (Γ) se trouve alors du même coup réduit à l'identité, c'est-à-dire qu'en subtituant à λ son expression en fonction de u et v fournie par (27), dans $\overline{\omega_1}$ et $\overline{\omega_2}$ ces dernières deviennent des formes absolument invariantes. Quant à la forme $\bar{\varpi}$ elle devient une combinaison linéaire de $\overline{\omega_1}$ et $\overline{\omega_2}$, soit

$$(28) \qquad \bar{\varpi} \equiv a_1\overline{\omega_1} + a_2\overline{\omega_2}$$

dont les coefficients a_1 et a_2 sont deux invariants absolus, manifestement du troisième ordre. Les identités (23) se réduisent alors à

$$(29) \qquad (\overline{\omega_1})' \equiv -a_2[\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}], \qquad (\overline{\omega_2})' \equiv a_1[\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}],$$

et il suffit de se reporter à ce qui a été dit au Chapitre I (§ 4) pour constater que a_1 et a_2 sont deux invariants fondamentaux d'où l'on déduit un système complet d'invariants absolus d'ordre supérieur par différentiations successives.

On a ainsi par exemple

$$da_1 \equiv a_{11}\overline{\omega_1} + a_{12}\overline{\omega_2}, \qquad da_2 \equiv a_{21}\overline{\omega_1} + a_{22}\overline{\omega_2},$$

et les a_{ij} sont des invariants absolus du quatrième ordre, d'ailleurs liés par l'identité que l'on obtient en écrivant que la forme $\bar{\varpi}$ définie par la relation (28) satisfait à l'identité (24) où l'on fait $\bar{\rho} \equiv 1$, ce qui fournit la relation

$$(30) \qquad a_{21} - a_{12} \equiv 1.$$

On trouve ainsi trois invariants absolus distincts du quatrième ordre, qui fournissent à leur tour six invariants absolus a_{ijk} du cinquième ordre

$$da_{ij} \equiv a_{ij1}\overline{\omega}_1 + a_{ij2}\overline{\omega}_2,$$

lesquels sont liés par deux identités obtenues en écrivant que les covariants bilinéaires des différentielles da_i sont identiquement nulles, ce qui réduit le nombre des invariants absolus distincts du cinquième ordre à 4. D'une façon générale on trouve ainsi $(n-1)$ invariants absolus distincts d'ordre n.

10. On constate d'après (30) que les invariants absolus d'un tel réseau (l'invariant relatif $\overline{\rho}$ étant supposé différent de zéro) ne sauraient être tous constants. En se reportant à ce qui a été dit au Chapitre I, on aperçoit alors immédiatement que, ou bien le réseau n'admet aucun groupe de transformations, ou bien il admet un groupe à un paramètre et la condition nécessaire et suffisante pour cela est que tous les invariants soient des fonctions d'un seul d'entre eux. S'il en est ainsi, les différentielles da_1 et da_2 sont proportionnelles, ce qui entraîne la relation

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = i.$$

De plus, on constate que tous les invariants s'expriment en fonction du seul invariant i, au moyen d'une seule fonction $F(i)$ et de ses dérivées premières. En effet, a_1 étant fonction de i, da_1 doit être proportionnel à di et l'on a une relation de la forme

$$di = F(i)\left[i\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2\right].$$

En égalant les covariants bilinéaires des deux membres de cette identité, on trouve alors

$$F(i) = a_1 - i a_2,$$

d'où en différentiant

$$F(i)\,F'(i) = -1 - a_2\,F(i)$$

et par suite

$$a_1 = F(i) - i\,F'(i) - \frac{i}{F(i)}, \qquad a_2 = -F'(i) - \frac{1}{F(i)}.$$

En différentiant ces égalités on en déduit tous les invariants d'ordre supérieur en fonction des dérivées successives de la fonction caractéristique $F(i)$.

Dès lors, la condition nécessaire et suffisante pour que deux tels réseaux admettant un groupe continu à un paramètre soient topologiquement équivalents, est qu'ils aient la même fonction caractéristique $F(i)$, *c'est-à-dire que pour ces deux réseaux l'invariant* $a_1 - \frac{a_{11}}{a_{21}} a_2$ *soit la même fonction de l'invariant* $\frac{a_{11}}{a_{21}}$ (Cartan [25]).

Tout réseau admettant un groupe continu à un paramètre peut d'ailleurs être représenté sous la forme (Cartan [25])

$$x = \text{const.}, \qquad y = \text{const.}, \qquad \frac{dy}{dx} = f(x+y),$$

ce qui résulte géométriquement du fait que les trajectoires du groupe constituent une quatrième famille à un paramètre de lignes, formant avec deux quelconques des trois familles de courbes du réseau, un nouveau réseau qui a forcément la configuration hexagonale [27].

11. Nous avons vu qu'un réseau à configuration hexagonale est caractérisé par la propriété d'être topologiquement applicable sur trois familles de droites parallèles. Il est alors naturel de rechercher tous les réseaux de droites qui jouissent de cette propriété de configuration hexagonale et d'une façon plus générale d'étudier les conditions auxquelles doit satisfaire un réseau pour être applicable topologiquement sur un réseau de droites quelconque. Ce dernier problème tire d'ailleurs un intérêt particulier de la remarque suivante [27].

Les trois familles d'un réseau peuvent être représentées sous la forme

$$u = \text{const.}, \qquad v = \text{const.}, \qquad w = \text{const.},$$

u, v, w étant trois variables assujetties à vérifier une relation de la forme

$$f(u, v, w) = 0. \tag{31}$$

Si le réseau est constitué par des droites, on aperçoit alors immédiatement, en le transformant par dualité, qu'il fournit une représentation nomographique à points alignés de l'équation (31). Le problème proposé revient donc en définitive à rechercher à quelles conditions l'équation (31) est susceptible d'une telle représentation. Sous cette forme, il a été étudié pour la première fois par M. Gronwall [28]. Nous allons voir que la méthode des systèmes de référence mobiles se prête particulièrement bien à cette étude, qui a d'ailleurs été faite incidemment par O. Boruvka, au cours de l'étude des correspondances analytiques entre deux plans projectifs, dans laquelle l'auteur montre que le systeme complet des invariants d'une telle correspondance dépend d'une forme différentielle cubique qui, égalée à zéro, définit en général un réseau de trois familles de courbes dites caractéristiques [24].

II. — Réseaux topologiquement applicables sur un réseau de droites.

12. Nous désignerons indifféremment par A un point du plan projectif ou ses trois coordonnées (x, y, z).

Le problème proposé revient en somme à déterminer dans le plan projectif un point A_0, en fonction de u et v,

$$A_0 = A_0(u, v),$$

de telle manière que lorsque u et v satisfont à l'équation

$$\overline{\omega_1^1} - \overline{\omega_2^2} = 0, \tag{32}$$

le point A_0 décrive trois familles de droites. A cet effet, on associe au point A_0 deux autres points A_1 et A_2 assujettis seulement à vérifier la relation

$$(A_0, A_1, A_2) \equiv 1, \tag{33}$$

où le premier membre représente le déterminant des coordonnées de A_0, A_1, A_2. On a ainsi un triangle de référence mobile qui dépend, outre des paramètres u et v, d'un certain nombre d'autres paramètres (t). Quand on laisse u et v fixes, et qu'on fait varier les paramètres t, on change le système de référence attaché au point A_0. Nous désignerons par δ un symbole de différentiation obtenu en laissant ainsi u et v fixes, et faisant varier les paramètres (t), le symbole d se rapportant à une variation quelconque de tous les paramètres u, v et t.

Tout point du plan, M, s'exprimant en fonction linéaire de A_0, A_1, A_2, on a en particulier

$$dA_i = \omega_{i0}A_0 + \omega_{i1}A_1 + \omega_{i2}A_2 \qquad (i = 0, 1, 2), \tag{34}$$

où les ω_{ij} sont des formes différentielles des divers paramètres dont dépend le système de référence, assujetties à vérifier d'une part la relation

$$\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} \equiv 0, \tag{35}$$

qui découle de l'identité (33) et d'autre part les conditions d'intégrabilité du système (34), que l'on obtient en écrivant que les covariants bilinéaires des seconds membres de ce système sont nuls. Ce qui donne

$$(\omega_{ij})' = [\omega_{i0}, \omega_{0j}] + [\omega_{i1}, \omega_{1j}] + [\omega_{i2}, \omega_{2j}] \qquad (i, j = 0, 1, 2). \tag{36}$$

Enfin nous désignerons par e_{ij} ce que deviennent les expressions ω_{ij} quand on y utilise le symbole δ, ce qui revient à considérer un changement du système de référence laissant fixe le point A_0. La transformation infinitésimale la plus générale qu'on puisse ainsi faire subir au système de référence est

$$\delta A_i = e_{i0}A_0 + e_{i1}A_1 + e_{i2}A_2 \qquad (i = 0, 1, 2),$$

où les e_{ij} sont liés d'une part par la relation

$$e_{00} + e_{11} + e_{22} = 0, \tag{35'}$$

qui résulte de (35) et par les relations

$$e_{01} = e_{02} = 0,$$

qui exprime que le point A_0 reste fixe.

Ce dernier ne dépendant d'ailleurs que de u et v, ω_{01} et ω_{02} sont des fonctions linéaires de ω_1 et ω_2, que l'on peut supposer égales à

$$\omega_{01} = m\overline{\omega_1}, \qquad \omega_{02} = m\overline{\omega_2}, \tag{37}$$

ce qui revient à particulariser le système de référence de manière que A_1 soit sur la tangente de la courbe $\overline{\omega_2} = 0$ du plan projectif, A_2 sur la tangente à la courbe $\overline{\omega_1} = 0$, et $A_1 + A_2$ sur la tangente à la courbe $\overline{\omega_1} = \overline{\omega_2}$, moyennant quoi, les seuls changements du système de référence encore possibles sont tels que l'on ait

$$e_{12} = e_{21} = 0, \qquad e_{11} = e_{22} = -\frac{1}{2} e_{00}.$$

Il reste à exprimer que les courbes $\overline{\omega}_1^3 - \overline{\omega}_2^3 = 0$ du plan projectif sont des droites, ce que l'on peut faire en écrivant que le long de ces courbes (A_0, dA_0, d^2A_0) s'annule. Il vient ainsi

$$(38) \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega_{12} &= \alpha\overline{\omega}_1 - \beta\overline{\omega}_2, \\ \omega_{22} - \omega_{11} &= \beta\overline{\omega}_1 - \gamma\overline{\omega}_2, \\ -\omega_{21} &= \gamma\overline{\omega}_1 - \alpha\overline{\omega}_2. \end{aligned} \right.$$

Le problème proposé revient en définitive à rechercher si l'on peut déterminer les ω_{ij} de manière à vérifier les relations (37) et (38).

13. Nous poserons à cet effet, comme au paragraphe précédent,

$$(39) \qquad (\overline{\omega}_1)' \equiv [\overline{\varpi}, \overline{\omega}_1], \qquad (\overline{\omega}_2)' \equiv [\overline{\varpi}, \overline{\omega}_2], \qquad (\overline{\varpi})' \equiv \overline{\rho}[\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2].$$

En égalant les covariants bilinéaires des deux membres des relations (37) et (38) il vient

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{dm}{m} + \omega_{11} - \omega_{00}, \overline{\omega}_1\right] = [\overline{\omega}_2, \overline{\omega}_{21}] - [\overline{\varpi}, \overline{\omega}_1], \\ &\left[\frac{dm}{m} + \omega_{22} - \omega_{00}, \overline{\omega}_2\right] = [\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_{12}] - [\overline{\varpi}, \overline{\omega}_2], \\ &[m\omega_{10} + d\beta, \overline{\omega}_2] - [d\alpha, \overline{\omega}_1] = (\alpha\gamma - \beta^2)[\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2] + [\overline{\varpi}, \alpha\overline{\omega}_1 - \beta\overline{\omega}_2], \\ &[m\omega_{20} + d\gamma, \overline{\omega}_2] - [m\omega_{10} + d\beta, \overline{\omega}_1] \\ &\quad = 2(\alpha^2 - \beta\gamma)[\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2] + [\overline{\varpi}, \beta\overline{\omega}_1 - \gamma\overline{\omega}_2], \\ &[m\omega_{20} + d\gamma, \overline{\omega}_1] - [d\alpha, \overline{\omega}_2] = (\gamma^2 - \alpha\beta)[\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2] + [\overline{\varpi}, \alpha\overline{\omega}_2 - \gamma\overline{\omega}_1]. \end{aligned} \right.$$

De ces relations on déduit alors immédiatement, en appliquant les symboles d et δ aux formes bilinéaires qui y figurent, que si l'on change de système de référence, on a

$$\frac{\delta m}{m} = e_{00} - e_{11} = e_{00} - e_{22} = \frac{3}{2} e_{00},$$

$$\delta\alpha = 0, \qquad \delta\beta = -me_{10}, \qquad \delta\gamma = -me_{20}.$$

On en conclut tout d'abord que α est un invariant projectif du réseau de droites considéré. D'autre part m est un invariant relatif, qui est forcément différent de zéro, tandis que β et γ subissent une substitution linéaire.

On peut alors particulariser le système de référence de manière à avoir

$$m = 1, \qquad \beta = \gamma = 0,$$

moyennant quoi on a

$$e_{00} = e_{10} = e_{20} = 0.$$

Tous les e_{ij} étant nuls, le système de référence attaché à chaque point A_0 se trouve ainsi parfaitement déterminé. Cette nouvelle particularisation du système de référence aboutit d'ailleurs en définive à prendre comme point de contact des droites $\overline{\omega_1} - \varepsilon^2 \overline{\omega_2} = 0$ du réseau, avec leurs enveloppes, les points

$$\alpha A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2.$$

Les relations (38) jointes aux deux premières relations (40) donnent

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{01} = \overline{\omega_1}, \qquad \omega_{02} = \overline{\omega_2}, \qquad \omega_{12} = \alpha\overline{\omega_1}, \qquad \omega_{21} = \alpha\overline{\omega_2}, \\ \qquad \omega_{11} = \omega_{22} = -\dfrac{1}{2}\omega_{00} = -\dfrac{1}{3}\overline{\varpi}. \end{array} \right.$$

Si alors on écrit que ces diverses formes ω_{ij} satisfont aux identités (36) en tenant compte des identités (41), on trouve les nouvelles relations

$$(42) \quad \omega_{10} = -\alpha_2\overline{\omega_1} + \left(\alpha^2 + \frac{1}{3}\rho\right)\overline{\omega_2}, \qquad \omega_{20} = \left(\alpha^2 - \frac{1}{3}\rho\right)\overline{\omega_1} - \alpha_1\overline{\omega_2},$$

où α_1 et α_2 sont définis par l'identité

$$(43) \qquad d\alpha + \alpha\overline{\varpi} \equiv \alpha_1\overline{\omega_1} + \alpha_2\overline{\omega_2},$$

et en écrivant enfin que les deux formes ω_{10} et ω_{20} ainsi obtenues satisfont elles aussi aux identités (36) il vient

$$44 \quad \left\{ \begin{array}{l} [d\alpha_1 + 2\alpha_1\overline{\varpi}, \overline{\omega_2}] = \left[\overline{\omega_1}, \dfrac{1}{3}(d\rho + 2\rho\overline{\varpi}) + 3\alpha\alpha_2\overline{\omega_2}\right]. \\ [d\alpha_2 + 2\alpha_2\overline{\varpi}, \overline{\omega_1}] = \left[\dfrac{1}{3}(d\rho + 2\rho\overline{\varpi}) + 3\alpha\alpha_1\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}\right]. \end{array} \right.$$

A toute fonction α satisfaisant à ces deux conditions correspond un système de ω_{ij} satisfaisant aux conditions (36), et par suite une transformation ponctuelle, qui n'est d'ailleurs définie qu'à une transformation projective près, réalisant l'application topologique du réseau considéré sur un réseau de droites.

a. Supposons tout d'abord $\rho \neq 0$, c'est-à-dire que le réseau ne soit pas à configuration hexagonale. On peut alors prendre pour $\overline{\omega_1}$ et $\overline{\omega_2}$ les formes absolues définies au paragraphe 9, que l'on obtient en faisant

$$\bar{\rho} \equiv 1, \qquad \bar{\varpi} \equiv a_1 \overline{\omega_1} + a_2 \overline{\omega_2},$$

et les deux conditions (44) se réduisent à deux équations différentielles du second ordre, en α, qui doivent par suite avoir une solution commune. Malheureusement, les conditions d'intégrabilité de ce système sont dans le cas général très complexes. M. Gronwall affirme dans la préface du mémoire déjà cité [28] que ces deux équations ont au plus une solution commune, en sorte que toute équation $f(u, v, w) = 0$ ne se réduisant pas à $u + v + w = 0$ serait susceptible au plus d'une représentation nomographique à points alignés, à condition de ne pas considérer comme distinctes les représentations projectivement équivalentes. Mais c'est là une affirmation qui reste douteuse. Bol [31].

Pour que la famille de droites $\overline{\omega_1} - \varepsilon^2 \overline{\omega_2} = 0$ soit un faisceau, il faut et il suffit que l'on ait la condition supplémentaire

$$\alpha_2 - \alpha_1 \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon}{3} \bar{\rho} \equiv 0.$$

Si deux des familles de droites sont des faisceaux on peut alors conduire aisément les calculs jusqu'au bout et montrer que l'invariant projectif α s'exprime de façon unique en fonction des invariants absolus du réseau [27]. Dans ce cas particulier l'affirmation de M. Gronwall est donc vérifiée.

b. Supposons maintenant $\bar{\rho} \equiv 0$, c'est-à-dire que le réseau soit à configuration hexagonale; les équations (44) se ramenent alors aux suivantes :

$$(44') \qquad \begin{cases} d\alpha_1 + 2\alpha_1 \bar{\varpi} = -3\alpha\alpha_2 \overline{\omega_1} + \beta \overline{\omega_2}, \\ d\alpha_2 + 2\alpha_2 \bar{\varpi} = \beta \overline{\omega_1} - 3\alpha\alpha_1 \overline{\omega_2}, \\ d\beta + 3\beta \bar{\varpi} = (9\alpha^2\alpha_1 - 3\alpha_2^2)\overline{\omega_1} + (9\alpha^2\alpha_2 - 3\alpha_1^2)\overline{\omega_2}, \end{cases}$$

et si l'on tient compte du fait que $(\bar{\varpi})'$ est identiquement nul, on constate que le système différentiel formé par les équations (43) et (44′) est complètement intégrable et admet par conséquent une solution générale qui dépend de quatre constantes arbitraires.

Tout réseau à configuration hexagonale est donc topologiquement applicable sur l'∞^1 réseaux de droites projectivement distincts. On vérifie d'ailleurs sans peine que les droites du réseau, correspondant à une solution du système (43) et (44′), sont tangentes à une courbe de troisième classe fixe, dont l'équation est

$$F = \left(\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta\right)a_0^3 + a_1^3 + a_2^3 - \frac{3}{2}\alpha_2 a_0^2 a_1 - \frac{3}{2}\alpha_1 a_0^2 a_2 = 0,$$

où a_0, a_1, a_2 désignent les coordonnées tangentielles d'une droite par rapport au système de référence mobile. D'où le théorème :

Théorème D. — *Les seuls réseaux de droites à configuration hexagonale sont constitués par les tangentes à une courbe algébrique de troisième classe (qui peut d'ailleurs être dégénérée).*

En particulier les équations (43) et (44′) sont satisfaites par

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta = 0$$

et la solution de l'équation complètement intégrable

$$d\alpha + \alpha\varpi = 0$$

fournit ∞^1 réseaux projectivement distincts et topologiquement équivalents formés par trois faisceaux de droites. Pour que ces trois faisceaux aient leurs sommets en ligne droite, il faut de plus que l'on ait $\alpha = 0$ et l'on aperçoit que tous les réseaux qui répondent à cette condition sont projectivement équivalents.

Toute transformation ponctuelle qui transforme trois faisceaux de droites dont les sommets sont en ligne droite en trois faisceaux de droites est donc une transformation projective [38].

On peut donner du théorème D une démonstration purement géométrique. Sauer et Graf [45]. Notons d'autre part que M. Blaschke en a donné une belle généralisation aux courbes de classe n [8] et [9].

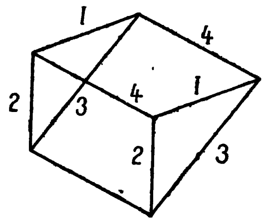
14. *En considérant un réseau dit « réseau 4 », formé, non plus par trois mais par quatre familles de courbes, on démontrerait aisément par des raisonnements analogues, que la condition nécessaire et suffisante pour que ce « réseau 4 » soit topologique-*

ment applicable sur quatre faisceaux de droites est que les quatre familles de courbes engendrent trois à trois des « réseaux 3 » *à configuration hexagonale.* Les seules transformations qui transforment quatre faisceaux de droites en quatre faisceaux de droites sont d'ailleurs des transformations projectives (Mayrhofer [37-38]).

Ce résultat a été démontré de façon purement géométrique par M. K. Reidemeister et sous des conditions très générales qu'il a précisées dans ses recherches sur l'axiomatique des groupes continus à deux variables [44].

En particulier, M. Reidemester montre que la condition nécessaire et suffisante pour que trois des faisceaux de droites, les trois premiers par exemple, sur lesquels le « réseau 4 » est topologiquement applicable aient leurs sommets en ligne droite est que les quatre familles de courbes satisfassent à une propriété de configuration dite

Fig. 2.



« configuration de Desargues » qui est celle de la figure ci-dessus où les numéros indiquent à quelle famille appartiennent les courbes considérées.

Ces résultats se généralisent sans aucune difficulté aux « réseaux n » formés par n familles de courbes (Bol [17]).

CHAPITRE III.

I. — Réseaux de surfaces.

15. Considérons quatre familles de surfaces à un paramètre, que nous supposerons définies dans un système de coordonnées quelconques par quatre équations de Pfaff

$$\theta_1 = 0, \qquad \theta_2 = 0, \qquad \theta_3 = 0, \qquad \theta_4 = 0.$$

Nous désignerons par S_i une surface de la $i^{\text{ième}}$ famille et par L_{ij} les lignes d'intersection des surfaces de la $i^{\text{ième}}$ famille avec les surfaces de la $j^{\text{ième}}$ famille.

Les formes θ_i n'étant définies qu'à un facteur près, on peut choisir ces quatre facteurs de manière à avoir

$$\theta_i = \varepsilon_{i1}\omega_1 + \varepsilon_{i2}\omega_2 + \varepsilon_{i3}\omega_3, \tag{45}$$

où l'on fait

$$\left\{\begin{array}{llll} \text{pour } i = 1: & \varepsilon_{11} = +1, & \varepsilon_{12} = -1, & \varepsilon_{13} = -1, \\ \quad » \quad i = 2: & \varepsilon_{21} = -1, & \varepsilon_{22} = +1, & \varepsilon_{23} = -1, \\ \quad » \quad i = 3: & \varepsilon_{31} = -1, & \varepsilon_{32} = -1, & \varepsilon_{33} = +1, \\ \quad » \quad i = 4: & \varepsilon_{41} = +1, & \varepsilon_{42} = +1, & \varepsilon_{43} = +1, \end{array}\right. \tag{46}$$

ce qui entraîne les relations

$$\varepsilon_{i1}\varepsilon_{i2} = \varepsilon_{i3}, \qquad \varepsilon_{i2}\varepsilon_{i3} = \varepsilon_{i1}, \qquad \varepsilon_{i3}\varepsilon_{i1} = \varepsilon_{i2}, \tag{47}$$

et où ω_1, ω_2, ω_3 sont trois nouvelles formes de Pfaff que l'on ne peut plus alors multiplier que par un facteur commun λ. Nous dirons que les quatre familles de courbes forment un réseau, dans un certain domaine, si les trois formes ω_1, ω_2, ω_3 y sont linéairement indépendantes.

On remarquera d'ailleurs que cela revient à admettre que les éléments plans respectivement définis par les tangentes aux couples de lignes $(L_{14}L_{23})$, $(L_{24}L_{31})$, $(L_{34}L_{12})$ forment un véritable trièdre dont les faces ont pour équations

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = 0.$$

Ces trois équations prises deux à deux définissent trois congruences de courbes

$$D_1\left\{\begin{array}{l}\omega_2 = 0,\\ \omega_3 = 0,\end{array}\right. \qquad D_2\left\{\begin{array}{l}\omega_3 = 0,\\ \omega_1 = 0,\end{array}\right. \qquad D_3\left\{\begin{array}{l}\omega_1 = 0,\\ \omega_2 = 0,\end{array}\right.$$

que nous appellerons « *congruences diagonales* » du réseau et qui sont liées à ce dernier de façon topologiquement invariante. Les tangentes à ces courbes diagonales en un point du réseau sont les droites joignant ce point aux sommets du triangle formé par les diagonales du quadrilatère complet, découpé sur un plan quelconque par les quatre plans tangents des surfaces du réseau au point considéré.

La recherche des propriétés invariantes d'un tel réseau de surface revient à la recherche des invariants des formes de Pfaff ω_i :

1° par rapport à une transformation ponctuelle quelconque (T);
2° par rapport à une transformation Γ du groupe linéaire

$$(\Gamma)\qquad \overline{\omega_1} = \lambda\omega_1, \qquad \overline{\omega_2} = \lambda\omega_2, \qquad \overline{\omega_3} = \lambda\omega_3.$$

16. Les covariants bilinéaires des expressions différentielles ω_i peuvent se mettre sous la forme

$$(\omega_i)' \equiv a_{i1}[\omega_2, \omega_3] + a_{i2}[\omega_3, \omega_1] + a_{i3}[\omega_1, \omega_2].$$

Dès lors, si l'on considère λ comme une nouvelle variable auxiliaire, on aperçoit que les covariants bilinéaires des formes ω_i sont donnés par les relations

$$(\overline{\omega_i})' \equiv [d\lambda, \omega_i] + \lambda(\omega_i)',$$

et en posant

$$\overline{\varpi} = \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}[a_{12}\omega_1 + a_{23}\omega_2 + a_{31}\omega_3],$$

on aperçoit qu'on peut les mettre sous la forme

$$(48)\qquad \begin{cases} (\overline{\omega_1})' \equiv \overline{a_{11}}[\overline{\omega_2}, \overline{\omega_3}] + \overline{a_{13}}[\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}] + [\overline{\varpi}, \overline{\omega_1}], \\ (\overline{\omega_2})' \equiv \overline{a_{22}}[\overline{\omega_3}, \overline{\omega_1}] + \overline{a_{21}}[\overline{\omega_2}, \overline{\omega_3}] + [\overline{\varpi}, \overline{\omega_2}], \\ (\overline{\omega_3})' \equiv \overline{a_{33}}[\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}] + \overline{a_{32}}[\overline{\omega_3}, \overline{\omega_1}] + [\overline{\varpi}, \overline{\omega_3}], \end{cases}$$

où $\overline{\varpi}$ désigne une forme de Pfaff qui forme avec $\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}, \overline{\omega_3}$ un système linéairement indépendant en du, dv, dw, $d\lambda$.

Imaginons alors que l'on effectue sur les $\overline{\omega_i}$ une transformation infinitésimale du groupe Γ, soit

$$(49)\qquad \delta\overline{\omega_1} = e\overline{\omega_1}, \qquad \delta\overline{\omega_2} = e\overline{\omega_2}, \qquad \delta\overline{\omega_3} = e\overline{\omega_3}.$$

En écrivant que l'on a

$$(\delta\overline{\omega_i})' = \delta(\overline{\omega_i})',$$

on trouve immédiatement que les coefficients $\overline{a_{ij}}$ et la forme $\overline{\varpi}$ subissent les transformations suivantes :

$$\delta\overline{\varpi} = de,$$

$$(50)\qquad \begin{cases} \delta\overline{a_{11}} + e\overline{a_{11}} = \delta\overline{a_{22}} + e\overline{a_{22}} = \delta\overline{a_{33}} + e\overline{a_{33}} = 0, \\ \delta\overline{a_{13}} + e\overline{a_{13}} = \delta\overline{a_{21}} + e\overline{a_{21}} = \delta\overline{a_{32}} + e\overline{a_{32}} = 0. \end{cases}$$

D'où l'on conclut que

$$\overline{a_{11}},\quad \overline{a_{22}},\quad \overline{a_{33}} \qquad \text{et} \qquad \overline{a_{13}},\quad \overline{a_{21}},\quad \overline{a_{32}}$$

sont des invariants relatifs.

Jusqu'ici nous avons supposé les formes ω_i quelconques. Or, il est clair que les équations (45) ne représenteront quatre familles de surfaces que si ces formes différentielles satisfont à certaines conditions d'intégrabilité, que l'on obtient en écrivant que les covariants bilinéaires des premiers membres des équations

$$\varepsilon_{i1}\overline{\omega_1}+\varepsilon_{i2}\overline{\omega_2}+\varepsilon_{i3}\overline{\omega_3}=0$$

s'annulent quand on y suppose les variables liées par ces équations elles-mêmes.

Ces conditions d'intégrabilité fournissent immédiatement les quatre relations invariantes

$$\overline{a_{11}}+\overline{a_{22}}+\overline{a_{33}}=0, \qquad \overline{a_{13}}=\overline{a_{21}}=\overline{a_{31}}=0,$$

que nous supposerons donc identiquement vérifiées dans ce qui suit.

Finalement on aperçoit en posant $\overline{a_{ii}}=\overline{a_i}$, que les covariants bilinéaires $(\overline{\omega_i})'$ sont de la forme

$$(51)\qquad \left\{\begin{aligned} (\overline{\omega_1})' &\equiv \overline{a_1}[\overline{\omega_2},\ \overline{\omega_3}]+[\overline{\varpi},\ \overline{\omega_1}],\\ (\overline{\omega_2})' &\equiv \overline{a_2}[\overline{\omega_3},\ \overline{\omega_1}]+[\overline{\varpi},\ \overline{\omega_2}],\\ (\overline{\omega_3})' &\equiv \overline{a_3}[\overline{\omega_1},\ \overline{\omega_2}]+[\overline{\varpi},\ \overline{\omega_3}],\end{aligned}\right.$$

avec

$$(51')\qquad \overline{a_1}+\overline{a_2}+\overline{a_3}\equiv 0,$$

et que si l'on effectue sur les $\overline{a_i}$ la transformation (49), $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ et $\overline{\varpi}$ se transforment comme suit :

$$(52)\qquad \left\{\begin{aligned} &\delta\overline{a_1}+e\overline{a_1}=0, \qquad \delta\overline{a_2}+e\overline{a_2}=0, \qquad \delta\overline{a_3}+e\overline{a_3}\doteq 0,\\ &\qquad\qquad\qquad \delta\overline{\varpi}=de.\end{aligned}\right.$$

Les quantités $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$, dont à raison de $(51)'$ deux seulement sont distinctes, sont des invariants relatifs du premier odre.

17. L'interprétation géométrique de l'identité invariante

$$\overline{a_i}\equiv 0$$

est immédiate, car elle exprime que l'équation

$$\overline{\omega_i} = 0$$

est complètement intégrable, ce qui signifie suivant que $i = 1$, 2 ou 3, que les couples de lignes $(L_{14} L_{23})$, $(L_{24} L_{31})$ ou $(L_{34} L_{12})$ engendrent respectivement une famille à un paramètre de surfaces.

L'identité (51') fournit alors le théorème suivant :

Théorème A. — *Si deux des trois couples de lignes* $(L_{14} L_{23})$, $(L_{24} L_{31})$, $(L_{34} L_{12})$ *engendrent des familles de surface à un paramètre, il en est de même du troisième couple.*

Supposons maintenant que les trois invariants relatifs $\overline{a_i}$ soient identiquement nuls. Les identités (51) se réduisent alors à

$$(53) \qquad (\overline{\omega_1})' \equiv [\overline{\varpi}, \overline{\omega_1}], \qquad (\overline{\omega_2})' \equiv [\overline{\varpi}, \overline{\omega_2}], \qquad (\overline{\omega_3})' \equiv [\overline{\varpi}, \overline{\omega_3}],$$

et en écrivant (relation fondamentale) que les covariants trilinéaires de ces covariants bilinéaires sont identiquement nuls, on constate immédiatement que l'on a d'autre part

$$(53') \qquad (\overline{\varpi})' \equiv 0.$$

Tout autre réseau de surfaces défini dans le système de coordonnées (U, V, W) par trois formes de Pfaff Ω_1, Ω_2, Ω_3 ne peut alors être équivalent au précédent, que si ses trois invariants relatifs du premier ordre sont également nuls, de sorte qu'en posant

$$\overline{\Omega_1} = \Lambda\Omega_1, \qquad \overline{\Omega_2} = \Lambda\Omega_2, \qquad \overline{\Omega_3} = \Lambda\Omega_3,$$

on a, pour ce nouveau réseau, des identités analogues à (53) et (53'),

$$(\overline{\Omega_1})' \equiv [\overline{\Pi}, \overline{\Omega_1}], \qquad (\overline{\Omega_2})' \equiv [\overline{\Pi}, \overline{\Omega_2}], \qquad (\overline{\Omega_3})' \equiv [\overline{\Pi}, \overline{\Omega_3}], \qquad (\overline{\Pi})' \equiv 0.$$

Mais alors, on constate immédiatement que les deux réseaux sont effectivement équivalents, car le système d'équations

$$\overline{\Omega_1} = \overline{\omega_1}, \qquad \overline{\Omega_2} = \overline{\omega_2}, \qquad \overline{\Omega_3} = \overline{\omega_3}, \qquad \overline{\Pi} = \overline{\pi},$$

dans lequel on considère U, V, W, Λ comme des fonctions inconnues de u, v, w, λ, est complètement intégrable et admet une solution générale qui dépend de quatre constantes arbitraires.

Tous les réseaux dont les invariants du premier ordre $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$ *sont identiquement nuls sont donc topologiquement équivalents et chacun d'eux admet un groupe continu fini à quatre paramètres dont les équations de structure au sens de M. Cartan sont les équations* (53) *et* (53′).

Or, ces équations de structure sont satisfaites par les formes

$$\omega_1 = du, \qquad \omega_2 = dv, \qquad \omega_3 = dw, \qquad \varpi = 0,$$

auxquelles correspond un réseau formé par les quatre familles de plans parallèles

$$\varepsilon_{i1} u + \varepsilon_{i2} v + \varepsilon_{i3} w = \text{const.}$$

De tels réseaux, topologiquement applicables sur quatre familles de plans parallèles, sont dits « réseaux à configuration octaédrale », locution qui s'explique d'elle-même, et en rapprochant le résultat précédent de la signification géométrique des identités $\overline{a}_i \equiv 0$, on obtient le théorème suivant :

Théorème B. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un réseau de surfaces soit topologiquement applicable sur quatre familles de plans parallèles, est que les couples de lignes* $(L_{14} L_{23})$, (L_{24}, L_{31}), $(L_{34} L_{12})$ *engendrent trois familles à un paramètre de surfaces.*

Les deux théorèmes A et B peuvent être démontrés par une voie purement géométrique sous des conditions moins restrictives que celles qui sont à la base des calculs précédents : Blaschke [2], Dubourdieu [27], Sperner [47].

18. Supposons maintenant que les invariants relatifs $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$ ne soient pas tous identiquement nuls. On pourrait alors réduire l'un d'eux à l'unité, ce qui réduirait du même coup le groupe (Γ) à l'identité et l'on serait ainsi ramené au problème du paragraphe 4, chapitre I. Pour conserver plus de symétrie aux résultats, nous procéderons cependant par une voie légèrement différente.

Soit I un invariant relatif d'ordre p, et de poids μ, c'est-à-dire subissant la transformation

$$\delta I + \mu e I = 0,$$

lorsqu'on soumet les $\overline{\omega_i}$ à la transformation infinitésimale (49). On en déduit immédiatement trois invariants relatifs d'ordre $p+1$ en remarquant que l'on a

$$\delta\, d\mathrm{I} = d\,\delta\mathrm{I} = -\mu\,\mathrm{I}\,de - \mu\, e\, d\mathrm{I},$$

et par suite en tenant compte de la dernière égalité (52),

$$\delta\left[d\mathrm{I} + \mu\,\mathrm{I}\overline{\varpi}\right] + \mu\, e\left[d\mathrm{I} + \mu\,\mathrm{I}\overline{\varpi}\right] = 0.$$

De sorte que la forme différentielle $d\mathrm{I} + \mu\mathrm{I}\overline{\varpi}$ apparaît comme une combinaison linéaire de $\overline{\omega_1}$, $\overline{\omega_2}$, $\overline{\omega_3}$, soit

$$(54)\qquad d\mathrm{I} + \mu\,\mathrm{I}\overline{\varpi} \equiv \mathrm{I}_1\overline{\omega_1} + \mathrm{I}_2\overline{\omega_2} + \mathrm{I}_3\overline{\omega_3},$$

relativement invariante et dont les coefficients I_j sont par suite eux-mêmes des invariants relatifs d'ordre $p+1$ et de poids $\mu+1$

$$\delta\mathrm{I}_j + (\mu+1)e\,\mathrm{I}_j = 0.$$

Des trois invariants relatifs du premier ordre $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$ liés par l'identité (51′), on déduit ainsi trois formes différentielles relativement invariantes,

$$(54')\qquad d\overline{a_i} + \overline{a_i}\overline{\varpi} \equiv \overline{a_{i1}}\,\overline{\omega_1} + \overline{a_{i2}}\,\overline{\omega_2} + \overline{a_{i3}}\,\overline{\omega_3} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

dont les coefficients sont liés par les identités

$$\overline{a_{11}} + \overline{a_{21}} + \overline{a_{31}} \equiv 0, \qquad \overline{a_{12}} + \overline{a_{22}} + \overline{a_{32}} \equiv 0, \qquad \overline{a_{13}} + \overline{a_{23}} + \overline{a_{33}} \equiv 0.$$

On obtient ainsi, en général, six invariants relatifs distincts $\overline{a_{ij}}$ du second ordre, de poids 2.

D'autre part, si l'on écrit que les covariants trilinéaires des expressions $(\overline{\omega_i})'$ fournies par les identités (51) sont identiquement nuls (relation fondamentale), il vient

$$\begin{aligned}
&\left[d\overline{a_1} + \overline{a_1}\overline{\varpi},\ \overline{\omega_2},\ \overline{\omega_3}\right] + \left[\overline{\varpi}',\ \overline{\omega_1}\right] \equiv 0,\\
&\left[d\overline{a_2} + \overline{a_2}\overline{\varpi},\ \overline{\omega_3},\ \overline{\omega_1}\right] + \left[\overline{\varpi}',\ \overline{\omega_2}\right] \equiv 0,\\
&\left[d\overline{a_3} + \overline{a_3}\overline{\varpi},\ \overline{\omega_1},\ \overline{\omega_2}\right] + \left[\overline{\varpi}',\ \overline{\omega_3}\right] \equiv 0,
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit immédiatement l'identité

$$(55)\qquad (\overline{\varpi})' \equiv -\overline{a_{11}}\left[\overline{\omega_2},\ \overline{\omega_3}\right] - \overline{a_{22}}\left[\overline{\omega_3},\ \overline{\omega_1}\right] - \overline{a_{33}}\left[\overline{\omega_1},\ \overline{\omega_2}\right].$$

19. Des invariants relatifs I_i d'ordre $p+1$ déduits par la relation (54) de tout invariant relatif I d'ordre p, on déduit à nouveau des invariants relatifs d'ordre $p+2$ par les identités

$$dI_i + (\mu+1) I_i \overline{\varpi} \equiv I_{i1}\overline{\omega_1} + I_{i2}\overline{\omega_2} + I_{i3}\overline{\omega_3}.$$

Mais les invariants relatifs I_{ij} ainsi obtenus sont liés par les identités obtenues en écrivant que le covariant bilinéaire de la différentielle totale

$$(56)\qquad dI = -\mu I \overline{\varpi} + I_1 \overline{\omega_1} + I_2\overline{\omega_2} + I_3\overline{\omega_3}$$

est identiquement nul, ce qui fournit les trois identités

$$(57)\qquad \begin{cases} I_{21} - I_{12} + I_3 \overline{a_3} \equiv 0, \\ I_{32} - I_{23} + I_1 \overline{a_1} \equiv 0, \\ I_{13} - I_{31} + I_2 \overline{a_2} \equiv 0. \end{cases}$$

C'est ainsi que des invariants du second ordre $\overline{a_{ij}}$ on déduira les invariants du troisième ordre $\overline{a_{ijk}}$ par les identités

$$(58)\qquad d\overline{a_{ij}} + 2\overline{a_{ij}}\,\overline{\varpi} \equiv \sum_{k=1}^{3} \overline{a_{ijk}}\,\overline{\omega_k}.$$

Les 18 invariants $\overline{a_{1,jk}}$ et $\overline{a_{2,jk}}$ sont liés par six identités analogues aux identités (57)

$$(59)\qquad \begin{cases} \overline{a_{i,21}} - \overline{a_{i,12}} + \overline{a_{i,3}}\,\overline{a_3} \equiv 0, \\ \overline{a_{i,32}} - \overline{a_{i,23}} + \overline{a_{i,1}}\,\overline{a_1} \equiv 0, \\ \overline{a_{i,13}} - \overline{a_{i,31}} + \overline{a_{i,2}}\,\overline{a_2} \equiv 0 \end{cases}$$

ou

$$\overline{a_{i,jk}} - \overline{a_{i,kj}} + \overline{a_{il}}\,\overline{a_l} \equiv 0 \qquad \text{avec } (j \neq k \neq l).$$

Mais de plus, ils satisfont à une relation supplémentaire que l'on obtient en écrivant (relation fondamentale) que le covariant trilinéaire de $(\overline{\varpi})'$ est identiquement nul, ce qui fournit l'identité

$$[d\overline{a_{11}} + 2\overline{a_1}\,\overline{\varpi}, \overline{\omega_2}, \overline{\omega_3}] + [d\overline{a_{22}} + 2\overline{a_2}\,\overline{\varpi}, \overline{\omega_3}, \overline{\omega_1}] + [d\overline{a_{33}} + 2\overline{a_3}\,\overline{\varpi}, \overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}] \equiv 0.$$

D'où

$$(59')\qquad \overline{a_{1,11}} + \overline{a_{2,22}} + \overline{a_{3,33}} \equiv 0.$$

Finalement, on aperçoit que l'on obtient ainsi onze invariants relatifs du second ordre.

En procédant de la sorte, on détermine de proche en proche des invariants relatifs d'ordre de plus en plus élevé et de ce système d'invariants relatifs, on déduit immédiatement un système complet d'invariants absolus, en profitant de l'indétermination de la variable auxiliaire λ pour réduire l'un des invariants relatifs, non identiquement nul, à l'unité.

Dès lors, s'il existe trois invariants absolus indépendants, le réseau n'admet pas de groupe de transformations. Si tous les invariants absolus sont fonctions de deux d'entre eux indépendants, il admet un groupe continu à un paramètre. S'ils sont tous fonctions d'un seul d'entre eux, le réseau admet un groupe à deux paramètres.

Enfin, si tous les invariants absolus sont constants, il admet un groupe continu transitif à trois paramètres. Nous reviendrons plus bas sur l'étude de ce dernier cas.

20. Dans le cas général où le tableau des invariants relatifs du second ordre $\overline{a_{ij}}$ est de rang 2 (ce qui suppose en particulier qu'aucun des invariants relatifs du premier ordre ne soit nul), les trois formes différentielles relativement invariantes

$$\overline{da_i} + \overline{a_i}\,\overline{\varpi} \equiv \overline{a_{i1}}\,\overline{\omega_1} + \overline{a_{i2}}\,\overline{\omega_2} + \overline{a_{i3}}\,\overline{\omega_3}$$

définissent en chaque point du réseau trois éléments plans attachés de façon topologiquement invariante au réseau, et qui, en vertu de l'identité (51'), ont en commun l'élément linéaire

$$\frac{\overline{\omega_1}}{\overline{a_{22}}\,\overline{a_{33}} - \overline{a_{23}}\,\overline{a_{32}}} = \frac{\overline{\omega_2}}{\overline{a_{33}}\,\overline{a_{11}} - \overline{a_{31}}\,\overline{a_{13}}} = \frac{\overline{\omega_3}}{\overline{a_{11}}\,\overline{a_{22}} - \overline{a_{12}}\,\overline{a_{21}}}.$$

Celui-ci définit par suite une congruence de courbes (G) liée de façon topologiquement invariante au réseau.

Un cas particulièrement intéressant est celui où l'on a

$$(60) \qquad \overline{a_{11}} \equiv \overline{a_{22}} \equiv \overline{a_{33}} \equiv 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad (\overline{\varpi})' \equiv 0.$$

Dans ce cas, on constate alors que les équations

$$\overline{da_i} + \overline{a_i}\,\overline{\varpi} = 0$$

sont complètement intégrables et définissent trois familles de surfaces. Le tableau des $\overline{a_{ij}}$ étant toujours supposé de rang 2, cela signifie que la congruence G engendre avec les congruences de courbes diagonales D_1, D_2, D_3, trois familles de surfaces à un paramètre (*cf.* Blaschke [5]).

Les réseaux qui satisfont aux conditions (60) sont caractérisés par une propriété géométrique très simple.

21. Désignons par R_i le réseau de trois familles de courbes découpé sur une surface S_i de la $i^{\text{ième}}$ famille par les surfaces des trois autres familles. Les courbes de ce réseau sont définies comme au Chapitre II par des combinaisons linéaires à coefficients constants des deux formes de Pfaff $\overline{\omega_1}$ et $\overline{\omega_2}$, dans lesquelles on suppose les variables u, v, w liées par l'équation

$$\theta_i \equiv \varepsilon_{i1}\overline{\omega_1} + \varepsilon_{i2}\overline{\omega_2} + \varepsilon_{i3}\overline{\omega_3} = 0$$

des surfaces S_i. Si l'on tient compte de cette relation, dans les équations (51), il vient

$$(\overline{\omega_1})' \equiv [\overline{\Pi}, \overline{\omega_1}], \qquad (\overline{\omega_2})' \equiv [\overline{\Pi}, \overline{\omega_2}],$$

où l'on a posé

$$\overline{\Pi} \equiv \overline{\varpi} + \varepsilon_{i1}\overline{a_2}\,\overline{\omega_1} - \varepsilon_{i2}\overline{a_1}\,\overline{\omega_2},$$

et l'on trouve aisément en s'appuyant sur les identités (51), (54) et (55)

$$(\overline{\Pi})' \equiv 2\varepsilon_{i3}\left[\varepsilon_{i1}\overline{a_{11}} + \varepsilon_{i2}\overline{a_{22}} + \varepsilon_{i3}\overline{a_{33}}\right][\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}].$$

L'expression

$$\rho_i \equiv \varepsilon_{i1}\overline{a_{11}} + \varepsilon_{i2}\overline{a_{22}} + \varepsilon_{i3}\overline{a_{33}}$$

n'est donc autre que l'invariant relatif fondamental du réseau R_i, et l'identité $\rho_i \equiv 0$ exprime que ce réseau est à configuration hexagonale.

On vérifie d'ailleurs immédiatement d'après la définition des ε_{ij} que l'on a

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 \equiv 0.$$

D'où le théoreme :

Théorème C. — *Si sur trois des familles de surfaces du réseau, les réseaux de courbes R_i sont à configuration hexagonale, il en est de même du réseau de courbes tracé sur les surfaces de la quatrième famille.*

Il est curieux de noter que l'on n'est pas encore parvenu à donner de ce théorème une démonstration purement géométrique analogue à celles qui ont été données des théorèmes A et B.

De tels réseaux pour lesquels on a

$$\overline{a_{11}} \equiv \overline{a_{22}} \equiv \overline{a_{33}} \equiv 0 \qquad \text{ou} \qquad (\overline{\varpi})' \equiv 0 \tag{60}$$

seront désignés sous la dénomination de « *réseaux à configuration hexagonale* ».

De l'identité, $\overline{\varpi}' \equiv 0$, on conclut que pour un tel réseau, on peut profiter de l'indétermination de la variable auxiliaire λ de manière que soit satisfaite l'équation complètement intégrable

$$\overline{\varpi} = 0. \tag{61}$$

On a alors

$$\delta\varpi = de = 0,$$

et l'on aperçoit que la variable λ fournie par l'intégration de l'équation (61) est déterminée en fonction de u, v, w *à une constante multiplicative près*, et par suite également les formes $\overline{\omega_1}$, $\overline{\omega_2}$, $\overline{\omega_3}$. Les identités (51) se réduisent alors à (*cf.* Blaschke [5])

$$(62)\quad \begin{cases} (\overline{\omega_1})' \equiv \overline{a_1}[\overline{\omega_2}, \overline{\omega_3}], \qquad (\overline{\omega_2})' \equiv \overline{a_2}[\overline{\omega_3}, \overline{\omega_1}], \qquad (\overline{\omega_3})' \equiv \overline{a_3}[\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}], \\ \overline{a_1} + \overline{a_2} + \overline{a_3} \equiv 0, \end{cases}$$

et les identités (54) à

$$(63)\quad \begin{cases} d\overline{a_1} \equiv \overline{a_{12}}\,\overline{\omega_2} - \overline{a_{13}}\,\overline{\omega_3}, \\ d\overline{a_2} \equiv \overline{a_{23}}\,\overline{\omega_3} - \overline{a_{21}}\,\overline{\omega_1}, \\ d\overline{a_3} \equiv \overline{a_{31}}\,\overline{\omega_1} - \overline{a_{32}}\,\overline{\omega_2}. \end{cases}$$

22. Il est évident que tout réseau de surfaces qui admet un groupe continu transitif de transformations doit être à configuration hexagonale, car chacun des réseaux de courbes R_i tracés sur les surfaces d'un tel réseau doit admettre lui-même un groupe continu transitif. Cette condition nécessaire n'est cependant pas suffisante.

a. Supposons tout d'abord qu'aucun des invariants relatifs ne s'annule. Alors les invariants absolus

$$\frac{\overline{a_i}}{\overline{a_j}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{a_{ij}}}{\overline{a_i^2}}$$

doivent être constants. En se reportant aux identités (54) et (58) on en déduit immédiatement que l'on doit avoir

$$\overline{a_i}\,\overline{a_{jk}} - \overline{a_j}\,\overline{a_{ik}} \equiv 0, \tag{64}$$

$$\overline{a_i}\,\overline{a_{ijl}} \equiv \overline{a_i}\,\overline{a_{ilj}} \equiv \overline{a_{ij}}\,\overline{a_{il}}. \tag{64'}$$

En rapprochant les identités (64)' des identités (59) auxquelles satisfont les $\overline{a_{ijl}}$ on en conclut

$$\overline{a_{ij}} \equiv 0, \tag{65}$$

et si ces dernieres conditions sont satisfaites, les identités (64) sont satisfaites d'elles-mêmes.

Inversement. supposons que tous les invariants relatifs du second ordre, soient identiquement nuls.

Si l'on réduit comme il a été expliqué plus haut l'invariant relatif $\overline{a_1}$ à une constante fixe, les invariants relatifs $\overline{a_2}$ et $\overline{a_3}$ deviennent eux-mêmes des constantes, et les formes $\overline{\omega_1}$, $\overline{\omega_2}$, $\overline{\omega_3}$ deviennent absolument invariantes. D'autre part, il vient, en tenant compte des identités (65)

$$\overline{\varpi} \equiv 0,$$

en sorte que les formes absolument invariantes $\overline{\omega_i}$ satisfont aux identités

$$(\overline{\omega_1})' \equiv \overline{a_1}[\overline{\omega_2}, \overline{\omega_3}], \qquad (\overline{\omega_2})' \equiv \overline{a_2}[\overline{\omega_3}, \overline{\omega_1}], \qquad (\overline{\omega_3})' \equiv \overline{a_3}[\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}],$$

où

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{a_1} = \text{const.}, \qquad \overline{a_2} = \text{const.}, \qquad \overline{a_3} = \text{const.}, \\ \overline{a_1} + \overline{a_2} + \overline{a_3} = 0. \end{array}\right. \tag{66}$$

Dès lors, on aura toutes les transformations topologiques qui laissent le réseau invariant, en cherchant la solution générale du système différentiel

$$\overline{\Omega_1} = \overline{\omega_1}, \qquad \overline{\Omega_2} = \overline{\omega_2}, \qquad \overline{\Omega_3} = \overline{\omega_3},$$

où $\overline{\Omega_1}$, $\overline{\Omega_2}$, $\overline{\Omega_3}$ désignent ce que deviennent $\overline{\omega_1}$, $\overline{\omega_2}$, $\overline{\omega_3}$ quand on y remplace u, v, w par U, V, W, et où l'on considère les variables majuscules comme fonctions inconnues des variables minuscules. Or, ce système, est manifestement complètement intégrable et sa solution dépend de trois constantes arbitraires.

Le réseau admet donc effectivement un groupe continu transitif de transformations à trois paramètres dont la structure est fournie par les équations (66).

On aperçoit ainsi que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un réseau dont aucun invariant relatif du premier ordre ne s'annule admette un groupe continu transitif à trois paramètres, est que tous ses invariants relatifs $\overline{a_{ij}}$ *du second ordre soient identiquement nuls.*

Nous verrons au Chapitre suivant que *ces réseaux sont caractérisés par la propriété d'être topologiquement applicables sur quatre faisceaux de plans dont les axes sont quatre génératrices d'un même système d'une quadrique.*

b. Supposons maintenant que l'un des invariants relatifs du premier ordre $\overline{a_3}$, par exemple, soit identiquement nul. On a

$$\overline{a_3} \equiv 0, \qquad \overline{a_1} \equiv -\overline{a_2} \equiv \bar{\alpha}.$$

Par la même méthode, on montre alors que tous les invariants relatifs $\overline{a_{ij}}$ du second ordre doivent être identiquement nuls, à l'exception de $\overline{a_{13}} \equiv -\overline{a_{23}} \equiv \bar{\alpha}_3$ et que, de plus, on doit avoir

$$\bar{\alpha}_3 \equiv C(\bar{\alpha})^2, \qquad C = \text{const.}$$

Inversement, imaginons que ces conditions soient remplies. En réduisant à l'unité l'invariant relatif $\bar{\alpha}$, on définit trois formes absolument invariantes $\overline{\omega_1}$, $\overline{\omega_2}$, $\overline{\omega_3}$. De plus, $\bar{\varpi}$ devient une combinaison linéaire de ces dernières, dont l'expression est fournie par l'identité

$$d\bar{\alpha} + \bar{C}\bar{\varpi} \equiv C(\bar{\alpha})^2\overline{\omega_3},$$

qui donne, quand on y fait $\bar{\alpha} = 1$,

$$\bar{\varpi} = C\overline{\omega_3}.$$

Les formes absolument invariantes $\overline{\omega_i}$ satisfont donc aux identités

$$(67) \qquad \begin{cases} (\overline{\omega_1})' \equiv [\overline{\omega_2}, \overline{\omega_3}] + C[\overline{\omega_3}, \overline{\omega_1}], \\ (\overline{\omega_2})' \equiv -[\overline{\omega_3}, \overline{\omega_1}] + C[\overline{\omega_3}, \overline{\omega_2}], \\ (\overline{\omega_3})' \equiv 0, \end{cases}$$

qui apparaissent comme les équations de structure d'un groupe continu à trois paramètres de transformations qui transforment le réseau en lui-même.

Un calcul simple permet alors de montrer, à partir des identités (67), que l'on peut représenter les quatre familles de surfaces du réseau sous la forme

$$u_1 = \text{const.}, \qquad u_2 = \text{const.}, \qquad u_3 = \text{const.}, \qquad u_4 = \text{const.},$$

u_1, u_2, u_3, u_4 étant quatre variables assujetties à vérifier :

1° si C est différent de $+1$ ou -1 la relation

$$(u_1 + u_2)^{\frac{C}{C+1}} = (u_3 + u_4)^{\frac{C}{C-1}};$$

2° si $C = +1$ ou -1 la relation

$$u_1 + u_2 = u_3 u_4.$$

Nous verrons d'ailleurs au Chapitre suivant qu'en particulier si $C = 0$ le réseau est topologiquement applicable sur quatre faisceaux de plans, dont les axes Δ_1 et Δ_2 des deux premiers sont concourants, ainsi que les axes Δ_3 et Δ_4 des deux derniers, le point de concours de Δ_1 et Δ_2 se trouvant dans le plan $\Delta_3 \Delta_4$, et réciproquement.

En se rappelant que lorsque les invariants relatifs du premier ordre sont tous nuls, le réseau admet un groupe continu transitif à quatre paramètres, on aperçoit que l'on a ainsi déterminé tous les réseaux qui admettent un groupe continu transitif qui peut être soit à quatre, soit à trois paramètres.

II. — Réseaux de surfaces topologiquement applicables sur un réseau de plans.

23. La recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un réseau de surfaces soit topologiquement applicable sur un réseau formé par quatre familles de plans se fait facilement comme pour les réseaux de courbes, en utilisant la méthode des systèmes de références mobiles de E. Cartan.

Le problème revient à déterminer dans l'espace projectif un point

$$A_0 = A_0(u, v, w)$$

de manière qu'aux quatre surfaces

$$\theta_i = \varepsilon_{i1}\overline{\omega}_1 + \varepsilon_{i2}\overline{\omega}_2 + \varepsilon_{i3}\overline{\omega}_3 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

du réseau correspondent dans l'espace projectif quatre familles de plans. On associe, à cet effet, au point A_0 trois autres points A_1, A_2, A_3 assujettis seulement à vérifier la relation

$$(68) \qquad [A_0, A_1, A_2, A_3] \equiv 1$$

et l'on a ainsi un système de référence mobile qui dépend, outre des paramètres u, v, w, d'un certain nombre d'autres paramètres t dont on peut profiter pour le particulariser. Nous désignerons encore par d un symbole de différentiation se rapportant à une variation quelconque de tous les paramètres et par δ un symbole de différentiation obtenu en faisant varier seulement les paramètres t.

Tout point du plan s'exprimant en fonction linéaire de A_0, A_1, A_2, A_3, on a en particulier

$$(69) \qquad dA_i = \omega_{i0} A_0 + \omega_{i1} A_1 + \omega_{i2} A_2 + \omega_{i3} A_3 \qquad (i = 0, 1, 2, 3),$$

avec, d'après la condition (68),

$$(70) \qquad \omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} \equiv 0.$$

D'autre part, les conditions d'intégrabilité du système (69) s'écrivent

$$(71) \qquad \begin{cases} (\omega_{ij})' = [\omega_{i0}, \omega_{0j}] + [\omega_{i1}, \omega_{1j}] + [\omega_{i2}, \omega_{2j}] + [\omega_{i3}, \omega_{3j}] \\ \qquad (i, j = 0, 1, 2, 3). \end{cases}$$

Le point A_0 ne dépendant que de u, v, w, on constate tout d'abord que ω_{01}, ω_{02}, ω_{03} sont des fonctions linéaires des formes $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ qui définissent le réseau de surfaces, et l'on peut particulariser le système de référence mobile, de manière à avoir

$$(72) \qquad \omega_{01} = \overline{\omega}_1, \qquad \omega_{02} = \overline{\omega}_2, \qquad \omega_{03} = \overline{\omega}_3,$$

moyennant quoi les seules transformations auxquelles on peut encore soumettre ce système de référence sont définies par les transformations infinitésimales

$$(73) \qquad \delta A_0 = 0, \qquad \delta A_1 = e_{10} A_1, \qquad \delta A_2 = e_{20} A_0, \qquad \delta A_3 = e_{30} A_0.$$

24. On a maintenant à rechercher les conditions auxquelles doivent satisfaire les formes ω_{ij} pour qu'aux surfaces (S_i) correspondent, dans l'espace projectif, des plans. Il suffit pour cela d'écrire que les lignes d'intersection L_{ij} des surfaces S_i sont des droites, c'est-à-dire que lorsque u et v sont liés par les relations $\theta_i = 0$ et $\theta_j = 0$, on a

$$d^2 A_0 = \alpha\, dA_0 + \beta A_0,$$

ce qui se fait sans aucune difficulté. En tenant compte des conditions d'intégrabilité (71), on trouve ainsi sans peine les conditions suivantes :

$$(74)\quad \left\{ \begin{aligned}
2\omega_{00} &= +\tfrac{3}{2}\overline{\varpi} + (H_1 - K_1)\overline{\omega_1} + (H_2 - K_2)\overline{\omega_2} + (H_3 - K_3)\overline{\omega_3},\\
2\omega_{11} &= -\tfrac{1}{2}\overline{\varpi} + (K_1 - H_1)\overline{\omega_1} + (H_2 + K_2)\overline{\omega_2} - (H_3 + K_3)\overline{\omega_3},\\
2\omega_{22} &= -\tfrac{1}{2}\overline{\varpi} + (K_2 - H_2)\overline{\omega_2} + (H_3 + K_3)\overline{\omega_3} - (H_1 + K_1)\overline{\omega_1},\\
2\omega_{33} &= -\tfrac{1}{2}\overline{\varpi} + (K_3 - H_3)\overline{\omega_3} + (H_1 + K_1)\overline{\omega_1} - (H_2 + K_2)\overline{\omega_2},\\
\omega_{12} &= (H_2 + K_2)\overline{\omega_1} - H_1\overline{\omega_2} - \tfrac{1}{2} a_2\overline{\omega_3},\\
\omega_{23} &= (H_3 + K_3)\overline{\omega_2} - H_2\overline{\omega_3} - \tfrac{1}{2} a_3\overline{\omega_1},\\
\omega_{31} &= (H_1 + K_1)\overline{\omega_3} - H_3\overline{\omega_1} - \tfrac{1}{2} a_1\overline{\omega_2},\\
\omega_{21} &= -(H_1 + K_1)\overline{\omega_2} + K_2\overline{\omega_1} + \tfrac{1}{2} a_1\overline{\omega_3},\\
\omega_{32} &= -(H_2 + K_2)\overline{\omega_3} + K_3\overline{\omega_2} + \tfrac{1}{2} a_2\overline{\omega_1},\\
\omega_{13} &= -(H_3 + K_3)\overline{\omega_1} + K_1\overline{\omega_3} + \tfrac{1}{2} a_3\overline{\omega_2},
\end{aligned} \right.$$

où H_1, H_2, H_3, K_1, K_2, K_3 sont six nouvelles fonctions, $\overline{\varpi}$ et $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$ étant, d'autre part, définies par les équations de structure du réseau (51).

Il suffit alors d'appliquer les opérateurs d et δ aux relations (74) pour constater que si l'on effectue sur le système de référence mobile attaché au point A_0, une des transformations du groupe (73) encore possibles, les fonctions H_1, H_2, H_3, K_1, K_2, K_3 subissent elles-mêmes les transformations suivantes :

$$\begin{aligned}
\delta H_1 + e_{10} &= 0, &\quad \delta(H_1 + K_1) &= 0,\\
\delta H_2 + e_{20} &= 0, &\quad \delta(H_2 + K_2) &= 0,\\
\delta H_3 + e_{30} &= 0, &\quad \delta(H_3 + K_3) &= 0.
\end{aligned}$$

On peut donc particulariser le système de référence, de manière à avoir

$$H_1 = H_2 = H_3 = 0,$$

moyennant quoi le système de référence attaché au point A_0 se trouve parfaitement déterminé, de sorte que les quantités K_1, K_2, K_3 sont des invariants projectifs.

On a alors

$$(74')\quad \left\{\begin{aligned} 2\omega_{02} &= +\frac{3}{2}\overline{\varpi} - K_1\overline{\omega_1} - K_2\overline{\omega_2} - K_3\overline{\omega_3},\\ 2\omega_{11} &= -\frac{1}{2}\overline{\varpi} + K_2\overline{\omega_2} + K_3\overline{\omega_3} - K_1\overline{\omega_1},\\ 2\omega_{22} &= -\frac{1}{2}\overline{\varpi} + K_3\overline{\omega_3} + K_1\overline{\omega_1} - K_2\overline{\omega_2},\\ 2\omega_{33} &= -\frac{1}{2}\overline{\varpi} + K_1\overline{\omega_1} + K_2\overline{\omega_2} - K_3\overline{\omega_3}; \end{aligned}\right.$$

$$(74'')\quad \left\{\begin{aligned} \omega_{12} &= K_2\overline{\omega_1} - \frac{1}{2}\overline{a_2}\,\overline{\omega_3},\\ \omega_{23} &= K_3\overline{\omega_2} - \frac{1}{2}\overline{a_3}\,\overline{\omega_1},\\ \omega_{31} &= K_1\overline{\omega_3} - \frac{1}{2}\overline{a_1}\,\overline{\omega_2}; \end{aligned}\right.$$

$$(74''')\quad \left\{\begin{aligned} \omega_{21} &= K_2\overline{\omega_1} - K_1\overline{\omega_2} + \frac{1}{2}\overline{a_1}\,\overline{\omega_3},\\ \omega_{32} &= K_3\overline{\omega_2} - K_2\overline{\omega_3} + \frac{1}{2}\overline{a_2}\,\overline{\omega_1},\\ \omega_{13} &= K_1\overline{\omega_3} - K_3\overline{\omega_1} + \frac{1}{2}\overline{a_3}\,\overline{\omega_2}. \end{aligned}\right.$$

En écrivant que les conditions d'intégrabilité (71) sont satisfaites, on en déduirait, d'une part, les expressions de ω_{10}, ω_{20}, ω_{30} en fonction linéaire de $\overline{\omega_1}$, $\overline{\omega_2}$, $\overline{\omega_3}$, et, d'autre part, certaines conditions supplémentaires pour les fonctions K_1, K_2, K_3. On trouverait ainsi que ces dernières doivent satisfaire à un système d'équations aux dérivées partielles, dont les conditions d'intégrabilité dans le cas général sont malheureusement fort compliquées.

Nous nous bornerons à élucider le cas où les quatre familles de plans sur lesquels le réseau proposé doit être topologiquement applicable sont des *faisceaux de plans*.

25. Nous désignerons à cet effet, indifféremment par P_0, P_1, P_2, P_3 les trois faces du tétraèdre de référence mobile, ou l'ensemble de leurs coordonnées tangentielles respectives, que l'on peut supposer liées aux coordonnées A_0, A_1, A_2, A_3 des quatre sommets par les

relations

$$(P_i A_j) \equiv \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j, \\ 1, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

En différentiant ces identités, on obtient alors corrélativement aux formules (69) les relations

$$(69') \qquad dP_i = -\omega_{0i} P_0 - \omega_{1i} P_1 - \omega_{2i} P_2 - \omega_{3i} P_3.$$

Les quatre familles de plans Π_i correspondant aux quatre familles de surfaces S_i du réseau sont représentées par les équations

$$\Pi_i = \varepsilon_{i1} P_1 + \varepsilon_{i2} P_2 + \varepsilon_{i3} P_3,$$

et l'on vérifie immédiatement, en tenant compte des relations (74′), (74″) et (74‴) que la droite caractéristique du plan Π_i, soit Δ_i, est à l'intersection des deux plans

$$\Pi_i = \varepsilon_{i1} P_1 + \varepsilon_{i2} P_2 + \varepsilon_{i3} P_3,$$

$$\Pi'_i = -P_0 + \varepsilon_{i1} P_1 \left[\varepsilon_{i3} K_3 - \varepsilon_{i2} K_2 + \frac{1}{2}\overline{a_2}\right] + \varepsilon_{i2} P_2 \left[\varepsilon_{i1} K_1 - \varepsilon_{i2} K_2 - \frac{1}{2} a_1\right],$$

car $d\Pi_i$, calculé en tenant compte de (69′), est une combinaison linéaire de Π_i et Π'_i.

Pour que la famille de plans Π_i forme un faisceau, il faut que cette droite Δ_i reste fixe, et il suffit pour cela que l'on ait

$$d\Pi'_i \equiv \alpha \Pi_i + \beta \Pi'_i.$$

En écrivant qu'il en est ainsi, on trouve sans peine les conditions suivantes :

$$(75) \qquad \begin{cases} d\overline{a_1} + \overline{a_1}\,\overline{\varpi} = 4 K_3 K_1 \overline{\omega_2} - 4 K_1 K_2 \overline{\omega_3}, \\ d\overline{a_2} + \overline{a_2}\,\overline{\varpi} = 4 K_1 K_2 \overline{\omega_3} - 4 K_2 K_3 \overline{\omega_1}, \\ d\overline{a_3} + \overline{a_3}\,\overline{\varpi} = 4 K_2 K_3 \overline{\omega_1} - 4 K_3 K_1 \overline{\omega_2}; \end{cases}$$

$$(75') \qquad \begin{cases} dK_1 + K_1 \overline{\varpi} = \overline{a_1}\left[K_3 \overline{\omega_2} - K_2 \overline{\omega_3}\right], \\ dK_2 + K_2 \overline{\varpi} = \overline{a_2}\left[K_1 \overline{\omega_3} - K_3 \overline{\omega_1}\right], \\ dK_3 + K_3 \overline{\varpi} = \overline{a_3}\left[K_2 \overline{\omega_1} - K_1 \overline{\omega_2}\right]; \end{cases}$$

$$(75'') \qquad \begin{cases} \omega_{10} = \left(K_3^2 - \frac{1}{4}\overline{a_2}\,\overline{a_3}\right)\overline{\varpi_1} + \left(\frac{1}{2}\overline{a_1} K_3 - K_1 K_2\right)\overline{\omega_2} + \left[\frac{1}{2}(\overline{a_2} - \overline{a_1}) K_2 - K_1 K_3\right]\overline{\omega_3}, \\ \omega_{20} = \left(K_1^2 - \frac{1}{4}\overline{a_3}\,\overline{a_1}\right)\overline{\omega_2} + \left(\frac{1}{2}\overline{a_2} K_1 - K_2 K_3\right)\overline{\omega_3} + \left[\frac{1}{2}(\overline{a_3} - \overline{a_2}) K_3 - K_2 K_1\right]\overline{\omega_1}, \\ \omega_{30} = \left(K_2^2 - \frac{1}{4}\overline{a_1}\,\overline{a_2}\right)\overline{\omega_3} + \left(\frac{1}{2}\overline{a_3} K_2 - K_3 K_1\right)\overline{\omega_1} + \left[\frac{1}{2}(\overline{a_1} - \overline{a_3}) K_1 - K_3 K_2\right]\overline{\omega_2}. \end{cases}$$

Les ω_{ij} sont alors tous déterminés par les relations (74′), (74″), (74‴), (75″), et l'on vérifie aisément que si, d'autre part, les conditions (75) et (75′) sont satisfaites par les fonctions inconnues K_1, K_2, K_3, les conditions d'intégrabilité (71) sont identiquement satisfaites. A tout système de fonctions K_1, K_2, K_3, satisfaisant aux conditions (75) et (75′), correspond une transformation topologique qui n'est d'ailleurs définie qu'à une transformation projective près, réalisant l'application du réseau proposé sur un réseau formé par quatre faisceaux de plans.

On peut d'ailleurs aisément trouver les conditions supplémentaires pour que deux des axes Δ_i et Δ_j soient concourants. On trouve ainsi que :

$$(76)\quad \begin{cases} \Delta_1 \text{ et } \Delta_4 & \text{sont concourants si} & 2K_1 = \overline{a_1}, \\ \Delta_2 \text{ et } \Delta_4 & \text{»} & 2K_2 = \overline{a_2}, \\ \Delta_3 \text{ et } \Delta_4 & \text{»} & 2K_3 = \overline{a_3}, \\ \Delta_2 \text{ et } \Delta_3 & \text{»} & 2K_1 = -\overline{a_1}, \\ \Delta_3 \text{ et } \Delta_1 & \text{»} & 2K_2 = -\overline{a_2}, \\ \Delta_1 \text{ et } \Delta_2 & \text{»} & 2K_3 = -\overline{a_3}. \end{cases}$$

26. Il ne reste plus maintenant qu'à rechercher à quelles conditions le système (75)-(75′) admet un système de solutions.

Des relations (75) on déduit, tout d'abord,

$$(\overline{\varpi})' \equiv 0.$$

Cette identité exprime que le réseau proposé doit être à configuration superficielle hexagonale. *Cest là une première condition nécessaire* qu'on aurait d'ailleurs pu prévoir *a priori*, étant donné que tout réseau formé par quatre faisceaux de plans possède manifestement cette propriété.

Cette condition étant supposée réalisée, nous avons vu (§ **21**) qu'on peut choisir les formes $\overline{\omega}_i$ à un facteur constant près, de manière à avoir

$$\overline{\varpi} \equiv 0$$

et

$$d\overline{a_1} \equiv 4[p_2\overline{\omega_2} - p_3\overline{\omega_3}], \qquad d\overline{a_2} \equiv 4(p_3\overline{\omega_3} - p_1\overline{\omega_1}), \qquad d\overline{a_3} \equiv 4(p_1\overline{\omega_1} - p_2\overline{\omega_2}),$$

où l'on a posé

$$\overline{a_{12}} \equiv -\overline{a_{13}} = 4p_1, \qquad \overline{a_{23}} \equiv -\overline{a_{21}} \equiv 4p_2, \qquad \overline{a_{31}} \equiv -\overline{a_{32}} \equiv 4p_3.$$

Si l'on pose, d'autre part, d'une façon générale,

$$df \equiv \overline{\omega}_1 X_1 f + \overline{\omega}_2 X_2 f + \overline{\omega}_3 X_3 f,$$

on constate sans peine que les relations (75) et (75′) se réduisent alors aux suivantes :

$$X_1 K_1 = X_2 K_2 = X_3 K_3 = 0,$$

$$(77) \qquad \begin{cases} X_1 K_2 = -a_2 K_3, & X_2 K_1 = a_1 K_3, \\ X_2 K_3 = -a_3 K_1, & X_3 K_2 = a_2 K_1, \\ X_3 K_1 = -a_1 K_2, & X_1 K_3 = a_3 K_2 \end{cases}$$

et

$$(77') \qquad K_1 K_2 = p_3, \qquad K_2 K_3 = p_1, \qquad K_3 K_1 = p_2.$$

On en conclut que, ou bien les trois expressions p_i sont différentes de zéro, ou bien deux d'entre elles au moins sont nulles. Et l'on est ainsi conduit à distinguer les divers cas suivants :

A. *Les invariants relatifs $\overline{a}_i$ sont tous différents de zéro, et aucun d'eux n'est constant.*

Alors p_1, p_2, p_3 sont tous trois différents de zéro, et l'on a

$$K_1 = \frac{\pm\sqrt{p_1 p_2 p_3}}{p_1}, \qquad K_2 = \frac{\pm\sqrt{p_1 p_2 p_3}}{p_2}, \qquad K_3 = \frac{\pm\sqrt{p_1 p_2 p_3}}{p_3}.$$

On obtient ainsi deux systèmes de valeurs opposées pour K_1, K_2, K_3 et en les portant dans les relations (77), on en déduit immédiatement les conditions nécessaires et suffisantes cherchées, qui *sont les mêmes quel que soit le signe adopté devant* $\sqrt{p_1 p_2 p_3}$.

Si ces conditions sont réalisées, le réseau proposé est topologiquement applicable sur deux systèmes projectivement distincts de quatre faisceaux de plans. En particulier, on voit qu'étant donné un réseau formé par quatre faisceaux de plans pour lequel les $\overline{a}_i$ ne sont pas constants, il existe un autre réseau de même nature qui lui est topologiquement équivalent tout en étant projectivement distinct.

Les conditions (76) montrent d'ailleurs que si dans le premier réseau les axes Δ_i et Δ_j sont concourants, dans l'autre réseau les axes Δ_p et Δ_k sont également concourants ($i \neq j \neq h \neq k$).

B. *Les trois invariants $\overline{a}_i$ sont différents de zéro et constants :*

$$\overline{a}_1 = \text{const.}, \qquad \overline{a}_2 = \text{const.}, \qquad \overline{a}_3 = \text{const.}$$

Nous avons vu précédemment que dans ce cas le réseau admet un groupe continu transitif à trois paramètres.

On a alors

$$K_1 \equiv K_2 \equiv K_3 \equiv 0,$$

et les équations (77) sont identiquement satisfaites.

Tout réseau à configuration superficielle hexagonale pour lequel les $\overline{a}_i$ sont tous trois différents de zéro et constants, est donc topologiquement applicable sur quatre faisceaux de plans, qui sont déterminés, aux transformations projectives près, de façon unique.

On vérifie immédiatement, en se reportant aux équations des axes Δ_i de ces quatre faisceaux, que *ces axes sont quatre génératrices d'un même système d'une quadrique*, dont l'équation, par rapport au système de référence mobile, est

$$4x_0^2 + \overline{a}_2\overline{a}_3 x_1^2 + \overline{a}_3\overline{a}_1 x_2^2 + \overline{a}_1\overline{a}_2 x_3^2 = 0.$$

C'est d'ailleurs ce qui résulte de façon évidente du fait que les quatre faisceaux de plans admettent un sous-groupe à trois paramètres du groupe projectif.

C. *Un seul des invariants relatifs $\overline{a}_i$ est nul.* — Soit par exemple

$$\overline{a}_3 = 0, \qquad \overline{a}_1 = -\overline{a}_2 = \overline{a} \neq 0.$$

On trouve alors aisément

$$K_3 = 0, \qquad K_1 K_2 = X_3\overline{a}, \qquad K_1^2 + K_2^2 = \frac{X_3 X_3 \overline{a}}{\overline{a}}.$$

De ces dernières relations on déduit en général pour K_1, K_2, K_3, quatre systèmes de valeurs distinctes, qui portés dans les relations (77) fournissent les *mêmes* conditions nécessaires et suffisantes cherchées. Ces quatre systèmes se réduisent à deux si $K_1 + K_2$ ou $K_1 - K_2$ sont nuls, et à un seul si K_1 et K_2 sont tous deux nuls.

Dans le cas général, le réseau proposé est donc topologiquement applicable sur quatre systèmes, topologiquement équivalents mais projectivement distincts, de quatre faisceaux de plans, et l'on vérifie aisément que, dans ces quatre systèmes, les axes Δ_1, Δ_2 sont concourants ainsi que les axes Δ_3, Δ_4.

Si $K_1 + K_2 = 0$, les quatre systèmes de faisceaux de plans se réduisent à deux seulement, dans lesquels le point de rencontre des axes Δ_3 et Δ_4 est situé dans le plan des axes Δ_1, Δ_2.

Il en est de même si $K_1 - K_2 \equiv 0$ avec cette différence que c'est alors le point de rencontre des axes Δ_1 et Δ_2 qui se trouve dans le plan $(\Delta_3 \Delta_4)$.

Enfin, si $K_1 \equiv K_2 \equiv 0$ le réseau proposé n'est plus applicable que sur un seul système de faisceaux de plans bien déterminé, aux transformations projectives près, et pour lequel le point de concours des axes Δ_1, Δ_2 est situé dans le plan des deux autres axes (Δ_3, Δ_4) et réciproquement.

D. *Les trois invariants relatifs* $\overline{a_i}$ *sont nuls.* — Le réseau est alors à configuration octaédrale, et les conditions (77) et (77') sont identiquement satisfaites dès que deux des K_i sont nuls, le troisième étant une constante arbitraire. Les quatre axes des faisceaux de plans sur lesquels est applicable le réseau proposé forment alors un quadrilatère gauche, et tous les systèmes de faisceaux de plans répondant à cette condition sont topologiquement équivalents, bien qu'étant projectivement distincts (si l'invariant projectif K_i non nul n'a pas la même valeur).

27. Nous avons ainsi déterminé les réseaux de faisceaux de plans qui sont projectivement distincts tout en étant topologiquement équivalents. Il y aurait intérêt à rechercher la solution du problème plus général suivant (Blaschke [5]).

Quels sont les réseaux de plans quelconques (ne formant pas forcément des faisceaux) topologiquement équivalents, mais projectivement distincts?

Signalons enfin que M. Podehl [41] a donné des conditions géométriques simples, nécessaires et suffisantes pour qu'un réseau de surfaces soit topologiquement applicable sur quatre faisceaux de plans.

Avant de quitter ce sujet, nous ferons observer que la méthode précédente permettrait aisément de déterminer analytiquement les réseaux de plans à configuration octaédrale. Il suffirait de faire $\overline{a_1} \equiv \overline{a_2} \equiv \overline{a_3} \equiv 0$, $\overline{\varpi} \equiv 0$ dans les équations (74), (74'), (74'') et l'on peut par un calcul en tous points analogues à celui qui a été appliqué au chapitre précédent à la recherche des réseaux de droites à configuration hexagonale, démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Les seuls réseaux de plans qui présentent la configuration octaédrale sont les réseaux constitués par les plans tangents communs aux quadriques d'un faisceau tangentiel (qui peut être dégénéré).*

On peut d'ailleurs en donner une démonstration géométrique immédiate à partir du théorème B ci-dessus. En effet les surfaces S_i étant des plans et les lignes L_{ij} des droites, les trois couples de lignes (L_{12}, L_{34}), (L_{13}, L_{24}), (L_{14}, L_{23}) engendrent, si le réseau est à configuration octaédrale, trois familles de surfaces qui, étant doublement réglées, sont des quadriques auxquelles on vérifie immédiatement que les plans S_i sont tangents, puisque chacun d'eux en contient deux génératrices. Dubourdieu [27].

CHAPITRE IV.

INVARIANTS TOPOLOGIQUES DE DEUX CONGRUENCES DE COURBES DANS L'ESPACE.

27 *bis*. La recherche des invariants topologiques de deux congruences de courbes dans l'espace à trois dimensions équivaut, ainsi que l'a montré W. Blaschke [13] à la recherche des invariants de l'équation différentielle générale du second ordre, telle que l'a développée pour la première fois A. Tresse [52], ou ce qui revient au même à la recherche des invariants topologiques d'une famille de courbes à deux paramètres dans le plan (Bol [20]).

D'une part, en effet, étant données deux familles de courbes de l'espace, on peut, à condition qu'elles n'engendrent pas une famille à un paramètre de surfaces, projeter l'une des familles de courbes au moyen des courbes de l'autre famille sur une surface, de manière à obtenir sur cette dernière une famille de courbes à deux paramètres, à laquelle correspond par conséquent une équation différentielle du second ordre.

D'autre part, à l'équation du second ordre

$$\frac{d^2 v}{du^2} = f\left(u, v, \frac{dv}{du}\right), \tag{78}$$

dans le plan (u, v) on peut faire correspondre dans l'espace (u, v, w)

les deux familles de courbes L_1 et L_2 d'équations respectives

$$(L_1) \qquad \frac{du}{0} = \frac{dv}{0} = \frac{dw}{1},$$

$$(L_2) \qquad \frac{du}{1} = \frac{dv}{w} = \frac{dw}{f(u, v, w)},$$

auxquelles correspondent précisément par le procédé indiqué ci-dessus, dans le plan u, v, l'équation différentielle (78), et cette correspondance est topologiquement invariante au sens restreint que nous sommes convenu de donner à cette expression.

En fait, l'équation (78) est l'équation différentielle de la famille de courbes à deux paramètres que l'on obtient en projetant la congruence L_2 au moyen des courbes de la congruence L_1. Si inversement on projette sur le plan u, v, la congruence L_1, au moyen des courbes de la famille L_2, on obtient une nouvelle famille de courbes à deux paramètres à laquelle correspond une nouvelle équation différentielle du second ordre qui n'est autre que l'équation adjointe de (78) que l'on définit habituellement comme suit. Soit

$$\varphi(u, v, a, b) = 0,$$

la solution générale de l'équation (78) qui dépend de deux paramètres a et b. Si l'on considère a et b comme les variables, et u, v comme des paramètres, cette solution apparaît comme la solution générale d'une nouvelle équation du second ordre en a et b qui n'est autre que l'équation adjointe à l'équation primitive (78).

On aperçoit ainsi l'intérêt qui s'attache à la recherche directe des invariants topologiques de deux congruences de courbes dans l'espace, n'engendrant pas une famille à un paramètre de surfaces. Les méthodes de E. Cartan permettent d'effectuer cette recherche avec une grande simplicité.

28. Les deux congruences de courbes L_1 et L_2 peuvent être représentées sous la forme

$$L_1 \begin{cases} \omega_1 = 0, \\ \omega_3 = 0, \end{cases} \qquad L_2 \begin{cases} \omega_2 = 0, \\ \omega_3 = 0, \end{cases}$$

où ω_1, ω_2, ω_3 sont trois expressions de Pfaff en du, dv, dw (dont la troisième représente l'élément plan défini par les tangentes aux courbes L_1 et L_2) et qui ne sont d'ailleurs définies qu'à une transformation près du groupe linéaire

$$(\Gamma)\qquad \overline{\omega}_1 = u_1\omega_1 + v_1\omega_3, \qquad \overline{\omega}_2 = u_2\omega_2 + v_2\omega_3, \qquad \overline{\omega}_3 = u_3\omega_3.$$

Le problème revient en définitive à rechercher les invariants des formes ω_1, ω_2, ω_3, d'une part par rapport à une transformation quelconque du système de coordonnées u, v, w et d'autre part par rapport aux transformations du groupe linéaire (Γ).

A cet effet, on considère u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 comme cinq nouvelles variables indépendantes.

Les covariants bilinéaires des formes $\overline{\omega}$ peuvent alors se mettre sous la forme

$$(79)\qquad \begin{cases} (\overline{\omega}_1)' \equiv [\pi_1, \overline{\omega}_1] + [\varpi_1, \overline{\omega}_3], \\ (\overline{\omega}_2)' \equiv [\pi_2, \overline{\omega}_2] + [\varpi_2, \overline{\omega}_3], \\ (\overline{\omega}_3)' \equiv a[\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2] + [\pi_3, \overline{\omega}_3], \end{cases}$$

π_1, π_2, π_3, ϖ_1, ϖ_2 étant cinq nouvelles formes de Pfaff aux huit variables u, v, w, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, indépendantes entre elles et indépendantes de $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ et qui ne sont d'ailleurs définies qu'aux transformations près

$$\begin{aligned} \overline{\pi}_1 &= \pi_1 + w_1\overline{\omega}_1 + w_2\overline{\omega}_3, \\ \overline{\pi}_2 &= \pi_2 + w_3\overline{\omega}_2 + w_4\overline{\omega}_3, \\ \overline{\pi}_3 &= \pi_3 + w_5\overline{\omega}_3, \\ \overline{\varpi}_1 &= \varpi_1 + w_2\overline{\omega}_1 + w_6\overline{\omega}_3, \\ \overline{\varpi}_2 &= \varpi_1 + w_4\overline{\omega}_2 + w_7\overline{\omega}_3. \end{aligned}$$

En considérant w_1, w_2, $\ldots$, w_7 comme de nouvelles variables indépendantes on peut remplacer les relations (79) par les suivantes:

$$(79')\qquad \begin{cases} (\overline{\omega}_1)' \equiv [\overline{\pi}_1, \overline{\omega}_1] + [\overline{\varpi}_1, \overline{\omega}_3], \\ (\overline{\omega}_2)' \equiv [\overline{\pi}_2, \overline{\omega}_2] + [\overline{\varpi}_2, \overline{\omega}_3], \\ (\overline{\omega}_3)' = \overline{a}[\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2] + [\overline{\pi}_3, \overline{\omega}_3]. \end{cases}$$

Effectuons alors sur les $\overline{\omega}_i$ une transformation infinitésimale du groupe Γ, soit

$$(80)\qquad \delta\overline{\omega}_1 = e_1\overline{\omega}_1 + \varepsilon_1\overline{\omega}_3, \qquad \delta\overline{\omega}_2 = e_2\overline{\omega}_2 + \varepsilon_2\overline{\omega}_3, \qquad \delta\overline{\omega}_3 = e_3\overline{\omega}_3.$$

En écrivant que les accroissements des covariants $(\overline{\omega}_i)'$ fournis par les relations (79') sont égaux respectivement aux covàriants des expressions $\delta\overline{\omega_i}$ fournis par les relations (80), on constate sans peine que la transformation infinitésimale (80) transforme l'expression $\bar{a}$, et les formes de Pfaff $\overline{\pi_i}$ et $\overline{\varpi_i}$, d'après les formules suivantes, où les ν_i sont sept nouvelles arbitraires

$$(81) \qquad \delta\bar{a} + \bar{a}(e_1 + e_2 - e_3) = 0;$$

$$(81') \qquad \left\{\begin{aligned}
\delta\overline{\pi_1} &= de_1 - \varepsilon_1 \bar{a}\,\overline{\omega_2} + \nu_1 \overline{\omega_1} + \nu_2 \overline{\omega_3},\\
\delta\overline{\pi_2} &= de_2 + \varepsilon_2 \bar{a}\,\overline{\omega_1} + \nu_3 \overline{\omega_2} + \nu_4 \overline{\omega_3},\\
\delta\overline{\pi_3} &= de_3 + \bar{a}(\varepsilon_1 \overline{\omega_2} - \varepsilon_2 \overline{\omega_1}) + \nu_5 \overline{\omega_3},\\
\delta\overline{\varpi_1} &= d\varepsilon_1 + \varepsilon_1(\overline{\pi_3} - \overline{\pi_1}) - (e_3 - e_1)\overline{\varpi_1} + \nu_2 \overline{\omega_1} + \nu_6 \overline{\omega_3},\\
\delta\overline{\varpi_2} &= d\varepsilon_2 + \varepsilon_2(\overline{\pi_3} - \overline{\pi_2}) - (e_3 - e_2)\overline{\varpi_2} + \nu_4 \overline{\omega_2} + \nu_7 \overline{\omega_3}.
\end{aligned}\right.$$

La relation (81) montre tout d'abord que $\bar{a}$ est un invariant relatif dont la signification est d'ailleurs évidente. L'égalité invariante $\bar{a} = 0$ exprime en effet que l'équation

$$\overline{\omega_3} = 0$$

est complètement intégrale, c'est-à-dire que les deux familles de courbes L_1 et L_2 engendrent une famille à un paramètre de surfaces.

Ce cas étant exclu de l'étude que nous nous sommes proposée, on doit supposer

$$\bar{a} \neq 0.$$

Mais alors on peut profiter de l'indétermination des variables auxiliaires u_1, u_2, u_3 pour faire

$$(82) \qquad \bar{a} = 1$$

moyennant quoi les variables u_1, u_2, u_3 et u, v, w sont liées par une relation qui a pour effet de réduire le groupe (Γ) au sous-groupe engendré par la formation infinitésimale

$$(83) \qquad \delta\overline{\omega_1} = e_1\overline{\omega_1} + \varepsilon_1\overline{\omega_3}, \qquad \delta\overline{\omega_2} = e_2\overline{\omega_2} + \varepsilon_2\overline{\omega_3}, \qquad \delta\overline{\omega_3} = (e_1 + e_2)\overline{\omega_3},$$

qui se déduit de la transformation (80) en y faisant

$$(84) \qquad e_3 = e_1 + e_2.$$

Continuant à désigner par $\overline{\omega_1}$, $\overline{\omega_2}$, ... ce que deviennent les expressions différentielles précédemment définies après cette réduction à l'unité de l'invariant relatif a, on constate alors que les relations (81') dans lesquelles on tient compte de (83) donnent

$$(85)\quad \delta(\overline{\pi_3}-\overline{\pi_1}-\overline{\pi_2}) = -(\nu_1+2\varepsilon_2)\overline{\omega_1}+(2\varepsilon_1-\nu_3)\overline{\omega_2}+(\nu_5-\nu_2-\nu_1)\overline{\omega_3}.$$

La liaison établie entre les variables u, v, w et u_1, u_2, u_3 pour réduire à l'unité l'invariant relatif a, entraîne donc que les formes $\overline{\pi_1}$, $\overline{\pi_2}$, $\overline{\pi_3}$ cessant d'être linéairement indépendantes de $\overline{\omega_1}$, $\overline{\omega_2}$, $\overline{\omega_3}$, l'on a une identité de la forme

$$\overline{\pi_3}-\overline{\pi_1}-\overline{\pi_2} \equiv \alpha_1\overline{\omega_1}+\alpha_2\overline{\omega_2}+\alpha_3\overline{\omega_3},$$

et de la relation (85) on conclut immédiatement

$$\begin{aligned} \delta\alpha_1+e_1\alpha_1 &= -(\nu_1+2\varepsilon_2),\\ \delta\alpha_2+e_2\alpha_2 &= 2\varepsilon_1-\nu_3,\\ \delta a_3+\alpha_3(e_1+e_2)+\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2 &= \nu_5-\nu_1-\nu_2. \end{aligned}$$

Ces égalités montrent que les quantités α_1, α_2, α_3 sont soumises à un groupe linéaire, dont les paramètres sont les variables auxiliaires u_1, u_2, $\ldots$, w_5, de sorte que l'on pourra s'arranger de manière à faire

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \alpha_3 \equiv 0,$$

c'est-à-dire

$$(86)\qquad \overline{\pi_3} \equiv \overline{\pi_1}+\overline{\pi_2},$$

moyennant quoi on devra supposer par la suite dans les formules (11′)

$$(87)\qquad \nu_1 = -2\varepsilon_2,\qquad \nu_3 = 2\varepsilon_1,\qquad \nu_5 = \nu_2+\nu_1.$$

Finalement on aperçoit que le système de variables auxiliaires précédemment introduites se trouve ainsi réduit, d'une part aux quatre variables auxiliaires u_1, u_2, v_1, v_2 et d'autre part à $7-3=4$ autres variables auxiliaires, anciennement désignées par w_2, w_4, w_6, w_7 et que nous désignerons dorénavant par w_1, w_2, t_1, t_2.

Les deux congruences de courbes se trouvent représentées de la sorte par quatre formes de Pfaff $\overline{\omega_1}$, $\overline{\omega_2}$, $\overline{\omega_3}$ qui satisfont aux identités

$$(88)\qquad \left\{ \begin{aligned} (\overline{\omega_1})' &\equiv [\overline{\pi_1}, \overline{\omega_1}]+[\overline{\varpi_1}, \overline{\varpi_3}],\\ (\overline{\omega_2})' &\equiv [\overline{\pi_2}, \overline{\omega_2}]+[\overline{\varpi_2}, \overline{\omega_3}],\\ (\overline{\omega_1})' &\equiv [\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}]+[\overline{\pi_1}+\overline{\pi_2}, \overline{\omega_3}], \end{aligned}\right.$$

où $\overline{\pi_1}$, $\overline{\pi_2}$, $\overline{\varpi_1}$, $\overline{\varpi_2}$ représentent quatre nouvelles formes de Pfaff contenant les différentielles des variables supplémentaires u_1, u_2, v_1, v_2 et linéairement indépendantes. Les formes $\overline{\omega_i}$ ne sont d'ailleurs elles-mêmes définies qu'à une transformation près du sous-groupe de (Γ) engendré par la transformation infinitésimale (83), et si l'on effectue une telle transformation, les relations (88) conservent la même forme, les expressions $\overline{\pi_1}$, $\overline{\pi_2}$, $\overline{\omega_1}$, $\overline{\omega_2}$ subissant elles-mêmes les transformations

$$(89)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\overline{\pi_1} &= de_1 - 2\varepsilon_2\overline{\omega_1} - \varepsilon_1\overline{\omega_2} + \mu_1\overline{\omega_3},\\ \delta\overline{\pi_2} &= de_2 + \varepsilon_2\overline{\omega_1} + 2\varepsilon_1\overline{\omega_2} + \mu_2\overline{\omega_3},\\ \delta\overline{\omega_1} &= d\varepsilon_1 + \varepsilon_1\overline{\pi_2} - e_2\overline{\varpi_1} + \mu_1\overline{\omega_1} + \nu_1\overline{\omega_3},\\ \delta\overline{\varpi_2} &= d\varepsilon_2 + \varepsilon_2\overline{\pi_1} - e_1\overline{\varpi_2} + \mu_2\overline{\omega_2} + \nu_2\overline{\varpi_3}, \end{aligned}\right.$$

où μ_1, μ_2, ν_1, ν_2 sont des arbitraires (anciennement notées ν_2, ν_4, ν_6, ν_7) correspondant à une variation infinitésimale des variables auxiliaires w_1, w_2, t_1, t_2.

29. Si alors on écrit (relation fondamentale) que les covariants trilinéaires des covariants bilinéaires (88) sont identiquement nuls, on trouve sans difficulté que les covariants bilinéaires de $\overline{\pi_1}$, $\overline{\pi_2}$, $\overline{\varpi_1}$, $\overline{\varpi_2}$ peuvent être mis sous la forme

$$(90)\quad \left\{\begin{aligned} (\overline{\pi_1})' &\equiv \beta[\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}] - [\overline{\varpi_1}, \overline{\omega_2}] - 2[\overline{\omega_2}, \overline{\omega_1}] + [\theta_1, \overline{\omega_3}],\\ (\overline{\pi_2})' &\equiv -\beta[\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}] + [\overline{\varpi_2}, \overline{\omega_1}] + 2[\overline{\varpi_1}, \overline{\omega_2}] + [\theta_2, \overline{\omega_3}],\\ (\overline{\varpi_1})' &\equiv [\overline{\varpi_1}, \overline{\pi_2}] + [\theta_1, \overline{\omega_1}] + [\rho_1, \overline{\omega_3}],\\ (\overline{\varpi_2})' &\equiv [\overline{\varpi_2}, \overline{\pi_1}] + [\theta_2, \overline{\omega_2}] + [\rho_2, \overline{\omega_3}], \end{aligned}\right.$$

où θ_1, θ_2, ρ_1, ρ_2 désignent quatre nouvelles formes de Pfaff contenant les différentielles des nouvelles variables w_1, w_2, t_1, t_2 et formant par suite avec les formes de Pfaff précédemment introduites un système linéairement indépendant. Ces nouvelles expressions différentielles ne sont d'ailleurs définies qu'à une transformation près de la forme

$$\overline{\theta_1} = \theta_1 + x_1\overline{\omega_3}, \qquad \overline{\rho_1} = \rho_1 + y_1\overline{\omega_3} + x_1\overline{\omega_1},$$
$$\overline{\theta_2} = \theta_2 + x_2\overline{\omega_3}, \qquad \overline{\rho_2} = \rho_2 + y_2\overline{\omega_3} + x_2\overline{\omega_2},$$

et l'on peut sans changer la forme des relations (90) y substituer les $\overline{\theta_i}$, $\overline{\rho_i}$ aux θ_i, ρ_i, ce qui introduit quatre nouvelles variables auxiliaires x_1, x_2, y_1, y_2.

Si l'on effectue alors la transformation infinitésimale (13) sur les $\overline{\omega_i}$, on trouve sans peine en tenant compte des identités

$$(\delta\overline{\pi_i})' = \delta(\overline{\pi'_i}), \qquad (\delta\overline{\varpi_i})' = \delta(\overline{\varpi'_i}),$$

que β et $\overline{\theta_1}$, $\overline{\theta_2}$, $\overline{\rho_1}$, $\overline{\rho_2}$ se transforment d'après les formules suivantes :

$$(91)\quad \begin{cases} \delta\overline{\theta_1} = d\mu_1 + (\overline{\pi_1} + \overline{\pi_2})\mu_1 - (e_1 + e_2)\overline{\theta_1} + \varepsilon_1\overline{\varpi_2} - \varepsilon_2\overline{\varpi_1} - \nu_1\overline{\omega_2} - 2\nu_2\overline{\omega_1} + \xi_1\overline{\omega_3},\\ \delta\overline{\theta_2} = d\mu_2 + (\overline{\pi_1} + \overline{\pi_2})\mu_2 - (e_1 + e_2)\overline{\theta_2} + \varepsilon_1\overline{\varpi_2} - \varepsilon_2\overline{\varpi_1} + \nu_2\overline{\omega_1} + 2\nu_1\overline{\omega_2} + \xi_2\overline{\omega_3},\\ \delta\overline{\rho_1} = d\nu_1 + \nu_1(2\overline{\pi_2} + \overline{\pi_1}) - \overline{\rho_1}(2e_2 + e_1) + \varepsilon_1(\overline{\theta_2} - \overline{\theta_1}) - \overline{\varpi_1}(\mu_2 - \mu_1) + \xi_1\overline{\omega_1} + \eta_1\overline{\omega_3},\\ \delta\overline{\rho_2} = d\nu_2 + \nu_2(2\overline{\pi_1} + \overline{\pi_2}) - \overline{\rho_2}(2e_1 + e_2) + \varepsilon_1(\overline{\theta_1} - \overline{\theta_2}) - \overline{\varpi_2}(\mu_1 - \mu_2) + \xi_2\overline{\omega_2} + \eta_2\overline{\omega_3}, \end{cases}$$

$$(92)\qquad \delta\beta + \beta(e_1 + e_2) = 2(\mu_1 - \mu_2),$$

où ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 désignent quatre nouvelles arbitraires correspondant aux variables auxiliaires x_1, x_2, y_1, y_2.

La formule (92) montre tout d'abord que β est soumise à une substitution qui dépend des paramètres u_1, u_2, w_1, w_2 et l'on peut par conséquent, en établissant entre ces derniers une relation convenable, s'arranger de manière à faire $\beta = 0$ moyennant quoi, on aura dorénavant

$$(93)\qquad \mu_1 = \mu_2 = \mu,$$

et les deux premières relations (91) donnent alors

$$(94)\quad \delta(\overline{\theta_1} - \overline{\theta_2}) = -(e_1 + e_2)[\overline{\theta_1} - \overline{\theta_2}] - 3\nu_2\overline{\omega_1} - 3\nu_1\overline{\omega_2} + (\xi_1 - \xi_2)\overline{\omega_3}.$$

Cette réduction de la quantité β à zéro étant effectuée, la différence $\overline{\theta_1} - \overline{\theta_2}$ devient une forme linéaire en $\overline{\omega_1}$, $\overline{\omega_2}$, $\overline{\omega_3}$ et la relation (94) montre qu'en établissant trois nouvelles relations entre les variables auxiliaires, on pourra s'arranger de manière à réduire cette forme identiquement à zéro, c'est-à-dire à faire

$$(95)\qquad \overline{\theta_1} \equiv \overline{\theta_2} \equiv \overline{\theta},$$

moyennant quoi, on aura par la suite

$$(96)\qquad \nu_1 = 0, \qquad \nu_2 = 0, \qquad \xi_1 = \xi_2 = \xi.$$

Dès lors, les formes $\overline{\rho_1}$ et $\overline{\rho_2}$ deviennent elles-mêmes des combinaisons linéaires de $\overline{\omega_1}$, $\overline{\omega_2}$, $\overline{\omega_3}$ soit

$$(96')\qquad \begin{cases} \overline{\rho_1} \equiv a_{11}\overline{\omega_1} + a_{12}\overline{\omega_2} + a_{13}\overline{\omega_3},\\ \overline{\rho_2} \equiv a_{21}\overline{\omega_1} + a_{22}\overline{\omega_2} + a_{23}\overline{\omega_3}. \end{cases}$$

qui d'après les formules (91) et en tenant compte des relations (93) et (96) se transforment, lorsqu'on effectue la transformation (83) sur les $\overline{\omega}_i$, comme suit

$$(97)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\overline{\rho}_1 &= -(2e_2+e_1)\overline{\rho}_1+\xi\overline{\omega}_1+\eta_1\overline{\omega}_3,\\ \delta\overline{\rho}_2 &= -(2e_1+e_2)\overline{\rho}_2+\xi\overline{\omega}_2+\eta_2\overline{\omega}_3.\end{aligned}\right.$$

En écrivant que les covariants trilinéaires de $(\overline{\varpi}_1)'$ et $(\overline{\varpi}_2)'$ sont identiquement nuls (relation fondamentale), on trouve d'ailleurs les identités

$$(98)\quad \left\{\begin{aligned} &(a_{11}-2a_{22})[\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3]+\Big[\overline{\theta}'+[\overline{\varpi}_2, \overline{\varpi}_1]-[\overline{\theta}, \overline{\pi}_1+\overline{\pi}_2], \overline{\omega}_3\Big]\equiv 0,\\ &(a_{22}-2a_{11})[\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3]+\Big[\overline{\theta}'+[\overline{\varpi}_2, \overline{\varpi}_1]-[\overline{\theta}, \overline{\pi}_1+\overline{\pi}_2], \overline{\omega}_3\Big]\equiv 0,\end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit

$$(98')\qquad a_{11}\equiv a_{22}.$$

Les relations (97) dans lesquelles on remplace $\overline{\rho}_1$ et $\overline{\rho}_2$ par leurs expressions (96) donnent alors

$$(99)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta a_{11}+2(e_1+e_2)a_{11}=\delta a_{22}+2(e_1+e_2)a_{22}=\xi,\\ &\delta a_{13}+a_{11}\varepsilon_1+a_{12}\varepsilon_2+a_{13}(2e_1+3e_2)=\eta_1,\\ &\delta a_{23}+a_{21}\varepsilon_1+a_{22}\varepsilon_2+a_{23}(3e_1+2e_2)=\eta_2,\\ &\delta a_{12}+(3e_2+e_1)a_{12}=0,\\ &\delta a_{21}+(3e_1+e_2)a_{21}\equiv 0.\end{aligned}\right.$$

On en conclut que a_{12} et a_{21} sont deux invariants relatifs. Pour ne pas alourdir cet exposé, nous avons négligé de signaler quel est l'ordre des dérivées des coefficients des formes $\overline{\omega}_i$ d'où l'on est parti, qui interviennent dans les différentes expressions successivement introduites. Le lecteur comblera aisément cette lacune, et constatera en particulier que chacune des réductions effectuées élevant cet ordre d'une unité, les invariants relatifs a_{12} et a_{21} sont du cinquième ordre.

D'ailleurs si l'on passe du système de deux congruences de courbes à l'équation différentielle du second ordre correspondante on peut aisément calculer les invariants relatifs correspondants de l'équation

$$(78)\qquad \frac{d^2v}{du^2}=f\left(u, v, \frac{dv}{du}\right),$$

en reprenant les raisonnements précédents sur le système

$$\omega_1 = du, \qquad \omega_2 = dw - f(u, v, w)\,du, \qquad \omega_3 = dv - w\,du.$$

On trouve ainsi que a_{12} n'est autre que $\frac{\partial^4 f}{\partial w^4}$ (1). Lorsqu'il s'annule identiquement l'équation (78) est donc de la forme

$$\frac{d^2 v}{du^2} = a_0 \left(\frac{dv}{du}\right)^3 + a_1 \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + a_2 \left(\frac{dv}{du}\right) + a_3. \tag{100}$$

Si au contraire c'est l'autre invariant a_{21} qui s'annule identiquement, c'est l'équation adjointe de (78) qui a la forme (100).

30. Supposons tout d'abord que les deux invariants relatifs a_{12} et a_{21} soient identiquement nuls

$$a_{12} \equiv a_{21} \equiv 0.$$

Les quatre premières relations (99) montrent que l'on pourra s'arranger de manière à faire

$$a_{11} \equiv a_{22} \equiv a_{13} \equiv a_{23} \equiv 0,$$

c'est-à-dire

$$\overline{\rho_1} \equiv \overline{\rho_2} \equiv 0,$$

moyennant quoi on aura

$$\xi = \eta_1 = \eta_2 = 0,$$

et les seules variables auxiliaires qui subsistent sont u_1, u_2, v_1, v_2, w_1.

Les relations (98) se réduisent alors à

$$\left[\bar\theta' + [\overline{\varpi_2}, \overline{\varpi_1}] - [\bar\theta, \overline{\pi_1} + \overline{\pi_2}], \overline{\omega_3}\right] \equiv 0.$$

D'autre part, si l'on écrit que les covariants trilinéaires de $(\overline{\pi_1})'$ et $(\overline{\pi_2})'$ sont identiquement nuls, on trouve immédiatement

$$\left[\bar\theta' + [\overline{\varpi_2}, \overline{\varpi_1}] - [\bar\theta, \overline{\pi_1} + \overline{\pi_2}], \overline{\omega_1}\right] \equiv 0,$$
$$\left[\bar\theta' + [\overline{\varpi_2}, \overline{\varpi_1}] - [\bar\theta, \overline{\pi_1} + \overline{\pi_2}], \overline{\omega_2}\right] \equiv 0,$$

---

(1) Les invariants relatifs à $\overline{a_{12}}$ et $\overline{a_{21}}$ que nous avons dit être du cinquième ordre ne font intervenir que les dérivées quatrièmes de la fonction f. Cela tient évidemment à ce que dans l'équation (78) figure déjà une dérivée seconde.

et de ces trois relations on conclut

$$\overline{\theta}' \equiv [\overline{\varpi}_1, \overline{\varpi}_2] + [\overline{\theta}, \overline{\pi}_1 + \overline{\pi}_2], \tag{101}$$

et l'on vérifie aisément que le covariant trilinéaire de $\overline{\theta}'$ est identiquement nul.

En définitive, on aperçoit ainsi qu'en adjoignant aux coordonnées u, v, w cinq variables supplémentaires u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, on est arrivé à former huit expressions de Pfaff linéairement indépendantes, à savoir $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ (qui égalées à zéro fournissent les équations des deux familles de courbes) et $\overline{\pi}_1$, $\overline{\pi}_2$, $\overline{\varpi}_1$, $\overline{\varpi}_2$, $\overline{\theta}$ satisfaisant aux relations

$$\left\{\begin{aligned}
(\overline{\omega}_1)' &\equiv [\overline{\pi}_1, \overline{\omega}_1] + [\overline{\varpi}_1, \overline{\omega}_3],\\
(\overline{\omega}_2)' &\equiv [\overline{\pi}_2, \overline{\omega}_2] + [\overline{\varpi}_2, \overline{\omega}_3],\\
(\overline{\omega}_3)' &\equiv [\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2] + [\overline{\pi}_1 + \overline{\pi}_2, \overline{\omega}_3],\\
(\overline{\pi}_1)' &\equiv -[\overline{\varpi}_1, \overline{\varpi}_2] - 2[\overline{\varpi}_2, \overline{\omega}_1] + [\overline{\theta}, \overline{\omega}_3],\\
(\overline{\pi}_2)' &\equiv -[\overline{\varpi}_1, \overline{\varpi}_2] + 2[\overline{\varpi}_1, \overline{\omega}_2] + [\overline{\theta}, \overline{\omega}_3],\\
(\overline{\varpi}_1)' &\equiv [\overline{\varpi}_1, \overline{\pi}_2] + [\overline{\theta}, \overline{\omega}_1],\\
(\overline{\varpi}_2)' &\equiv [\overline{\varpi}_2, \overline{\pi}_1] + [\overline{\theta}, \overline{\omega}_2],\\
(\overline{\theta})' &\equiv [\overline{\varpi}_1, \overline{\varpi}_2] + [\overline{\theta}, \overline{\pi}_1 + \overline{\pi}_2].
\end{aligned}\right. \tag{102}$$

Ce sont les « équations de structure » du système de deux congruences de courbes lorsque les deux invariants relatifs d'ordre minimum, a_{12} et a_{21} sont identiquement nuls.

Considérons deux tels systèmes de deux congruences de courbes définies respectivement, le premier dans le système de coordonnées u, v, w par trois formes de Pfaff ω_1, ω_2, ω_3 et le second dans le système de coordonnées U, V, W par Ω_1, Ω_2, Ω_3. Par l'adjonction de cinq nouvelles variables que nous désignerons par des minuscules et des majuscules suivant qu'il s'agit du premier ou du second système, on pourra définir respectivement pour chacun d'eux huit formes $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, ..., $\overline{\theta}$ et $\overline{\Omega}_1$, $\overline{\Omega}_2$, ..., $\overline{\Theta}$ satisfaisant aux équations de structure (102). Pour que ces deux systèmes de courbes soient topologiquement applicables l'un sur l'autre, il est alors évident qu'il faut et suffit que l'on puisse exprimer les variables majuscules en fonction des variables minuscules de manière à avoir

$$\overline{\Omega}_1 = \overline{\omega}_1, \qquad \overline{\Omega}_2 = \overline{\omega}_2, \qquad \dots, \qquad \overline{\Theta} = \overline{\theta}.$$

Or, ce système de huit équations différentielles, dans lequel on considère les huit variables majuscules comme fonctions inconnues des huit variables minuscules est complètement intégrable et sa solution générale dépend de huit constantes arbitraires.

Deux systèmes quelconques de deux familles de courbes pour lesquels les invariants d'ordre minimum a_{12} *et* a_{21} *s'annulent identiquement, sont donc topologiquement équivalents, et chacun d'eux admet un groupe continu à huit paramètres, dont les équations de structure, au sens de M. Cartan, sont les équations* (103).

En particulier, on constate immédiatement que les deux familles de courbes définies par les expressions de Pfaff

$$(103) \qquad \omega_1 = du, \qquad \omega_2 = dw, \qquad \omega_3 = dv - w\,du,$$

présentent la structure (102), ce qui montre en particulier que le groupe de structure (102) est semblable au groupe projectif.

Au système (103) correspond d'ailleurs l'équation différentielle

$$\frac{d^2 v}{du^2} = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation différentielle du second ordre soit topologiquement équivalente à l'équation $\frac{d^2 v}{du^2} = 0$ *est donc que ses deux invariants relatifs d'ordre minimum soient identiquement nuls.*

31. Supposons maintenant que les invariants relatifs a_{12} et a_{21} ne soient pas tous deux identiquement nuls. L'idée qui se présente naturellement à l'esprit est alors de réduire à l'unité ces deux invariants relatifs ou tout au moins celui d'entre eux qui est différent de zéro. Et de fait on pourrait poursuivre très aisément cette étude de cette manière. Toutefois, nous suivrons une voie légèrement différente, afin d'obtenir des résultats que l'on puisse aisément comparer à ceux qui ont été obtenus par les auteurs qui ont traité cette question (Tresse [52] et Bol [20]).

D'après les formules (99) on peut tout d'abord s'arranger de manière à faire

$$(104) \quad a_{11} \equiv a_{22} \equiv a_{13} \equiv a_{23} \equiv 0, \qquad \text{c'est-à dire} \qquad \overline{\rho_1} \equiv a_{12}\overline{\omega_2}, \quad \rho_2 \equiv a_{21}\overline{\omega_1},$$

moyennant quoi on devra supposer dorénavant

(105) $$\xi_1 = \xi_2 = 0, \qquad \eta_1 = a_{12}\varepsilon_2, \qquad \eta_2 = a_{21}\varepsilon_1.$$

D'autre part, en vertu des deux dernières formules (99) on a

(106) $$\begin{cases} \delta\, da_{12} = d\delta a_{12} = -(3\,de_2 + de_1)a_{12} - (3e_2 + e_1)\,da_{12}, \\ \delta\, da_{21} = d\delta a_{21} = -(3\,de_1 + de_2)a_{21} - (3e_1 + e_2)\,da_{21}. \end{cases}$$

On en conclut que da_{12} et da_{21} sont de la forme

(107) $$\begin{cases} da_{12} \equiv -a_{12}(3\overline{\pi_2} + \overline{\pi_1}) + h_1\overline{\omega_1} + h_2\overline{\omega_2} + h_3\overline{\omega_3}, \\ da_{21} \equiv -a_{21}(3\overline{\pi_1} + \overline{\pi_2}) + k_1\overline{\omega_1} + k_2\overline{\omega_2} + k_3\overline{\omega_3}. \end{cases}$$

et, d'après les relations (89) et (106), il vient

(108) $$\begin{cases} \delta[da_{12} + a_{12}(3\overline{\pi_2} + \overline{\pi_1})] = -(3e_2 + e_1)[da_{12} + a_{12}(3\overline{\pi_2} + \overline{\pi_1})] \\ \qquad\qquad + a_{12}(\varepsilon_2\overline{\omega_1} + 5\varepsilon_1\overline{\omega_2} + 4\mu\overline{\omega_3}), \\ \delta[da_{21} + a_{21}(3\overline{\pi_1} + \overline{\pi_2})] = -(3e_1 + e_2)[da_{21} + a_{21}(3\overline{\pi_1} + \overline{\pi_2})] \\ \qquad\qquad + a_{21}(-5\varepsilon_2\overline{\omega_1} - \varepsilon_1\overline{\omega_2} + 4\mu\overline{\omega_3}). \end{cases}$$

Le cas où les deux invariants relatifs a_{12} et a_{21} sont nuls ayant été élucidé. supposons $a_{21} \neq 0$; on pourra alors profiter de l'indétermination des variables auxiliaires u, v, w (correspondant à ε_1, ε_2, μ) de manière à annuler les coefficients k_1, k_2, k_3; moyennant quoi, on aura

(109) $$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0, \qquad \mu = 0.$$

Il vient ainsi

(110) $$da_{21} + a_{21}(3\overline{\pi_1} + \overline{\pi_2}) \equiv 0,$$

et de la première relation (108) on déduit, en tenant compte de (109),

$$\delta h_1 = -(3e_2 + 2e_1)h_1, \qquad \delta h_2 = -[4e_2 + e_1]h_2, \qquad \delta h_3 = -2(2e_2 + e_1)h_3,$$

en sorte que les coefficients h_1, h_2, h_3 apparaissent comme *trois invariants relatifs du sixième ordre.*

Ceci fait, on a finalement

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \mu_1 = \mu_2 = \nu_1 = \nu_2 = \xi_1 = \xi_2 = \eta_1 = \eta_2 = 0,$$

et l'on aperçoit que toutes les variables auxiliaires introduites précédemment ont disparu, à l'exception de u_1 et u_2. On a donc ainsi défini trois formes différentielles relativement invariantes $\overline{\omega_1}$, $\overline{\omega_2}$, $\overline{\omega_3}$ qui restent soumises au groupe engendré par la transformation infinitésimale

$$(83)\qquad \delta\overline{\omega_1} = e_1\overline{\omega_1}, \qquad \delta\overline{\omega_2} = e_2\overline{\omega_2}, \qquad \delta\overline{\omega_3} = (e_1 + e_2)\overline{\omega_3},$$

tandis que les formes $\overline{\pi_1}$, $\overline{\pi_2}$, $\overline{\varpi_1}$, $\overline{\varpi_2}$ et $\bar\theta$ se transforment comme suit :

$$(111)\qquad \left\{\begin{array}{lll} & \delta\overline{\pi_1} = de_1, & \delta\overline{\pi_2} = de_2; \\ \delta\overline{\varpi_1} = -e_2\overline{\varpi_1}, & \delta\overline{\varpi_2} = -e_1\overline{\varpi_2}, & \delta\bar\theta = -(e_1 + e_2)\bar\theta. \end{array}\right.$$

Les cinq formes $\overline{\omega_1}$, $\overline{\omega_2}$, $\overline{\omega_3}$, $\overline{\pi_1}$, $\overline{\pi_2}$ aux variables u, v, w, u_1, u_2 sont linéairement indépendantes; quant aux formes $\overline{\varpi_1}$, $\overline{\varpi_2}$, $\bar\theta$ ce sont des combinaisons linéaires de $\overline{\omega_1}$, $\overline{\omega_2}$, $\overline{\omega_3}$, dont les neuf coefficients sont *autant d'invariants relatifs du septième ordre*. Ces diverses formes satisfont d'ailleurs aux identités (88) et (90) dont les dernières s'écrivent en tenant compte de (104)

$$(112)\qquad \left\{\begin{array}{l} (\overline{\pi_1})' \equiv -[\overline{\varpi_1}, \overline{\omega_2}] - 2[\overline{\varpi_2}, \overline{\omega_1}] + [\bar\theta, \overline{\omega_3}], \\ (\overline{\pi_2})' \equiv [\overline{\varpi_2}, \overline{\omega_1}] + 2[\overline{\varpi_1}, \overline{\omega_2}] + [\bar\theta, \overline{\omega_3}], \\ (\overline{\varpi_1})' \equiv [\overline{\varpi_1}, \overline{\pi_2}] + [\bar\theta, \overline{\omega_1}] + a_{12}[\overline{\omega_2}, \overline{\omega_3}], \\ (\overline{\varpi_2})' \equiv [\overline{\varpi_2}, \overline{\pi_1}] + [\bar\theta, \overline{\omega_2}] + a_{21}[\overline{\omega_1}, \overline{\omega_3}]. \end{array}\right.$$

Si, d'autre part, on écrit que les covariants trilinéaires de ces expressions sont identiquement nuls, on obtient en tenant compte de (107) l'identité

$$(113)\qquad \bar\theta' \equiv [\overline{\varpi_1}, \overline{\varpi_2}] + [\bar\theta, \overline{\pi_1} + \overline{\pi_2}] + h_1[\overline{\omega_2}, \overline{\omega_3}],$$

laquelle fournit à son tour par le même procédé l'identité

$$(114)\qquad \begin{array}{l} [dh_1 + h_1(3\overline{\pi_2} + 2\overline{\pi_1}), \overline{\omega_2}, \overline{\omega_3}] \\ \qquad + a_{12}[\overline{\omega_2}, \overline{\omega_3}, \overline{\varpi_2}] + a_{21}[\overline{\omega_1}, \overline{\varpi_1}, \overline{\omega_3}] \equiv 0. \end{array}$$

Dès lors, l'égalité (110) donne immédiatement, en tenant compte de (112),

$$(3\overline{\pi_1} + \overline{\pi_2})' \equiv -[\overline{\varpi_1}, \overline{\omega_2}] - 5[\overline{\varpi_2}, \overline{\omega_1}] + 4[\bar\theta, \overline{\omega_3}] \equiv 0,$$

ce qui montre que les neuf invariants du septième ordre signalés plus haut, ne sont pas distincts. On en déduit en effet que $\overline{\varpi_1}$, $\overline{\varpi_2}$, $\bar\theta$ sont de la forme

$$(115)\qquad \left\{\begin{aligned} \overline{\varpi}_1 &\equiv \alpha_1\overline{\omega}_1 + \alpha_2\overline{\omega}_2 - 4\beta_2\overline{\omega}_3, \\ \overline{\varpi}_2 &\equiv \alpha_3\overline{\omega}_1 + \frac{1}{5}\alpha_1\overline{\omega}_2 - \frac{4}{5}\beta_1\overline{\omega}_3, \\ \overline{\varpi}_4 &\equiv \beta_1\overline{\omega}_1 + \beta_2\overline{\omega}_2 + \beta_3\overline{\omega}_3. \end{aligned}\right.$$

et l'on obtient ainsi seulement six invariants relatifs distincts du septième ordre, qui se transforment comme suit :

$$(116)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta\alpha_1 &= -(e_1+e_2)\alpha_1, \\ \delta\alpha_2 &= -2e_2\alpha_2, \\ \delta\alpha_3 &= -2e_1\alpha_3; \end{aligned}\right.$$

$$(116')\qquad \left\{\begin{aligned} \delta\beta_1 &= -(2e_1+e_2)\beta_1, \\ \delta\beta_2 &= -(e_1+2e_2)\beta_2, \\ \delta\beta_3 &= -2(e_1+e_2)\beta_3. \end{aligned}\right.$$

Mais par ailleurs, de tout invariant relatif A, d'ordre quelconque, et de poids n, m, c'est-à-dire se transformant comme suit :

$$\delta A = -(ne_1 + me_2)A,$$

on déduit trois invariants relatifs de l'ordre immédiatement supérieur, en remarquant que l'on a

$$\delta[dA + (n\overline{\pi}_1 + m\overline{\pi}_2)A] = -(ne_1 + me_2)[dA + (n\overline{\pi}_1 + m\overline{\pi}_2)A],$$

en sorte que $dA + (n\overline{\pi}_1 + m\overline{\pi}_2)A$ est une combinaison linéaire de $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ dont les coefficients sont des invariants relatifs que nous conviendrons de représenter par A_1, A_2, A_3

$$(117)\qquad dA + (n\overline{\pi}_1 + m\overline{\pi}_2)A \equiv A_1\overline{\omega}_1 + A_2\overline{\omega}_2 + A_3\overline{\omega}_3,$$

et qui se transforment comme suit :

$$\begin{aligned} \delta A_1 &= -[(n+1)e_1 + me_2]A_1, \\ \delta A_2 &= -[ne_1 + (m+1)e_2]A_2, \\ \delta A_3 &= -[(n+1)e_1 + (m+1)e_2]A_3. \end{aligned}$$

De ces derniers on déduit à nouveau neuf invariants relatifs A_{ij} de l'ordre immédiatement supérieur par le même raisonnement qui fournit les identités

$$\begin{aligned} dA_1 + A_1[(n+1)\overline{\pi}_1 + m\overline{\pi}_2] &\equiv A_{11}\overline{\omega}_1 + A_{12}\overline{\omega}_2 + A_{13}\overline{\omega}_3, \\ dA_2 + A_2[n\overline{\pi}_1 + (m+1)\overline{\pi}_2] &\equiv A_{21}\overline{\omega}_1 + A_{22}\overline{\omega}_2 + A_{23}\overline{\omega}_3, \\ dA_3 + A_3[(n+1)\overline{\pi}_1 + (m+1)\overline{\pi}_2] &\equiv A_{31}\overline{\omega}_1 + A_{32}\overline{\omega}_2 + A_{33}\overline{\omega}_3. \end{aligned}$$

Ces neuf nouveaux invariants relatifs ne sont d'ailleurs pas distincts, car si l'on écrit que les dérivées symboliques des deux membres des égalités précédentes sont égales, on trouve les identités

$$(118)\qquad \left\{\begin{aligned} &A_{21} - A_{12} + A_3 \equiv 0, \\ &A_{32} - A_{23} + A_1\alpha_2 + \frac{1}{5}A_2\alpha_1 \equiv 0, \\ &A_{13} - A_{31} - A_1\alpha_1 - \quad A_2\alpha_3 \equiv 0. \end{aligned}\right.$$

En particulier, des trois invariants relatifs du sixième ordre h_1, h_2, h_3, on déduit neuf invariants relatifs du septième ordre, h_{ij} par les identités

$$(119)\qquad \left\{\begin{aligned} &dh_1 + h_1(3\overline{\pi_2} + 2\overline{\pi_1}) \equiv h_{11}\overline{\omega_1} + h_{12}\overline{\omega_2} + h_{13}\overline{\omega_3}, \\ &dh_2 + h_2(4\overline{\pi_2} + \quad \overline{\pi_1}) \equiv h_{21}\overline{\omega_1} + h_{22}\overline{\omega_2} + h_{23}\overline{\omega_3}, \\ &dh_3 + h_3(2\overline{\pi_1} + 2\overline{\pi_2}) \equiv h_{31}\overline{\omega_1} + h_{32}\overline{\omega_2} + h_{33}\overline{\omega_3}, \end{aligned}\right.$$

qui se réduisent à six invariants distincts du fait des identités

$$(120)\qquad \left\{\begin{aligned} &h_{21} - h_{12} + h_3 \equiv 0, \\ &h_{32} - h_{23} + h_1\alpha_2 + \frac{1}{5}h_2\alpha_1 \equiv 0, \\ &h_{13} - h_{31} - h_1\alpha_1 - \quad h_2\alpha_3 \equiv 0. \end{aligned}\right.$$

En adjoignant ces six invariants distincts, aux six invariants de même ordre α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, on obtient ainsi au total douze invariants du *septième ordre*, mais on constate que si les identités (112) et (113) ne fournissent aucune relation nouvelle entre ces invariants, par contre l'identité (114) conduit à la relation

$$(121)\qquad h_{11} + a_{12}\alpha_3 + a_{21}\alpha_2 \equiv 0,$$

de sorte que finalement il ne subsiste que onze invariants relatifs distincts du septième ordre.

De ceux-ci, on déduit ensuite des invariants relatifs d'ordre supérieur en leur appliquant le procédé (117). En particulier les invariants du huitième ordre ainsi obtenus sont astreints à vérifier un certain nombre de relations qui découlent soit des identités (118), soit des identités (112) et (113). On peut montrer facilement que si $\overline{a_{12}}$ et $\overline{a_{21}}$ sont tous les deux différents de zéro, on obtient ainsi $\frac{1}{2}(n^2 - 3n - 6)$ invariants relatifs distincts d'ordre $n \geqq 7$ (*cf.* Bol [40]).

Lorsque $\overline{a_{12}} \equiv 0$, $\overline{a_{21}}$ étant différent de zéro, on constate immédiatement que les invariants relatifs h_1, h_2, h_3 du sixième ordre définis par la relation (107), sont identiquement nuls. D'autre part. la relation (121) montre que l'invariant relatif du septième ordre α_2 est lui aussi identiquement nul, en sorte qu'il ne subsiste que cinq invariants relatifs du septième ordre. D'une façon générale, on démontre qu'il existe $2n - 9$ invariants relatifs d'ordre $n \geqq 7$ (*cf.* Bol [20], Thomsen [50]).

En réduisant à l'unité deux des invariants relatifs qui ne soient pas nuls, on déduirait immédiatement du système d'invariants relatifs ainsi obtenus un système complet d'invariants absolus, et du nombre de ces invariants qui, considérés comme fonctions de u, v, w sont indépendants, on déduit aussitôt si le réseau de deux congruences de courbes admet un groupe continu fini de transformations, qui ne peut qu'être à un, deux ou trois paramètres. Dans ce dernier cas, tous les invariants absolus sont constants et le groupe est transitif. La recherche des réseaux qui satisfont à cette dernière condition ne présente aucune difficulté. Elle a été faite par Tresse sur l'équation du second ordre correspondante [52].

Quant à l'interprétation géométrique des invariants relatifs ou absolus, elle paraît peu aisée à raison de leur ordre élevé. Quelques résultats ont été cependant obtenus dans cette voie par Bol [20].

32. Si aux deux congruences de courbes L_1 et L_2 on adjoint une famille à un paramètre de surfaces f, on obtient une figure dont l'étude des invariants topologiques différentiels se fait sans difficulté par la même méthode. W. Blaschke a montré qu'il existe, aux transformations topologiques près, une correspondance biunivoque entre ces figures ($L_1 - L_2 - f$) et les familles à un paramètre de transformations portant sur deux variables. En particulier, une classe intéressante est constituée par celles qui correspondent aux familles de transformations (ne formant pas un groupe) permutables, et elles sont caractérisées par une configuration simple dite configuration hexagonale de Bol [7]. La place nous manque ici pour examiner ces recherches ainsi que les études analogues qui ont été faites dans cet ordre d'idées et qui sont énumérées dans l'index bibliographique qui suit.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

Nous désignerons dans cet index bibliographique par T. F. d. D. l'abréviation de « Topologische Fragen de Differentialgeometrie », et par Ab. H. U. l'abréviation de « Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität ».

1. W. Blaschke, T. F. d. D. 1, Thomsens Secheckgewebe. Züeinander Diagonale Netze (*Math. Zeitschrift*, t. 28, p. 150-157).
2. — T. F. d. D. 2, Achtflachgewebe (*Math. Zeitschrift*, t. 28, p. 158-160).
3. W. Blaschke et J. Dubourdieu, T. F. d. D. 4, Invarianten von Kurvengeweben (*Ab. H. U.*, t. 6, p. 198-215).
4. W. Blaschke, T. F. d. D. 10 et 11, Kurvenscharen im Raüm (*Ab. H. U.*, t. 7, p. 37-45 et 67-69).
5. — T. F. d. D. 19, Flächengewebe und ihre Diagonalen (*Ab. H. U.*, t. 8, p. 56-82).
6. — T. F. d. D. 28, Ein Schlieszüngsatz (*Ab. H. U.*, t. 8, p. 201-205).
7. — T. F. d. D. 35, Zwei Kurvenscharen und eine Kurwenschar (*Ab. H. U.*, t. 9, p. 48-63).
8. W. Blaschke et Howe, T. F. d. D. 39, Ueber das Tangentengeflecht einer ebenen Kurve vierter Klasse (*Ab. H. U.*, t. 9, p. 95-101).
9. W. Blaschke, T. F. d. D. 44, Ueber die Tangenten einer ebenen algebraischen Kurve (*Ab. H. U.*, t. 9, p. 166).
10. — T. F. d. D. 48, Ueber Gewebe von Kurven im R_3 (*Ab. H. U.*, t. 9, p. 291).
11. — T. F. d. D. 49, Abzählungen für Kurvengewebe und Flächengewebe (*Ab. H. U.*, t. 9, p. 299).
12. — T. F. d. D. 50, Ueber die Tangenten einer ebenen Kurve fünfter Klasse (*Ab. H. U.*, t. 9, p. 313).
13. — Ueber topologische Fragen der Differentialgeometrie (*Jahresbericht der deut. Math. Vereinigung*, t. 38, 1929, p. 193-206).
14. G. Bol, T. F. d. D. 18, Ueber Kurvenscharen im Raum (*Ab. H. U.*, t. 7, p. 399-405).
15. — T. F. d. D. 21, Diagonalkurven im Flächennetz (*Ab. H. U.*, t. 8, p. 96-106).
16. — T. F. d. D. 29, Ebenenbüschelgewebe (*Ab. H. U.*, t. 8, p. 243-249).
17. — T. F. d. D. 30, Geradenscharen in Raüm (*Ab. H. U.*, t. 8, p. 250-263).
18. — T. F. d. D. 31, Geradlinige Kurvengewebe (*Ab. H. U.*, t. 8, p. 264-270).
19. G. Bol et Howe, T. F. d. D. 27, Invarianten von Differentiatorgespinsten (*Ab. H. U.*, t. 8, p. 194-200).
20. G. Bol, T. F. d. D. 34, Ueber Topologische Invarianten von zwei Kurvenscharen im Raüm (*Ab. H. U.*, t. 9, p. 15-47).
21. — T. F. d. D. 38, Ueber zwei Kurvenscharen und eine Flächenschar (*Ab. H. U.*, t. 9, p. 93-94).
22. — T. F. d. D. 40, Zur Theorie der Funktionen zweier komplexen Veränderlichen (*Ab. H. U.*, t. 9, p. 102-116).
23. — On n-webs in a plane (*Bull. American. Soc.*, t. 38, 1932, p. 855).
24. O. Boruvka, Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs (*Publ. de la Fac. de l'Université Mazaryk*, nos 72 et 85, 1926-1927).
25. E. Cartan, Les sous-groupes des groupes continus de transformations (*Ann. de l'École Normale*, t. 25, 1908, p. 57 83).
26. — Sur la structure des groupes infinis de transformations *Ann. de l'École Normale*, t. 21, 1904, p. 153.

27. J. Dubourdieu, T. F. d. D. 13, Réseaux de courbes et de surfaces (*Ab. H. U.*, t. 7, p. 205-271 et Thèse).
28. Gronwall, Sur les équations à trois variables (*Journal de Liouville*, 1912).
29. E. Häsel, T. F. d. D. 47, Minimaldarstellung von Flächengeweben (*Ab. H. U.*, t. 9, p. 273).
30. G. Howe, T. F. d. D. 27 et 29, *Voir* (1) et (19).
31. — T. F. d. D. 20, Zu einem Flachennetz diagonale Kurvenscharen (*Ab. H. U.*, t. 8, p. 83-95).
32. E. Kähler, T. F. d. D. 36, Zur Invariantentheorie von Differentialoperatoren (*Ab. H. U.*, t. 9, p. 64-71).
33. H. Kneser, T. F. d. D. 43, Gewebe und Gruppen (*Ab. H. U.*, t. 9, p. 147-151).
34. Kollwitz, T. F. d. D. 32, Minimaldarstellung von Kurvengeweben (*Ab. H. U.*, t. 8, p. 282-291).
35. G. Lochs, T. F. d. D. 42, Die Jordan kurve im Kurvennetz (*Ab. H. U.*, t. 9, p. 134-146).
36. — T. F. d. D. 46, Eine Randwertaufgabe für Sechseckgewebe (*Ab. H. U.*, t. 9, p. 260).
37. K. Mayrhofer, T. F. d. D. 3, Kurvensysteme auf Flächen (*Math. Zeitschrift*, t. 28, p. 728-752).
38. — T. F. d. D. 9, Ueber Secheeksysteme (*Ab. H. U.*, t. 7, p. 1-10).
39. H. Nehrkorn, T. F. d. D. 33, Schnittpunktsätze in ebenen Geflechten (*Ab. H. U.*, t. 8, p. 403-412).
40. E. Podehl, T. F. d. D. 17 et 25, Raumkurvensysteme und Gruppen (*Ab. H. U.*, t. 7, p. 386-398, et t. 8, p. 161-178).
41. — T. F. d. D. 23, Ueber Flächengewebe (*Ab. H. U.*, t. 8, p. 153-154).
42. — T. F. d. D. 24, Ebene 4-Gewebe und Gruppen (*Ab. H. U.*, t. 8, p. 155-160).
43. — T. F. d. D. 26, Raumliche nicht archimedische Gewebe (*Ab. H. U.*, t. 8, p. 179-186).
44. K. Reidemeister, T. F. d. D. 5, Gewebe und Gruppen (*Math. Zeitschrift*, t. 29, p. 427-435).
45. R. Sauer et H. Graf, Ueber dreifache Geradensysteme in der Ebene (*Münchener Berichte*, t. 54, 1924, p. 119-156).
46. E. Schubarth, T. F. d. D. 14, Invarianten von Flächengeweben (*Ab. H. U.*, t. 7, p. 272-286).
47. E. Sperner, T. F. d. D. 15, Flächengewebe (*Ab. H. U.*, t. 7, p. 287-300).
48. A. Thomsen, Un theorema topologico sulle schiere di curve (*Boll. dell. Unione Mat. ital.*, 1927, Bologna).
49. — T. F. d. D. 12, Schnittpunktsàtze in ebenen Geweben (*Ab. H. U.*, t. 7, p. 99 106).
50. — T. F. d. D. 16, Ueber die topologischen Invarianten der Differentialgleichung, etc. (*Ab. H. U.*, t. 7, p. 301-328).
51. — T. F. d. D. 22, Doppelverhältnissysteme (*Ab. H. U.*, t. 8, p. 115-122).
52. A. Tresse, Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle du second ordre (*Preischriften der Fürst Jablonowskischen Gesellschaft*, Leipzig, 1896).
53. A. Wünsche, T. F. d. D. 41, Ein Diagonal Problem (*Math. Zeitschrift*, t. 36, p. 358-376).
54. — T. F. d. D. 45, Vierseitgeflechte (*Ab. H. U.*, t. 9, p. 202-206).
55. O. Zariski, T. F. d. D. 37, On quadrangular 3-webs of straight lines in space (*Ab. H. U.*, t. 9, p. 79-83).

TABLE DES MATIÈRES.

99637 Paris — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.