MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

G. BOULIGAND

Géométrie infinitésimale directe et physique mathématique classique

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 71 (1935)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1935__71__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADEMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

RECTEUR :

Henri VILLAT
Membre de l'Institut,
Professeur a la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées »

FASCICULE LXXI

Géométrie infinitésimale directe et physique mathématique classique

Par M. G. BOULIGAND
Professeur a la Faculte des Sciences de Poitiers

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1935

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE DIRECTE

ET

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE CLASSIQUE (1)

Par M. G. BOULIGAND.

I. — DE L'IDÉE DE DISTANCE A LA THÉORIE DE LA COURBURE ET A LA PROPAGATION DES ONDES.

INTRODUCTION.

1. Un coup d'œil sur les méthodes visant à la synthèse déductive des phénomènes naturels montre la place qu'elles accordent aux équations différentielles, ordinaires ou aux dérivées partielles, par l'entremise des algorithmes variationnels. Il y a tendance évidente à ramener les lois physiques aux minima de certaines intégrales. Depuis les efforts de B. Riemann vers le principe de Dirichlet, on a cherché la preuve directe de l'existence de ces minima : et c'est en dernière analyse qu'on vient demander compte à la ligne ou surface minimisante de son rôle de solution de l'équation différentielle, jadis regardée comme un élément indispensable de la chaîne des déductions.

Établie au début de ce siècle par Hilbert et Lebesgue sur des

(1) L'épithète « *classique* » souligne notre intention d'en rester le plus souvent, au point de vue du continu, valable dans le domaine macroscopique. En outre, la Physique mathématique représente pour nous, non une collection de theories d'objets variés, cotées selon leur actualité, mais plutôt l'assemblage des processus déductifs et opératoires les plus usités dans la rationalisation du concret. Les réferences bibliographiques sont données directement en cours de texte.

bases solides, la méthode directe du calcul des variations a suivi de près l'adoption en mécanique céleste, par Poincaré, de principes de recherche accordant au raisonnement géométrique une part importante. Et petit a petit, s'est développée une réaction contre l'abus du mécanisme analytique, masquant souvent la raison profonde des faits. L'attention s'est portée sur les hypothèses déclenchant vraiment tel ou tel résultat; dans la recherche des minima notamment, pour être sûr que la solution est telle ou telle, fallait-il éliminer les hypothèses accessoires, auxquelles les procédés lagrangiens ouvraient la porte? On s'est donc accoutumé à démontrer autant que possible avec un minimum d'hypothèses.

Ce désir d'une généralité croissante, propice a mettre en lumière la causalité logique, ouvre la porte à la théorie des ensembles : en élargissant, par suppression d'hypothèses, le champ d'investigations, on enrichit en effet la catégorie sur laquelle sera prélevé l'ensemble des points où telle circonstance déterminée peut se produire; et l'on voit s'imposer le besoin de définitions aussi étendues que possible de l'intégrale, en même temps que de la ligne ou de la surface constituant ou délimitant le champ d'intégration. C'est pourquoi la théorie des ensembles, qui, pour des raisons analogues, était devenue indispensable à l'étude des fonctions, s'est introduite dans le calcul des variations et, de là, dans l'analyse fonctionnelle, qui prolonge à la fois ces deux doctrines. La géométrie se trouvait déja mise en cause, par les notions premières qu'elle fournissait a ces théories variées : d'oú la grande activité consacrée a l'*analysis situs* et aux problèmes concernant la longueur d'une courbe ou l'aire d'une surface. Mais dans ses parties vraiment organiques, la géométrie différentielle demeurait étrangere aux méthodes directes, qu'on rejetait quelques mètres après avoir franchi le seuil de l'édifice. Développer à ce point de vue les propriétés infinitésimales des lignes ou des surfaces est pourtant chose possible, comme je l'ai montré dans mon *Introduction à la géométrie infinitésimale directe* (1); on tend de la sorte a unifier la théorie des ensembles et les propriétés géométriques rattachées d'habitude au calcul différentiel; d'une part, cette unification révèle en matière d'ensembles l'opportunité de notions nouvelles, grâce auxquelles des propositions (exemple : le théorème

(1) Ce livre sera designé dans la suite par l'abréviation *G I D.* (Paris 1932).

de Meusnier), indissolublement liées (semblait-il) à la théorie des surfaces, s'affirment valables dans un champ beaucoup plus vaste; d'autre part, la fusion ainsi réalisée est propice à l'étude d'êtres géométriques nouveaux, ou suivant la belle expression d'Élie Cartan, à une extension très large du « matériel géométrique ».

On voit que cette évolution méthodologique est en contact immédiat avec les parties de la physique tendant à ramener divers phénomènes, par exemple, la gravitation, aux espèces géométriques. Cette remarque nous permet de mesurer toute l'ampleur d'un sujet qui ne peut être traité actuellement d'une manière systématique. Pour favoriser les recherches qui s'y rapportent, nous en prélèverons pour l'instant les points les plus saillants qui se groupent autour des deux idées suivantes :

1° Rôle primordial des groupes pour la restauration de la causalité logique en géométrie différentielle aussi bien qu'en physique mathématique;

2° Communauté d'essence des méthodes directes, d'une part dans le calcul des variations, mode d'expression très courant des lois physiques, d'autre part, en géométrie différentielle. En fait, les deux ordres d'idées sont inséparables, car la géométrie différentielle, en style direct, a pour rouage fondamental la notion de *distance* sous sa forme usuelle ou sous diverses formes élargies, tandis que les intégrales simples donnant effectivement lieu à des minima absolus s'interprètent comme des distances généralisées.

Une notion physique s'apparentant immédiatement à ces considérations est la notion d'onde : dans des cas étendus, un front d'onde considéré à un instant donné n'est autre que le lieu des points isodistants de l'ensemble portant la perturbation initiale du milieu, pourvu que la distance ait été convenablement définie.

2. Ces aperçus nous indiquent la route à suivre. Dans un premier chapitre, partant de l'idée de distance, dont Maurice Fréchet a su dégager dès sa Thèse, le rôle essentiel [1], nous atteindrons par étapes les théorèmes familiers concernant la courbure des lignes tracées sur une surface. Nous verrons en route l'importance des notions

---

(1) Signalons à cette occasion la bibliographie pour nous très importante donnée dans l'ouvrage de Maurice Fréchet, intitulé : « *Les Espaces abstraits* » Gauthier-Villars, Paris, 1928.

d'ensemble limite et d'ensemble d'accumulation, introduites par Janiszewski dans sa mémorable Thèse; tous les contingents et paratingents utilisés par la suite dérivent de ces notions, qui mettent en jeu la distance dans un sens qu'il nous faudra chaque fois préciser; c'est dans cette voie que nous apparaîtra la véritable signification du théoreme de Meusnier; c'est aussi dans cette voie que nous parviendrons a établir, devant l'accroissement démesuré du matériel géométrique, des principes sélectifs, dont quelques applications (ensembles de niveau de certains champs scalaires) montrent bien l'opportunité. Les surfaces qu'on est conduit à distinguer de la sorte ont d'ailleurs un intérêt physique; leurs propriétés expliquent l'aspect macroscopique, d'une certaine régularité relative, de la cassure des minéraux a grain tres fin. Dans tout ce champ de recherches, nous apparaîtra de plus le rôle important de la semi-continuité d'inclusion.

Ayant ainsi pris contact avec les formes directes de raisonnement géométrique, nous reviendrons dans un second chapitre sur l'idée de groupe et ses relations avec la mise en évidence de la causalité logique. lesquelles motivent le recours aux groupes en physique ([1]).

Dans le domaine qui nous intéresse spécialement, cela nous montrera la nécessité de distinguer entre la topologie générale, la topologie restreinte du premier ordre, la topologie restreinte du second; les transformations ponctuelles continues et biunivoques seront englobées respectivement dans ces divers groupes suivant qu'on les suppose définies par des fonctions non nécessairement dérivables, ou bien dérivables jusqu'au premier ordre inclus, ou enfin dérivables jusqu'au second ordre inclus. A la topologie du premier ordre (qui correspond au groupe des déformations considérées dans la théorie classique de l'élasticité), nous rattacherons une conception généralisée des intégrales d'un systeme différentiel; et, en doublant le nombre des dimensions de l'espace, la topologie du second ordre. Dans la topologie pure (ou générale) telle que nous l'entendons ici, intervient l'idée de *distance*, d'une maniere, il est vrai, très atténuée, comme il ressort des modifications importantes auxquelles on peut soumettre la distance sans perturber les définitions purement topologiques de la ligne et de la surface; par contre la distance reprend un rôle plus important, quand s'inspirant de considérations prolongeant l'idée

---

([1]) *Cf.* A. BUHL, *Mem. Sc. math.*, fasc. LXII; MAX MORAND, *Mém. Soc. Sc. Liége*, années 1932 et 1933.

d'infiniment petit physique, on cherche les systèmes d'un nombre fini, mais très grand, de points, pouvant passer approximativement pour des lignes ou des surfaces. Le rôle de la distance s'accentue aussi quand on passe de la topologie pure à celle du premier ordre, puis à celle du second, comme il ressort des conditions qu'il faut imposer à la distance, dans la définition du contingent circulaire, pour lui assurer la qualité d'élément topologique restreint du second ordre (*cf.* n° 16).

Nous terminerons le Chapitre II en essayant de préciser un peu l'idée de démonstration causale et appliquerons ces considérations, en dynamique classique, au théorème des forces vives et au principe de la moindre action.

Au Chapitre III, une incursion dans le calcul des variations rappellera l'attention sur la semi-continuité, au point de vue qui l'a fait admettre en géométrie et nous fera prendre contact avec l'équation d'Hamilton-Jacobi, et, par son entremise, avec les ondes. Mais pour incorporer ces dernières à la classe des intégrales de ladite équation, nous devrons préalablement élargir cette classe, en utilisant le contingent ordinaire, d'après un processus auquel j'ai donné pour cette raison le nom *d'intégration contingente.* En même temps, dans l'énoncé du principe des ondes enveloppes faudra-t-il distinguer entre l'enveloppe par réunion, délimitant la zone perturbée et l'enveloppe, au sens de la géométrie analytique, dont les caustiques montrent cependant l'intéret physique.

Nous aurons dans ce qui précède un exemple soulignant nettement l'étroite parenté des méthodes directes en calcul des variations et en géométrie différentielle. Observons en terminant que le champ d'applications des notions infinitésimales directes à la physique mathématique classique sera loin d'être épuisé. C'est ainsi que sont réservées pour le moment les questions relatives à des catégories d'êtres géométriques beaucoup plus vastes que celles envisagées ici. Si contingents et paratingents y perdent de leur efficacité, c'est pour céder le pas à des notions extraites toujours des mêmes champs d'invariance. A ce type, pour l'instant réservé, appartient la discrimination des ensembles impropres dans le principe de Dirichlet. J'espère revenir à des problèmes de ce genre dans un autre fascicule de cette belle collection, où je remercie M. Henri Villat d'avoir accueilli le présent travail.

CHAPITRE I.

DE L'IDÉE DE DISTANCE AU SEUIL DE LA GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE.

3. Ensemble des points ρ-distants d'un ensemble ponctuel. — Partons de la notion usuelle de distance, dans l'espace euclidien à trois dimensions, par exemple, et considérons le lieu des points situés à la distance ρ d'un ensemble E; si E se réduit à n points, ce lieu est formé par une ou plusieurs surfaces polyédrales à facettes sphériques, délimitant la réunion des sphères pleines de rayon ρ centrées aux n points de E.

Si E comprend une infinité de points, supposons-le, pour simplifier, borné, c'est-à-dire inclus dans une sphère donnée. Dès lors, E offre nécessairement au moins un *point d'accumulation*, c'est-à-dire tel qu'à distance infiniment petite de ce point, il y ait des points de E. Par exemple, n étant entier, la suite des points $x_n = n^{-1}$ sur l'axe $x'x$ admet l'origine pour point d'accumulation (exclu de cette suite). On dit que les points d'accumulation de E forment son *ensemble dérivé* E'. La réunion $E \dotplus E'$ (le signe $\dotplus$ rappelant qu'on réunit les points appartenant à l'un au moins des ensembles qu'il sépare) s'appelle la *fermeture* de E; elle se confond avec E si E' est inclus dans E, ce qu'on note $E' \subset E$, ce qu'on exprime encore en disant que E est fermé. On démontre que *tout dérivé est fermé.* [1].

Appelons A un point quelconque et P un point courant de E. Si E est fermé, ce que nous supposerons, il y a au moins un point P_0 de E où la longueur du segment rectiligne AP atteint sa borne inférieure [2]. Un point P_0 sera dit (G. Durand) *une projection*, un segment tel que AP_0 *une projetante* [3]. La longueur AP_0 est *la*

[1] Cf. *G. I. D.*, Chap. III.

[2] Cela subsiste pour E fermé non borné, comme on le voit en substituant à E sa partie non extérieure à une sphère de centre A contenant effectivement des points de E.

[3] G. DURAND, *Sur une généralisation des surfaces convexes* (*Thèse*, Paris, 1931) ou *Journ. de Villat*, t. X, fasc. 4, p. 335-414. Au point de vue des questions étudiées ici, ce travail est capital. La bibliographie en sera considérée comme acquise. L'idée directrice est celle de la réunion des sphères formant ce que nous appelons plus loin E_ρ, réunion qui, de par sa nature particulière, conditionne la frontière correspondante. Dans le présent fascicule, en prolongement du Chapitre XII de *G. I. D.* la distance est étudiée comme champ scalaire à la faveur de la S. C. I. (*cf.* n^{os} 6 à 7).

distance du point A à l'ensemble E. Entre les distances de deux points A et B à l'ensemble E, on établit l'inégalité au sens large

$$|\,\text{dist.}\,(B, E) - \text{dist.}\,(A, E)\,| < AB$$

qui montre, non seulement que la distance est continue, mais encore que sa variation n'excède jamais le déplacement du point A. La distance n'offre nulle part, hors de E, de minimum, mais peut présenter en certains points des maxima. C'est ce qui se produit si l'on prend pour E la surface d'une sphère, A étant au centre, ou la surface latérale d'un cylindre droit à bases circulaires, le point A se trouvant sur l'axe.

L'ensemble des points distants de E de moins de ρ est encore la réunion E_ρ des spheres de rayon ρ centrées sur E, chacune étant prise *ouverte*, c'est-à-dire en excluant les points de sa surface. La réunion E_ρ est un *ensemble ouvert*, c'est-à-dire dont chaque point est centre d'une sphère tout entière incluse dans E_ρ, dès que son rayon est assez petit. Les points d'accumulation de E_ρ qui en sont exclus forment sa *frontière*, qui est aussi le lieu des points ρ-distants de E. Tout point de ce lieu est point d'accumulation de points de E_ρ, c'est-à-dire de points distants de E de moins de ρ. Nous appellerons spécialement F_ρ la partie du lieu des points ρ-distants dont chaque point est point d'accumulation de points distants de plus de ρ (ou encore de points *extérieurs* à E_ρ). On dit aussi que F_ρ est la *frontière extérieure* de E. Passer de E à E_ρ, c'est, par définition, effectuer la construction de Cantor-Minkowski (ou C. M.) (1). Si E, fermé et borné est tel que deux quelconques de ses points puissent se joindre par une ligne polygonale ayant ses sommets sur E, et dont les côtés, en nombre fini, ne dépassent pas une longueur *arbitrairement choisie*, on dit que E est un *continu* borné.

Si l'ensemble E n'est pas fermé, on appelle distance du point A à E la distance de ce point à la fermeture de E, ensemble dont la substitution à E ne modifie pas la borne inférieure des distances AP. De la définition de la distance ainsi posée, nous allons tirer des extensions géométriques de la limite : *a posteriori* cela nous facilitera l'étude même du lieu des points ρ-distants et de problèmes analogues.

Auparavant, rappelons l'utilité de considérer les *constituants* d'un

(1) Cf. *G. I. D.*, Chap. VII et XII.

ensemble ouvert borné. Deux points M et P d'un tel ensemble seront dits appartenir à un même constituant, s'il existe une succession de n sphères dont la première a pour centre M et la dernière a pour centre P, dont chacune coupe la précédente et soit incluse dans l'ensemble. Un ensemble ouvert n'ayant qu'un constituant est un *domaine*. Pour qu'un ensemble E fermé soit un continu, il faut et il suffit que la construction C. M. effectuée sur E avec un rayon arbitrairement petit soit un domaine (conséquence immédiate de la définition d'un continu).

4. **Ensemble limite, ensemble d'accumulation.** — L'idée de suite ayant une limite ne diffère pas au fond de celle d'ensemble ponctuel ayant un point d'accumulation unique. Une première extension de l'idée de limite consiste donc à envisager simultanément les points d'accumulation d'un ensemble, ce qui fournit l'ensemble dérivé, déjà signalé. Envisageons maintenant à l'intérieur d'une même sphère, une collection infinie d'ensembles ponctuels, Avec Janiszewski [1], nous en définirons *l'ensemble d'accumulation* $\mathcal{H}$ *et l'ensemble limite* $\mathcal{L}$. Un point H est dans $\mathcal{H}$ s'il existe, pour chaque longueur ε, une infinité d'ensembles de la collection distants de H de moins de ε; ou : pénétrant partiellement la sphère de centre H et de rayon ε. Un point L est dans $\mathcal{L}$, si pour chaque ε, il n'y a dans la collection qu'un nombre fini de nos ensembles distants de L de plus de ε.

On montre que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{L}$ sont fermés et que $\mathcal{H}$ contient $\mathcal{L}$: que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{L}$ ne changent pas si, aux ensembles de la collection, on substitue leurs fermetures. Si chaque ensemble de la collection se réduit à un point unique, $\mathcal{H}$ se réduit à l'ensemble dérivé de la collection de points : si ce dérivé comprend plus d'un point, $\mathcal{L}$ est vide.

Si $\mathcal{L}$ contient au moins un point O, et si chaque ensemble de la collection étudiée est un continu, on montre avec Janiszewski, que $\mathcal{H}$ est lui-même un continu pouvant se réduire au point O. Par exemple, considerons dans le plan xOy les arcs représentatifs d'une suite de fonctions $y = f_n(x)$ continues et également bornées pour $0 \leq x \leq 1$; supposons que ces fonctions convergent vers une fonction univoquement déterminée $y = f(x)$. L'ensemble limite des courbes représen-

[1] Janiszewski, *Sur les continus irréductibles entre deux points* (*Thèse*, Paris, 1911, p. 15 et suiv.).

tatives comprend tous les points $[x, f(x)]$, l'ensemble d'accumulation est donc un continu. Si ce continu coïncide avec l'ensemble représentatif de $y = f(x)$, il s'ensuit que f est une fonction continue et l'on démontre que la convergence est uniforme. On justifie en même temps cette condition nécessaire et suffisante pour l'uniformité de convergence des $f_n(x)$: *unicité, sur chaque ordonnée, du point de l'ensemble d'accumulation des arcs* $y = f_n(x)$ (1).

5. **Contingents et paratingents.** — Nous aurons bientôt à considérer des suites d'ensembles dont chacun est inclus, au sens strict ou au sens large, dans ceux qui le précèdent. On montre alors que l'ensemble d'accumulation, aussi bien que l'ensemble limite est le système des points communs (on dit encore : le *produit*) des fermetures de nos ensembles. Soit λ une variable continue, variant de zéro à 1, dont dépend l'ensemble E_λ, de telle sorte que l'inégalité $\lambda' < \lambda''$ entraîne l'inclusion $E_{\lambda'} \subset E_{\lambda''}$. Le produit des fermetures de tous les E_λ est encore leur ensemble limite, mais non plus leur ensemble d'accumulation. En appelant $\{\varepsilon_n\}$ une suite décroissante évanescente, l'ensemble limite (qui est aussi l'ensemble d'accumulation des E_{ε_n}) se trouve (d'après l'énoncé visant le cas de la variable continue) indépendant de la suite en question.

Cela posé, voici un même processus permettant de définir les divers contingents ou paratingents (2). Soit O un point d'accumulation de l'ensemble ponctuel E. Soit E_ε l'ensemble des points de E non confondus avec O et distants de O d'au plus ε. Soit R_ε l'ensemble des demi-droites (ou rayons) joignant O aux points de E_ε; soit L_ε l'ensemble des droites joignant deux points (distincts) de E_ε; soient Π_ε l'ensemble des demi-plans issus d'une droite fixe OT passant par O et contenant un point de E_ε; Γ_ε l'ensemble des cercles tangents en O à OT et passant par un point de E_ε; soit Σ_ε l'ensemble des sphères passant par un cercle sur lequel se trouve O et par un point de E_ε; soit enfin $L_\varepsilon^{(n)}$ l'ensemble des droites contenant au moins $n+1$ points

(1) *G. I. D.*, Chap. XV. Voir la Note I, p. 51.

(2) Bouligand, *Sur quelques points de topologie restreinte du premier ordre.* (*Bull. Soc. math. de France*, t. 56, 1928, p. 29). Aux notations près, R_ε et L_ε sont explicitement introduits : ε variant d'une manière continue, les systèmes que j'ai appelés ensuite ctg et ptg ordinaires sont définis comme les ensembles limites de R_ε et L_ε.

distincts de E_ε. Les ensembles limites correspondants sont respectivement :

Le contingent ordinaire, produit des fermetures des	R_ε
Le paratingent du premier rang...............	L_ε
Le contingent d'osculation........................	Π_ε
Le contingent circulaire..........................	Γ_ε
Le contingent sphérique...........................	Σ_ε
Le paratingent de rang n........................	$L_\varepsilon^{(n)}$

Nous introduisons ici le produit des fermetures d'ensembles formés non plus de points, mais de demi-droites, de droites, de plans, de cercles, de sphères. Cela implique une définition préalable de la *distance* de deux figures F_1 et F_2 d'un des types ci-dessus : on appelle ainsi une fonction positive et symétrique $d(F_1, F_2)$ des deux figures, s'annulant lorsqu'elles coïncident et satisfaisant l'inégalité

$$d(F_1, F_2) \leqq d(F, F_1) + d(F, F_2)$$

pour toute F du même type que F_1 et F_2 ([1]).

Une telle fonction, dans chacun des cas ci-dessus, s'obtient en attachant biunivoquement à chaque figure un point d'une variété convenable (qu'on peut choisir algébrique dans nos exemples), d'un nombre de dimensions égal au nombre des paramètres dont dépend notre famille de figures. Ainsi, en prenant une droite fixe OT et la famille des cercles γ qui la touchent au point fixe O, en marquant sur OT un point A, nous pouvons attacher à chaque γ le point m de la sphère de diamètre OA sur la droite joignant le centre de γ au point A; soit encore μ la projection orthographique de m sur le cylindre circonscrit à la sphère parallèlement à OT; nous aurons deux définitions distinctes du contingent circulaire en prenant pour distance de deux de nos cercles la distance de leurs images m sur la sphère ou celle de leurs images μ sur le cylindre; avec la première, tous les cercles de rayon nul du contingent circulaire seront identiques, même si deux d'entre eux sont limites de deux suites de cercles dont les demi-plans tendent respectivement vers deux demi-plans distincts; la même circonstance se reproduira pour les cercles

---

([1]) Cf. *G. I. D.*, Chap. V. Nous désignerons par conditions de Fréchet l'ensemble des conditions ci-dessus. Voir Maurice Fréchet, *Les espaces abstraits*, p. 55 et suiv.

de rayon infini. Au contraire, en se ramenant, avec G. Rabaté (¹) à la distance de deux points μ, chaque cercle de rayon nul et chaque cercle de rayon infini sera considéré avec son demi-plan, son image se trouvant sur l'un des parallèles limitant la surface latérale d'un cylindre droit, dont la hauteur égale le diamètre de la sphère. On conçoit dès lors une convention mixte, consistant à prolonger l'un des hémisphères, que sépare le parallèle de contact, par la partie du cylindre située de l'autre côté du plan de cet équateur; on pourra de la sorte *mettre en évidence les plans des cercles de rayon nul en ignorant ceux des cercles de rayon infini*, ou inversement. En fin de compte, nous avons en tout quatre modes possibles de définition du contingent circulaire et nous verrons au Chapitre II l'importance que l'avant-dernier (défini à l'instant en italiques) acquiert par des questions de covariance (*cf.* n° 16).

Cet exemple, où se répercute l'existence d'éléments dégénérescents dans la famille de figures mise en jeu, souligne le rôle fondamental de l'idée élargie de distance, dégagée par Maurice Fréchet, et qui contribue à l'unité du présent exposé.

Pour les contingents ordinaire et d'osculation, pour les paratingents de tout rang, il n'y a pas d'éléments dégénérescents dans les familles de figures génératrices : et cela exclut, dans la définition de ces ensembles limites, une indétermination analogue à celle qui se présente pour le contingent circulaire.

Nous emploierons souvent les abréviations

contingent = ctg, paratingent = ptg.

6. La semi-continuité supérieure d'inclusion (= S. C. I.). — C'est René Baire (²) qui a découvert, une suite monotone de fonctions continues étant donnée, la propriété pour la fonction limite de satisfaire en chaque point à *l'une* des deux inégalités classiques auxquelles Cauchy a ramené la continuité; c'est lui aussi qui a signalé qu'une fonction semi-continue supérieurement sur un ensemble fermé y

(¹) RABATÉ *Sur les notions originelles de la Géométrie infinitésimale directe* (*Thèse de Doctorat*, Toulouse, 1931) (*Annales de Toulouse*, 1931) Nous recommandons spécialement ce travail et ses indications bibliographiques.

(²) Voir René BAIRE, *Thèse*, Paris, 1899, ou *Ann. di Math.*, 3e série, t. III, 1899, et sur l'origine de la notion de semi-continuité (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. 55, 1927, p. 141

atteint sa borne supérieure; et c'est ensuite Henri Lebesgue [1] qui a songé à mettre en œuvre la semi-continuité, très intuitive, de la longueur et de l'aire, pour calquer sur le raisonnement justifiant ce second énoncé de Baire, une méthode établissant l'existence du plus court chemin entre deux points d'une surface, ou d'une surface minima bordée par un contour. C'est dans cette voie que la semi-continuité a trouvé droit de cité en géométrie.

Il en est une seconde conduisant également a des applications importantes. C'est par l'entremise de la semi-continuité supérieure d'inclusion (= S. C. I.), notion nouvelle dont la définition se déduit de celle de la semi-continuité supérieure ordinaire en y remplaçant le symbole d'inégalité par un symbole d'inclusion. Nous donnerons a cette définition un caractere tres général. (*Ens. Math.*, 1932, p. 14-23).

Considérons un ensemble E d'éléments M, d'une nature telle qu'on possède une définition du voisinage de deux de ces éléments; supposons qu'a l'élément M, arbitraire sur E, une loi fixée fasse correspondre une collection $\gamma(M)$ d'éléments de nature également permanente [2], et pour lesquels est aussi donnée une définition du voisinage. Nous dirons qu'en M_0, notre collection jouit de la S. C. I. si $\gamma(M_0)$ inclut les éléments d'accumulation de $\gamma(M)$ quand M est inclus dans un voisinage de M_0 qui se resserre indéfiniment [3].

Exemples. — *a.* Chaque M est un point de l'espace euclidien; $\gamma(M)$ est formé de droites ou de portions de droites; la S. C. I. a lieu si $\gamma(M)$ désigne le paratingent ordinaire ou d'un rang quelconque de l'ensemble E, ou bien encore le système des projetantes du point M sur l'ensemble E (que nous supposons fermé).

---

[1] H LEBESGUE, *Notice sur les travaux scientifiques* (Toulouse, Privat, 1922, p, 66-68). Voir aussi sa Note *Sur le minimum de certaines integrales* (*Comptes rendus*, t. 131, 1900), et sa These, *Integrale, longueur, aire* (*Ann. di Math.*, 3e serie, t. VII, 1902), nos 93 et suiv.).

[2] On suppose notamment que ces elements sont toujours de même nature, quel que soit M, que leur classe et celle de M sont distanciables et compactes

[3] Vis-a-vis de l'inclusion, nous definissons ainsi la semi-continuite superieure, on pourrait concevoir aussi la semi-continuite inferieure elle consisterait dans le fait que $\gamma(M_0)$ est inclus dans le systeme des elements d'accumulation de $\gamma(M)$ (dans les conditions ci dessus). On peut considerer, avec C. Kuratowski, un autre genre de semi-continuite inferieure (voir sur ce point les indications bibliographiques de la Note II, p. 53).

b. Chaque M est un ensemble fermé ponctuel de l'espace euclidien et $\gamma(M)$ est lui-même l'ensemble des points de M appartenant à un ensemble E ponctuel fermé : le voisinage de M_0 est ici formé par les points distants de M_0 d'au plus ρ; il s'obtient donc par la construction C. M. Alors la S. C. I. se produit encore sur tout M_0.

c. M est un point de l'espace euclidien et $\gamma(M)$, la collection des lignes issues de M, tangentes en chaque point au vecteur d'un champ continu; ou encore $\gamma(M)$ est la région de l'espace balayée par ces lignes (1).

6 *bis*. L'intérêt de la S. C. I, provient d'une part de ce qu'elle entraîne la continuité de $\gamma(M)$ dans sa dépendance vis-à-vis de M quand cette collection se réduit partout à un élément unique; et la continuité de $\gamma(M)$ en M_0 si cette unicité est réalisée seulement en M_0; d'autre part, du fait que la réalisation de la S. C. I. est susceptible de provoquer des effets de semi-continuité ordinaire, dans les conditions suivantes :

Supposons qu'à la collection γ soit attachée une valeur numérique φ, suivant une loi déterminée exclusivement d'après les éléments présents dans γ (donc : indépendante de M); supposons de plus cette loi choisie de telle manière que l'inclusion $\gamma' \subset \gamma''$ entraîne l'inégalité $\varphi' < \varphi''$; alors φ sera une fonction de M (par l'intermédiaire de γ) et cette fonction possédera la semi-continuité supérieure ordinaire, si φ dépend continument de γ (2).

(1) Mlle Charpentier a déduit cette propriété des intégrales d'un système différentiel du résultat suivant de Paul Montel. Soit le système

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z),$$

f, *g* étant continues sans plus par rapport à l'ensemble des variables; toute suite infinie de courbes intégrales admet au moins une courbe d'accumulation qui est une intégrale. Consulter sur ce point la Thèse de Mlle Charpentier (Poitiers, 1931) ou *Mathematica* (*Cluj*, t. V, 1931) et son Mémoire : *Sur les intègrales d'un système* (*Bull. de Sc. math.*, 2e série, t. LVI, juillet 1932). En ce qui concerne l'origine de l'exemple *a* de la page 12, voyez Bouligand, *Sur l'idée d'ensemble d'accumulation* (*Ens. Math.*, t. 29, 1931, p. 246).

(2) Cette dernière condition peut être remplacée par nne condition de semi-continnité, celle de φ relativement à $\gamma(M)$: en effet, vu la S. C. I., pour toute suite $\{M_i\}$ incluse dans des voisinages de plus en plus étroits de M_0, les éléments d'accumulation des $\gamma(M_i)$ sont inclus dans $\gamma(M_0)$. Donc $\varphi[\gamma(M_0)$ dépasse la valeur φ_1 de φ

Nous dirons alors en abrégé *qu'il se produit un effet scalarisé* de S. C. I. [1].

Par exemple, sur chaque ordonnée perpendiculaire au segment (o, 1) de l'axe des x, prélevons, entre deux parallèles déterminées à cet axe, un segment σ_x dont les deux extrémités dépendent de x suivant une loi connue. Dans l'exemple *b* du n° 6, identifions l'ensemble E avec la réunion des σ_x, que nous supposons essentiellement *fermée*, et l'ensemble M avec la portion d'ordonnée ayant pour abscisse x comprise entre nos deux parallèles fixes à l'axe des x. La collection $\gamma(\mathrm{M})$ est ici formée des points de σ_x : et puisque la réunion des σ_x est fermée, $\gamma(\mathrm{M})$ jouit de la S. C. I. Et cela implique immédiatement la semi-continuité supérieure du point d'ordonnée maxima de σ_x, la semi-continuité inférieure du point d'ordonnée minima.

Pareillement, considérons l'intersection d'un ensemble fermé par un plan arbitraire et prenons dans ce plan la plus petite figure convexe incluant cette intersection. Son aire et sa longueur seront deux fonctions du plan jouissant de la semi-continuité supérieure ordinaire.

Un autre effet scalarisé de S. C. I. consiste dans la propriété suivante, rencontrée (indépendamment des considérations actuelles) par G. Durand [2] : semi-continuité supérieure de l'angle solide du plus

---

calculée pour la collection de ces éléments [ou, en abrégé : l'*accumulatif* des $\gamma(\mathrm{M}_i)$]. D'autre part, on peut toujours prendre M_i assez voisin de M pour que les éléments de $\gamma(\mathrm{M}_i)$ étrangers, à l'accumulatif des $\gamma(\mathrm{M}_i)$, soient cependant dans un voisinage arbitrairement étroit de cet accumulatif. Et c'est ici qu'intervient l'hypothèse que φ ne possède pas de valeur limite dépassant φ_1 lorsque les $\gamma(\mathrm{M}_i)$ sont inclus dans la réunion des voisinages de leurs éléments d'accumulation. Si cette hypothèse qui se ramène à la semi-continuité supérieure de φ relativement à γ est réalisée, la conclusion du texte est valable.

(1) A propos des équations différentielles, Mlle Charpentier a rencontré une circonstance de ce genre, au Chapitre IV de sa Thèse, pour l'aire de la région découpée dans une portion du plan par le système des intégrales issues d'un point.

(2) Cette remarque intervient dans la démonstration du théorème suivant (*G. I. D.*, nos 141-146, et *Soc. Pol. Math.*, t. IX, 1930, p. 32-41). *Une surface dont le ptg n'inclut en aucun point de pinceau solide* (le premier lemme d'univocité, qui sera donné au n° 7, garantissant en pareilles conditions le sens du mot *surface*) *à son contingent en chaque point formé par un plan.* Ce théorème d'existence du plan tangent a été transformé (J. Mirguet, *Comptes rendus*, t. 195, p. 592) en un *théorème d'existence et de continuité* (le ptg est plan) doublé par deux énoncés introduisant le biparatingent réduit (J. Mirguet, *Comptes rendus*, t. 197, p. 547).

A cette occasion, signalons aussi que le problème de continuité du ptg_1 d'un continu de l'espace à trois dimensions, posé par G. Rabaté dans sa Thèse, a été résolu affirmativement par J. Mirguet (*Comptes rendus*, t. 195, p. 509).

petit cône convexe (s'il existe) englobant le système des projetantes d'un point M sur un ensemble ponctuel. En cas d'existence d'un tel demi-cône, le mot convexe étant entendu au sens strict, nous dirons avec G. Durand, que le point M est un point (α).

En vertu de la S. C. I. des projetantes, l'ensemble des points (α) (situés hors de E) est ouvert : de plus, à chaque point M de la classe (α), on peut attacher un cône droit à base circulaire incluant toutes les directions des projetantes issues de ce point; et de ce cône, on peut déduire, avec L. Chamard, un volume de révolution de même axe, dont la méridenne est un arc de cercle ayant pour corde la hauteur du cône et pour rayon la demi-distance de M a E, de telle manière que tout point intérieur à ce volume soit lui-même un point (α) (¹).

Ce genre d'applications nous amène naturellement a préciser les propriétés de la distance d'un point à un ensemble ponctuel.

6 *ter*. **Propriétés de la distance résultant de la S. C. I. des projetantes.** — Remarquons d'abord qu'en un point M, sur une demi-droite $M\Delta$ telle qu'il existe au moins une projetante de M faisant avec $M\Delta$ un angle aigu, on montre aisément que la distance est décroissante. Cela posé, si le point M est un point (α), il existe en M une demi-droite $M\Delta$ telle que toute projetante de M fasse avec $M\Delta$ un angle obtus, dépassant un angle obtus fixe $\frac{\pi}{2}+\theta$ (cette derniere circonstance étant réalisée *ipso facto*, puisque l'ensemble des projetantes est fermé). Toute projetante de M est dans un demi-cône solide de révolution Γ, ayant son demi-axe $M\Delta'$ opposé à $M\Delta$ et de demi-angle au sommet $\alpha=\frac{\pi}{2}-\theta$. En vertu de la S. C. I., on peut trouver une distance δ telle que, pour $MM'<\delta$, toute projetante de M′ soit dans un demi-cône solide de révolution Γ', d'angle au sommet au plus égal à $\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}$ et d'axe incliné sur celui de Γ d'un angle inférieur à un angle ε arbitrairement petit. Dès lors, sur tout vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ de longueur $<\frac{\delta}{2}$, issu d'un point M_1, tel que $MM_1<\frac{\delta}{2}$,

(¹) L. Chamard, *Sur les points* (α) *de G. Durand* (*Rendic dei Lincei*, 6ᵉ serie, vol. XVI, 1932, 2ᵉ sem., p. 396-400. Voir aussi *Thèse*, Poitiers, 1933 (*Mem. Soc. Roy. Sc. Liége*).

et faisant avec $M\Delta'$ un angle suffisamment petit, la distance d'un point courant à l'ensemble E sera une fonction strictement croissante (car de M_2 en M_1 elle décroît pour la raison indiquée au début) [1].

7. **La sélection du moyen du premier ptg** [2]. — En vertu de la S. C. I., le fait pour le ptg_1 en un point M_0, de laisser échapper, soit une direction Δ, soit toute direction d'un plan π en ce point (ce qui implique aussi la perte des directions voisines), entraîne la même propriété pour le ptg_1 aux points de E suffisamment proches de M_0.

Cela posé, en appelant O un point d'accumulation de l'ensemble ponctuel E, voici les énoncés des lemmes d'univocité, pour l'espace à trois dimensions :

a. S'il existe une droite $z'Oz$ exclue du ptg_1 de E en O, il existe une sphère de centre O et de rayon ρ assez petit pour que l'ensemble E_1 des points de E situés dans ou sur cette sphère ait au plus un point sur chaque parallèle à $z'z$ et qu'en outre les cordes de E_1 aient leurs parallèles issues de O hors d'un cône de révolution de sommet O, d'axe $z'z$.

b. S'il existe un plan xOy dont toute direction échappe au ptg_1 de E en O, il existe une sphère de centre O et de rayon ρ assez petit pour que l'ensemble E_1 (défini comme dans *a*) ait au plus un point dans chaque plan parallèle au plan xOy et qu'en outre les cordes de E_1 aient leurs parallèles issues de O dans un cône de révolution de sommet O, d'axe $z'z$.

---

(1) Il y a une différence essentielle entre les deux énoncés rencontrés ci-dessus.

A. Au point M, sur $M\Delta$, la distance est décroissante s'il y a une projetante faisant avec $M\Delta$ un angle aigu.

B. Elle est croissante si toute projetante de M fait avec $M\Delta$ un angle obtus.

D'une part, B ne peut s'appliquer à M et à $M\Delta$ sans s'appliquer aussi à M' et $M'\Delta'$ dès que l'élément semi-linéaire $(M', M'\Delta')$ est suffisamment voisin de $(M, M\Delta)$: cela découle immédiatement de la *S. C. I.* D'autre part, A, supposé valable pour $(M, M\Delta)$, ne l'est plus nécessairement pour les $(M', M'\Delta')$ pris arbitrairement voisins : si E comprend deux points P, Q, un point M du plan médiateur de PQ a deux projetantes, soit $M\Delta$ une demi-droite faisant un angle aigu avec l'une, un angle obtus avec l'autre. Un point M' infiniment voisin de M hors du plan médiateur n'a plus qu'une projetante et il peut arriver que le long d'une droite $M'\Delta'$ parallèle à $M\Delta$, la distance croisse d'abord sur un trajet très court à partir de M' pour décroître ensuite. En définitive, l'hypothèse de A est *instable*, celle de B, *stable* grâce à la *S. C. I.* L'énoncé B veut que *tout point* (α) *soit sur la frontière extérieure* $F\rho$.

(2) Cf. *G. I. D.*, p. 76 et suivantes.

L'énoncé a garantit un sens précis à l'expression *surface dont le ptg en chaque point laisse échapper une droite*, en assurant la représentation analytique explicite de ladite surface, *autour de chaque point*, quand on prend la direction exclue pour axe des z, la cote étant une fonction f pour laquelle $\Delta f : \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ demeure borné (¹). Une sous-classe intéressante est celle des surfaces dont le ptg est réduit à un plan : celui-ci sera continu, en vertu de la S. C. I.

L'énoncé b entraîne pour un continu soumis à son hypothèse la propriété d'être une courbe pour laquelle existe, *autour de chaque point*, une représentation $x = f(z)$, $y = g(z)$, les fonctions f, g étant à nombres dérivés bornés. Un continu dont le ptg est partout réduit à une droite unique est une courbe à tangente continue (²).

En terminant ce paragraphe, signalons les importants travaux d'André Marchaud sur la sélection de continus qui sont des courbes (³) et les recherches antérieures de Juel, Hjelmslev, A. Rosenthal, citées par Paul Montel dans son exposé de *Bulletin des Sciences mathématiques* de 1924 (⁴). Voir aussi le fascicule 47, du *Mémorial sur la géométrie différentielle projective des courbes*, par G. Tzitzéica.

8. Application à certains ensembles de niveau. — Soit le champ scalaire F(M) continu dans une sphère de centre M_0. Supposons qu'il existe une demi-droite M_0L_0 telle que sur elle et sur toute demi-droite ML soumise aux conditions $M_0M < \delta$, $\widehat{M_0L_0, ML} < \varepsilon$, la fonction F(M) soit strictement croissante à partir de l'origine de cette

(¹) On démontre que chaque surface de cette classe, envisagée dans sa totalité, est la réunion d'un nombre fini de morceaux dont chacun admet, sur son étendue entière, une représentation analytique explicite. L'instrument de cette déduction est le lemme de Borel-Lebesgue (*G. I. D.*, Chap. IV).

(²) *Voir* des applications, *G. I. D.*, note (²), p. 85 et exer. nᵒˢ 10, 11, p. 220.

(³) André Marchaud, *Sur les continus d'ordre borné* (*Acta math.*, t. 55, p. 67-115). *Sur une propriété caractéristique d'une courbe de Jordan sans point double* (*Math.*, vol. IV, p. 137-156). *Extensions de la notion de continu d'ordre borné* (*Ann. Éc. N. S.*, 3ᵉ série, t. XLIX, 1932, p. 113-136).

(⁴) Il serait intéressant d'obtenir, dans les espaces fonctionnels, des critères pour qu'un continu soit une courbe. Il en est ainsi, dans l'espace des fonctions à dérivée continue, pour le continu K des intégrales de $y' = f(x, y)$ quand f est soumise à une condition assurant l'unicité. Mais si f est continue sans plus, on ignore la structure du continu K. Cette remarque montre en passant l'apparentement des recherches concernant la notion d'intégrale générale, pour divers types d'équations, avec celles concernant la notion de ligne, la notion de surface.

demi-droite, sur tout un segment dont la longueur peut être prise constante dans tout le voisinage défini par δ et ε. On montre alors qu'en M_0, le ptg de l'ensemble des points tels que $F(M) = F(M_0)$ ne peut contenir M_0L_0 et que cet ensemble est formé, à proximité de M_0 (quand on prend M_0L_0 pour axe des z) par une surface $z = f(x, y)$ séparant les points (voisins de M_0) où $F(M) > F(M_0)$ des points où $F(M) < F(M_0)$. Cela vaut pour $F = \text{dist.}(M, E)$ et M_0 point (α).

Ce résultat s'applique également quand F est une fonction des distances de M aux ensembles $E_1, \ldots, E_p, E_{p+1}, \ldots, E_{p+q}$ croissante par rapport aux p premières, décroissante par rapport aux q dernières, et qu'il existe un demi-cône solide de révolution incluant toutes les projetantes de M_0 sur les p premiers ensembles, tandis que ses projetantes sur les q derniers sont inclues dans le demi-cône opposé. Cet énoncé découle comme je l'ai montré (1), de la S. C. I. à laquelle on peut aussi rattacher d'autres énoncés voisins; on peut également obtenir pour des champs scalaires de cette catégorie, des énoncés de nature intégrale (2). Je renvoie pour cela le lecteur à mon travail cité,

---

(1) G. Bouligand, *Sur les ensembles de niveau de certains champs scalaires* (*Comptes rendus* t. 194, 1932, p. 1885); *Sur la semi-continuité d'inclusion* (*Ens. Mach.*, 1932, p. 14-23).

(2) Par exemple, si F est croissante par rapport aux distances à tous nos ensembles, hors de la sphère minima circonscrite à leur réunion, le lieu des points où F prend une valeur au moins égale à son maximum sur cette sphère est une surface n'ayant qu'un point sur le prolongement de chaque rayon. Ou bien, si les sphères minima circonscrites à nos divers ensembles sont suffisamment petites par rapport à leurs distances mutuelles, il peut se faire que le lieu des points où F s'annule, hors de ces sphères, soit topologiquement équivalent au lieu analogue obtenu en remplaçant, dans F, les distances aux ensembles par les distances aux centres des sphères minima circonscrites. Par exemple, en prenant deux ensembles E_1 et E_2 pour lesquels la distance des centres de ces sphères dépasse le triple de la somme de leurs rayons, on peut montrer que le lieu n'a qu'un point sur chaque demi-droite issue de l'un des centres (*Ens. Math., loc. cit.*). Cet ordre d'idées avoisine la théorie des fonctions implicites où l'on possède surtout des résultats locaux, mais où l'on peut cependant citer ce résultat intégral. dû à W. Wilkosz (*Bull. Ac. Polon. Sc. L.*, 1920) et que nous énoncerons ainsi :

Soient D un domaine borné de frontière F, et f une fonction continue dans D + F, avec un gradient continu dans D et ne s'annulant en aucun point de D où f serait nulle. Supposons $f > 0$ sur F et $f \leqq 0$ en au moins un point de D. Alors l'ensemble des points de D où $f = 0$ est la réunion d'un nombre fini de lignes simples fermées disjointes à paratingente unique en chaque point.

On pourrait encore étudier les ensembles de niveau des champs scalaires réels d'*ordre borné*, c'est-à-dire n'acquérant jamais sur une droite une valeur quelconque plus de n fois. Même problème pour les champs scalaires d'ordre en général borné, c'est-en faisant simplement observer que l'énoncé explicitement donné plus haut généralise la notion de point (α) de G. Durand (cas d'un seul ensemble) (1) et souligne une fois de plus l'importance de la S. C. I. dans ces recherches.

9. Frontières séparant deux domaines et soumises bilatéralement à une condition d'inclusion conique. — Soit un continu K dont chaque point M peut être inclus dans un domaine Ω_M tel que l'ensemble ouvert $\Omega_M - K$ ait deux constituants (2); supposons de plus que, dans chacun de ces constituants, on puisse inclure l'intérieur d'un cône droit à base circulaire de sommet M, de manière que les deux cônes inclus admettent une direction intérieure commune Δ. On montre alors que le ptg de K en M laisse échapper la direction Δ : en effet, tout vecteur suffisamment petit, d'origine suffisamment voisine de M, et suffisamment peu incliné sur Δ, sera plongé (sauf à son extrémité M) dans l'un des constituants de $\Omega_M - K$ et par suite, ne pourra jouer le rôle de corde pour le continu K. On peut noter en outre que l'existence d'une direction intérieure commune à nos deux cônes est assurée dès que la somme de leurs demi-angles d'ouverture dépasse un droit. Quoi qu'il en soit, l'existence de cette direction exige que K soit une surface, douée autour de chaque point M, d'une représentation analytique explicite.

Ces considérations expliquent la régularité relative des aspects de la *cassure des minéraux à grain fin*, qui s'oppose aux formes extérieures tourmentées des roches longtemps enfouies et soumises à l'action capricieuse des eaux d'infiltration, acides ou alcalines, ou encore des roches ayant conservé la surface extérieure, qui s'est déterminée au moment de leur solidification brusque, aux âges géologiques. Tandis que ces dernières surfaces font plutôt évoquer, par leur complexité, les frontières de certains domaines, les surfaces de cas-

---

à-dire jouissant de la propriété précédente, sauf pour des droites exceptionnelles (formant un ensemble sans élément intérieur, par exemple). On aurait ainsi une extension des propriétés réelles des champs scalaires algébriques. Dans le plan si $f(x, y)$ est d'ordre p, une ligne continue satisfaisant à $y' = f(x, y)$ est coupée par une droite en $p+1$ points au plus (BOULIGAND, *Rev. gén. Sc.*, 15 juin 1932).

(1) G. DURAND, *Comptes rendus*, t. 190, 1930, p. 1219; *cf.* BOULIGAND, *Comptes rendus*, t. 190, 1930, p. 1002.

(2) Cf. *G. I. D.*, Chapitre VIII; voir aussi la fin du n° 3 du présent exposé.

sures sont régies bilatéralement par une condition d'inclusion conique. C'est du moins ce qui a lieu si l'on admet les hypothèses suivantes. Supposons qu'il s'agisse d'une cassure stable, c'est-à-dire correspondant à des configurations non altérées par des chocs d'importance inférieure à celle du choc producteur de la cassure : pour qu'il en soit ainsi, nous devons admettre qu'aucun fragment ne présente, périphériquement, de saillie par trop effilée : un cône taillé dans la substance doit être suffisamment ouvert, son demi-angle au sommet devra donc avoir une valeur suffisante. Pour une certaine intensité des chocs, au-dessous de laquelle nous désirons la stabilité des fragments, nous pourrons donc définir le *cône de cohésion* de la substance : un fragment n'est stable que si l'on peut inclure dans le minéral, en chaque point périphérique, un cône de cohésion, dont l'apothème (en vertu du principe de similitude) peut être pris arbitrairement petit, l'angle au sommet important seul. Le cône de cohésion sera d'autant plus ouvert que l'on opère sur des corps plus friables et qu'on les soumet à des chocs plus intenses. Cela posé, soit qu'on soumette une substance comme la craie à des chocs qui n'ont pas besoin d'être forts, soit qu'on soumette une substance compacte à des chocs violents, on obtiendra une certaine régularité dans la cassure car en augmentant soit la friabilité, soit la violence du choc, de manière que le demi-angle au sommet du cône de cohésion dépasse 45°, le long de chaque surface séparant deux fragments, il existera en chaque point, d'après ce qui précède, une direction exclue du ptg.

On peut aussi se poser le problème de la stabilité d'un fragment d'un minéral donné, relativement à des chocs dont l'intensité est telle que le cône de cohésion ne dépasse pas en demi-ouverture un certain angle α. On est ainsi conduit à l'étude d'une frontière soumise unilatéralement à une condition d'inclusion conique. Et cela rattache à des considérations concrètes les questions, relatives à la frontière du domaine obtenu en réunissant, dans l'espace, un ensemble de cônes ou aussi bien, de tétraèdres. Ces questions, liées au problème des enveloppes par réunion, ont été abordées par W. H. et Gr. Ch. Young [1]. Dans un tel problème, à chaque point M de la

[1] W. H. Young et Gr. Ch. Young, *Sur la frontière normale d'une région d'un ensemble* (*Comptes rendus*, t. 163, 1916, p. 509).

frontière est attachée par exemple la collection des points $\gamma(M)$ intérieurs à un tétraèdre : il est clair que celui-ci peut toujours être amplifié s'il y a lieu, de manière que $\gamma(M)$ soit soumise à la S. C. I. : ce qui souligne le lien étroit entre la question actuelle et celles que nous avons précédemment rencontrées.

10. Le théorème de Meusnier. — Cette proposition classique régit, pour une classe étendue de surfaces, les cercles de courbure en un point des sections de la surface par des plans contenant une tangente en ce point : ces cercles se trouvent sur une sphère, centrée sur la normale à la surface et que nous appellerons en abrégé *sphère de Meusnier*.

Il n'y a là qu'un cas particulier d'une loi simple et générale relative aux ensembles (¹). Soit O un point d'accumulation d'un ensemble ponctuel E quelconque. Nous allons considérer deux contingents formés de demi-cercles dont le second se ramène de suite au ctg circulaire, tandis que le premier, dans le cas des surfaces, peut être appelé ctg de courbure normale. Les deux contingents en question sont définis comme suit.

1° Soit $z'Oz$ une droite quelconque menée par O. Chaque point M de E non sur cette droite détermine un seul demi-cercle K_M portant M, et ayant pour extrémités le point O et un second point de $z'Oz$ (²). L'ensemble des demi-cercles limites de K_M, lorsque le point M de E tend vers O, s'appellera le ctg *de courbure de* E *en* O *pour la direction* $z'Oz$. Nous nous bornerons ici au cas où le demi-plan issu de $z'Oz$ et contenant la demi-tangente Ox à E, normale à $z'z$, contient un seul demi-cercle K (de rayon non nul) de ce ctg. Dès lors, la partie de E située dans un dièdre infiniment petit ayant ce demi-plan comme bissecteur admet $z'z$ comme normale en O.

2° Chaque point M de E, projeté orthogonalement sur la demi-tangente Ox et non sur la demi-tangente opposée, détermine un seul demi-cercle C_M portant M, et ayant O pour extrémité avec Ox pour demi-tangente. L'ensemble des demi-cercles limites du précédent,

(¹) G. Bouligand, *Comptes rendus*, t. 195, 1932, p. 481; *Journal de Villat*, t. XI, 1932, fasc. 2 et 4.

(²) Pour la définition de la distance de deux cercles K_M, voir *G. I. D.*, p. 172.

quand M, sur E, tend vers O, s'appellera le contingent hémicirculaire de E en O pour la demi-droite Ox.

Cela posé, l'hypothèse d'unicité faite au 1° détermine une conséquence importante. Si une suite de points M de E tend vers O de manière que la suite correspondante des K_M tende vers K, la suite des sphères S_M passant par O et M, et centrées sur $z'z$ tend vers la sphère S, décrite sur K comme grand cercle. Donc les cercles C_M, sections des sphères S_M par des plans contenant Ox, sont infiniment voisins des cercles de section de la sphère S par les mêmes plans.

D'où le théorème de Meusnier relatif aux ensembles :

Si, au point O, pour l'ensemble ponctuel E, dans le demi-plan déterminé par la demi-tangente Ox et la perpendiculaire $z'Oz$, le ctg de courbure pour la direction $z'Oz$ est formé d'un seul demi-cercle K, le ctg hémicirculaire relatif à la demi-droite Ox est tout entier porté par la sphère engendrée par la révolution de K autour de $z'Oz$ (sphère de Meusnier).

D'ailleurs, si K est de rayon infini, le théorème subsiste, le rôle de la sphère de Meusnier étant dévolu au plan xOy.

Notamment, si E est une surface admettant une normale $z'Oz$ en O, et satisfaisant à l'hypothèse d'unicité du demi-cercle K du ctg de courbure normale dans le demi-plan normal contenant la demi-tangente Ox, nous retrouvons le théorème de Meusnier sous une forme voisine de sa forme habituelle. En fait, la structure de la surface n'intervient que par la portion comprise dans un dièdre d'arête $z'z$ contenant à son intérieur la demi-droite Ox, dièdre qui peut être d'ailleurs arbitrairement petit. Si l'hypothèse d'unicité de K est vérifiée pour chaque demi-tangente, on peut voir [1] que la surface admet autour de O une représentation analytique de la forme

$$z = \varphi_2(x, y) + (x^2 + y^2)\,\varepsilon(x, y)$$

en appelant ε une fonction qui tend vers zéro avec $x^2 + y^2$ et $\varphi_2(x, y)$ une fonction homogène du second degré, c'est-à-dire de la forme

$$(x^2 + y^2)\,c(\omega),$$

où c est une fonction continue quelconque de l'angle polaire ω, périodique de période 2π.

---

[1] Cf. *G. I. D.*, n^{os} 147 et 147 *bis*.

Mais en égalant successivement ε à deux fonctions $\varepsilon_1(x, y)$ et $\varepsilon_2(x, y)$ remplissant cette condition, nous aurons, pour un même choix de $\varphi_2(x, y)$, deux surfaces S_1 et S_2 telles que leur réunion, ainsi que tout ensemble compris entre elles, se prêtent en O, a l'application du théorème de Meusnier. A cette remarque, on ramene l'extension bien connue dudit théorème concernant les trajectoires orthogonales d'un champ vectoriel continu, lorsque ces trajectoires satisfont à une équation de la forme

$$d[z - \varphi_2(x, y)] = \sqrt{x^2 + y^2}\,[\alpha(x, y, z)\,dx + \beta(x, y, z)\,dy],$$

où α, β sont des fonctions tendant vers zéro avec la distance du point (x, y, z) à l'origine et φ_2 une fonction douée d'une différentielle au sens classique : en effet, les lignes intégrales de cette équation issues de l'origine et dont la courbure est partout inférieure à une limite préalablement assignée sont comprises entre deux surfaces S_1 et S_2 analogues à celles dont il vient d'être question (¹).

11. Le théorème d'Euler. — L'étude précédente du théoreme de Meusnier permet de préciser les conditions de validité du théorème d'Euler. Considérons une surface à plan paratingent unique. Supposons qu'en chaque point M, pour chaque demi-tangente $M\Delta$, il y ait un seul demi-cercle du ctg de courbure normale dans le demi-plan normal de trace $M\Delta$: supposons que sa courbure $\Gamma(M, M\Delta)$ soit une fonction continue de l'élément semi-linéaire $(M, M\Delta)$. On montre alors qu'autour de chaque point, la fonction $\varphi_2(x, y)$ du paragraphe précédent est de la forme $ax^2 + 2bxy + cy^2$ (²) et l'on retrouve l'indicatrice d'Euler.

Les propositions les plus primordiales de la théorie des surfaces sont donc rattachées à la théorie des ensembles. Il importe d'ailleurs de reconnaître que ce n'est là qu'une amorce, et que de grands efforts seront nécessaires pour la prolonger. Sans doute, serait-il encore difficile d'étendre le théorème relatif aux lignes d'intersection des surfaces d'un système triple orthogonal, quand ces surfaces sont simplement supposées posséder partout un plan paratingent unique : cela impliquerait en effet la mise en œuvre d'une généralisation de la

(¹) *Journ. de Villat*, t. XI, 1932, *loc. cit.*, fasc. 4

(²) *G. I. D*, nº 147 *ter*; *Journ. de Villat*, t. XI, 1932, fasc 2.

ligne de courbure, dans un sens qui reste à découvrir (Note V); nous faciliterons la solution future de problèmes de ce genre ([1]), en demandant à la théorie des groupes le degré de généralité plus ou moins large convenant à chaque question de géométrie infinitésimale; par là même, nous affinerons aussi la compréhension de particularités qui, à l'exemple des ensembles impropres et points irréguliers de la théorie du potentiel, se présentent aux frontières pour les solutions des équations aux dérivées partielles de la physique mathématique.

CHAPITRE II.

GROUPES QUALITATIFS DE LA GÉOMÉTRIE ET QUESTIONS DE CONFIGURATION APPROCHÉE, EN LIAISON AVEC LA NOTION DE DISTANCE.

12. Groupes, causalité, méthodes directes. — Pour restaurer la causalité logique en géométrie infinitésimale, il est indiqué de recourir aux groupes. Chaque groupe constitue en effet un domaine de causalité, vu que tout système d'hypothèses invariantes par les transformations du groupe implique des conclusions douées du même caractère. C'est aussi pour cette raison que les groupes constituent en quelque sorte le *matériel causal* (qui doit être sans cesse enrichi) utilisé par les théoriciens de la physique. Une modification du groupe d'invariance dont procèdent les équations d'un phénomène est solidaire d'un bond, parfois déconcertant, de la prétendue causalité : c'est ce qui est arrivé lorsque Einstein a proposé de substituer en dynamique (pour en unifier le champ d'invariance avec celui de l'électromagnétisme) le point de vue de la relativité restreinte à celui de Galilée et de Newton, précisé par Paul Painlevé ([2]). La substitution d'un groupe à un autre introduit des modifications brutales dans la structure du groupe, considéré dans son intégralité : mais cela importe peu, car l'adaptation au réel de tel ou tel schème ne se fait qu'entre certaines limites des grandeurs mises en jeu (*Rev. Scientifique*, 27 août 1932).

([1]) Voir *G. I. D.*, p. 222-223, les textes VI, VII, VIII et IX proposés comme sujets de recherches.

([2]) Paul Painlevé, *Les axiomes de la Mécanique* (Gauthier-Villars, Paris, 1922, réimpression d'opuscules antérieurs, 1905 et 1909). Voir aussi J. Le Roux, *Le principe de la relativité et les lois dynamiques* (*Bull. des Sc. math.*, 2, LVII, avril 1933).

Pour mesurer, par un exemple simple, la puissance des considérations d'invariance, il suffit de rappeler que l'homogénéité (ou si l'on préfère, la similitude) fait prévoir d'une manière rapide la formule du pendule, la formule de la résistance de l'air ([1]) et mainte autre formule de physique, à un coefficient près. La recherche des groupes intéressant la géométrie infinitésimale est inspirée par le souci d'appliquer le même principe de découverte dans des conditions plus larges.

13. Topologie pure et topologies restreintes. — Pour mieux faire comprendre l'indication qui précède, reprenons la suite des fonctions $f_n(x)$, continues et également bornées pour $0 \leqq x \leqq 1$, suite que nous supposons (comme au n° 4) posséder une limite univoquement déterminée et continue dans l'intervalle fermé $(0, 1)$; soit $f(x)$. Il peut alors exister pour cette suite certains points de *convergence non uniforme* ([2]). Supposons qu'on cherche une loi de raréfaction de l'ensemble de ces points, et imitons le physicien essayant de prévoir la formule du pendule. Parmi les énoncés les plus simples s'offrant à l'esprit, et dont il faut débattre l'exactitude, on aperçoit de suite ceux-ci. que nous libellons sous forme interrogative :

1° L'ensemble de convergence uniforme est-il assez étoffé pour posséder des points dans tout intervalle arbitrairement petit ?

2° Ou bien, assez étoffé pour avoir même mesure que le segment $(0, 1)$, ce qui revient à dire : pour qu'on puisse inclure les points de convergence non uniforme dans une suite de segments de longueur totale arbitrairement petite ?

Quiconque opterait *a priori* pour le second de ces énoncés commettrait une faute analogue, d'aprés la comparaison en cours, à une faute d'homogénéité. En effet, soit $X = \varphi(x)$ une fonction continue et croissante dans l'intervalle fermé $(0, 1)$. Elle fait correspondre au segment $(0 \leqq x \leqq 1)$ de l'axe des x un segment fermé Σ de l'axe des X. Sur ce segment Σ, nos fonctions $f_n(x)$ donnent naissance à des fonctions continues $F_n(X)$, dont la suite converge vers une nouvelle

([1]) Cf. Foch, *Introduction a la Mécanique des Fluides* (Colin, Paris, 1932, Chap. II); Max Morand, *Sur les principes de la Physique* (*Mém. Soc. Roy. Sc. Liége*, 3, t. XVII, 1932 et XVIII, 1933).

([2]) Cf. *G. I. D.*, n° 135.

fonction continue $F(x)$, Les hypothèses de notre problème ne sont donc pas altérées, que $\varphi(x)$ ait ou non une pente bornée. Or, en résolvant la question 2° par l'affirmative, nous admettrions la possibilité d'une conclusion qui pourrait être altérée si la pente de $\varphi(x)$ n'était pas bornée : car on pourrait alors ([1]) choisir $\varphi(x)$ de manière que l'ensemble de mesure nulle où nous prétendions inclure nos points de convergence non uniforme se change en un ensemble de mesure positive. La forme d'énoncé 2° doit donc être repoussée, à la suite de cet examen, comme inacceptable.

En géométrie à une dimension, cet exemple nous montre de suite la nécessité de distinguer entre le groupe complet des transformations continues et biunivoques, définies par des fonctions continues et croissantes au sens strict $X = \varphi(x)$ et ses sous-groupes obtenus en supposant que la fonction $\varphi(x)$ est à pente bornée, ou plus spécialement qu'elle a une dérivée première bornée, ou plus spécialement encore, une dérivée première continue (dans l'intervalle fermé $0 \leqq x \leqq 1$). Et cela nous donne déjà l'idée d'une suite de groupes, dont chacun est inclus dans ceux qui le précèdent. La distinction entre la topologie pure et les diverses topologies restreintes se fera d'après les mêmes principes, transportés aux espaces euclidiens à un nombre quelconque de dimensions.

14. La topologie pure. — C'est le domaine de causalité logique correspondant à l'invariance par les transformations continues et biunivoques les plus générales. Pour bien préciser le point de vue actuel, il est entendu qu'on adopte la conception classique du continu linéaire (conforme au postulat de Dedekind), et que l'on considère comme donné *a priori* un espace euclidien, pouvant se déduire par *composition* ([2]) de n continus linéaires (axes de coordonnées). Ces conventions ne sont pas de nécessité logique ([3]), mais elles ont un intérêt primordial pour les questions procédant de la physique mathématique classique.

L'idée de distance joue donc un rôle fondamental dans la construc-

---

([1]) Cf. *G. I. D.*, note ([1]), p. 205.

([2]) Cf. *G I. D.*, n° 35.

([3]) Si l'on opte pour d'autres postulats, on est conduit à divers systèmes qui sont les topologies d'autant *d'espaces abstraits* (*voir* le livre de Maurice Fréchet, collection Borel, Gauthier-Villars, Paris, 1928).

tion de la topologie pure, au sens euclidien. Mais il y a ici une infinité de manières de définir la distance : ayant opté, sur une certaine figure, pour la distance au sens usuel, puis effectué une transformation continue et biunivoque de cette figure, on peut utiliser aussi bien la distance qui serait usuelle sur cette transformée, c'est-à-dire profondément modifiée sur la figure initiale. Les distances obtenues de la sorte satisfont aux conditions de Fréchet (*voir* la note en bas de la page 10) : mais elles possèdent en outre d'autres propriétés ; en raison de l'existence d'un espace euclidien $\mathcal{E}$ ou le minimum de la distance est fourni par un segment rectiligne, on verra intervenir, dans chaque espace transformé, la famille des lignes transformées des droites de $\mathcal{E}$. Cette circonstance introduit des propriétés assez spéciales, voire même étrangeres a l'essence de la topologie. En effet, si l'on s'imposait de distancier l'espace d'après cette convention, la distance $d(P, Q)$ de deux points P et Q satisferait, en sus des conditions de Fréchet, aux suivantes :

1° Pour chaque longueur $\rho < d(P, Q)$, le minimum de $d(M, Q)$ sur l'ensemble des points M tels que $d(M, P) \leqq \rho$ est réalisé par un seul point M_ρ de cet ensemble ; M_ρ donne aussi le minimum de $d(M, P)$ sur l'ensemble des points M tels que $d(M, Q) \leqq d(M_\rho, Q)$, dans cette inégalité, le second membre est une fonction continue de ρ ; de tout cela, il résulte que, ρ variant depuis zéro jusqu'a $d(P, Q)$, le point M_ρ varie continûment sans jamais repasser a la même position : il décrit donc un arc simple de Jordan, qu'il est naturel de qualifier par l'épithète : ***géodésique*** [1].

2° On aura de plus, pour l'*interpoint* M_ρ [2],

$$d(P, Q) = d(P, M_\rho) + d(M_\rho, Q).$$

Mais ces conditions ne suffisent pas encore à distinguer le mode de distanciement obtenu en utilisant les segments rectilignes dans l'espace $\mathcal{E}$: en effet, supposons-le, pour fixer les idées, à trois dimensions, alors, dans tout espace topologiquement équivalent, il existerait des surfaces (images des plans de $\mathcal{E}$) telles que les arcs géodésiques (au sens précédent) ayant deux points sur l'une de ces surfaces s'y trouvent entierement contenus.

---

(1) Bien que cet arc n'ait, de par nos hypotheses, aucun titre à la rectificabilité.

(2) *Cf* Menger, *Uber allgemeine Metrik*. (*Math. Ann.*, t. 100 et 103).

Poursuivant le même genre d'indications, il importe d'observer qu'il existe des modes de distanciement d'un espace euclidien qui, sans satisfaire aux conditions 1° et 2°, se présentent cependant de la manière la plus naturelle. L'espace euclidien dont il s'agit peut être envisagé comme une variété linéaire plongée dans un autre espace euclidien à un nombre plus grand de dimensions. Effectuons une transformation ponctuelle continue et biunivoque de ce dernier. L'espace initial va se transformer en une nouvelle variété non linéaire, et pour distancier cette variété, nous pouvons utiliser la longueur du segment rectiligne joignant deux de ses points sur la figure finale. Ceci fait comprendre pourquoi la topologie pure n'a pas à se soucier, dans la définition de la distance de conditions des formes 1° et 2° (1).

On trouvera dans mon ouvrage cité (Chap. III à IX inclus) l'énumération des principales notions et propositions d'un caractère purement topologique dont l'étude approfondie soulève des problèmes difficiles. Un continu de Jordan défini dans l'espace $Oxyz$ par des équations

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t),$$

où f, g, h sont des fonctions continues dans l'intervalle (0, 1) décrit par la variable t, continu que nous supposons privé de point multiple, n'est pas nécessairement l'image d'un segment rectiligne par une transformation continue et biunivoque d'un domaine incluant ce segment. Et ce fait, découvert par L. Antoine (*Thèse*, *Journal de Villat*, 1921) montre à lui seul la difficulté que présente une définition générale de la notion de courbe (2).

15. La topologie restreinte du premier ordre. — Pour obtenir la

(1) Les espaces abstraits où il est possible de définir une distance satisfaisant aux conditions de Fréchet ou espaces $\mathcal{D}$ ne se prêtent pas nécessairement à une autre définition de la distance répondant aux conditions 1° et 2°. On peut s'en rendre compte par l'exemple du continu qui s'obtient par fermeture de la courbe $y = \sin\frac{1}{x}$. Cf. *G. I. D.*, p. 57.

(2) Cf. *G. I. D.*, n°s 53-58. *Voir* aussi, dans cette même collection le fascicule 45 (Wilkosz, *La topologie du plan*), et dans les éditions Teubner (Leipzig), les ouvrages de K. Menger constituant la collection : *Mengentheoristische Geometrie*, (I. *Raum und Raumgebilde;* II. *Kurventheorie*. etc.).

notion d'une topologie restreinte, on peut distinguer autant de points de vue qu'on peut définir de sous-groupes du groupe topologique complet. Nous nous bornerons à faire observer ici que les transformations définies par des fonctions à nombres dérivés bornés forment une famille telle que le prodait de deux de ses éléments en soit un nouvel élément, mais une transformation inverse de l'une des précédentes n'appartient pas nécessairement à la famille. Pour éviter les difficultés de ce genre, nous nous bornerons à considérer :

1° Le sous-groupe g_1 obtenu en supposant l'existence d'une transformation linéaire tangente et d'un jacobien positif au sens strict.

2° Le sous groupe γ_1 du précédent (1), obtenu en supposant en outre la continuité de la transformation linéaire tangente.

Le ctg ordinaire est covariant par rapport à g_1 (2), et le ptg du premier rang, par rapport à γ_1 (3).

Au point de vue de la physique mathématique, le groupe γ_1 a une importance capitale, car il coïncide avec celui des déformations envisagées dans la théorie classique de l'élasticité et plus généralement dans la mécanique des milieux continus. On peut en outre rattacher à ce groupe (4), grâce à la notion du contingent, une conception élargie des lignes intégrales d'un champ vectoriel continu, dans le cas où les composantes du champ possèdent des dérivées premières continues : ces lignes intégrales apparaissent desormais comme des arcs simples de Jordan dont le contingent postérieur en chaque point englobe le vecteur du champ. Et cela suggère l'existence de formes moins impératives des lois physiques s'exprimant, à l'exemple de celles qui régissent le mouvement d'un point matériel libre, par des équations différentielles.

Aux équations

$$X = f(x, y, z), \qquad Y = \varphi(x, y, z), \qquad Z = \psi(x, y, z), \tag{1}$$

(1) Désigné par (γ) dans *G. I. D.*, Chap. X et XI.

(2) Reprendre les raisonnements des n°s 67-69 en y substituant simplement la notation g_1 à la notation (γ). On pourrait dire encore que g_1 est le groupe du contingent ordinaire ou groupe stolzien (pour marquer l'étroite solidarité du ctg et de la différentielle au sens de Stolz).

(3) *G. I. D.*, n° 74.

(4) *G. I. D.*, p. 209-215, notes de G. Durand et de l'Auteur. *Voir* aussi MARCHAUD, *Sur les demi-sécantes limites* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 194, 1932, p. 948); *Journ. de Villat* (9, XII, 1933, p. 415-444), et *C. R.* (21 nov. 1933).

qui définissennt, dans l'espace à trois dimensions par exemple, une transformation du groupe g_1 adjoignons les suivantes :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} U &= u f'_x + v f'_y + w f'_z, \\ V &= u \varphi'_x + v \varphi'_y + w \varphi'_z, \\ W &= u \psi'_x + v \psi'_y + w \psi'_z. \end{aligned}\right.$$

A chaque transformation θ de g_1 dans l'espace (xyz), nous faisons ainsi correspondre une nouvelle transformation Θ continue et biunivoque de l'espace des *points-vitesses* $(xyzuvw)$ ou abréviativement (V). De la sorte, nous mettons en évidence la loi suivant laquelle. à un élément semi-linéaire de l'espace (xyz) (composé d'un point et d'une demi-droite qui en part), est attaché un élément semi-linéaire de l'espace (XYZ). Même remarque pour les droites indéfinies. On peut encore considérer les éléments de contact, formés d'un point et d'un plan passant par ce point : les coefficients de direction d'un tel plan se transformeront par la substitution linéaire contragrédiente de (2). L'espace de ces éléments de contact s'appellera l'espace (L).

Lorsque nous parlerons, sans préciser davantage, de topologie restreinte du premier ordre, nous aurons en vue le champ d'invariance du groupe γ_1.

Nous avons ci-dessus signalé les problèmes soulevés par les différentes manières de distancier un espace équivalent, au point de vue topologique, à la totalité d'un espace euclidien; ou bien, c'est là un autre problème important, équivalent, au même point de vue, à une portion de cet espace. Bornons-nous à mentionner que des questions analogues se posent pour un espace équivalent, en totalité ou en partie, à un espace euclidien quand on se place au point de vue de la topologie restreinte du premier ordre. Notons que de celui-ci il n'y a pas de différence à faire entre une portion d'un tel espace et une portion d'une variété soumise à la géométrie différentielle suivant la conception de Riemann. Dans les deux cas, les propriétés obtenues ont un même substratum topologique : et ce substratum est encore compatible avec des métriques d'un caractère beaucoup plus général, notamment celles où l'on définit la distance de deux points infiniment voisins d'une variété comme un infiniment petit équivalent à l'élément différentiel de l'intégrale par laquelle nous déterminerons (Chap. III) un problème régulier de minimum. Observons dès maintenant que dans chaque portion suffisamment petite de notre variété, la distance de deux points, définie comme minimum de l'intégrale entre ces points, satisfera dans ces cas étendus à nos conditions 1° et 2° du n° **14** (vérifiées en sus des conditions de Fréchet).

En topologie du premier ordre de l'espace à trois dimensions (x, y, z), il y a lieu d'appeler l'attention sur les lignes et les surfaces qui sont les images de la droite et du plan. Elles sont douées d'une paratingente unique, ou d'un plan paratingent unique en chaque point. Un ensemble de points d'une telle ligne armés de la tangente ou de points d'une telle surface armés du plan tangent, a pour image dans l'espace (V) [ou dans l'espace (L)] un ensemble ponctuel dont le diamètre tend vers zéro avec celui de l'ensemble initial dans l'espace (x, y, z).

16. La topologie restreinte du second ordre. — A chaque transformation θ du groupe g_1, il correspond une transformation continue et biunivoque Θ de l'espace (V). Pour que Θ appartienne au groupe G_1 qui joue dans (V) le même rôle que g_1 dans l'espace initial, il faut et il suffit que les seconds membres f, φ, ψ des équations (1) possèdent des dérivées secondes ([1]). Soit g_2 le sous-groupe de g_1 ainsi défini.

A la suite d'un échange de vues entre E. Cartan et l'auteur, il a été démontré ([2]) que le contingent circulaire est covariant par les transformations du groupe g_2, pourvu que l'on modifie la définition de la distance utilisée par Rabate, de manière à conserver les demi-plans des cercles de rayon nul, mais à éviter par contre de mettre en jeu les demi-plans des cercles de rayon infini.

En incorporant à la fois les demi-plans des cercles de rayon nul et ceux des cercles de rayon infini à la définition du contingent, on ne pourrait étendre sa covariance au delà du champ projectf ([3]). On voit ici la liaison entre la définition de la distance utilisée pour définir le

---

([1]) Dans l'espace V, le jacobien de la transformation Θ de G_1 est alors le carré du jacobien de θ dans l'espace initial.

([2]) Bouligand, *Sur quelques notions infinitésimales* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 195, 1932, p. 481). *Sur la topologie restreinte du second ordre* (*Bull. de la Soc. math. de Fr.*, t. LX, 1932, p. 228-241).

([3]) Le contingent d'osculation, le paratingent du second rang (et *a fortiori* de rang supérieur), et le biparatingent sont aussi des éléments dont la covariance est limitée au champ de la géométrie projective (*Bull. Soc. math.*, *loc. cit.*).

contingent circulaire et le groupe vis-à-vis duquel on veut assurer la covarianee de ce dernier.

Je me borne, en renvoyant à un mémoire déjà cité (1) à signaler la possibilité de ramener la définition du contingent circulaire à celle du contingent ordinaire dans l'espace V : le point de vue adopté de la sorte prolonge la définition usuelle de la courbure qui considère le rapport à un arc infiniment petit de l'angle des tangentes à ses extrémités. La possibilité de choisir entre cette définition et celle qui utilise un cercle tangent, passant par un point infiniment voisin de son point de contact (supposé fixe) est ainsi prolongée dans le champ de la géométrie infinitésimale directe quand on substitue aux éléments limites (supposés uniques dans les théories classsiques) les collectifs correspondants. En adoptant le mode de definition cité au début du présent alinéa, il peut arriver qu'on incorpore au contingent circulaire de nouveaux éléments. Mais cela ne troublera pas sa covariance vis-à-vis du groupe g_2, en tenant compte des demi-plans des cercles de rayon nul et excluant ceux des cercles de rayon infini.

Lorsque nous parlerons, sans préciser davantage, de topologie restreinte du second ordre, il s'agira du sous-groupe γ_2 des transformations de g_2 définies par des fonctions f, φ, ψ dont les dérivées secondes possedent la continuité simultanée en x, y, z. Par rapport à ce groupe, est assurée en même temps la covariance du paratingent circulaire, c'est-à-dire de l'ensemble limite des cercles passant par trois points de l'ensemble initial infiniment voisins d'un point d'accumulation.

17. Il serait prématuré de chercher à fonder, sur les considérations qui précèdent, une classification des problèmes de géométrie infinitésimale. Dans beaucoup de cas, elles donneront cependant un guide, en éclairant notamment le chercheur sur la définition de la ligne ou de la surface paraissant la mieux appropriée à la question qu'il traite. Par exemple, si l'on a en vue les propriétés générales des géodésiques, ou bien encore celles des correspondances isométriques, on pourra se placer dans la classe des surfaces a paratingent incomplet; mais dans une étude relative à la conservation des angles, et tendant à

(1) BOULIGAND, *Sur la topologie restreinte du second ordre* (*Bull. Soc. màth.*, 1932).

déterminer s'il existe pour une rondelle superficielle simplement connexe une représentation conforme sur un disque plan, faudra-t-il se restreindre à la classe des surfaces images du plan par les transformations de γ_1. Enfin, lorsqu'il sera question d'éléments de courbure, dont l'identité pour deux surfaces tangentes en un point équivaudrait à un contact du second ordre de ces surfaces, sera-t-il indiqué de se limiter à des surfaces déduites du plan par des transformations de γ_2 (1).

18. Le rôle de la distance dans les questions de configuration approchée. — On peut se proposer des confrontations entre les descriptions d'un phénomène physique obtenues en adoptant successivement l'hypothèse de la continuité de la matière et l'hypothèse corpusculaire. On est alors conduit (2) à préciser le sens d'assertions du genre suivant : tel essaim de points constitue une *ligne à ε près*, ou *une surface à ε près*, ou bien encore : *le mouvement de tel essaim de points s'approche à ε de celui d'un certain milieu continu.* Ce que nous entendons ici par essaim est la collection d'un nombre fini, mais très grand de points. Je me borne à signaler ces questions, en renvoyant à l'article cité et rappelle simplement :

1° Que les notions, qui, à l'exemple de la suivante : *point intérieur à ε près à un essaim* (3) pourraient, en un certain sens, être appelées notions topologiques approchées, sont en réalité des notions métriques, la distance s'introduisant ici d'une manière essentielle et non sous la forme atténuée que nous avons rencontrée dans la topologie proprement dite;

2° Que les configurations méritant le nom de lignes ou de surfaces pourront être conçues à des points de vue variés; citons le suivant : un *continu à ε près* (4) ne mérite le nom de surface que s'il est

---

(1) Il convient d'ailleurs à cette occasion d'observer les formes variées sous lesquelles peuvent s'introduire les éléments de courbure.

(2) G. Bouligand, *En prolongement de l'infiniment petit physique* (*Rev. Scientif.*, 25 juin 1932).

(3) On désignera sous ce nom un point A faisant partie de l'essaim et tel qu'il existe une sphère de centre A et de rayon dépassant 2ε qui soit entièrement recouverte lorsqu'on effectue la construction C. M. avec le rayon ε sur le système ponctuel considéré.

(4) Nous disons qu'un essaim est un *continu* à ε près si deux points quelconques de cet ensemble peuvent se joindre par une ligne polygonale dont les sommets sont des points de l'ensemble et dont les côtés sont inférieurs à ε.

dépourvu de points intérieurs à ε près (points dont la présence assimilerait la configuration étudiée à un volume) et en outre, que s'il est impossible d'inclure dans un cône convexe les droites joignant une de nos particules à toutes celles qui en sont suffisamment voisines, comme cela se produit pour les lignes usuelles. Il est intéressant d'observer qu'en passant à la limite, on retrouve ainsi les principes de sélection, basés sur la considération du paratingent, qui ont été signalés au Chapitre I;

3° Que la dimension attribuée à une configuration variera avec le degré de l'approximation ([1]) : notamment, à l'échelle suffisamment réduite où les divers corpuscules, apparaissent distincts et réduits à des points, le système a zéro pour dimension.

A la suite de cette confrontation de la géométrie avec la physique, nous orientant dans le sens opposé, nous allons revenir de la géométrie vers la logique.

19. L'idée de démonstration causale. — *Quelques exemples.* — Les démonstrations proposées pour les théorèmes de géométrie infinitésimale sont de caractères assez divers. Il peut arriver que l'énoncé ne contienne aucune hypothèse superflue, toute réduction des prémisses étant de nature à modifier la conclusion, et qu'en même temps, la démonstration évite de lier la proposition à un faisceau de théories, soi-disant classiques et. en fait, plus ou moins enchevêtrées. C'est dans ces conditions, rarement réalisées, que la démonstration sera dite : *causale* ([2]).

Sinon, à côté des hypothèses essentielles, les raisonnements introduisent en cours de route des suppositions auxiliaires pour permettre certains modes opératoires dont la puissance impose l'usage, semble-t-il, universellement : en outre, l'énoncé en litige, au lieu d'être examiné à part, est rendu solidaire d'un ensemble d'autres propositions par le mécanisme de calcul adopté : c'est ainsi que, dans les applications de l'analyse à la géométrie, la permanence de la convexité d'une rondelle de surface par déformation isométrique n'est obtenue

([1]) Ce qui précede s'inspire principalement du desiderata de la *mecanique des fluides*, laquelle étudie des phénomènes à notre echelle. Et ceci explique le rôle, en quelque sorte privilégié, que la distance au sens usuel, c'est-à-dire euclidien, retrouve ici

([2]) G. Bouligand, *L'idée de causalité en mathématiques et dans quelques théories physiques* (*Rev. Scient.*, 13 mai 1933).

qu'après une étude des formes différentielles fondamentales et de leurs invariants, étude qui révèle, dans des conditions de généralité restreintes, mais encore larges, le rôle de la courbure totale.

Beaucoup de propriétés infinitésimales des surfaces ont été justifiées à l'origine par des procédés géométriques peu rigoureux, sous la forme où l'intuition les avait révélées. C'est pourquoi on a construit après coup des théories analytiques permettant de valider à la grosse, et dans un champ restreint, des propositions de ce genre. Plus délicate est la recherche des démonstrations causales, qui doit ramener à des raisonnements étroitement liés à la source intuitive de la proposition. Dans ce but, l'introduction de notions appropriées est nécessaire et la difficulté est de dégager ces notions. Nous avons vu se produire, pour le théorème de Meusnier, ces diverses particularités. Et l'obtention d'une démonstration causale de ce résultat, en prolongement des considérations invoquées à son origine, ramène dans toute son ampleur cette question : *canoniser les raisonnements de physicien;* parfois hasardeux, ils ont le grand avantage de rechercher directement le but. Au reste, est-il exemple plus éloquent que la tentative fameuse de Riemann vers le principe de Dirichlet?

Bornons-nous à observer qu'il importe, dans la recherche d'une démonstration causale, d'envisager des *conditions catastrophiques*, c'est-à-dire telles que le symbolisme auquel nous ont habitué les démonstrations classiques devienne, de par la généralité des hypothèses, dépourvu de tout sens (1).

A titre d'exemple, considérons la dynamique du point sur une surface à paratingent incomplet, hypothèse *provisoire* (cf. la fin de ce numéro) qui nous garantit la présence de lignes rectifiables sur ladite surface (2). Le problème proposé peut se concevoir ainsi : Soit U(M) une fonction continue du point M sur la surface et indépendante de temps ; un mouvement sera dit *attaché à* U, jouant

(1) D'une manière générale, si tel symbolisme est commode pour résumer des résultats acquis, il est préférable, dans la recherche, d'éviter l'emploi de signes opératoires, avant de s'être assuré de leur bonne adaptation. On peut dire par exemple que la théorie moderne de la résolution des équations algébriques est née du jour où l'on a pu s'abstraire du symbole $\sqrt[n]{\ }$, qui avait capté l'attention des anciens géomètres d'une manière trop exclusive.

(2) Cette hypothèse est d'ailleurs catastrophique, au sens ci-dessus : car dans les conditions correspondantes, nous ne disposons plus des dérivées que nécessiterait la formation des équations de Lagrange (G. Bouligand, *Rev. gén. des Sc.*, 30 juin 1930)

le rôle de fonction de forces, si, en inscrivant dans sa trajectoire une ligne polygonale $MM_1M_2\ldots, M_{n-1}\mu$ et en appelant $t, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, \tau$ les valeurs du temps correspondant à ses différents sommets, l'expression

$$\frac{\overline{MM_1}^2}{t_1-t}+\frac{\overline{M_1M_2}^2}{t_2-t_1}+\ldots+\frac{\overline{M_{n-1}\mu}^2}{\tau-t_{n-1}}+2U(M_1)(t_1-t)+\ldots+2U(\mu)(\tau-t_{n-1})$$

possède une limite quand n tend vers $+\infty$ de telle sorte que les cordes M_iM_{i+1} tendent toutes vers zéro, et qu'en outre cette limite fournit entre chaque couple d'instants t, τ suffisamment rapprochés, le minimum de toutes les valeurs limites qui correspondent à tous les mouvements suffisamment voisins du précédent entre les deux mêmes points, considérés le premier a l'instant t, le second à l'instant τ.

Il est facile, dans les conditions indiquées, d'établir le *théorème des forces vives*, si l'on remarque son caractère essentiel, qui est de fixer l'horaire sur une trajectoire particulière. Tout d'abord, la considération d'un mode particulier de description où l'on aurait

$$M_iM_{i+1}=\lambda(t_{i+1}-t_i),$$

où λ est indépendant de i, nous montre que chaque trajectoire est nécessairement une ligne rectifiable : à partir de ce moment, la recherche de l'horaire est ramenée au problème de la dynamique sur une droite, la fonction de forces y prenant au point d'abscisse s la valeur $U(s)$ que $U(M)$ prenait précédemment au point d'abscisse curviligne s. En même temps ceci nous montre que pour chaque mouvement il existe une force vive fonction continue du temps et par suite qu'on peut remplacer la limite de l'expression ci-dessus par l'intégrale classique d'action hamiltonienne.

On voit aussi, dans le même ordre d'idées, se présenter la démonstration la plus naturelle du principe d'action maupertuisienne, qu'on peut énoncer ainsi : tout arc de courbe rectifiable AB de la surface. tel que l'intégrale

$$i=\int_A^B\sqrt{U+h}\,ds$$

soit minimum entre ses deux extrémités, et tel que son horaire de description soit conforme au théorème des forces vives, fournit un mouvement attaché à la fonction U.

En effet, de l'identité de G. D. Birkhoff [1]

$$\int_t^\tau (\mathrm{T}+\mathrm{U}+h) = 2\int_t^\tau \sqrt{\mathrm{T}}\sqrt{\mathrm{U}+h}\,dt + \int_t^\tau (\sqrt{\mathrm{T}}-\sqrt{\mathrm{U}+h})^2\,dt,$$

écrite ici en évitant l'emploi de tout symbole varationnel, il résulte que si l'horaire obéit a la loi $\mathrm{T}=\mathrm{U}+h$, et si, en même temps, la premiere intégrale du second membre, qui équivaut à i, donne un minimum absolu, il en sera de même de l'intégrale du premier membre, ce qui nous ramène a la définition.

Notons, en terminant, et pour donner a ces raisonnements un caractère vraiment causal, cette remarque : il n'est pas nécessaire de situer le mouvement du point sur une surface de telle ou telle classe, mais simplement sur un continu Γ tel que deux quelconques de ses points puissent être joints par une courbe rectifiable prélevée sur Γ. Peu importe le nombre de dimensions de Γ. En restant dans la classe des surfaces, on peut prendre pour Γ un cône dont la directrice, sur la sphère décrite de son sommet comme centre, est une courbe ne contenant aucun arc rectifiable. Alors, les seules trajectoires possibles sont formées par réunion de deux demi-droites, génératrices du demi-cône, et la loi de leur description est prévue par ce qui précède.

CHAPITRE III.

MINIMA D'INTEGRALES. ÉQUATIONS D'HAMILTON-JACOBI. INTEGRATION CONTINGENTE. ONDES.

20. Sur la distance, en calcul des variations. — Au n° 15 (Chap. II), notre attention s'est portée sur la géométrie différentielle obtenue en partant d'une portion d'un espace euclidien et en y substituant à la distance, au sens vulgaire, une nouvelle notion désignée sous le même nom, et définie de telle sorte que la distance de deux points infiniment voisins apparaisse désormais comme un infiniment petit équivalent à l'élément différentiel d'une intégrale, telle que le

[1] *Dynamical Systems*, New-York, 1927, p. 36; *cf.* HUSSON, *Mem*, fasc. LV, p. 7.

problème de son minimum se pose dans des conditions lui assurant une solution, et que nous dirons régulières.

Nous allons nous placer ici dans un cas étendu où ces conditions sont remplies. Supposons, pour simplifier, l'espace initial à deux dimensions et posons

$$\zeta = \psi(x, y;\ \xi, \eta),$$

ψ désignant une fonction positive et continue par rapport à l'ensemble de ses variables, laquelle soit en outre positivement homogène et du premier degré en ξ, η.

Supposons de plus qu'il existe deux angles constants α et β satisfaisant aux conditions

$$0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2},$$

et donnant lieu aux inégalités

$$\sqrt{\xi^2+\eta^2}\cot\beta \leqq \psi \leqq \sqrt{\xi^2+\eta^2}\cot\alpha. \tag{1}$$

Supposons enfin que la nappe de cône engendrée dans l'espace à trois dimensions par le vecteur de composantes

$$\xi,\ \eta,\ \psi(x, y;\ \xi, \eta),$$

et d'origine (x, y, z) soit convexe. En vertu des inégalités (1), ce demi-cône (qu'on appelle la *figurative*) est compris entre deux demi-cônes de révolution ayant précisément α et β pour demi-angles au sommet. [Au sujet de l'hypothèse de convexité, *cf.* note (1), p. 39].

Cela posé, à la définition usuelle de la longueur d'un arc de courbe $m\mu$ du plan des xy, nous allons substituer celle qui consiste à considérer la limite de l'expression

$$\psi\left(m, \overrightarrow{mm_1}\right) + \psi\left(m_1, \overrightarrow{m_1 m_2}\right) + \ldots + \psi\left(m_{n-1}, \overrightarrow{m_{n-1}\mu}\right),$$

où m_1, m_2, ..., m_{n-1} sont (dans le plan des x, y) les sommets d'une ligne polygonale inscrite dans notre arc (1). En vertu de la seconde des inégalités (1), à une ligne rectifiable, au sens usuel de ce terme, il correspond, pour la nouvelle acception du mot longueur,

---

(1) La notation condensée $\psi\left(m, \overrightarrow{mv}\right)$ supplante ici la notation $\psi(x, y;\ \xi, \eta)$: nous désignons par m le point de coordonnées (x, y) de notre plan, et par $\overrightarrow{mv}$ le vecteur issu de m et de composantes (ξ, η).

une courbe de longueur bornée, et la réciproque est également vraie, en vertu de la première inégalité (1). Toutefois, la longueur d'un arc est douée en général d'une valeur pour le parcours de l'arc dans un sens et d'une valeur différente pour son parcours en sens contraire, car en un point du plan, la substitution dans ψ, au vecteur $\overrightarrow{MV}$, du vecteur opposé, change la valeur de ψ (1).

Nous appellerons maintenant *distance* de deux points la borne inférieure des longueurs (définies à l'aide de ψ) de tous les chemins unissant nos points. Pour établir que l'un d'eux admet précisément pour longueur cette borne inférieure, nous allons d'abord nous assurer que la longueur (selon ψ) d'un arc est une fonction semi-continue inférieurement de cet arc, tout comme la longueur au sens ordinaire.

21. La semi-continuité de la longueur (selon ψ). — Pour établir ce résultat, obtenu par H. Lebesgue pour certaines formes de la fonction ψ, puis par E. Goursat (2), dans des cas plus étendus, et

---

(1) Une telle fonction ψ pourrait permettre de définir le *chemin optique* dans une théorie de la propagation de la lumière dans un milieu auquel ne s'appliquerait pas le principe du retour inverse des rayons lumineux.

Des hypothèses faites sur ψ et de la définition ci-dessus de l'intégrale

$$\int \psi(x, y;\, dx, dy)$$

résultent immédiatement quelques caractères saillants des problèmes que nous allons étudier. Le nom de longueur selon ψ, donné par la suite à cette intégrale, correspond bien à une réalité : qu'on se représente un arpenteur en chef, opérant dans un immense domaine et coordonnant les mesures d'arpenteurs locaux qui opèrent chacun dans un secteur restreint, l'étalon variant légèrement lorsqu'on passe d'un secteur à un secteur contigu et se modifiant aussi (pour une raison ... magnétique ou autre ...), avec la direction suivant laquelle on l'oriente dans un même secteur, et cela nous ramène à la limite, à la notion précédente de longueur selon ψ. Cette remarque souligne l'intérêt de deux cas particuliers :

1° Celui où l'étalon peut se translater sans altération : la ligne droite demeurera le plus court chemin, selon ψ (indépendant, en pareil cas, de x, y), pourvu que l'inégalité du triangle subsiste : il faut et il suffit pour cela que le cône $\zeta = \psi(\xi, \eta)$ soit convexe [ce qui fait pressentir la nécessité de la même supposition sur le cône $\zeta = \psi(x, y;\, \xi, \eta)$, dans le cas général où ψ contient effectivement x, y; *cf.* n° 23];

2° Celui où l'étalon est inaltéré par rotation; la fonction ψ est alors de la forme $n(x, y)\sqrt{\xi^2+\eta^2}$. C'est le cas de la réfraction et le chemin, selon ψ, n'est autre que le chemin optique.

(2) GOURSAT, *Sur quelques fonctions de lignes semi-continues* (*Bull. de la Soc. math.*, t. 43, 1915, p. 118-130).

enfin par L. Tonelli dans des conditions très générales [1], A. Roussel se place a un point de vue qu'on peut présenter sous la forme suivante, qui fait appel a une proposition préliminaire tres simple.

Considérons une famille d'éléments M pour lesquels soit donnée une définition du voisinage. Supposons définie une fonction F(M) sur un ensemble E composé d'éléments M; en appelant M_0 un élément quelconque de E, supposons encore qu'on puisse trouver une fonction $\varphi(M)$ dépendant continûment de M. égalant F(M) en M_0, et nulle part ailleurs, ne dépassant F(M). *Dans ces conditions*, F(M) *possède en* M_0 *la semi-continuité inférieure.*

En effet de

$$\varphi(M_0)-\varepsilon<\varphi(M),$$

nous déduisons

$$F(M_0)-\varepsilon<F(M),$$

puisque le premier membre n'est pas modifié, et que le second n'est pas diminué quand on passe de la première inégalité à la seconde.

C'est ce qu'André Roussel applique en supposant que M_0 soit un arc AB de ligne a tangente continue (ou pour nous, un continu a ptg[te] unique), et que pour cet arc ou un autre de la même classe, F désigne la longueur selon la fonction ψ. Le voisinage de M_0 qui est mis en œuvre s'obtient en exprimant que M est inclus dans le domaine $(M_0)_\rho$ provenant de la construction C. M., rayon ρ effectuée sur M_0. Enfin, si l'on s'impose, dans un tel voisinage. de s'en tenir, aux lignes M de longueur (usuelle) ne dépassant pas une limite L assignée, on peut trouver une fonction $\varphi(M)$ remplissant les conditions du lemme précédent, et notamment telle qu'a un ε donné, corresponde un ρ, assurant pour une M incluse dans $(M_0)_\rho$ et de longueur $<L$, les inégalités

$$\varphi(M_0)-\varepsilon<\varphi(M)<\varphi(M_0)+\varepsilon,$$

c'est-à-dire, continue, mais dont il nous suffit de retenir la semi-continuité inférieure.

Pour obtenir φ déterminons, dans le plan xOy un champ vectoriel

---

[1] Dans le Tome I de l'Ouvrage de L Tonelli (*Fundamenti di Calcolo delle variazioni*), on trouvera (Chap. VI et X) des conditions necessaires, ainsi que (Chap. VII et XI) des conditions suffisantes pour la semi-continuite des integrales simples du calcul des variations, sous la forme parametrique ou sous la forme ordinaire.

continu, dont le vecteur $\overrightarrow{m_0 v}$ se réduise sur M_0 au vecteur unitaire de la tangente dans le sens des arcs croissants, et menons, par le vecteur du champ en m l'un des plans tangents au cône figuratif de sommet m, de manière à trouver (ce qui conditionne ψ dont les dérivées premières devront posséder la continuité simultanée en x, y, ξ, η) un plan lié continûment au point M. Alors, en substituant à ψ, cote d'un point du cône de sommet m, la cote d'un point du plan tangent en question, nous substituerons à F(M) (c'est-a-dire à la longueur, selon ψ de M) une intégrale

$$\varphi(\mathrm{M}) = \int_{\mathrm{M}} \overrightarrow{mv}\, dm = \int_{\mathrm{M}} \mathrm{P}\, dx + \mathrm{Q}\, dy,$$

P, Q étant deux fonctions continues, on démontre qu'elle remplit la condition ci-dessus.

Nous renvoyons le lecteur à la thèse d'André Roussel pour ce point (¹), ainsi que pour l'extension de la semi-continuité de la longueur selon ψ pour les lignes qui sont rectifiables sans plus. Le raisonnement peut être rendu indépendant de l'intégrale exprimant la longueur selon ψ et d'hypotheses sur les dérivées de ψ (Note VI).

Ainsi que nous l'avons noté, la longueur selon ψ est définie pour un sens de parcours bien déterminé de l'arc, mais elle est indépendante du sens de parcours sur un arc tel que les demi-génératrices du cône figuratif projetées suivant deux demi-tangentes opposées aient des pentes égales.

22. Les géodésiques selon ψ et pour un sens de parcours. — En vertu de la propriété précédente de semi-continuité, ainsi qu'en vertu de l'existence (Hilbert), pour toute infinité d'arcs rectifiables de longueurs bornées dans leur ensemble, d'au moins un arc d'accumulation, lui-même rectifiable (ce dernier arc étant tel que le domaine obtenu en effectuant sur lui la construction C. M., rayon ρ, contienne une infinité des arcs initiaux), nous sommes assurés qu'il existe au moins un arc rectifiable et joignant le point initial a au point final b,

(¹) A. Roussel, *Recherches sur le calcul des variations* (*Thèse*, Paris, 1926; ou *Journal de Villat*, t. V, 1926). *Voir* notamment le Chapitre III On notera, d'après ce travail, et aussi d'apres l'ouvrage cite de L. Tonelli, qu'il peut être fait sur ψ des hypothèses plus larges que celles utilisées ici.

et dont la longueur selon ψ [1] est la borne inférieure des longueurs selon ψ de tous les arcs rectifiables unissant a et b [2]. Soient p et q deux points quelconques de l'arc entre ces deux points, substitués à a et b, l'arc pq possède encore la propriété de minimum qui précède. Des exemples élémentaires (comme celui des grands cercles d'une sphère) nous apprennent à concevoir des lignes fournissant le minimum de la longueur selon ψ, entre chaque couple formé de points p, q suffisamment rapprochés. Une telle ligne sera dite géodésique selon ψ, dans le sens de p vers q.

Lorsque ψ est indépendant de x et de y, on démontre que la droite allant du point initial a au point final b fournit, selon ψ, la longueur la plus courte : en effet, soit c un troisième point, on montre aisément que

$$(ab)_\psi < (ac)_\psi + (cb)_\psi,$$

chaque parenthèse représentant l'intégrale de ψ suivant le segment rectiligne qu'elle renferme [3]; cela posé, le recours à des lignes brisées inscrites conduit au résultat.

La propriété ci-dessus (relative au cas où ψ est indépendante de x, y) entraîne la suivante : si une courbe est une géodésique, selon $\psi(x, y, \xi, \eta)$, pour un sens déterminé de parcours, un arc infiniment petit de cette courbe est équivalent à sa corde; en effet, la valeur de l'intégrale de ψ le long de la corde est un infiniment petit équivalent à $\psi(x_0, y_0; \xi, \eta)$ en appelant ici (x_0, y_0) l'origine de la corde, et ξ, η ses composantes. Par suite, le minimum de $\int \psi(x, y, dx, dy)$, le long de l'arc correspondant est un infiniment petit dont le rapport à $\psi(x_0, y_0, \xi, \eta)$ n'admet aucune valeur limite dépassant l'unité. En outre $\psi(x_0, y_0, \xi, \eta)$ est le minimum absolu de $\int \psi(x_0, y_0, dx, dy)$

---

[1] Évaluée en faisant jouer à a le rôle de point initial, à b le rôle de point final.

[2] Il suffit de reprendre dans ce but le raisonnement prouvant qu'une fonction semi-continue inférieurement sur un ensemble contenant ses éléments d'accumulation atteint sa borne inférieure (cf. *G. I. D.*, n° 24).

[3] Soit ad le vecteur d'origine a, qui est équipollent à cb. Considérons les points B, C, D du cône figuratif en a, qui se projettent sur xOy, en b, c, d. En vertu de la convexité de ce cône, aB est au-dessous du plan aCD, dès lors $(ab)_\psi$ est inférieure à $(ab)_{\psi_1}$ en appelant ψ_1 la cote du plan aCD (dans l'angle CaD), or $(ab)_{\psi_1}$ est égale à $(ac)_{\psi_1} + (ad)_{\psi_1}$, c'est-à-dire $(ac)_\psi + (cb)_\psi$. D'où l'inégalité annoncée.

entre le point initial (x_0, y_0) et le point final $(x_0+\xi, y_0+\eta)$. D'où il résulte, que le rapport de la longueur selon ψ, de la corde à la longueur selon ψ, de l'arc (cela, pour un même sens de description) tend vers l'unité.

23. Le minimum de la distance, selon ψ, depuis un ensemble jusqu'au point (X, Y). — Soit (u_0, v_0) un point choisi arbitrairement dans un ensemble fermé E_0 de points du plan xOy. Le minimum de notre intégrale

$$I = \int \psi(x, y, dx, dy),$$

prise depuis le point arbitraire (u_0, v_0) de E_0 jusqu'au point (X, Y), est une fonction $\Phi_{E_0}(X, Y)$ égale, en chaque point (X, Y), à la borne inférieure de tous les $\varphi(u_0, v_0; X, Y)$, auxquels se réduirait Φ si E_0 était réduit à son point (u_0, v_0). La surface $Z = \Phi_{E_0}(X, Y)$ est donc la frontière du domaine, réunion de tous les domaines $Z > \varphi(u_0, v_0; X, Y)$ (1). Le minimum absolu $\Phi_{E_0}(X, Y)$ de I entre E_0 et le point (X, Y) est aussi celui de I, prise depuis un point origine (u_0, v_0), unique ou non, de l'ensemble E_0, jusqu'au point (X, Y). Les surfaces

$$Z = \varphi(u_0, v_0; X, Y) \qquad \text{et} \qquad Z = \Phi_{E_0}(X, Y)$$

ont manifestement en commun l'arc L projeté horizontalement suivant l'arc l qui réalise le minimum de I depuis le point (u_0, v_0) jusqu'au point (X, Y). Il peut arriver que le minimum absolu $\Phi_{E_0}(X, Y)$ soit strict, c'est-à-dire réalisé par un arc unique; en ce cas, le point (u_0, v_0) est unique. Il se peut aussi que ce minimum soit large, c'est-à-dire réalisé par au moins deux arcs distincts, issus de points (u_0, v_0) distincts ou non.

24. L'équation d'Hamilton-Jacobi. — Considérons le cas où l'ensemble E_0 du plan des xy est une courbe à courbure continue. Il est facile de former une équation aux dérivées partielles du premier ordre, satisfaite par la fonction $\Phi_{E_0}(x, y)$, indépendamment du choix

(1) Dans ce passage du minimum concernant le cas où l'élement originel est un point au minimum concernant le cas où l'élément originel est un ensemble, l'opération de réunion, joue un rôle extrêmement simple, mais sur l'importance duquel on ne saurait trop insister.

de cette courbe, lorsque le point est suffisamment proche de E_0 : soit M le point de la surface

$$(1) \qquad Z = \Phi_{E_0}(X, Y)$$

qui se projette en (x, y); l'hypothèse de proximité détermine l'unicité du point H de E_0 symbolisé ci-dessus par (u_0, v_0). Considérons la courbe L de contact de la surface (1) et de

$$(2) \qquad Z = \varphi(u_0, v_0; x, y).$$

En vertu de la propriété de minimum de sa projection l, on aperçoit immédiatement, qu'en chaque point (x, y, z), la tangente à cette courbe est une génératrice du cône $\zeta = \psi(x, y; \xi, \eta)$, le long de laquelle le plan tangent au cône est aussi tangent aux surfaces (1) et (2). Donc ces surfaces sont des intégrales de l'équation aux dérivées partielles, dite d'Hamilton-Jacobi,

$$(3) \qquad F(x, y, p, q) = 0$$

qui exprime la relation devant exister entre p et q pour que le plan

$$\zeta = p\xi + q\eta$$

soit tangent au cône

$$\zeta = \psi(x, y; \xi, \eta).$$

On voit de plus que les lignes L sont les caractéristiques de l'équation (3), et cette remarque fournit la démonstration la plus naturelle du fait que les équations des courbes extrémales l du plan xOy peuvent se mettre sous la forme canonique.

Un complément serait nécessaire pour justifier le rôle de l'hypothèse, que E_0 est à courbure continue. Ce rôle est manifeste dans le cas où ψ se réduit à $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, la distance selon ψ devenant la distance usuelle et l'équation (3) se réduisant alors à

$$p^2 + q^2 = 1.$$

Si l'on décrit la normale à E_0 en partant de son pied et allant vers la concavité de la courbe, pour que la plus courte distance à E_0 ne soit pas inférieure au chemin parcouru, il faut qu'on n'ait pas encore atteint le centre de courbure (*cf.* Note III). Nous ne chercherons pas si cette hypothèse suffit pour assurer la validité du résultat ci-dessus. Le fait qu'il est vrai dans des cas étendus va nous permettre d'aborder l'étude de la dépendance entre $\Phi_{E_0}(x, y)$, quand E_0 est un ensemble ferme quelconque du plan des xy, et l'équation d'Hamilton-Jacobi (3), attachée à notre fonction ψ.

25. Définition d'une intégrale contingente. — En reprenant encore un instant le cas de $\psi = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, nous voulons élargir la conception d'une intégrale de l'équation de manière a pouvoir dire que la plus courte distance d'un point a l'ensemble E_0 constitue une intégrale de cette équation. La difficulté qui se présente est que cette distance (comme on le voit en réduisant E_0 à un nombre fini de points) cesse de posséder, en certains points, des dérivées partielles. Il est donc nécessaire de recourir, en vue du résultat cherché, à des considérations d'un nouveau genre. Dans le cas particulier ci-dessus, on aperçoit immédiatement cette propriété de la distance a E_0 : en chaque point, *la plus grande limite de son rapport incrémental* (c'est-à-dire du rapport a un déplacement infiniment petit de la variation de distance correspondante) *est égale à l'unité*. Et il est aisé de transformer cet énoncé dans le suivant :

Le contingent en chaque point (x, y, z) de la surface $z = D(x, y)$ où D est la distance du point (x, y, o) à l'ensemble E_0, est formé de rayons dont aucun n'est a l'intérieur du cône de révolution de sommet (x, y, z). d'une parallele a Oz et de demi-angle au sommet 45°, mais dont un au moins est situé sur la surface du cône.

Nous contentant pour le moment d'énoncer ce qui nous apparaîtra tout a l'heure comme un cas particulier d'un théorème général, nous allons introduire la définition suivante :

Considérons la fonction $\psi(x, y; \xi, \eta)$, soumise aux hypothèses faites au début du présent chapitre (n° 20). Formons l'équation d'Hamilton-Jacobi correspondante

$$F(x, y; p, q) = 0$$

qui s'obtient en écrivant, qu'en chaque point (x, y, z) le plan

$$\zeta = p\xi + q\eta$$

est tangent au cône $\zeta = \psi$. Nous dirons qu'une surface d'équation $z = \Phi(x, y)$ est une *intégrale contingente* de cette équation, si le contingent de cette surface satisfait en chaque point aux deux conditions suivantes :

a. Ne contenir aucun rayon intérieur au cône $\zeta = \psi$;

b. Posséder au moins un rayon sur ce cône.

26. Le théorème de dépendance [1]. — Cela posé, l'énoncé que nous allons justifier peut se formuler de la manière suivante :

La plus courte distance, selon la fonction ψ (*vérifiant les hypothèses du n°* 20), *depuis l'ensemble* E_0 *jusqu'au point* (X, Y) *est une intégrale contingente de l'équation d'Hamilton-Jacobi correspondante.*

En effet considérons dans le plan xOy les lignes l orientées donnant le minimum de la longueur selon ψ depuis un de leurs points jusqu'à un autre, postérieur à celui-ci; considérons en outre les lignes L de l'espace dont chacune se projette suivant une ligne l et a sa cote définie par $dz = \psi(x, y;\, dx, dy)$. Dans le plan xOy, il existe au moins une ligne l allant d'un point (u_0, v_0) de l'ensemble fermé E_0 jusqu'au point X, Y, et réalisant la borne inférieure de la distance selon ψ, depuis E_0 jusqu'à (X, Y), donc aussi, depuis E_0 jusqu'à tout point intermédiaire de cet arc l, soit par exemple le point $m(x, y)$. En m, le contingent postérieur de l sera une demi-droite ou un angle plein $\sigma m \tau$. Soit $m'(x + dx, y + dy)$ un point de l, postérieur à m et infiniment voisin de lui : quelle que soit la direction de mm' tendant vers un rayon inclus dans l'angle $\sigma m \tau$ (côtés compris), nous savons (n° 22) que le minimum absolu de la longueur selon ψ depuis le point m jusqu'au point m' est un infiniment petit équivalent à $\psi(x, y;\, dx, dy)$; il s'ensuit qu'au point M de la surface

$$z = \Phi_{E_0}(x, y)$$

projeté en m, le contingent postérieur de la ligne L projetée suivant le précédent arc l est formé des génératrices du demi-cône supérieur de sommet M balayant sur cette nappe le secteur projeté horizontalement suivant l'angle $\sigma m \tau$ [2]. Ainsi, aux points m non situés à une extrémité d'une ligne telle que l, la condition b est satisfaite. On peut d'ailleurs concevoir qu'une ligne telle que l admette une *extrémité* m_1, c'est-à-dire que pour tout point m' très voisin de m_1 et distinct d'un point antérieur à m_1, la distance de E_0 jusqu'à m' soit

---

(1) G. Bouligand, *Expression générale de la solidarité entre le problème du minimum d'une intégrale et l'équation correspondante d'Hamilton-Jacobi* (*Rendic. dei Lincei*, 6e série, vol. XII, 2e sem., 1930, fasc, 1-2, p. 27-30).

(2) Pour abréger le langage, nous disons que le plan xOy est horizontal et que Oz est la verticale ascendante.

toujours fournie par une ligne l' distincte de l. En un point M, de la surface projeté en un tel point m_1, il suffira de raisonner sur le contingent antérieur de l pour prouver que la condition b est encore satisfaite.

Quant à la condition (a), il est facile de montrer qu'elle est également vérifiée. A cet effet, il suffit d'étudier la position relative, d'une part de la surface $Z = \Phi_{E_0}(X, Y)$ et, d'autre part, de la surface engendrée par les lignes L passant au point M. Cette dernière, dont le contingent en M est précisément le cône $\zeta = \psi(x, y; \xi, \eta)$ est formée d'une nappe supérieure, située au-dessus de la surface $Z = \Phi_{E_0}$ et d'une nappe inférieure, située au-dessus (cette dernière au moins se raccordant à $Z = \Phi_{E_0}$, le raccord sur un certain trajet de la nappe supérieure n'ayant lieu qu'en points ne jouant pas le rôle d'extrémité). La réalisation de la condition a en découle immédiatement ([1]).

C. Q. F. D.

27. Application à la propagation des ondes. — Soit un ébranlement qui se produit à un instant donné et se propage dans un milieu, auquel nous attribuerons, pour fixer les idées, deux dimensions, et que nous supposerons primitivement au repos. A partir de ce moment, l'espace sera constamment divisé en deux parties E_1 et E_2, dont la première est l'ensemble des points sur lesquels s'est déjà exercée la perturbation, tandis que E_2 est l'ensemble des points qui demeurent encore au repos. Il s'agit donc ici d'une onde solitaire, et non de la recherche des points en phase dans un mouvement vibratoire entretenu ([2]).

Supposons que la propagation de l'ébranlement soit accompagnée d'une émission ou, si l'on préfère, d'un rayonnement, dont les trajectoires jouissent de la propriété que leur longueur selon une certaine fonction ψ, de la catégorie précédemment envisagée, soit minima. Soit Σ l'ensemble des points où la perturbation se produit, à l'instant initial. Les points qui sont ou ont été atteints par la perturbation à un instant ultérieur (en admettant que la vitesse, selon ψ, de la pro-

---

([1]) Pour la définition de chaque nappe et la preuve que a est satisfaite, voir : G. Bouligand, *Essai sur l'unité des méthodes directes* (*Mém. Soc. Roy. Sc. Liége*, 1933, n^{os} 50 et 51).

([2]) J. Hadamard, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, II, p. 462-466 et 500-504; *Le principe de Huygens* (*Bull. Soc. math.*, t. 52, 1924, p. 612-613).

pagation, soit la même pour toute direction) seront les points tels que la distance minima parcourue à partir de Σ pour aboutir en ces points ne dépasse pas une valeur donnée. Ce point de vue, dans l'étude de la propagation des ondes, a été développé sous une forme équivalente par E. Vessiot (1).

Choisissons l'unité de temps de manière que la vitesse, selon ψ. de la propagation, soit égale à l'unité. La surface qui, d'après les notations précédemment utilisées, a pour équation

$$z = \Phi_\Sigma(x, y)$$

et à laquelle on peut attribuer le nom d'*onde*, sépare les points tels que l'on ait $z > \Phi_\Sigma(x, y)$, c'est-à-dire les points qui sont *sou sonde* (2) des points tels que $z < \Phi_\Sigma(x, y)$ (points *hors d'onde*). L'ensemble des points sous onde, relativement a l'ensemble Σ, $(Z > \Phi_\Sigma)$ est la réunion des points qui sont sous onde, relativement aux divers centres d'émission situés sur Σ. Il y a identité de l'onde, émanée de Σ et de la frontière du domaine réunion de tous les domaines que délimitent les ondes issues des divers points de Σ, d'où le terme : *front d'onde* (3).

En cette remarque, nous reconnaissons le *principe des ondes enveloppes* (Huygens), le mot enveloppe étant entendu dans le sens des enveloppes par réunion et non dans le sens usité en géométrie analytique. Notons qu'on laisse ici de côté toute discussion relative au fait de savoir si la perturbation est constamment localisée sur la frontière du domaine ou si, par contre, elle continue à régner (d'une manière susceptible de s'atténuer) à l'intérieur.

Le problème étant posé de la sorte, nous concevons l'onde comme la suite des positions dans le temps de la frontière commune à l'ensemble E_1 des points perturbés et à l'ensemble E_2 des points non encore atteints par la perturbation. Nous voyons de plus, d'après ce qui précède, que cette onde est une intégrale contingente de l'équa-

(1) E. Vessiot, *Sur l'interprétation mécanique des transformations de contact infinitésimales* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 34, 1906, p. 230 et suiv.).

(2) Dans un plan horizontal de cote z, les points où Φ_Σ est moindre que z forment l'ensemble E_1. Pour la terminologie : points sous onde, points hors d'onde, voir l'exposé déjà cité : le principe de Huygens, Hadamard (*Bull Soc. math.*, p. 618)

(3) Cf. A. Buhl *Structures analytiques et théories physiques* (*Mém. Sc. phys.*, t. XXII, p. 47).

tion d'Hamilton-Jacobi attachée à la fonction ψ. L'ensemble E_1 des points qui sont sous onde, à un instant donnée, s'obtient par une construction de Cantor-Minkowski généralisée, selon ψ.

Pour les applications, le cas où ψ est une forme quadratique définie et positive

$$A\,dx^2 + 2B\,dx\,dy + C\,dy^2$$

a une importance particulière : il correspond en effet à l'adoption d'une métrique riemannienne. L'équation d'Hamilton-Jacobi est alors de la forme

$$\overline{\text{grad}}^2\,\varphi = 1,$$

l'opérateur gradient étant attaché à la métrique précédente, ce qui donne sous forme développée

$$(1) \qquad C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - 2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = AC - B^2.$$

Supposons que C, A, $AC - B^2$ demeurant chacun supérieur à un nombre positif fixe, les coefficients A, B, C soient continus sans plus. On ne sait pas s'il existe des géodésiques à tangente continue (¹) mais on peut affirmer que la plus courte distance d'un point à un autre (ou à n'importe quel ensemble) est une intégrale contingente de cette équation aux dérivées partielles. On se trouve dans ces conditions quand on cherche les géodésiques d'une surface à plan paratingent unique.

28. Les considérations qui précèdent soulèvent de nombreux problèmes.

D'abord, si nous savons que le minimum de la distance, selon ψ, comptée de l'ensemble E_0 jusqu'au point (X, Y), est une intégrale contingente de l'équation d'Hamilton-Jacobi, n'avons-nous pas de moyen général pour obtenir les intégrales ctg$^{\text{tes}}$. Nous pouvons seulement remarquer la possibilité d'agréger à cette catégorie les continus fournis par la réunion d'un nombre fini de surfaces du type précédent, dont chacune est une intégrale ctg$^{\text{te}}$ (vu le théoréme sur le ctg

(¹) A notre connaissance l'existence d'une tangente continue n'a été prouvée que si A, B. C satisfont à une condition de Holder d'ordre arbitraire (André ROUSSEL, *Sur les géodésiques de certains élements linéaires* (*Ens. Math.*, 1927, p. 78-84). Voir aussi le travail d'Eugène BLANC (Note VI).

de la réunion). D'ailleurs, le passage de deux à un nombre quelconque de dimensions pour le milieu de propagation n'introduit dans la démonstration du théorème de dépendance aucune difficulté nouvelle.

Nous avons noté que la délimitation de la zone perturbée à un instant donné s'effectue au moyen d'une enveloppe par réunion. Mais l'enveloppe des fronts d'onde au sens de la géométrie analytique n'en conserve pas moins un intérêt physique; c'est ce que montre l'existence des caustiques : en effet, dans les développements précédents (où il s'agit exclusivement d'enveloppes par réunion), chaque trajet accompli sur la portion utile d'un rayon correspond à un minimum effectif de la longueur selon ψ; nous nous sommes donc interdits de prolonger les rayons jusqu'à la caustique, car en dépassant sur le rayon le point où il touche cette enveloppe, la propriété de minimum se trouverait compromise. A cet égard, se posent donc des problèmes non moins importants que ceux mentionnés ci-dessus : il faut citer dans cette voie les travaux récents d'Henri Galbrun (1) et de Jacques Hadamard (2). Et il y a là matière à recherches, en vue de réduire les hypothèses de continuité et de dérivabilité.

Dans le même ordre, y a-t-il lieu de revenir aux caractéristiques des équations aux dérivées partielles du second ordre pour chercher comment s'y répercute l'intégration contingente. Mais une foule d'autres notions analytiques sont à leur tour mises en question. Nous avons déjà signalé le pont jeté par E. Vessiot entre les ondes et les transformations de contact infinitésimales. Tout récemment, A. Buhl (3), dans une étude très suggestive du rôle des opérateurs en physique mathématique, a ouvert de nouveaux horizons en soulignant diverses relations du même genre.

29. Conclusion. — Cette solidarité étroite entre notions montre bien que la géométrie infinitésimale directe ne saurait constituer un

(1) H. GALBRUN, *Journ. de Villat*, t. VII, 1928, p. 289-318. *Voir* aussi, du même auteur, dans la Collection de l'Inst. de Méc des Fl , Paris : *Propagation d'une onde sonore dans l'atmosphère et zones de silence* (Gauthier-Villars, 1931).

(2) J. HADAMARD, *Remarques geometriques sur les enveloppes et la propagation des ondes* (*Acta math.*, t. 54, 1930, p. 247-261). Ce travail donne la liste des publications antérieures de son auteur, fondamentales pour l'etude du principe de Huygens.

(3) A. BUHL, *Tourbillons. corpuscules, ondes* (*Ann. de Toulouse*, 3e série, t. 34, 1932, p. 1-48). Voir aussi le fasc. XXII, déjà cité du *Mém. des Sc. phys.*

sujet de méditation isolé. Son intérêt réside en ses points de contact nombreux, dès à présent, manifestes, avec des problèmes notoires. D'ailleurs, la méthode directe n'est pas l'apanage de telle ou telle partie des mathématiques, elle tend à les dominer à peu près toutes. Et si l'on cherche, en analyse infinitésimale, à préciser les origines de cette évolution, c'est sans nul doute à la Thèse de Lebesgue qu'il faut remonter (1).

NOTES ET COMPLÉMENTS BIBLIOGRAPHIQUES.

I. — Sur l'ensemble limite $\mathcal{L}$ et l'ensemble d'accumulation $\mathcal{H}$ (*cf.* n° 4).

L'adjonction de nouveaux ensembles, en nombre fini, n'altère ni $\mathcal{H}$, ni $\mathcal{L}$; par celle d'une infinité d'ensembles, $\mathcal{H}$ ne se modifie qu'en gagnant des points, $\mathcal{L}$ qu'en en perdant.

La pluralité de points de $\mathcal{H}$ sur une droite $x = \lambda$, lorsque nos ensembles sont les courbes représentatives d'une famille de fonctions continues, s'oppose à l'égale continuité pour $x = \lambda$. D'où une démonstration de l'existence d'une fonction d'accumulation continue, pour chaque famille de fonctions également continues, également bornées : ce théorème (Ascoli) est à la base de la méthode directe pour l'étude des équations différentielles et la recherche de minima des intégrales simples, en calcul des variations. En définitive, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{H}$ interviennent

(1) La Thèse de Lebesgue est le premier ouvrage qui ait montré l'influence perturbatrice des hypothèses accessoires et qui ait distingué entre certaines équations aux dérivées partielles

$$[rt - s^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad r(1+q^2) - 2spq + t(1+p^2) = 0]$$

envisagées au point de vue classique et les problèmes qui les prolongent au point de vue intrinsèque. Nos considérations du n° 25 participent de cette tendance, au même titre que les recherches modernes (*Mémorial*, fasc. XI, *Thèse Brelot*, Paris 1931, etc.) élargissant l'idée de solution pour les divers problèmes aux limites de la Physique.

donc efficacement dans tous les champs d'action de la méthode directe [1].

$\mathcal{H}$ et $\mathcal{L}$ peuvent servir encore a préciser la *microstructure* d'un ensemble ponctuel E fermé en un point d'accumulation O : prenant une portion de plus en plus restreinte de E, autour de O, on l'agrandit homothétiquement en maintenant constant le diametre de cette portion. Soit C un contour ayant un seul point sur chaque demi-droite issue de O : prenons comme cadres des C_n homothétiques de C par rapport a O suivant des rapports ε_n tendant vers zéro. Déterminons $\mathcal{H}$ et $\mathcal{L}$ pour la famille des portions de E découpées par les C_n et ramenées au cadre C. Ils ne sont qu'exceptionnellement indépendants de la suite des ε_n : si elle consiste en une progression géométrique décroissante de raison θ, l'influence de C s'élimine et l'on constate l'invariance de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{L}$ par un groupe d'homothéties (aux rapports θ, θ^2, θ^3, ...); $\mathcal{H}$ et $\mathcal{L}$ ne peuvent être indépendants de la suite $\{\varepsilon_n\}$ qu'en se réduisant a des systèmes de demi-droites issues de O.

Chaque demi-droite issue de O portant un point de $\mathcal{H}$ est une demi-tangente. En outre, si $\varepsilon_n = \theta^n$, chaque demi-tangente porte une infinité de points de $\mathcal{H}$. Ce point de vue ramène donc au *contingent*. On pourrait concevoir un autre examen microstructural ramenant au *paratingent*, en donnant à l'homologue de O dans l'homothétie (C, C_n) toute position infiniment voisine de O sur E (ce qui introduirait, au lieu d'un C_n, une famille de C_n). A ce point de vue, peut se dire *à microstructure rectiligne* une courbe a paratingente unique en chaque point. C'est aux microstructures des variétés linéaires que se borne l'analyse classique.

Des transformations diverses peuvent appuyer l'examen microstructural. En effet, il existe dans le plan des arcs simples, réunion d'arcs dont chacun représente l'arc total dans une transformation linéaire. Plus généralement, par n transformations continues et biunivoques du groupe γ_1 (n° 15), passons d'un contour C à des contours C_1, C_2, ..., C_n, conformément aux conditions suivantes :

1° C_1 est tangent intérieurement à C au seul point P_0 et C_n l'est

---

[1] G. Bouligand, *Essai sur l'unite des methodes directes* (en abrege . *E. U. D.*), Chap. I et II (*Mem. Soc, Roy. Sc Liege,* 1933).

au seul point P_n; de plus C_i est tangent extérieurement à C_{i-1} au seul point P_{i-1} et à C_{i+1} au seul point P_i;

2° Deux de nos contours non consécutifs ne se coupent pas, et les aires ouvertes limitées par $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont deux à deux disjointes;

3° P_{i-1} et P_i sont les transformés de P_0 et P_n quand on passe de C à C_i.

Les composées des transformations données à exposants positifs étant classées d'après leur degré (somme de ces exposants) la réunion des aires images de celle de bord C par les composées de degré m est un continu K_m tel que $K_m \supset K_{m+1}$. Pour m infini, les points communs à tous les K_m forment une ligne qui, grâce au jeu limite de la transformation linéaire tangente, se décompose en parties infiniment petites, asymptotiquement équivalentes du point de vue affine. En choisissant les transformations (C, C_i) dans le groupe des $z_i = f_i(z)$ (f_i holomorphe dans C), on aurait des lignes décomposables en parties asymptotiquement semblables.

On obtient donc de nouveaux types de microstructures montrant, à ce point de vue, l'intérêt de transformations variées.

II. — Sur les correspondances multiformes.

Lorsqu'on attache à un point d'un ensemble E l'un de ses contingents ou paratingents. on introduit une *correspondance multiforme*. L'importance de cette remarque résulte de l'exposé d'ensemble de l'*E. U. D.* (nos 38 à 41 inclus), résumant des travaux de Fl. Vasilesco (*Thèse*, Paris. 1925); C. Kuratowski (*Fund. Math.*, t. III, X et XVII); Marie Charpentier, Eugène Blanc et G. Bouligand (*Comptes rendus*, t. 196, 1932, p. 1767 et suiv.). Dans cette voie, E. Blanc a rattaché les proprietés des formes indéterminées $\frac{0}{0}$ à un mode de semi-continuité inférieure du contingent d'un arc simple plan, n'ayant qu'un nombre fini de sommets (*ibid.*, p. 600).

III. — Parallélisme C. M; parallélisme au sens classique.

Ces notions sont très différentes. Portant, dans le plan. sur chaque normale MN d'une courbe C à *paratingente unique* une longueur constante MP, le continu décrit par P pour M décrivant un arc de C est *en général* de longueur non bornée; tandis que la construction C. M. sur un ensemble plan borné donne une frontière de longueur bornée, frontière qu'on peut, dans une nouvelle acception, dire parallèle à celle de l'ensemble.

De la fin du Chapitre III, résulte l'intérêt du cas où les deux notions se rejoignent (tandis que, pour les sphères ou cercles centrés sur E, s'identifient l'enveloppe par réunion et l'enveloppe au sens usuel). Ce cas est celui où, pour une longueur l, chaque point l distant de E est *ordinaire*, c'est-à-dire n'a qu'une projection sur E, ce qui entraîne la même propriété pour les points distants de moins de l (formant l'ensemble E_l) (*G. I. D.*, p. 92). La portion de E située dans un constituant (n° 3) de E_l est un continu, qui est toujours une courbe à courbure bornée, quand, en aucun point, il ne coupe localement l'espace, et coïncide avec une rondelle de surface à courbure bornée autour des points où il coupe localement l'espace. S'appuyant sur une analyse profonde de la notion de courbe à courbure bornée par C. Carathéodory (¹) et sur un théorème de G. Vergnères (²), le précédent résultat de G. Bouligand (³) peut se prolonger dans divers sens (⁴).

Les normales aux courbes à courbure bornée dans le plan, leurs plans normaux dans l'espace ont des trajectoires orthogonales dont il passe une et une seule en chaque point voisin de la courbe. Cela posé :

Pour qu'une famille continue de droites, dans le plan, ou de plans, dans l'espace, *ait des trajectoires orthogonales soumises, autour de la courbe, à ce qu'il en passe une seule par un point, il faut et il suffit que la famille corrélative soit un arc plan à*

(¹) C. Carathéodory, *Die Kurven mit beschrankten Biegungen* (*Sitzungsberichten der preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1933, p. 102-125).

(²) G. Vergnères. *Sur les conditions d unicité du minimum de la distance d'un point à un ensemble* (*Comptes rendus*, 28 novembre 1933; *Rendic. dei Lincei*, janvier 1934).

(³) G. Bouligand, *Sur les ensembles ponctuels entourés de points ordinaires et, en particulier, sur les courbes et les surfaces à courbure bornée* (*Ann. R. Sc. Norm. Sup. di Pisa*, 2, III, 1934. fasc. 2, et *Comptes rendus*, 28 novembre 1933).

(⁴) L. Chamard, *Sur quelques types de structure imposés à un ensemble* (*Annali di Mat.*, 1934). Voir aussi *Thèse*, Poitiers 1933 du *Mém. Soc. Roy. Sc. Liége*, 1933.

paratingent incomplet ou un arc spatial à paratingent privé de toutes les directions d'un plan (¹).

Signalons enfin la généralisation du parallélisme C. M. obtenue en remplaçant la plus courte distance par la distance maxima (²).

IV. — Le problème de Bricard-Errera.

Quelle doit être la longueur minima du trajet d'un avion pour explorer une contrée ou la totalité de la surface du globe, qu'il survole à hauteur constante? A ce problème de R. Bricard, deux Mémoires ont été consacrés par A. Errera (³). Dans le cas d'un domaine plan borné Ω, la ligne la plus courte telle que la distance minima d'un point courant de Ω à la ligne ne dépasse jamais une longueur ρ donnée se déduit du théorème suivant : *l'aire du domaine obtenu en effectuant, avec le rayon* ρ, *sur un arc simple rectifiable de longueur* L *la construction* C. M., *ne peut dépasser* $\pi\rho^2 + 2\pi\rho L$ *pour une ligne ouverte;* $2\pi\rho L$ *pour une ligne fermée.* Ces maxima sont atteints pour un arc simple à courbure $< \frac{1}{\rho}$, en évitant les lignes ouvertes, le long desquelles la tangente tournerait de plus de π (⁴).

V. — Sur le théorème de Dupin.

Considérons les trois familles de surfaces

$$x = x(y, z, u), \qquad y = y(z, x, v), \qquad z = z(x, y, w),$$

aux paramètres u, v, w, familles telles que dans l'une d'elles, il passe une surface et une seule par chaque point d'une certaine région. Supposons que le paratingent de l'une de ces surfaces en un point

(¹) G. Bouligand, *Sur les systèmes orthogonaux* (*Bull. Soc. Roum., Math.* 1933, p. 276-284).

(²) M. Nicolesco, *Sur quelques points de géométrie finie directe* (*Bull. Ac. Roy. Belgique,* 1933, p. 738-754).

(³) A. Errera, *Mém. Ac. Roy. Sc. Belgique,* t. XII, 1932, p. 1-45; *Mém. Soc. Roy. Sc. Liége,* 3ᵉ série, t. XVIII, 1933.

(⁴) Il est à peine besoin de souligner l'apparentement de recherches de ce genre avec l'idée originelle de Minkowski, concernant l'évaluation de la longueur d'une ligne ou de l'aire d'une surface courbe. *Cf.* J. Favard, *La longueur et l'aire d'après Minkowski* (*Bull. Soc. math. Fr.*, LXI, 1933, p. 63-84). Cela explique encore la régularité tangentielle macroscopique d'un arc simple lors d'un tracé au crayon [G. Bouligand, *Schèmes d'incertitude* (*Rev. Scientif.*, 23 décembre 1933)].

soit toujours l'ensemble des directions d'un plan, les trois plans attachés à un même point étant deux à deux rectangulaires. L'intersection de deux surfaces de familles différentes sera une ligne à paratingente unique en chaque point. Avec cette notion d'un système triple orthogonal, on ne sait si le trièdre des plans tangents en un point dépend continûment de ce point (bien qu'il soit séparément continu par rapport à chacun des paramètres u, v, w et par rapport à chaque couple de ces parametres).

Pour discuter des conditions de validité du théorème de Dupin, on peut éliminer la notion de ligne de courbure en se posant la question suivante :

Une surface ayant pu (dans les conditions précédentes) *être engagée dans deux systèmes triples orthogonaux sera-t-elle ou non coupée par les surfaces des deux autres familles du système suivant les mêmes lignes?*

Pour des surfaces telles que sur l'une d'elles, le fait pour deux points M' et M'' tendant vers M de donner naissance à une seule paratingente MT implique aussi l'unicité d'une position limite Δ pour l'intersection des plans tangents en M' et M'', se posera cette question : y a-t-il orthogonalité de Δ et de MT? (1)

Chacun de ces problèmes est très distant de la démonstration classique du théoreme de Dupin réduite à *l'interprétation géométrique* d'une commutativité de dérivations (2). Et l'existence hypothétique de théoremes vrais, mais non démontrables, suggère l'absence éventuelle, pour certaines propriétés géométriques, de démonstrations causales (du moins dans des conditions préalablement fixées).

VI. — Sur les géodésiques selon ψ.

Les considérations du Chapitre III peuvent s'exposer sans recourir à l'algorithme d'intégration, exigeant le théoreme d'existence de demi-tangentes opposées à une courbe rectifiable, avec exception possible d'un ensemble de mesure nulle. Dans ce but, G. Bouligand définit la longueur selon ψ dans le cas où le cône d'étalonnage est

(1) G. Bouligand, *Sur les systèmes triples orthogonaux du plan et de l'espace a trois dimensions* (*Bull. Soc. Roum. Math.*, 1933, p. 276-284).

(2) E. Goursat. *Cours d'Analyse math.*, t. I, 4e édition, p. 619.

indépendant d'une translation pour atteindre ensuite par passage a la limite le cas général ([1]). A la faveur de ce nouveau point de vue, E. Blanc a pu montrer l'existence, en chaque point d'une géodésique, distinct d'une extrémité, de deux demi-tangentes opposées ([2]).

VII. — La géométrie des ensembles de droites.

Signalons deux publications, complétant les indications données *G. I. D.*, p. 120-126 :

G. Bouligand, *Sur la géomètrie des ensembles de droites* (*Bull. Soc. Roy Sc. Liège*, 1933. n° **12**, p. 238-242);

J. Mirguet, *Sur certains ensembles de droites* (*Comptes rendus*, t. **196**, 1933, p. 1067-1069); *Sur une classe de surfaces admettant un plan tangent continu* (*Bull Soc. Roy. Sc. Liége*, 1933, n° **1**, p. 11-15; et *Comptes rendus*, t. **197**, 1933, p. 547-549),

et remarquons la connexion entre l'étude des congruences de normales et le Mémoire déjà cité de G. Bouligand (*Sur les ensembles entourés de points ordinaires*, Pise, 1934).

VIII. — L'origine des notions infinitesimales directes.

L'importance des notions de ctg et de ptg est telle qu'on les retrouverait sans doute d'une maniere plus ou moins explicite et sous des dénominations diverses. L'auteur de ce fascicule, dans son enseignement donné à Cracovie (octobre-décembre 1925), a établi ce théorème :

Une suite de fonctions harmoniques dans le domaine D, *bornées dans leur ensemble, converge dans* D *vers une fonction harmonique, si elle converge en une infinité de points de* D, *ayant un point* O *de* D *comme point d'accumulation pourvu qu'à l'intérieur d'un cône droit* (limité) *de sommet* O, *tout autre cône droit* (si petites soient son ouverture et sa hauteur) *contienne des points de convergence* (ce qui revient à dire : il existe, dans le ctg, des rayons jouant le rôle d'éléments intérieurs) (cf. *Mémorial*, fasc. XI, p. 20). Cet énoncé a déterminé les recherches présentées au *Bulletin de la*

([1]) G. Bouligand, *E. U. D.*, Chap. II.

([2]) E. Blanc, *Sur les courbes rectifiables dont l'arc est un infiniment petit équivalent a la corde* (*Bull. Soc. Roy. Sc. Liege*, 1933, p. 128-132).

Société mathématique, t. 56, 1928, où le ctg et le ptg sont introduits (à la dénomination près) page 29 et où se trouve déjà le lemme d'univocité.

D'une manière indépendante Fr. Severi, guidé par les besoins de la théorie des variétés algébriques, a utilisé sous des noms différents les mêmes notions. Voir la bibliographie donnée à ce sujet par le savant géomètre dans son Mémoire : *Su alcune questioni di topologia infinitesimale* (*Ann. Soc. Pol. Math.*, t. IX, 1930, p. 97-109), dans des recherches remontant à 1927-1928.

Et à cette occasion, on ne saurait trop insister sur l'importance du Mémoire de A. Denjoy *sur les nombres dérivés*, dans le *Journal de Mathématiques*, 1915.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE PAR NOMS D'AUTEURS [1].

[1] La bibliographie, donnée en cours du texte, est strictement restreinte au sujet même du présent fascicule. L'index ci-dessus facilitera la recherche des travaux de chaque auteur. Les noms imprimés en italiques sont ceux d'auteurs ayant écrit, dans la Collection du *Mémorial des Sciences mathématiques* ou du *Mémorial des Sciences physiques* des fascicules auxquels en réfère le texte.

TABLE DES MATIÈRES.

NOTES ET COMPLÉMENTS BIBLIOGRAPHIQUES.

96104 Paris. — Imprimerie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins.