Mémorial des sciences mathématiques

J. Shohat

Théorie générale des polynômes orthogonaux de Tchebichef

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 66 (1934)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1934__66__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT
Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE LXVI

Théorie générale des polynomes orthogonaux de Tchebichef

Par M. J. SHOHAT (Jacques CHOKHATE)
Professeur à l'Université de Pensylvanie.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1934

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

THÉORIE GÉNÉRALE

DES

POLYNOMES ORTHOGONAUX

DE TCHEBICHEF

Par M. J. SHOHAT (Jacques Chokhate).

INTRODUCTION.

On connaît l'importance des séries trigonométriques dans l'Analyse moderne et l'influence prépondérante exercée par la théorie de ces séries sur le développement des Mathématiques Pures et Appliquées. Cela est dû à deux propriétés caractéristiques des fonctions $\{\sin kx, \cos kx\}$: 1° elles forment une *suite orthogonale*, ce qui permet d'exprimer les coefficients des séries en question d'une façon très simple; 2° elles sont bornées, continues et indéfiniment dérivables, quel que soit x, ce qui facilite la discussion de convergence et des autres propriétés de ces séries. Or, les fonctions les plus simples, après les fonctions trigonométiques, sont les polynomes. La propriété d'orthogonalité étant d'une extrême importance théorique et pratique, il est avantageux de la conserver, de sorte que ce sont les *polynomes orthogonaux* qui méritent une étude spéciale. En effet, leur emploi devient de plus en plus important non seulement dans les Sciences mathématiques, mais aussi dans la Physique théorique, dans la Statistique mathématique, etc.

Des cas particuliers des polynomes orthogonaux ont été considérés par Legendre, Laplace, Jacobi. Mais c'était le grand mathématicien russe Tchebichef qui, pour la première fois, les a introduits dans l'Analyse d'une façon la plus générale. Il a établi leurs propriétés et en a indiqué les applications les plus importantes. Bien qu'on puisse appliquer les propositions générales de la théorie de fonctions orthogonales, il est préférable d'employer ici des méthodes spéciales utilisant le fait que notre suite orthogonale est une suite des polynomes. L'intégrale de Stieltjes apparaît ici comme un instrument analytique merveilleusement adapté *pour traiter d'un seul coup les deux cas : variation continue et variation discrète de la variable.*

Le présent fascicule, divisé en trois Chapitres, est consacré à la théorie générale des polynomes orthogonaux. Leurs applications diverses seront données, nous l'espérons, dans un fascicule spécial. Faute de place, notre étude est limitée, en général, au cas d'une seule variable réelle. Pour la même raison, la Bibliographie ne peut pas être complète.

Je tiens à remercier M. H. Villat pour m'avoir confié la rédaction de ce fascicule.

J'ai essayé de donner ici les grandes lignes d'un domaine assez vaste et important, où il reste encore beaucoup de problèmes à résoudre, beaucoup de méthodes à perfectionner et même à créer. Tout ceci attend des chercheurs. C'est l'attention de ces derniers que j'espère attirer sur les sujets traités dans ce fascicule, compensation suprême pour son auteur.

CHAPITRE I.

DÉFINITION DES POLYNOMES DE TCHEBICHEF.

PRÉLIMINAIRES : INTÉGRALE DE STIELTJES; PROBLÈME DES MOMENTS.

1. Intégrale de Stieltjes. — Soient données dans un intervalle fini (a, b), $(b > a)$, une fonction $\psi(x)$, bornée et non décroissante, et une fonction continue $f(x)$. On appelle *intégrale de Riemann-Stieltjes* de $f(x)$ par rapport à $\psi(x)$ la limite suivante, dont on démontre aisément l'existence :

$$
(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} \lim \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[\psi(x_{i+1}) - \psi(x_i)] \equiv (\mathrm{RS}) \int_a^b f(x)\, d\psi(x), \\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b, \quad x_i \leqq \xi_i \leqq x_{i+1}, \quad \max(x_{i+1} - x_i) \to 0. \end{array} \right.
$$

C'est Stieltjes [1 — a] qui l'a introduite dans l'Analyse. D'ailleurs, la continuité de $f(x)$ et la monotonie de $\psi(x)$ ne sont nullement nécessaires pour l'existence de l'intégrale de Stieltjes (1) [*voir* formule (4)].

Outre les propriétés élémentaires que l'intégrale (1) possède en commun avec l'intégrale ordinaire, citons les suivantes [1] :

$$
(2)\qquad \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, d\psi(x) = \int_a^b f(x)\, d\psi(x)
$$

$[f_n(x) \to f(x)$ uniformément dans $(a, b)]$;

$$
(3)\qquad \left[\int_a^b f_1(x) f_2(x)\, d\psi(x)\right]^2 \leqq \int_a^b f_1^2(x)\, d\psi(x) \int_a^b f_2^2(x)\, d\psi(x)
$$

(inégalité de Schwartz);

$$
(4)\qquad \int_a^b f(x)\, d\psi(x) = f(x)\psi(x)\,\Big|_a^b - \int_a^b \psi(x)\, df(x)
$$

(formule d'intégration par parties).

La fonction monotone $\psi(x)$ ne peut admettre que des points de discontinuité de première espèce, et cela au plus en une infinité dénombrable. Dans un tel point x, $\psi(x)$ admet un *saut* égal à

$$
\psi(x + 0) - \psi(x - 0) \qquad [\text{avec } \psi(a - 0) = \psi(a), \quad \psi(b + 0) = \psi(b)].
$$

Les points de continuité de $\psi(x)$ étant partout denses dans (a, b), on apprend de (1), que $\psi_{1,2}(x)$ *étant deux fonctions de la nature indiquée et* C *une constante*, et l'*égalité* $\psi_1(x) = \psi_2(x) + C$ *ayant lieu dans tous leurs points de continuité, ainsi que pour* $x = a, b$, *alors*

$$
\int_a^b f(x)\, d\psi_1(x) = \int_a^b f(x)\, d\psi_2(x).
$$

Les fonctions $\psi(x)$ ci-dessus comprennent les *fonctions à paliers*,

---

[1] *Cf.* pour plus de détails et démonstrations [(2), (3), (4)].

c'est-à-dire représentées par des traits horizontaux. Soit $\psi(x)$ une telle fonction avec

$$(5)\qquad \text{points de croissance : } (a <) a_1 < a_2 < \ldots < a_n \ldots ; \quad \text{sauts : } \sigma_n = \psi(a_n + 0) - \psi(a_n - 0),$$

n étant fini ou tendant vers l'infini, avec $a_n \to b$. Ici,

$$(6)\qquad \begin{cases} \psi(x) = \sum_{n=1}^{s} \sigma_n + \psi(a) & (a_s \leqq x < a_{s+1};\ s = 0, 1, \ldots;\ a_0 = a) \\ \psi(b) = \Sigma_n \sigma_n + \psi(a), & \int_a^b f(x)\, d\psi(x) = \Sigma_n f(a_n) \sigma_n, \end{cases}$$

Σ_n désignant, suivant le cas, une somme limitée ou une série (nécessairement convergente). D'autre part,

$$(7)\qquad \psi(x) = \int p(x)\, dx \qquad [p(x) \geqq 0 \text{ dans } (a, b)]$$

entraîne

$$\int_a^b f(x)\, d\psi(x) = \int_a^b f(x) p(x)\, dx.$$

Donc, *l'intégrale de Riemann-Stieltjes représente, suivant le cas, une somme de termes discrets (en nombre fini ou en une infinité dénombrable), ainsi qu'une intégrale définie ordinaire.*

On étend comme il suit les résultats précédents aux fonctions $F(x)$ *à variation bornée* et aux intervalles infinis :

$$(8)\qquad \int_a^b f(x)\, dF(x) = \int_a^b f(x)\, d\psi_1(x) - \int_a^b f(x)\, d\psi_2(x) \qquad [F(x) = \psi_1(x) - \psi_2(x)],$$

$$(9)\qquad \begin{cases} \int_a^\infty f(x)\, d\psi(x) = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, d\psi(x) & (a \text{ fini}), \\ \int_{-\infty}^\infty f(x)\, d\psi(x) = \lim_{a \to -\infty,\, b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, d\psi(x) \end{cases}$$

$\psi_{1,2}(x)$ dans (8) sont bornées et non décroissantes dans (a, b)].

On s'assure que l'existence de $\int_{-\infty}^\infty d\psi(x)$ entraîne celle de

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\, d\psi(x),$$

$f(x)$ étant bornée dans $(-\infty, \infty)$. Les formules précédentes restent en général valables pour les extensions ci-dessus, avec des modifications et précautions convenables [par exemple, formule (2)]. Avec la convention

$$\psi(x) = \psi(a) (x < a), \qquad \psi(b) (x > b)$$

on peut évidemment écrire n'importe quelle intégrale $\int_a^b f(x)\, d\psi(x)$ comme $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\psi(x)$.

Indiquons aussi la propriété suivante utile dans la suite. Supposons que $\nu(\psi; a, b) =$ *nombre de points de croissance de* $\psi(x)$ *dans* (a, b) *soit infini et que la fonction continue* $f(x)$ *y s'annule un nombre fini* $(= \mu)$ *de fois, sans changer le signe; alors*

$$\int_a^b f(x)\, d\psi(x) \neq 0 \tag{10}$$

et a le signe de $f(x)$.

Dans le cas où $\nu(\psi; a, b) = \nu$ *fini,* (10) *n'est vrai que si* $\mu < \nu$.

Pour terminer, indiquons la condition nécessaire pour que la fonction bornée $f(x)$ ait une (RS) intégrale par rapport à $\psi(x)$, bornée et non décroissante dans un intervalle fini donné (a, b). Introduisons la variable $\xi = \psi(x)$. A l'intervalle $a \leq x \leq b$ correspond ainsi l'intervalle $\alpha \leq \xi \leq \beta$, où $\alpha = \psi(a)$, $\beta = \psi(b)$; $f(x)$ devient

$$F(\xi) \equiv f(x) \qquad (a \leq x \leq b),$$

avec la convention suivante : au point $x = x_1$ de discontinuité de $\psi(x)$ correspond l'intervalle $[\psi(x_1 - 0), \psi(x_1 + 0)]$ où $F(\xi)$ a une valeur constante $= f(x_1)$ (1). Ceci étant, *l'existence de* (R) $\int_\alpha^\beta F(\xi)\, d\xi$ *est nécessaire pour que* (RS) $\int_a^b f(x)\, d\psi(x)$ *existe*. Cela conduit à l'*intégrale de Lebesgue-Stieltjes*. $\psi(x)$ étant de la nature indiquée et $f(x)$ désignant une fonction mesurable définie dans (a, b), introduisons $\xi = \psi(x)$ et $F(\xi) \equiv f(x)$ comme ci-dessus. *Si* $(\mathcal{L}) \int_\alpha^\beta F(\xi)\, d\xi$

---

(1) $f(x)$ et $\psi(x)$ ne peuvent posséder aucun point commun de discontinuité (*cf.* par ex. [3]).

existe, nous prenons sa valeur comme définissant celle de l'intégrale Lebesgue-Stieltjes (LS) $\int_a^b f(x)\,d\psi(x)$.

D'ailleurs, $f(x)$ *étant bornée dans* (a, b), *l'existence de*

$$(\mathrm{RS})\int_a^b f(x)\,d\psi(x)$$

entraîne celle de

$$(\mathrm{LS})\int_a^b f(x)\,d\psi(x),$$

et l'on a

$$(11)\qquad (\mathrm{RS})\int_a^b f(x)\,d\psi(x) = (\mathrm{LS})\int_a^b f(x)\,d\psi(x) = (\mathrm{R})\int_\alpha^\beta \mathrm{F}(\xi)\,d\xi$$
$$[\xi = \psi(x);\ \mathrm{F}(\xi) \equiv f(x);\ \alpha = \psi(a),\ \beta = \psi(b)].$$

Parmi les avantages nombreux de l'intégrale (LS) citons le suivant : *Pour que* (2) *subsiste, il suffit ici que les fonctions* $f_n(x)[\to f(x)]$ *restent bornées dans leur ensemble, quel que soit* x *dans* (a, b).

2. **Problème des moments.** — *Étant donnée une suite réelle de constantes* $\alpha_k\ (k = 0, 1, 2, \ldots)$, *trouver une fonction* $\psi(x)$, *non décroissante dans un intervalle donné* (a, b), *y ayant une infinité de points de croissance* (¹), *telle que*

$$(12)\qquad \int_a^b x^k\,d\psi(x) - \textit{moment d'ordre } k - \alpha_k(d\psi) = \alpha_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Stieltjes a posé et résolu ce problème pour l'intervalle $(0, \infty)$ [1 *a*].

Les solutions de (12), si elles existent, seront définies — et cela sans restreindre la généralité — par la formule

$$(13)\qquad \psi(x) = \int_a^x d\psi(x), \qquad \text{c'est-à-dire } \psi(a) = 0.$$

Deux solutions ne seront considérées comme distinctes que si elles diffèrent en un au moins des points de continuité. *Le problème des moments* (12) *sera dit déterminé ou indéterminé selon qu'il admet une seule ou plusieurs solutions.* Il y a deux cas :

(¹) Autrement on aurait le cas trivial où un certain nombre fini des moments, à partir de α_0, suffit pour déterminer $\psi(x)$ si elle existe [*voir* formule (21) et Th. II].

Premier cas : (a, b) *fini*. — *Le problème des moments est déterminé*, car l'existence de deux solutions $\psi_{1,2}(x)$ entraîne

$$\int_a^b F(x)x^l dx = 0 \qquad [l = 0, 1, \ldots; F(x) \equiv \psi_1 - \psi_2],$$

ce qui exige que $F(x) = 0$ en tous les points de continuité [5 *a*].

Deuxième cas : (a, b) *infini*. — *Le problème des moments peut être indéterminé*, comme le montre l'exemple suivant [5 *a*], où $|\lambda| \leqq 1$:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x^{\frac{1}{4}}} \sin\left(x^{\frac{1}{4}}\right) dx = 0,$$

$$\int_0^\infty x^n d\psi_\lambda(x) = \int_0^\infty x^n e^{-x^{\frac{1}{4}}} dx$$

$$\left\{ \psi_\lambda(x) = \int_0^x e^{-x^{\frac{1}{4}}}\left[1 + \lambda \sin x^{\frac{1}{4}}\right] dx;\ n = 0, 1, \ldots \right\}.$$

Le problème des moments est déterminé dans les cas suivants :

$$\text{(14)} \qquad \text{La série} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n}^{-\frac{1}{2n}} \text{ diverge} \qquad [(a, b) = (-\infty, \infty)]\ [6],$$

$$\text{(15)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} d\psi(x) = p(x)\,dx & \text{et pour } |x| \text{ suffisamment grand } [1\,a], \\ p(x) < |x|^{\alpha-1} e^{-h|x|^\lambda} & \left\{ \begin{array}{l} \left[\alpha, h > 0;\ \lambda \geqq \frac{1}{2} \text{ pour } (a, b) = (0, \infty),\right. \\ \left. \qquad \geqq 1 \text{ pour } (a, b) = (-\infty, \infty)\right]. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On se trouve dans le cas indéterminé si [1 *a*]

$$\text{(16)} \qquad p(x) > e^{-h|x|^\lambda} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \left[h > 0;\ \lambda < \frac{1}{2} \text{ pour } (a, b) = (0, \infty),\right. \\ \left. \qquad < 1 \text{ pour } (a, b) = (-\infty, \infty)\right]. \end{array} \right.$$

POLYNOMES ORTHOGONAUX DE TCHEBICHEF.

3. Existence, unicité, nature de zéros. — *Définition. Une fonction* $\psi(x)$, *non décroissante dans un intervalle donné* (a, b)

— *fini ou non* — [1] *est de classe* (c), *ou, en abrégé, est une c-fonction, si tous les moments*

$$\alpha_k \equiv \alpha_k(d\psi) = \int_a^b x^k d\psi(x)$$

existent ($k = 0, 1, 2, \ldots$), *avec* $\alpha_0 > 0$. [Dans le cas de (a, b) fini l'existence de α_0 entraîne celle de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$.]

Théorème 1 (*fondamental*). — *Soit donnée dans un intervalle* (a, b) — *fini ou non* — *une c-fonction* $\psi(x)$. 1° *Il existe toujours une suite de polynomes* $\Phi_0(x), \Phi_1(x), \ldots$, *de degrés* $0, 1, \ldots$ — *nous les appelons polynomes orthogonaux de Tchebichef :* PT — *complètement déterminés (à des facteurs constants près) par les relations d'orthogonalité :*

$$\int_a^b \Phi_m(x)\Phi_n(x)\, d\psi(x) = 0 \qquad (m \neq n;\ m, n = 0, 1, \ldots).$$

2° *La suite* $[\Phi_n(x)]$ *est illimitée, sauf le cas où* $\psi(x)$ *n'admet qu'un nombre fini* ν *de points de croissance dans* (a, b) [2], *et alors la suite ne contient que* ν *polynomes* $\Phi_0(x), \Phi_1(x), \ldots, \Phi_{\nu-1}(x)$. 3° *Les zéros de* $\Phi_n(x)$ *sont réels, simples et compris entre* a *et* b.

On écrit les relations d'orthogonalité sous trois formes équivalentes :

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{ll} (\alpha) & \displaystyle\int_a^b \Phi_m(x)\Phi_n(x)\, d\psi(x) = 0 \quad [2] \qquad (m \neq n;\ m, n = 0, 1, \ldots); \\ (\beta) & \displaystyle\int_a^b \Phi_n(x) x^k\, d\psi(x) = 0 \quad [2] \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ k < n); \\ (\gamma) & \displaystyle\int_b^b \Phi_n(x) G_{n-1}(x)\, d\psi(x) = 0 \\ & \left[n = 1, 2, \ldots;\ G_s(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{s} g_i x^i \text{ — polynome arbitraire de degré} \leq s \right]. \end{array}\right.$$

---

[1] On suppose, bien entendu, qu'on n'a pas $\int_a^\alpha d\psi(x) = \int_\beta^b d\psi(x) = 0$, avec $a < \alpha$, $\beta < b$.

[2] Ici, avec les notations (5),

$$\sum_{i=1}^{\nu} \sigma_i \Phi_m(a_i)\Phi_n(a_i) = 0 = \sum_{i=1}^{\nu} \sigma_i \Phi_n(a_i) a_i^k \; (m \neq n;\ 0 \leq m,\ n < \nu;\ k < n).$$

Démonstration. — 1° Écrivons $\Phi_n(x)$ sous la forme

$$C(x^n + f_1 x^{n-1} + \ldots + f_n) \qquad (C = \text{const.}).$$

(17, β) nous donne ce système linéaire *avec un déterminant* $\Delta_n > 0$:

$$(18)\quad f_n \alpha_i + f_{n-1}\alpha_{i+1} + \ldots + f_1 \alpha_{i+n-1} + \alpha_{i+n} = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

$$(19)\quad \Delta_n \equiv \Delta_n(d\psi) = [\alpha_{i+j}]_0^{n-1} > 0\ (^1) \qquad (n = 0, 1, \ldots;\ \Delta_0 = 1).$$

En effet, Δ_n est le discriminant de la forme quadratique *définie positive*

$$(20)\qquad \sum_{i,\,j=0}^{n-1} \alpha_{i+j} g_i g_j = \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{n-1} g_i x^i\right)^2 d\psi(x) \quad [\textit{voir}\ (10)].$$

2° $\psi(x)$ n'ayant qu'un nombre fini ν de points de croissance dans (a, b),

$$(21)\qquad \Delta_n(d\psi) > 0 \quad \text{pour } n = 0, 1, \ldots, \nu;\ \Delta_n = 0 \quad \text{pour } n > \nu.$$

Ainsi, l'existence et l'unicité des PT sont établies. D'ailleurs, on peut établir l'unicité à l'aide du raisonnement suivant. L'existence de deux polynomes orthogonaux $\Phi_n(x)$, $\overline{\Phi}_n(x)$ de même degré n entraîne

$$\int_a^b \{\lambda\Phi_n(x) + \mu\overline{\Phi}_n(x)\}\, G_{n-1}(x)\, d\psi(x) = 0,$$

où nous rappelons que $G_{n-1}(x)$ est un polynome *arbitraire* de degré $\leq n-1$, ce qu'on peut prendre $\equiv \lambda\Psi_n(x) + \mu\overline{\Phi}_n(x)$, avec un choix convenable des constantes λ, μ.

3° Soient $x_1, x_2, \ldots, x_m$ $(m \geq 0)$ les points entre (a, b), où $\Phi_n(x)$ change le signe. On a nécessairement $m = n$; autrement on aurait cette relation incompatible avec (10) :

$$\int_a^b \Phi_n(x)\Pi_m(x)\, d\psi(x) = 0 \qquad \left[\Pi_m(x) = \prod_{i=1}^{m}(x - x_i)\ (m > 0), \equiv 1\ (m = 0)\right].$$

---

(1) C'est une notation abrégée pour

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_1 & \ldots & \ldots & \alpha_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-1} & \ldots & \ldots & \alpha_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

A l'aide de (18) on exprime $\Phi_n(x)$ en fonction des moments :

$$(22)\quad \Phi_n(x) = \frac{1}{\Delta_n(d\psi)} \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1} & \dots & \dots & \alpha_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix} = x^n - S_n x^{n-1} + d_{n,n-2}x^{n-2} + \dots$$

Pour les applications, il est avantageux de *normaliser* la suite $\{\Phi_n(x)\}$, c'est-à-dire de choisir une suite de constantes positives a_n ($n=0, 1, \dots$) — *facteurs normalisants*, très importants dans notre théorie —, telles que

$$(23)\quad \begin{cases} \varphi_n(x) \equiv a_n\Phi_n(x) = a_n x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \dots, \\ \dfrac{1}{a_n^2} = \displaystyle\int_a^b \Phi_n^2(x)\,d\psi(x) = \int_a^b \Phi_n(x)x^n\,d\psi(x), \end{cases}$$

$$(24)\quad \int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,d\psi(x) = \delta_{mn}[=0\ (m \neq n),\ 1\ (m=n)]\quad (m, n = 0, 1, \dots).$$

La formule (22) donne pour *la suite orthogonale et normale* $\{\varphi_n(x)\}$:

$$(25)\quad \begin{cases} a_n(d\psi) \equiv a_n = +\sqrt{\dfrac{\Delta_n(d\psi)}{\Delta_{n+1}(d\psi)}}, \\ \varphi_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\Delta_n(d\psi)\Delta_{n+1}(d\psi)}} \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1} & \dots & \dots & \alpha_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Nous employons dans la suite les notations

$$(26)\quad \begin{cases} \varphi_n(x; a, b; d\psi) \equiv \varphi_n(x; d\psi) \equiv \varphi_n(x); \\ a_n(a, b; d\psi) \equiv a_n(d\psi) = a_n; \quad S_n(a, b; d\psi), \dots. \end{cases}$$

$$(27)\quad \begin{cases} \Delta_n(p)\varphi_n; \quad [x; a, b; p(t)] \equiv \varphi_n(x; p) \equiv \varphi_n(x); \\ a_n(a, b; p) \equiv a_n(p) \equiv a_n, \quad \dots \quad [d\psi(x) = p(x)\,dx]. \end{cases}$$

Remarques. — 1° Dans le cas particulier de (27) on obtient la suite orthogonale et normale de fonctions $\{\sqrt{p(x)}\varphi_n(x)\}$ par le procédé bien connu de l'orthogonalisation de la suite

$$\{\sqrt{p(x)}x^n\}\qquad (n = 0, 1, \dots).$$

2° L'expression

$$\int_a^b \left(\sum_{i=0}^{n-1} g_i x^i\right)^2 x^s \, d\psi(x)$$

nous apprend que

$$\Delta_{n,s}(d\psi) \equiv [\alpha_{s+i+j}]_0^{n-1} > 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots; \Delta_{0,s} = 1)$$

pour $s = 0, 1, 2, \ldots$, si $a \geqq 0$ [1] et pour $s = 0, 2, 4, \ldots$, si (a, b) est arbitraire.

4. Relations avec les fractions continues algébriques. — $\psi(x)$ ayant une infinité de points de croissance dans (a, b), transformons le développement formel

(28) $$F(x) \equiv \int_a^b \frac{d\psi(y)}{x-y} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha_i}{x^{i+1}}$$

$$[x \text{ en dehors de } (a, b)]$$

en une fraction continue (soit, par divisions successives [7])

(29) $$F(x) = \frac{\lambda_1 |}{| q_1(x)} - \ldots - \frac{\lambda_n |}{| q_n(x)} - \ldots$$

$$[\lambda_n = \text{const.}, \; q_n(x) - \text{polynome en } x].$$

Pour les réduites successives $\frac{P_n}{Q_n}$ de (29), on a

(30) $$\begin{cases} P_{n+1} = P_n q_{n+1} - \lambda_{n-1} P_{n-1}, \quad Q_{n+1} = Q_n q_{n+1} - \lambda_{n+1} Q_{n-1} & (n \geqq 1), \\ P_{n+1} Q_n - P_n Q_{n+1} = \lambda_1 \ldots \lambda_{n+1} & (P_0 = 0, \; Q_0 = 1). \end{cases}$$

D'autre part, (17-β) donne formellement

(30 *bis*) $$\begin{cases} \Phi_n(x) F(x) = \Omega_n(x) + \left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \\ F(x) = \frac{\Omega_n(x)}{\Phi_n(x)} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right) \quad (\Omega_n - \text{polynome de degré } n-1) \\ \left[\text{avec } \frac{u_1}{x^s} + \frac{u_2}{x^{s+1}} + \ldots \equiv \left(\frac{1}{x^s}\right), \; s > 0\right]. \end{cases}$$

Comme le degré de $\Phi_n(x)$ prend toutes les valeurs $n = 0, 1, 2, \ldots,$

---

[1] Soit $\psi(x)$ *impaire* dans $(-h, h)$. Alors

$$\Delta_{2n+1,s} = 0, \quad \Delta_{2,s} < 0, \quad \Delta_{6,s} < 0, \quad \ldots \quad (s = 1, 3, \ldots).$$

on déduit de (30 *bis*), en vertu d'une proposition fondamentale concernant les fractions continues algébriques [7],

THÉORÈME II. — *Quelle que soit la c-fonction $\psi(x)$ définie dans (a, b), on a toujours ce développement formel en fraction continue associée* [4] :

$$(A) \quad F(x) \equiv \int_a^b \frac{d\psi(y)}{x-y} = \frac{\lambda_1 |}{| x - c_1} - \frac{\lambda_2 |}{| x - c_2} - \ldots - \frac{\lambda_n |}{| x - c_n} - \ldots$$

$$(\lambda_n, c_n = \text{const.}) \quad (^1).$$

dont les dénominateurs des réduites successives sont précisément les polynomes de Tchebichef $\Phi_n(x;\ a,\ b;\ d\psi)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ [8, 9, 10, 11, 12*a*, 13].

La fraction continue (A) est limitée (*cf.* Théorème I), si $\nu(\psi;\ a,\ b)$ est fini (²).

Fonctions de Tchebichef de seconde espèce. — On obtient, en rapprochant (30 *bis*) avec

$$\Phi_n(x)F(x) \equiv \int_a^b \frac{\Phi_n(x) - \Phi_n(y)}{x-y}\, d\psi(y) + \int_a^b \frac{\Phi_n(y)}{x-y}\, d\psi(y) :$$

$$(31) \quad \Omega_n(x) = \int_a^b \frac{\Phi_n(x) - \Phi_n(y)}{x-y}\, d\psi(y).$$

$$(32) \quad R_n(x) \equiv \Phi_n(x)F(x) - \Omega_n(x) = \int_a^b \frac{\Phi_n(y)}{x-y}\, d\psi(y) = \frac{\rho_1}{x^{n+1}} + \frac{\rho_2}{x^{n+2}} + \cdot$$

$$\left(\rho_1 = \frac{1}{a_n^2} > 0\right).$$

$R_n(x) \equiv R_n(x;\ a,\ b;\ d\psi)$ *est la fonction de Tchebichef de seconde espèce* [15].

(¹) Pour le cas où $\psi(x)$ n'est plus monotone dans (a, b) *cf.* [14].

(²) Cas particulier :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{x - a_i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{x^{n+1}} \qquad (s_n = a_1^n + \ldots + a_\nu^n),$$

où $f(x) = \prod_{i=1}^{\nu} (x - a_i)$ est un *polynome ayant tous ces zéros réels et simples.*

Pour cela, on a donc cette condition nécessaire [*voir* (19)] :

$$[s_{i+j}]_0^{k-1} > 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, \nu).$$

Supposons maintenant que *l'intervalle* (a, b) *soit positif* : $0 \leqq a$. L'inégalité $\Delta_{n,1} > 0$ assure alors [4] l'existence de la fraction continue *correspondante*

$$\text{(B)} \quad F(x) \equiv \frac{1|}{|l_1 x} + \frac{1|}{|l_2} + \frac{1|}{|l_3 x} + \frac{1|}{|l_4} + \ldots \equiv \frac{b_1|}{|x} - \frac{b_2|}{|1} - \frac{b_3|}{|x} - \ldots$$
$$(l_n,\ b_n = \text{const.}),$$

qui, *par contraction*, vu l'identité

$$x - \frac{\alpha|}{|1} - \frac{\beta|}{|x-\gamma} = x - \alpha - \frac{\alpha\beta}{x-(\beta+\gamma)},$$

se transforme en la fraction continue associée (A), de sorte que $\Phi_n(x;\ a,\ b;\ d\psi)$ *sont les dénominateurs de réduites successives d'ordre pair de* (B). On a d'ailleurs [1 *a*, 4, 16] [*voir* (25)] :

$$\text{(33)} \left\{ \begin{aligned}
& b_n = -\frac{1}{l_{n-1}\, l_n}; \\
& b_{2n}(d\psi) \equiv b_{2n} = \frac{\Delta_n(x\,d\psi)\,\Delta_{n-1}(d\psi)}{\Delta_{n-1}(x\,d\psi)\,\Delta_n(d\psi)} = \frac{a_{n-1}^2(d\psi)}{a_{n-1}^2(x\,d\psi)}; \\
& b_{2n+1}(d\psi) \equiv b_{2n+1} = \frac{\Delta_{n-1}(x\,d\psi)\,\Delta_{n+1}(d\psi)}{\Delta_n(x\,d\psi)\Delta_n(d\psi)} = \frac{a_{n-1}^2(x\,d\psi)}{a_n^2(d\psi)} \\
& \qquad [n \geqq 1;\ b_1 = \alpha_0 = \Delta_1(d\psi)]; \\
& l_{2n}(d\psi) = -\frac{b_1 b_3 \ldots b_{2n-1}}{b_2 b_4 \ldots b_{2n}} = -\frac{\Delta_n^2(d\psi)}{\Delta_n(x\,d\psi)\,\Delta_{n-1}(x\,d\psi)}; \\
& l_{2n+1}(d\psi) = \frac{b_2 b_4 \ldots b_{2n}}{b_1 b_3 \ldots b_{2n+1}} = \frac{\Delta_n^2(x\,d\psi)}{\Delta_n(d\psi)\,\Delta_{n+1}(d\psi)} \qquad \left(n \geqq 1;\ l_1 = \frac{1}{b_1} = \frac{1}{\alpha_0}\right); \\
& \lambda_n(d\psi) = b_{2n-2}(d\psi) b_{2n-1}(d\psi) = l_{2n-3}(d\psi)\, l_{2n-2}^2(d\psi)\, l_{2n-1}(d\psi) \\
& \qquad = \frac{\Delta_{n-2}(d\psi)\,\Delta_n(d\psi)}{\Delta_{n-1}^2(d\psi)} = \frac{a_{n-2}^2(d\psi)}{a_{n-1}^2(a\psi)} \\
& \qquad \left[n \geqq 2;\ \lambda_1(d\psi) = b_1 = \alpha_0 = \frac{1}{a_0^2(d\psi)}\right]; \\
& c_n(d\psi) = b_{2n-1}(d\psi) + b_{2n}(d\psi) = -\frac{1}{l_{2n-1}}\left[\frac{1}{l_{2n-2}} + \frac{1}{l_{2n}}\right] \\
& \qquad \left(n \geqq 2;\ c_1 = b_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right); \\
& a_n^2(d\psi) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n+1} \lambda_i(d\psi)} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{2n+1} b_i(d\psi)} \qquad (n \geqq 0).
\end{aligned} \right.$$

$$\text{(34)} \quad l_{2n+1},\ c_n,\ b_n > 0,\ l_{2n} < 0 \quad (0 \leqq a); \quad \lambda_n > 0 \quad [(a, b) \text{ arbitraire}].$$

Remarque. — Certains auteurs considèrent

$$\Phi(x) \equiv \int_a^b \frac{d\psi(y)}{x+y} \equiv -\mathrm{F}(-x),$$

avec *tous* les $l_n > 0$.

On voit bien que pour notre étude c'est la fraction continue associée (A) *toujours existante*, qui est la plus importante. Cependant, il est souvent avantageux de ramener l'intervalle en question, par une substitution linéaire, à un intervalle positif, afin d'utiliser les b_n et l_n.

Dépendance d'un paramètre. — Envisageons le cas où l'intervalle (a_α, b_α) et la c-fonction $\psi_\alpha(x) \equiv \psi(x, \alpha)$ dépendent d'un (ou plusieurs) paramètres α de telle façon que, $\psi(x)$ désignant une c-fonction bien déterminée dans (a, b),

$$(35) \quad a_\alpha \to a, \ b_\alpha \to b, \quad \int_{a_\alpha}^{b_\alpha} x^k \, d\psi_\alpha(x) \to \int_a^b x^k \, d\psi(x) \qquad (k = 0, 1, \ldots; \ \alpha \to \alpha_0).$$

Les formules (22), (25), (33) montrent que

$$(36) \quad \begin{cases} \lambda_n(d\psi_\alpha) \to \lambda_n(d\psi), \ b_n(d\psi_\alpha) \to b_n(d\psi), \ c_n(d\psi_\alpha) \to c_n(d\psi), \ \ldots \\ a_n(d\psi_\alpha) \to a_n(d\psi), \quad \varphi_n(x; \alpha_\alpha, b_\alpha; d\psi_\alpha) \to \varphi_n(x; a, b; d\psi) \end{cases} \qquad (\alpha \to \alpha_0),$$

la dernière relation signifiant que les coefficients de $\varphi_n(x; a_\alpha, b_\alpha; d\psi_\alpha)$ tendent vers les coefficients correspondants de $\varphi_n(x; a, b; d\psi)$ pour n'importe quelle valeur fixe de n, de sorte que

$$\varphi_n(x; a_\alpha, b_\alpha; d\psi) \to \varphi_n(x; a, b; d\psi)$$

uniformément dans chaque intervalle fini. En particulier,

$$(37) \qquad \varphi_n(x; a, b; d\psi) \to \varphi_n(x; -\infty, \infty; d\psi) \qquad (a \to -\infty, b \to +\infty).$$

5. **Relations avec les quadratures mécaniques.** — Voici une autre voie pour introduire les PT (indiquée, pour la première fois, par Gauss dans le cas des polynomes de Legendre). Choisissons arbitrairement n points $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ dans (a, b). La formule de

Lagrange donne

$$G_{n-1}(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\Pi_n(x)}{(x-x_i)\Pi'_n(x_i)}G_{n-1}(x_i), \qquad \Pi_n(x)=(x-x_1)\ldots(x-x_n),$$

$$(38) \qquad \int_a^b G_{n-1}(x)\,d\psi(x)=\sum_{i=1}^{n}H_iG_{n-1}(x_i)$$
$$\left[H_i=\int_a^b\frac{\Pi_n(x)}{(x-x_i)\Pi'_n(x_i)}\,d\psi(x)\right].$$

Formule de quadratures mécaniques. — Moyennant $(17\text{-}\gamma)$ on trouve cette *condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait*

$$(39) \qquad \int_a^b G_{2n-1}(x)\,d\psi(x)=\sum_{i=1}^{n}H_iG_{2n-1}(x_i) \qquad [12a, b].$$

Les points x_i doivent être zéros $x_{i,n}(i=1, 2, \ldots, n)$ de $\Phi_n(x; a,b; d\psi)$. De plus, dans ce dernier cas,

$$(40) \qquad H_i=\int_a^b\frac{\Phi_n(x)\,d\psi(x)}{(x-x_{i,n})\Phi'_n(x_{i,n})}$$
$$=\int_a^b\left\{\frac{\Phi_n(x)}{(x-x_{i,n})\,\Phi'_n(x_{i,n})}\right\}^2d\psi(x)=\frac{\Omega_n(x_{i,n})}{\Phi'_n(x_{i,n})}>0 \quad [\Phi_n(x_{i,n})=0].$$

$$(41) \qquad \sum_{i=1}^{n}H_i=\int_a^b d\psi(x)=\alpha_0 \qquad [G_{2n-1}(x)\equiv 1 \text{ dans } (39)]$$

6. Expression de $\Phi_n(x)$ comme dérivée ou différence $n^{\text{ième}}$ ou comme intégrale n-uple. — Le théorème fondamental nous apprend que, (a, b) et $\psi(x)$ étant données, si pour une suite déterminée de polynomes de degrés 0, 1, ... nous avons constaté — et cela n'importe comment — qu'une quelconque des relations $(17, \alpha\text{-}\gamma)$ est remplie, alors c'est bien la suite $\Phi_n(x; a, b; d\psi)$ (abstraction faite de facteurs constants).

Le procédé suivant peut servir dans beaucoup de cas :

1° *$d\psi(x)=p(x)dx$; $\Phi_n(x)$ comme dérivée $n^{ième}$.* — Substituons l'expression

$$(42) \qquad \Phi_n(x)=\frac{D^nP_n(x)}{p(x)} \qquad \left(D^n\equiv\frac{d^n}{dx^n}\right),$$

où $P_n(x)$ est une fonction à déterminer, dans $(17\text{-}\gamma)$ et intégrons.

par parties. On doit avoir, (a, b) étant fini,

$$(43)\quad \left\{\begin{array}{l} D^i P_n(a) = D^i P^n(b) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1); \\ \Phi_n(x) = D^n[(x-a)^n (x-b)^n \Pi_n(x)] : p(x)\ [12\,a]\ (^2) \end{array}\right.$$

Dans le cas de (a, b) infini, soit a fini, $b = +\infty$, il suffit d'avoir

$$(44)\quad \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x^k D^i P_n(x) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1;\ k \leqq i), \\ \Phi_n(x) = D^n[(x-a)^n \Pi_n(x)] : p(x)\quad (^1), (^2). \end{array}\right.$$

2° $\psi(x)$-*fonction à paliers;* $\Phi_n(x)$ *comme différence* $n^{\text{ième}}$. — Raisonnons comme ci-dessus, avec les opérateurs Δ et Σ. On obtient, en supposant

$$(45)\quad \left\{\begin{array}{l} a_i = a_1 + (i-1)h \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu) \qquad \sigma_i = \sigma(a_i), \\ \Delta f \equiv f(x+h) - f(x)\ [\mathit{voir}\ (5)] : \end{array}\right.$$

$$(46)\quad \Phi_n(x) = \frac{\Delta^n \left[\prod_{i=0}^{n-1} (x-a-ih)(x-b-ih)\Pi_n(x)\right]\ (^2)}{\sigma(x)}$$

$$\left[(a, b)\ \text{fini};\ a_1 = a,\ h = \frac{b-a}{\nu}\right],$$

$$(47)\quad \left\{\begin{array}{l} \Phi_n(x) = \dfrac{\Delta^n P_n(x)}{\sigma(x)}, \qquad P_n(x) = \prod\limits_{i=0}^{n-1} (x-a-ih)\Pi_n(x)\ (^2), \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^k \Delta^i P_n(x + \overline{n-i}h) = 0 \qquad (a\ \text{fini},\ b = \infty;\ k \leqq i)\quad (^1). \end{array}\right.$$

Enfin remplaçons dans (19), (22) α_i par $\int_a^b x^i\, d\psi(x)$ et appliquons la transformation généralisée de Fischer [17] :

$$(48)\quad \left\{\begin{array}{l} \Phi_n(x; a, b; d\psi) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_a^{b} \cdots \int_a^b \Pi(x) \\ \qquad \times \Delta\, d\psi(x_1)\, d\psi(x_2) \ldots d\psi(x_n) : \Delta_n(d\psi). \\ \Delta_n(d\psi) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_a^b \cdots \int_a^b \Delta \prod_{i=1}^{n} d\psi(x_i) \\ \left[\Delta = \text{discriminant de}\ \Pi(x) \equiv \prod\limits_{i=1}^{n} (x - x_i)\right]\ [1\,a]. \end{array}\right.$$

[seconde démonstration de (19)]. Appliquons ces considérations.

7. Quelques suites spéciales des polynomes de Tchebichef. — Dans ce qui suit C_n dénote une constante ne dépendant pas de x (convena-

(1) Avec des résultats analogues pour l'intervalle $(-\infty, \infty)$.

(2) Tout se réduit à la détermination de $\Pi_n(x)$, problème plus simple dans beaucoup de cas [*voir* ci après (53), (54), (55)].

blement choisie dans chaque cas).

$$(49)\quad P_n(x) \equiv X_n(x) \equiv C_n\Phi_n(x\,;-1,1\,;1) = \frac{1}{2^n.n!}D^n[(x^2-1)^n]$$
$$= \frac{1.3\ldots(2n-1)}{n!}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}\mp\ldots\right]$$

—*polynomes de Legendre* [**12** *a*, **18**, **19**, **71**].

$$(50)\quad \Phi_n\left(x\,;-1,1\,;\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos n \operatorname{arc}\cos x$$
$$= \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n}{2^n}$$

— *polynomes trigonométriques*

$$\left(\text{on utilise : } \int_0^{\pi}\cos m\varphi\cos n\varphi\, d\varphi = 0,\ m\neq n\right).$$

$$(51)\quad \Phi_n(x\,;-1,1\,;\sqrt{1-t^2}) = \frac{1}{2^n}\,\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi},$$

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} &\Phi_n\left(x\,;-1,1\,;\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right) = \frac{1}{2^n}\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\,;\\ &\Phi_n\left(x\,;-1,1\,;\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right) = \frac{1}{2^n}\,\frac{\cos\frac{2n+1}{2}\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}} \qquad (x=\cos\varphi).\end{aligned}\right.$$

Tous ces polynomes (49)-(52) sont des cas particuliers de (53) :

$$(53)\quad \Phi_n[x\,;-1,1\,;(1+t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}]$$
$$\equiv T_n(x\,;\alpha,\beta) = C_n(1+x)^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}D^n[(1+x)^{n+\alpha-1}(1-x)^{n+\beta-1}]$$

$(\alpha, \beta > 0)$ — *polynomes de Jacobi* [**9**, **10**, **11**, **13**, **15**, **20**],

où $T_n(x\,;\beta,\alpha) \equiv (-1)^n T_n(-x\,;\alpha,\beta)$.

$$(54)\quad \Phi_n(x\,;0,\infty\,;t^{\alpha-1}e^{-ht}) \equiv L_n(x\,;\alpha) = C_n x^{1-\alpha}e^{hx}D^n(e^{-hx}x^{n+\alpha-1}) \quad (h,\alpha>0)$$
$$= \Gamma(n+\alpha)\sum_{i=0}^{n}\left(-\frac{1}{h}\right)^{n-i}\binom{n}{i}\frac{x^i}{\Gamma(i+\alpha)}$$

— *polynomes de Laguerre* [**8**, **21**, **22** *a*, **23**].

$$(55)\quad \Phi_n(x\,;-\infty,\infty\,;e^{-ht^2})$$
$$\equiv H_n(x) = \left(-\frac{1}{2h}\right)^n e^{hx^2}D^n(e^{-hx^2}) \quad (h>0)$$
$$= x^n - \frac{n(n-1)}{1!}\frac{x^{n-2}}{2^2h} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}\frac{x^{n-4}}{2^4h^2}\mp\ldots$$

— *polynomes d'Hermite* [**8**, **22** *c*, **24**, **25**].

Dans la suite nous appellerons *polynomes orthogonaux classiques* ceux de Jacobi, Laguerre, Hermite. On s'assure que ce sont les seuls PT pour lesquels on a dans (43) $\Pi_n(x) \equiv p(x)$ (¹), si l'on convient de remplacer les facteurs $x-a$, $x-b$ par 1, si a ou b est infini.

$$(56) \qquad \Phi_n\left(x; 0, \alpha; [t(t-\alpha)(t-\beta)]^{-\frac{1}{2}}\right)$$

— *polynomes elliptiques* [12*a*] $\quad (0 < \alpha < \beta)$.

Donnons quelques exemples où $\psi(x)$ est une fonction à paliers [*voir* (45)-(47)].

$$(57) \left\{ \begin{array}{l} (a, b) \text{ fini}, \quad a_i = a_1 + (i-1)h \quad \left(i = 1, 2, \ldots, \nu;\ a_1 = a;\ h = \dfrac{b-a}{\nu}\right); \\ \sigma_i \equiv \sigma(a_i) = h. \\ \Phi_n(x) = \Phi_n(x; \nu) = \dfrac{C_n}{h^n} \Delta^n \left[\displaystyle\prod_{i=0}^{n-1} (x-a-ih)(x-b-ih) \right] \ [8] \\ (C_n \text{ ne dépendant ni de } \nu, \text{ ni de } h). \\ \lim\limits_{\nu \to \infty} \Phi_n(x; \nu) = C_n D^n[(x-a)^n (x-b)^n] \equiv P_n(x) \quad [70]. \end{array} \right.$$

Ainsi (57) *est une généralisation des polynomes de Legendre.*

$$(58) \left\{ \begin{array}{l} (a, b) = (0, \infty); \quad a_i = i = 0, 1, \ldots; \quad \sigma_i \equiv \sigma(i, \lambda) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\ (\lambda \text{ — nombre fixe}); \\ \Phi_n(x) \equiv \Phi_n(x; \lambda) = \dfrac{C_n \Delta^n \sigma(x-n; \lambda)}{\sigma(x; \lambda)} = \dfrac{C_n}{\sigma(x; \lambda)} \dfrac{d^n \sigma(x, \lambda)}{d\lambda^n} \ [26] \\ [\Delta F \equiv F(x+1) - F(x)]. \\ \textit{polynomes de Poisson-Charlier } [\textit{voir } (54)]. \end{array} \right.$$

$$(59) \left\{ \begin{array}{l} (a, b) = (-\infty, \infty), \\ a_i = i = 0, 1, \ldots, s;\ \sigma_i \equiv \sigma(i, s) = \dbinom{s}{i} p^i q^{s-i} (p, q > 0,\ p + q = 1); \\ \psi(x) = 0 \quad (-\infty < x \leqq 0), \quad 1 \quad (s \leqq x < \infty), \qquad \Delta F(x) \equiv F(x+1) - F(x). \\ \Phi_n(x) \equiv \Phi_n(x; s; p, q) \\ \qquad = C_n \dbinom{s}{n}^{-\frac{1}{2}} (pq)^{-\frac{n}{2}} \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{s-x}{n-i} \binom{x}{i} p^{n-i} q^i \ [27]. \end{array} \right.$$

D'où, en étudiant les moments pour $\psi\left(\dfrac{x - sp}{\sqrt{2spq}}\right)$, quand $s \to \infty$:

$$(60) \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{s \to \infty} \Phi_n(x; s; p, q) = \text{polynome d'Hermite } C_n H_n(z) \\ (x = sp + z\sqrt{2spq}), \\ \lim\limits_{s \to \infty} \Phi_n(x; s; p, q) = \text{polynome de Poisson-Charlier } C_n \dfrac{x!}{a^x} \Delta^n \left[\dfrac{a^{x-n}}{(x-n)!}\right] \\ (sp = a = \text{const.}) \ [27]. \end{array} \right.$$

(¹) En supposant l'existence de $p'(x)$ dans (a, b).

En utilisant (35), (36), on obtient ces *relations limites entre les* PT *classiques :*

$$(61)\qquad \lim_{s\to\infty} \varphi_n\left[x; -\sqrt{s}, \sqrt{s}; \left(1-\frac{t^2}{s}\right)^s\right]$$
$$\equiv \lim_{s\to\infty} \varphi_n\left[\frac{x}{\sqrt{s}}; -1, 1; (1-t^2)^s\right] s^{-\frac{1}{4}} = \varphi_n(x; -\infty, \infty; e^{-t^2}).$$

$$(62)\qquad \lim_{s\to\infty} = \varphi_n\left[x; 0, s; t^{\alpha-1}\left(1-\frac{t}{s}\right)^s\right]$$
$$\equiv \lim_{s\to\infty} \varphi_n\left[\frac{x}{s}; 0, 1; t^{\alpha-1}(1-t)^s\right] s^{-\frac{\alpha}{2}} = \varphi_n(x; 0, \infty; t^{\alpha-1}e^{-t}),$$

8. Polynomes symétriques de Tchebichef. — Cette classe importante, comprenant ceux de Jacobi pour $\alpha = \beta$ et d'Hermite, correspond au cas

$$(63)\quad (a, b) = (-h, h), \qquad \psi(x) \equiv -\psi(-x) \qquad [\text{ou } p(x) \equiv p(-x)].$$

On a, vu (17-γ) avec

$$G_{2n}(x) = G'_n(x^2) + x\,G''_{n-1}(x^2), \qquad G_{2n-1}(x) = G'_{n-1}(x^2) + x\,G''_{n-1}(x^2);$$

$$(64)\quad \begin{cases} \Phi_n(x) \equiv (-1)^n \Phi_n(-x), \qquad \varphi_n(x) = a_n x^n + a_{n,n-2}x^{n-2} + \ldots \\ c_n = S_n = 0; \qquad x_{i,n} + x_{n+1-i,n} = 0, \qquad H_i = H_{n+1-i} \\ [i = 1, 2, \ldots, n;\ \textit{voir}\ (40)]. \end{cases}$$

$$(64\ \textit{bis})\quad \begin{cases} \varphi_{2n}(x; -h, h; d\psi) \equiv \varphi_n(x^2; 0, h^2; d\psi_1); \\ \varphi_{2n+1}(x; -h, h; d\psi) \equiv x\,\varphi_n(x^2; 0, h^2; d\psi_2) \\ [\psi(x) \equiv -\psi(-x);\ d\psi_1(x) \equiv 2\,d\psi(\sqrt{x}), \\ d\psi_2(x) \equiv 2x\,d\psi(\sqrt{x}), x > 0; n = 0, 1, \ldots]. \end{cases}$$

$$(65)\quad \begin{cases} a_{2n}(-h, h; d\psi) = a_n(0, h^2; d\psi_1); \qquad a_{2n+1}(-h, h; d\psi) = a_n(0, h^2; d\psi_2). \\ \lambda_n(-h, h; d\psi) = b_n(0, h^2; d\psi_1); \\ c_n(0, h^2; d\psi_1) = \lambda_{2n-1}(-h, h; d\psi) + \lambda_{2n}(-h, h; d\psi), \\ \lambda_n(0, h^2; d\psi_1) = \lambda_{2n-2}(-h, h; d\psi)\lambda_{2n-1}(-h, h; d\psi) \quad (n \geqq 2) \quad [\textit{voir}(33)], \end{cases}$$

$$(66)\quad \begin{cases} \varphi_{2n}[x; -h, h; p(t)] \equiv \varphi_n\left[x^2; 0, h^2; p(\sqrt{t})t^{-\frac{1}{2}}\right]; \\ \varphi_{2n+1}[x; -h, h; p(t)] \equiv x\,\varphi_n\left[x^2; 0, h^2; p(\sqrt{t})t^{\frac{1}{2}}\right] \\ [p(x) \equiv p(-x);\ n = 0, 1, \ldots]. \end{cases}$$

$$(67)\qquad \varphi_n(x; 0, h^2; d\psi) \equiv \varphi_{2n}(\sqrt{x}; -h, h; d\psi_1)$$
$$\left[\psi_1 - \frac{\psi(x^2)}{2}(x > 0), -\frac{\psi(x^2)}{2}(x < 0)\right].$$

Exemple. — *Relation entre les polynomes de Laguerre et d'Hermite :*

$$(68)\quad \begin{cases} \varphi_{2n}(x;\ -\infty, \infty;\ |t|^{\alpha-1}e^{-ht^2}) \equiv \varphi_n\left(x^2;\ 0, \infty;\ t^{\frac{\alpha}{2}-1}e^{-ht}\right); \\ \varphi_{2n+1}(x;\ -\infty, \infty;\ |t|^{\alpha-1}e^{-ht^2}) \equiv x\,\varphi_n\left(x^2;\ 0, \infty;\ t^{\frac{\alpha}{2}}e^{-ht}\right) \\ \qquad (\alpha, h > 0;\ n = 0, 1, \ldots). \end{cases}$$

9. Transformation linéaire de l'intervalle d'orthogonalité. — Soit

$$(69)\qquad (a, b)\,|\,(a_1, b_1), \qquad x = hx_1 + l$$

$$\left[h = \frac{b-a}{b_1-a_1},\ l = \frac{ab_1 - ba_1}{b-a},\ \text{si } (a, b) \text{ est fini}\right].$$

On obtient :

$$(70)\quad \begin{cases} \varphi_n(x_1;\ a_1, b_1;\ d\psi_1) \equiv \varphi_n(hx_1 + l;\ a, b;\ d\psi), \\ a_n(d\psi_1) = h^n a_n(d\psi) \qquad [\psi_1(x) \equiv \psi(hx + l)]. \end{cases}$$

$$(71)\quad \begin{cases} S_n(d\psi) = hS_n(d\psi_1) + nl, \qquad c_n(d\psi) = hc_n(d\psi_1) + l, \\ \lambda_n(d\psi) = h^2\lambda_n(d\psi_1), \\ \varphi_n(x_1;\ a_1, b_1;\ p_1) \equiv \sqrt{h}\,\varphi_n(hx_1 + l;\ a, b;\ p); \\ a_n(a_1, b_1;\ p_1) = h^{n+\frac{1}{2}} a_n(a, b;\ p) \\ [p_1(x_1) \equiv p(hx_1 + l)]\ [16]. \end{cases}$$

Notons aussi la formule suivante :

$$(72)\qquad \varphi_n[x;\ a, b;\ cp(t)] \equiv \frac{1}{\sqrt{c}}\varphi_n[x;\ a, b;\ p(t)] \qquad (c = \text{const.} > 0).$$

10. Polynomes de Tchebichef à plusieurs variables. — Soit (D) un domaine fermé dans l'espace à m dimensions $(x_i) \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Définissons comme plus haut une *c-fonction* $p(x_1, \ldots, x_m) \equiv p(x_i)$ dans (D), c'est-à-dire non négative et telle que

$$\int_D p(x_i)\prod_{i=1}^{m} x_i^{k_i}\,d\tau \text{ existe} \qquad (k_i = 0, 1, \ldots),$$

$$\int_D p(x_i)\,d\tau > 0 \qquad \left(d\tau = \prod_{i=1}^{m} dx_i\right).$$

Théorème III. — *Étant donné $p(x_i)$ de la nature indiquée, il* *existe toujours une suite orthogonale et normale* $\{\varphi_s(x_i)\}$ (1), $(s = 1, 2, \ldots)$ *de polynomes de Tchebichef de degré* $0, 1, \ldots,$ *c'est-à-dire tels que*

$$\int_D p(x_i)\varphi_s(x_i)\varphi_{s'}(x_i)\,d\tau = \delta_{ss'}.$$

Le nombre total de ces polynomes du même degré l est égal à

$$\sigma_l = \frac{m(m+1)\ldots(m+l-1)}{l!} \qquad (\sigma_0 = 1);$$

le nombre total de tous ces polynomes de degré $0, 1, \ldots, l$ *est égal à*

$$\tau_l = \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+l)}{l!} \; [28].$$

Voici quelques exemples :

$$(73)\quad \begin{cases} (\mathrm{D}) \text{ est le cube : } a \leqq x_i \leqq b, \qquad p(x_1, \ldots, x_m) = \prod_{j=1}^{m} p_j(x_j). \\ \varphi_s(x_i) \text{ (de degré } l) = \prod_{k=1}^{m} \varphi_{j_k}(x_k; a, b : p_k) \\ \left(0 \leqq j_k \leqq l;\ \sum_{k=1}^{m} j_k = l\right). \end{cases}$$

$$(74)\quad \begin{cases} m = 2;\ (\mathrm{D}) \text{ est l'aire } q(x,y) \equiv q = 1 - x^2 - y^2 \geqq 0; \\ p(x_i) \equiv p(x,y) = q^\alpha \qquad (\alpha > -1). \end{cases}$$

On a pour PT de degré $m+n$ une des deux formules suivantes :

$$(75)\quad \begin{cases} (\alpha) \quad \mathrm{U}_{m,n}(x, y; \alpha) = \mathrm{C}_{m,n}(x^2 + y^2 - 1)^{-\alpha}\, \mathrm{D}^{m+n}_{x^m y^n}(x^2 + y^2 - 1)^{\alpha+m+n} \\ (\beta) \quad \omega_{m,n}(x, y, \alpha) = \mathrm{C}_{m,n}(y^2 - 1)^{-\alpha-m-\frac{1}{2}}\, \mathrm{D}^{n}_{y^n}(y^2 - 1)^{\alpha+m+n+\frac{1}{2}} \\ \qquad \times (x^2 + y^2 - 1)^{-\alpha}\, \mathrm{D}^{m}_{x^m}(x^2 + y^2 - 1)^{\alpha+m} \\ (\omega_{m,n} \text{ — de degré } m \text{ en } x)\ [25, 28, 29, 30], \end{cases}$$

(1) Ici s *ne signifie pas* le degré de $\varphi_s(x_i)$. La suite $\{\varphi_s(x_i)\}$ n'est pas unique, c'est-à-dire on peut construire, en partant d'une telle suite, une infinité d'autres suites analogues, dont chacune est composée de combinaisons linéaires et homogènes, à coefficients constants, des polynomes de la suite initiale.

généralisation évidente des polynomes symétriques de Jacobi. On voit, comme plus haut [*voir* (61), (62)], que *si l'on remplace dans* $(75_{\alpha,\beta})$ *x et y respectivement par* $\frac{x}{\sqrt{\alpha}}, \frac{y}{\sqrt{\alpha}}$, *alors, pour* $\alpha \to \infty$, *chacun de ces polynomes tend vers le produit* $\varphi_m(x; e^{-t^2})\varphi_n(y; e^{-t^2})$ *de deux polynomes d'Hermite.*

11. Polynomes de Tchebichef dans le domaine complexe. — Soit donnée dans le domaine de la variable complexe z une courbe fermée rectifiable C de Jordan, de longueur l. Ayant fixé sur C l'origine des arcs σ, pris dans le sens positif, envisageons une fonction $\pi(z)$, réelle et $\geqq 0$ sur C, telle que $(\mathrm{L})\frac{1}{l}\int_{\mathrm{C}}\pi(z)d\sigma$ existe, > 0. L'orthogonalisation de la suite $\{\sqrt{\pi(z)}z^n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ donne une *suite orthogonale et normale de* PT, complètement déterminée [31, 32]

$$(76)\qquad \begin{cases} \varphi_n(z) = a_n z^n + \ldots \qquad (a_n \text{ réel}, > 0); \\ \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{\mathrm{C}} \pi(z)\varphi_n(z)\overline{\varphi_m(z)}\, d\sigma = \delta_{mn} \qquad (m, n \geqq 0). \end{cases}$$

On obtient, en considérant la forme hermitienne définie et positive

$$(77)\qquad \mathrm{H}_n(g) = \frac{1}{l}\int \pi(z)\left|\sum_{i=0}^{n-1} g_i z^i\right|^2 d\sigma \equiv \sum_{p,q=0}^{n-1} \alpha_{pq} g_p \bar{g}_q :$$

$$(78)\qquad \begin{cases} \varphi_n(z) = \begin{vmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{10} & \ldots & \alpha_{n0} \\ \alpha_{01} & \ldots & \ldots & \alpha_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{0,n-1} & \ldots & \ldots & \alpha_{n,n-1} \\ 1 & z & \ldots & z^n \end{vmatrix} : \sqrt{\mathrm{D}_n \mathrm{D}_{n+1}} \equiv \varphi_n(z; \pi); \\ a_n \equiv a_n(\pi) = \sqrt{\dfrac{\mathrm{D}_n}{\mathrm{D}_{n+1}}}; \qquad \mathrm{D}_n = \begin{vmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{10} & \ldots & \alpha_{n-1,0} \\ \alpha_{01} & \ldots & \ldots & \alpha_{n-1,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{0,n-1} & \ldots & \ldots & \alpha_{n-1,n-1} \end{vmatrix} > 0 \\ \left[n = 0, 1, \ldots; \mathrm{D}_0 = 1; \alpha_{pq} = \bar{\alpha}_{qp} = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{\mathrm{C}} \pi(z) z^p \bar{z}^q\, d\alpha\, (p, q = 0, 1, \ldots)\right]. \end{cases}$$

Dans le cas où C est l'intervalle réel (a, b), on retombe sur la suite $\{\varphi_n[x; a, b; \pi(t)]\}$. Voici un autre cas intéressant : C *est le cercle*

$|z| = 1$. Ici, avec $\pi(z) \equiv \pi(\theta)$, on a [32]

$$(79)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \pi(\theta)\varphi_n(z)\overline{\varphi_m(z)}\,d\theta = \delta_{mn}(m, n \geqq 0)\ (^1); \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \pi(\theta)\,\varphi_n(z)\,\bar{z}^k\,d\theta = 0 \qquad (n \geqq 1;\ k < n,\ z = e^{i\theta}). \end{array} \right.$$

Introduisons le développement trigonométrique de $\pi(\theta)$:

$$(80)\qquad \pi(\theta) \sim a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta.$$

La formule (78) permet d'exprimer $\varphi_n(z)$ en fonction de a_n, b_n [32], car

$$(81)\qquad \alpha_{pq} = a_{p-q} + ib_{p-q} \doteq c_{p-q} \qquad (p, q \geqq 0;\ b_0 = 0,\ c_{-n} = c_n).$$

Si $\pi(\theta) \equiv \pi(-\theta)$, *alors* $b_1 = b_2 = \ldots = 0$. *Donc, si* $\pi(\theta)$ *est une fonction paire, tous les coefficients de* $\varphi_n(z)$ *sont réels.* On a, par exemple, pour $\pi(\theta) \equiv 1$,

$$\varphi_n(z) \equiv z^n \qquad (n \geqq 0).$$

M. Szegö [32] a établi une relation remarquable entre $\varphi_n(x; -1, 1; p)$ et $\varphi_n(z; \pi)$, avec $\pi(\theta) \equiv p(\cos\theta)\,|\sin\theta|$, $z = e^{i\theta}$. On utilise les relations d'orthogonalité

$$\int_{-1}^{1} p(x)\varphi_n(x; p)x^k\,dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \pi(\theta)\frac{\varphi_{2n}(z; \pi)}{z^n}\cos k\theta\,d\theta = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1;\ z = e^{i\theta}),$$

et la représentation conforme $x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ de l'intérieur du cercle $|z| = 1$ sur le plan (x) (avec la coupure $-1, \ldots 1$) et l'on trouve :

$$(82)\quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_n(x; -1, 1; p) \equiv \gamma_n \left\{ \dfrac{\varphi_{2n}(z; \pi)}{z^n} + z^n \varphi_{2n}\left(\dfrac{1}{z}; \pi\right) \right\} \\ \left[x = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = \cos\theta,\ z = e^{i\theta};\ \pi(\theta) \equiv p(\cos\theta)\,|\sin\theta|\right], \\ \gamma_n = \sqrt{\dfrac{a_{2n}(\pi)}{2\pi[a_{2n}(\pi) + \varphi_{2n}(0; \pi)]}}. \end{array} \right.$$

---

(1) $\bar{a}$ est la conjuguée de a.

(82) conduit à des nombreuses applications. Voici un exemple [34, 33, *b*] :

$$(83)\quad p(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\Pi(x)},\qquad \left[\Pi(x)\text{— polynome de degré } s, >0 \text{ dans } (-1,1)\right].$$

On obtient, moyennant la représentation de Fejér [35],

$$(84)\quad \Pi(\cos\theta)=|q(z)|^2\qquad \left[q(z)=\sum_{i=0}^{s} q_i z^i,\ q_i \text{ réel},\ q_0>0,\ q_s\neq 0;\ z=e^{i\theta}\right]:$$

$$(85)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi_n(z;\pi)=z^n q\left(\dfrac{1}{z}\right)\qquad \left[\pi(\theta)\equiv\dfrac{1}{\Pi(\cos\theta)}\right]; \\ \left[\varphi_n\left(x;-1,1;\dfrac{1}{\Pi(t)\sqrt{1-t^2}}\right)\right]\equiv\gamma_n\left\{\dfrac{q(z)}{z^n}+z^n q\left(\dfrac{1}{z}\right)\right\} \\ \qquad (x=\cos\theta;\ z=e^{i\theta};\ n\geqq s). \end{array}\right.$$

Remarque. — On peut remplacer, dans les considérations précédentes, $\pi(z)\,d\sigma$ par $d\psi(\sigma)$, $\psi(\sigma)$ étant une fonction reelle non décroissante de l'arc σ, avec $\frac{1}{l}\int_0^l d\psi(\sigma)>0$.

CHAPITRE II.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES POLYNOMES DE TCHEBICHEF.

Dans ce qui suit, la suite $\{\Phi_n(x)\}$ est illimitée. Il est aisé de voir quels sont les résultats énoncés, convenablement modifiés, qui restent vrais, même si $\{\Phi_n(x)\}$ est une suite limitée.

1. Relation de récurrence. — (30, I) [1], en vertu du théorème II, donne :

$$(1)\quad \Phi_{n+2}(x)=(x-c_{n+2})\Phi_{n+1}(x)-\lambda_{n+2}\Phi_n(x)\qquad (n=-1,0,1,\ldots;\ \Phi_{-1}\equiv 0);$$

$$(2)\quad \sqrt{\lambda_{n+3}}\,\varphi_{n+2}(x)=(x-c_{n+2})\varphi_{n+1}(x)-\sqrt{\lambda_{n+2}}\,\varphi_n(x)\qquad (n=-1,0,1,\ldots;\ \varphi_{-1}\equiv 0),$$

relations fondamentales. On peut les obtenir, sans recourir aux

---

(1) Cela signifie une formule du Chapitre I.

fractions continues. Il suffit d'écrire

$$\Phi_{n+2}(x) = (x + p_n)\Phi_{n+1}(x) + P(x),$$

où

$p_n =$ const., $P(x)$ — polynome de degré n, et $\int_a^b P(x) G_{n-1}(x) d\psi(x) = 0$,

d'où $P(x) = C_n \Phi_n(x)$. Les numérateurs de réduites $\Omega_n(x)$ et les fonctions $R_n(x)$ évidemment satisfont à (1) [**31, 32, I**].

On obtient, moyennant (17, α, 22, I) [**16**] :

$$(3) \quad \begin{cases} \lambda_n(d\psi) = \dfrac{a_{n-2}^2(d\psi)}{a_{n-1}^2(d\psi)} & (n \geqq 2); \\ c_n(d\psi) = \displaystyle\int_a^b x \varphi_{n-1}^2(x)\, d\psi & (n \geqq 1);\ a < c_n < b; \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} c_n = S_n - S_{n-1}; \qquad S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=2}^{2n} b_i = \frac{\Delta'_n(d\psi)}{\Delta_n(d\psi)} - \frac{\Delta'_{n-1}(d\psi)}{\Delta_n(d\psi)}, \\ d_{n,n-2} = -\displaystyle\sum_{i=2}^{n} (\lambda_i + c_{i+1} S_{i-1}) = -\sum_{i=2}^{n} \lambda_i + \frac{1}{2}\left(S_n^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \right). \end{cases}$$

Ici $\Delta'_n(d\psi)$ s'obtient de $\Delta_n(d\psi)$, en y remplaçant la dernière colonne par $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{2n-1}$ [*voir* (19, I)].

2. Formule de Darboux. Applications. — (2) donne :

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \frac{\varphi_{n+2}(x)\varphi_{n+1}(y) - \varphi_{n+2}(y)\varphi_{n+1}(x)}{x - y} - \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{\varphi_{n+1}(x)\varphi_n(y) - \varphi_n(x)\varphi_{n+1}(y)}{x-y} = \varphi_{n+1}(x)\varphi_{n+1}(y),$$

d'où les formules importantes de Darboux [**15**] :

$$(5) \quad K_n(x, y; d\psi) \equiv K_n(x, y) \equiv \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x)\varphi_i(y) = \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{\varphi_{n+1}(x)\varphi_n(y) - \varphi_n(x)\varphi_{n+1}(y)}{x - y} \text{ [1]},$$

$$(6) \quad K_n(x; d\psi) \equiv \sum_{i=0}^{n} \varphi_i^2(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}} [\varphi'_{n+1}(x)\varphi_n(x) - \varphi'_n(x)\varphi_{n+1}(x)].$$

On voit que $\dfrac{\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_n(x)}$ croît constamment avec x, ayant un saut de $+\infty$ à $-\infty$ pour $x = x_{i,n}$ — zéro de $\varphi_n(x)$ car

$$(7) \quad \frac{d}{dx}\left[\frac{\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_n(x)}\right] = \frac{a_{n+1}}{a_n} K_n(x) : \varphi_n^2(x) > 0 \qquad (x \text{ arbitraire}).$$

[1] Antérieurement établies par Christoffel [36] pour les polynomes de Legendre.

On déduit de (5) par différentiation

$$(8)\quad (x-y)\sum_{i=0}^{n}\varphi_i^{(k)}(x)\,\varphi_i^{(l)}(y)+k\sum_{i=0}^{n}\varphi_i^{(k-1)}(x)\,\varphi_i^{(l)}(y)-l\sum_{i=0}^{n}\varphi_i^{(k)}(x)\,\varphi_i^{(l-1)}(y)$$

$$=\frac{a_n}{a_{n+1}}\left[\varphi_{n+1}^{(k)}(x)\,\varphi_n^{(l)}(y)-\varphi_n^{(k)}(x)\,\varphi_{n+1}^{(l)}(y)\right]\quad [k,\,l=0,1,2,\ldots;\ \varphi^{(0)}\equiv\varphi].$$

$$(9)\quad \sum_{i=0}^{n}[\varphi_i'(x)]^2=\frac{a_n}{a_{n+1}}\left\{\frac{\varphi''_{n+1}(x)\,\varphi'_n(x)-\varphi''_n(x)\,\varphi'_{n+1}(x)}{2}+\frac{\varphi'''_{n+1}(x)\,\varphi_n(x)-\varphi'''_n(x)\,\varphi_{n+1}(x)}{6}\right\}.$$

$$(10)\quad k\sum_{i=0}^{n}\varphi_i^{(k-1)}(x)\,\varphi_i(x)=\frac{a_n}{a_{n+1}}\left[\varphi_{n+1}^{(k)}(x)\,\varphi_n(x)-\varphi_n^{(k)}(x)\,\varphi_{n+1}(x)\right]\quad (k\geqq 1).$$

Nous allons donner quelques autres formules liant $K_n(x)$ et a_n.

3. Relation entre $\varphi_n(x\,;d\psi)$ et $\varphi_n(x\,;\Pi d\psi)$, Π-polynome. — On a

$$(11)\quad G_n(x)\equiv\sum_{i=0}^{n}g_ix^i=\sum_{i=0}^{n}\gamma_i\varphi_i(x)\qquad\left[\gamma_i=\int_a^b G_n(x)\,\varphi_i(x)\,d\psi(x)\right].$$

$$(12)\quad \Pi(x)\,\varphi_n(x\,;\Pi\,d\psi)$$

$$=\sum_{i=0}^{s}h_{i,n}\,\varphi_{n+i}(x\,;d\psi)=\frac{(-1)^{n+s}h_{s,n}}{\Delta_{n,s}}$$

$$\times\begin{vmatrix}\varphi_n(x\,;d\psi) & \varphi_{n+1}(x\,;d\psi) & \ldots & \varphi_{n+s}(x\,;d\psi)\\ \varphi_n(\xi_1\,;d\psi) & \ldots\ldots & \ldots & \varphi_{n+s}(\xi_1\,;d\psi)\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\\ \varphi_n(\xi_s\,;d\psi) & \ldots\ldots & \ldots & \varphi_{n+s}(\xi_s\,;d\psi)\end{vmatrix}$$

$$\left[\Pi(x)=c\sum_{i=1}^{s}(x-\xi_i)\geqq 0 \text{ dans } (a,b)\right]\quad [37],$$

$$\frac{h_{i,n}}{h_{s,n}}=(-1)^{s-i}\frac{\Delta_{n,i}}{\Delta_{n,s}}\qquad (0\leqq i\leqq s);$$

$$\Delta_{n,i}=\begin{vmatrix}\varphi_n(\xi_1\,;d\psi) & \ldots & \varphi_{n+i-1}(\xi_1\,;d\psi) & \varphi_{n+i+1}(\xi_1\,;d\psi) & \ldots & \varphi_{n+s}(\xi_1\,;d\psi)\\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\\ \varphi_n(\xi_s\,;d\psi) & \ldots & \varphi_{n+i-1}(\xi_s\,;d\psi) & \varphi_{n+i+1}(\xi_s\,;d\psi) & \ldots & \varphi_{n+s}(\xi_s\,;d\psi)\end{vmatrix},$$

où l'on remplace $\varphi_{n+i}(a_{k+1})$, $\varphi_{n+i}(a_{k+2})\ldots$ respectivement par $\varphi'_{n+i}(a_k)$, $\varphi''_{n+i}(a_k)$, $\ldots$, si $a_k=a_{k+1}=a_{k+2}=\ldots$. Pour les polynomes de Legendre, (12) a été donné par Christoffel [36]. En particulier,

$$(13) \qquad h_{s,n} = \frac{c a_n(\Pi\, d\psi)}{a_{n+s}(d\psi)}, \qquad h_{0,n} = \frac{a_n(d\psi)}{a_n(\Pi\, d\psi)}.$$

Considérons quelques cas spéciaux :

$$(14) \left\{ \begin{aligned} &1^{\circ} \quad \rho(x-\xi)\,\varphi_n(x; d\psi_1) = \frac{a_n(d\psi)}{a_n(d\psi_1)}\varphi_n(x; d\psi) + \rho\,\frac{a_n(d\psi_1)}{a_{n+1}(d\psi)}\varphi_{n+1}(x; d\psi) \\ &\qquad [d\psi_1 = \rho(x-\xi)\,d\psi;\ \rho = +1\,(\xi \leqq a),\ -1\,(\xi \geqq b)], \\ &\qquad S_n(d\psi_1) = S_{n+1}(d\psi) - \xi - \rho\,\frac{a_n^2(d\psi)}{a_n^2(d\psi_1)}; \\ &\varphi_n(\xi; d\psi_1) = -\frac{a_n(d\psi)\,a_{n+1}(d\psi)}{a_n^2(d\psi_1)}\varphi'_n(\xi; d\psi) + \frac{a_n(d\psi_1)}{a_{n+1}(d\psi)}\varphi'_{n+1}(\xi; d\psi); \\ &\frac{\varphi_{n+1}(\xi; d\psi)}{\varphi_n(\xi; d\psi)} = -\rho\,\frac{a_n(d\psi)\,a_{n+1}(d\psi)}{a_n^2(d\psi_1)} = -\rho\,\frac{a_n^2(d\psi)}{a_n^2(d\psi_1)}\,\frac{1}{\sqrt{\lambda_{n+2}(d\psi)}}; \\ &\qquad K_n(\xi; d\psi) = \frac{a_n(d\psi)}{a_n(d\psi_1)}\varphi_n(\xi; d\psi)\,\varphi_n(\xi; d\psi_1) \quad [\textit{voir}\ (6)]. \end{aligned} \right.$$

L'importance de la dernière formule consiste en ce qu'elle permet de trouver, dans beaucoup de cas, la valeur précise ou asymptotique $(n \to \infty)$ de $K_n(\xi; d\psi)$. On a, plus généralement,

$$(14\,bis) \qquad K_n(\xi, x; d\psi) = \frac{a_n(d\psi)}{a_n(d\psi_1)}\varphi_n(x; d\psi_1)\,\varphi_n(\xi; d\psi).$$

$$(15) \left\{ \begin{aligned} &2^{\circ} \qquad \frac{K_{n+1}(\xi; d\psi)}{K_n(\xi; d\psi)} = \frac{a_{n+1}^2(d\psi)}{a_n^2(d\psi_2)} = 1 + \frac{\varphi_{n+1}^2(\xi; d\psi)}{K_n(\xi; d\psi)} \\ &\qquad [d\psi_2 = (x-\xi)^2\,d\psi,\ \xi \text{ arbitraire}], \\ &\qquad a_n(d\psi_2) < a_{n+1}(d\psi) \quad (^1); \\ &\qquad a_n\left[\prod_{i=1}^{s}(x-\xi_i)^2\,d\psi\right] < a_{n+s}(d\psi), \\ &K_n(\xi; d\psi) = \prod_{i=0}^{n-1}\frac{a_i^2(d\psi)}{a_i^2(d\psi_2)}\,a_n^2(d\psi) = \frac{\Delta_n(d\psi_2)}{\Delta_{n+1}(d\psi)} \quad (^1). \end{aligned} \right.$$

Comparons, pour $\xi \leqq a$ ou $\geqq b$, (14) et (15). On obtient

$$(16) \qquad \varphi_n^2(\xi; d\psi) = \prod_{i=0}^{n-1}\frac{a_i^4(d\psi)}{a_i^2(d\psi_1)}\,a_n^2(d\psi) = \frac{\Delta_n^2(d\psi_1)}{\Delta_n(d\psi)\,\Delta_{n+1}(d\psi)}.$$

---

(1) Pour $\xi = 0 = a$, on peut utiliser la relation connue

$$\Delta_n(d\psi)\,\Delta_n(x^2\,d\psi) - \Delta_{n+1}(d\psi)\,\Delta_{n-1}(x^2\,d\psi) = \Delta_n^2(x\,d\psi).$$

Le cas le plus intéressant est $\xi = a, b$. On a

$$(17)\quad (x-a)\varphi_n(x;d\psi_1) = \frac{a_n(d\psi)}{a_n(d\psi_1)}\varphi_n(x;d\psi) + \frac{a_n(d\psi_1)}{a_{n+1}(d\psi)}\varphi_{n+1}(x;d\psi)$$
$$[d\psi_1 = (x-a)\,d\psi],$$

$$(18)\quad (b-x)\varphi_n(x;d\psi_1) = \frac{a_n(d\psi)}{a_n(d\psi_1)}\varphi_n(x,d\psi) - \frac{a_n(d\psi_1)}{a_{n+1}(d\psi)}\varphi_{n+1}(x;d\psi)$$
$$[d\psi_1 = (b-x)\,d\psi],$$

$$(19)\quad \varphi_n(x;d\psi_1) = \frac{K_n(c,x;d\psi)}{\varphi_n(c;d\psi)}\,\frac{a_n(d\psi_1)}{a_n(d\psi)} \qquad (c = a, b).$$

Plus particulièrement, si $0 \leqq a < b$, alors [33, I] :

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned}
& x\varphi_n(x;d\psi_1) = \sqrt{b_{2n+2}(d\psi)}\,\varphi_n(x;d\psi) + \sqrt{b_{2n+3}(d\psi)}\,\varphi_{n+1}(x;d\psi);\\
& S_n(x\,d\psi) = S_{n+1}(d\psi) - b_{2n+2}(d\psi) = S_n(d\psi) + b_{2n+1}(d\psi);\\
& \varphi_n^2(0;d\psi) = \frac{1}{b_1(d\psi)}\prod_{i=1}^{n}\frac{b_{2i}(d\psi)}{b_{2i+1}(d\psi)} = l_{2n+1}(d\psi) = \frac{\Delta_n^2(x\,d\psi)}{\Delta_n(d\psi)\Delta_{n+1}(d\psi)},\\
& \lambda_n(x\,d\psi) = b_{2n-1}(d\psi)b_{2n}(d\psi)\\
& c_n(x\,d\psi) = b_{2n}(d\psi) + b_{2n+1}(d\psi) \qquad (n \geqq 2);\\
& \frac{K_{n+1}(0;d\psi)}{K_n(0;d\psi)} = \frac{a_{n+1}^2(d\psi)}{a_n^2(x^2\,d\psi)} = \frac{b_{2n+2}(x\,d\psi)}{b_{2n+3}(d\psi)},\\
& \frac{\varphi_{n+1}^2(0;d\psi)}{\varphi_n^2(0;d\psi)} = \frac{b_{2n+2}(d\psi)}{b_{2n+3}(d\psi)},\\
& K_n(0;d\psi) = \frac{\Delta_n(x^2\,d\psi)}{\Delta_{n+1}(d\psi)} = \sqrt{b_{2n+2}(d\psi)}\,\varphi_n(0;d\psi)\,\varphi_n(0;x\,d\psi) \qquad (n \geqq 0).
\end{aligned}\right.$$

On en tire, d'abord pour (a, b) avec $a \geqq 0$, puis pour un *intervalle fini quelconque* (a, b) [ce qu'on ramène à $(0, b-a)$] :

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned}
& \frac{b_{2n}(x\,d\psi)}{b_{2n+1}(d\psi)} = \frac{b_{2n+2}(d\psi)}{b_{2n+1}(x\,d\psi)} > 1;\\
& b_{2n}(x\,d\psi) - b_{2n+1}(d\psi) = b_{2n}(d\psi) - b_{2n-1}(x\,d\psi) > 0;\\
& \lambda_n(d\psi) \leqq \frac{[b_{2n-2}(d\psi) + b_{2n-1}(d\psi)]^2}{4}\\
& \lambda_n(d\psi) < c_{n-1}(d\psi)\,c_n(d\psi);\\
& b_n(d\psi) < c_n(d\psi) < b \qquad (0 \leqq a).
\end{aligned}\right.$$

$$(22)\quad \lambda_n(d\psi) < \frac{(b-a)^2}{4} \qquad [n \geqq 2;\ (a, b) \text{ fini, arbitraire}].$$

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned}
& 3^\circ\quad (x-a)(b-x)\varphi_n(x;d\psi_3) = \Lambda_n\begin{vmatrix}\varphi_n(x) & \varphi_{n+1}(x) & x\varphi_{n+1}(x)\\ \varphi_n(a) & \varphi_{n+1}(a) & a\varphi_{n+1}(a)\\ \varphi_n(b) & \varphi_{n+1}(b) & b\varphi_{n+1}(b)\end{vmatrix}\\
& [d\psi_3 = (x-a)(b-x)\,d\psi],\\
& \Lambda_n = \frac{a_n(d\psi_3)}{a_{n+1}(d\psi)}\,\frac{1}{[\varphi_{n+1}(a)\varphi_n(b) - \varphi_n(a)\varphi_{n+1}(b)]}\\
& \quad = \frac{a_n(d\psi_3)a_n(d\psi)}{(a-b)a_{n+1}^2(d\psi)K_n(a,b;d\psi)}.
\end{aligned}\right.$$

4. Évaluation de a_n, b_n, c_n, ... dans quelques cas particuliers.

On a leurs expressions, assez compliquées, en fonctions des moments α_i [33, I]. On pourrait les trouver, en divisant $\Phi_{n+1}(x)$ par $\Phi_n(x)$, ce qui exige l'expression précise de $\Phi_n(x)$. Voici une méthode simple donnant presque sans calcul, dans beaucoup de cas, leurs valeurs précises ou asymptotiques ($n \to \infty$).

Moyennant les relations d'orthogonalité, on a

$$\int_a^b G_{n+1}(x)\,\varphi_n(x)\,d\psi(x) = \frac{g_{n+1}S_{n+1}(d\psi)+g_n}{a_n(d\psi)} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}&\int_a^b x\,\varphi_n(x;d\psi)\,\varphi_{n-1}(x;x\,d\psi)\,d\psi(x)\\ &= \frac{a_{n-1}(x\,d\psi)}{a_n(d\psi)} = \frac{[S_n(x\,d\psi)-S_n(d\psi)]a_n(d\psi)}{a_{n-1}(x\,d\psi)} \qquad (0 \leqq a).\end{aligned} \tag{25}$$

On en tire, moyennant la relation $F(x)\,|_a^b = \int_a^b F'(x)\,dx$, en supposant que $d\psi(x) = p(x)\,dx$, avec $p'(x)$ intégrable dans (a, b):

$$\left\{\begin{aligned}
&(\alpha) && p(x)\,\varphi_n^2(x)\,|_a^b = \int_a^b p'(x)\,\varphi_n^2(x)\,dx;\\
&(\beta) && p(x)x\,\varphi_n^2(x)\,|_a^b = \int_a^b p'(x)x\,\varphi_n^2(x)\,dx + 2n+1;\\
&(\gamma) && p(x)\,\varphi_n(x)\,\varphi_{n+1}(x)\,|_a^b\\
& && = \int_a^b p'(x)\,\varphi_n(x)\,\varphi_{n+1}(x)\,dx + (n+1)\frac{a_{n+1}(p)}{a_n(p)};\\
&(\delta) && p(x)x\,\varphi_n(x)\,\varphi_{n+1}(x)\,|_a^b\\
& && = \int_a^b p'(x)x\,\varphi_n(x)\,\varphi_{n+1}(x) + \frac{S_{n+1}(p)\,a_{n+1}(p)}{a_n(p)};\\
&(\varepsilon) && p(x)x\,\varphi_n(x;p)\,\varphi_{n-1}(x;tp)\,|_a^b\\
& && = \int_a^b p'(x)x\,\varphi_n(x;p)\,\varphi_{n-1}(x;tp)\,dx + \frac{n}{\sqrt{b_{2n+1}(p)}},\\
&(\eta) && p(x)x\,\varphi_n(x;p)\,\varphi_n(x;tp)\,|_a^b\\
& && = \int_a^b p'(x)x\,\varphi_n(x;p)\,\varphi_n(x;tp)\,dx + \frac{(n+1)}{\sqrt{b_{2n+2}(p)}} \qquad (0 \leqq a).\\
&(\zeta) && p(x)(x-a)(b-x)\,\varphi_n^2(x)\,|_a^b\\
& && = \int_a^b p'(x)(x-a)(b-x)\,\varphi_n^2(x)\,dx + (2n+1)(a+b)\\
& && \quad + 2nS_n - 2(n+1)S_{n+1} \qquad (a, b \text{ fini}).
\end{aligned}\right. \tag{26}$$

On applique ces formules, si $p'(x)$ et $p(x)$ sont liées par une relation simple [1]. Exemples :

(27)
$$\left\{\begin{array}{l} \textit{Polynomes de Legendre : } \varphi_n^2(\pm 1) = \dfrac{2n+1}{2}; \\ \lambda_{n+2} = \dfrac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}, \quad a_n = \dfrac{1.3\ldots(2n-1)}{n!}\sqrt{\dfrac{2n+1}{2}} \quad (n \geqq 0). \end{array}\right.$$

(28)
$$\left\{\begin{array}{l} \textit{Polynomes de Laguerre : } p(x) = x^{\alpha-1}e^{-x}. \quad c_n = 2n+\alpha-2; \\ S_n = n(n+\alpha-1); \quad \lambda_n = (n-1)(n+\alpha-2) \quad (n \geqq 1); \\ a_n = [\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha)]^{-\frac{1}{2}} \quad (n \geqq 0), \quad b_{2n} = n+\alpha-1, \\ b_{2n+1} = n \quad (n \geqq 1); \quad \varphi_n(0) = \dfrac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)}\sqrt{\dfrac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)}}; \\ K_n(0) = \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\alpha\Gamma^2(\alpha)\Gamma(n+1)} \quad (n \geqq 0) \quad [\textit{voir } (20)]. \end{array}\right.$$

(29)
$$\left\{\begin{array}{l} \textit{Polynomes d'Hermite : } p(x) = e^{-x^2}. \quad \lambda_{n+2} = \dfrac{n+1}{2}, \\ a_n = \left[\dfrac{2^n}{\Gamma(n+1)\pi^{\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (n \geqq 0); \quad c_n = S_n = \varphi_{2n+1}(0) = 0. \\ \varphi_{2n}(0) = (-1)^n \pi^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\dfrac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}}; \\ K_{2n}(0) = K_{2n+1}(0) = 2\dfrac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\pi\Gamma(n+1)}. \end{array}\right.$$

[Ici on peut utiliser aussi (65, 68, I) et (28).] On trouve, pour $d\psi(x) = |x|^{2k}e^{-x^2}dx \left(k > -\frac{1}{2}\right)$:

$$\lambda_{2n} = n + k - \frac{1}{2}, \qquad \lambda_{2n+1} = n.$$

Dans le cas des polynomes de Jacobi c'est la seule formule (26, ζ) qui est applicable et *qui fournit la valeur de* S_n. Puis on utilise [**33, I**] et (20). On tire de (26, ζ) :

$$2(n+1)S_{n+1} - 2nS_n = -(\alpha+\beta-2)(S_{n+1}-S_n) + (2n+\alpha),$$

ce qu'on peut traiter comme une équation à différences finies linéaire du premier ordre avec l'inconnue S_n. On obtient ainsi, pour

---

[1] On peut appliquer le même procédé pour évaluer $K_n(x)$.

$(a, b) = (0, 1)$:

Polynomes de Jacobi : $p(x) = x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$.

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned}
S_n &\equiv S_n(\alpha, \beta) = \frac{n(n+\alpha-1)}{2n+\alpha+\beta-2};\\
b_{2n+1} &\equiv b_{2n+1}(\alpha, \beta) = \frac{n(n+\beta-1)}{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta-2)};\\
b_{2n}(\alpha, \beta) &= \frac{(n+\alpha-1)(n+\alpha+\beta-2)}{(2n+\alpha+\beta-2)(2n+\alpha+\beta-3)} \qquad (n \geqq 1).\\
\lambda_n(\alpha, \beta) &= \frac{(n-1)(n+\alpha-2)(n+\beta-2)(n+\alpha+\beta-3)}{(2n+\alpha+\beta-3)(2n+\alpha+\beta-4)^2(2n+\alpha+\beta-5)};\\
c_n(\alpha, \beta) &= \frac{2n^2+2n(\alpha+\beta-3)+(\alpha-2)(\alpha+\beta-2)}{(2n+\alpha+\beta-2)(2n+\alpha+\beta-4)}.
\end{aligned}\right.$$

$$(30')\quad \left\{\begin{aligned}
a_n(\alpha, \beta) &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n)}{\sqrt{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+\beta)(\alpha+\beta+2n-1)\Gamma(\alpha+\beta+n-1)}};\\
\varphi_n(0; \alpha, \beta) &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)}\sqrt{\frac{\Gamma(n+\alpha)(\alpha+\beta+2n-1)\Gamma(n+\alpha+\beta-1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\beta)}};\\
K_n(0; \alpha, \beta) &= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\beta)};\\
\varphi_n(1; \alpha, \beta) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\sqrt{\frac{\Gamma(n+\beta)(\alpha+\beta+2n-1)\Gamma(n+\alpha+\beta-1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha)}} \quad (^1);\\
K_n(1; \alpha; \beta) &= \frac{\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta+1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha)} \quad (^1).
\end{aligned}\right.$$

On voit que *tous ces calculs n'exigent rien qu'un emploi très simple de relations d'orthogonalité. On voit aussi le rôle important de* a_n et S_n. *Chacune de ces deux quantités permet de trouver, à l'aide de nos formules, toutes les quantités considérées dans ce numéro.*

5. Équation différentielle. — Étant donnée l'équation différentielle

$$(31)\qquad A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0,$$

on peut l'écrire sous les formes suivantes :

$$(32)\qquad (A\rho y')' + \rho C y = 0; \qquad (A\rho y)'' - (B\rho y)' + C\rho y = 0$$

$$\left[\rho(x) \equiv \rho = \frac{1}{A(x)} e^{\int \frac{B}{A} dx}\right].$$

---

(1) On utilise la substitution $x = 1 - x_1$, équivalente à la permutation de α, β.

Supposons que $C(x)$ dépend d'un paramètre n, ce que nous dénotons par $C_n \equiv C_n(x)$; (32) donne, y_n et y_m désignant deux solutions correspondant à C_n et C_m respectivement, α et β étant deux zéros de $A(x)\rho(x)$:

$$(33) \quad \int_\alpha^\beta \rho(x)[C_n(x) - C_m(x)] y_n y_m \, dx = 0 \qquad \left[y_{n,m}^{(k)}\binom{\alpha}{\beta} \text{ fini}, \ k = 0, 1 \right].$$

Supposons maintenant que A et B soient *des polynomes* de degrés $p+1, p$ respectivement. Alors, d'après Heine [12 *a*], il existe $(n, p) = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{(p-1)!}$ $[(n, 1) = 1]$ polynomes $C(x)$, de degré $p-1$ au plus, tels que l'équation (31) correspondante admet comme solution un polynome de degré n. D'ailleurs, d'après Stieltjes [38 *a*], si

$$(34) \qquad A(x) = \prod_{i=0}^{p} (x - z_i), \qquad \frac{B(x)}{A(x)} = \sum_{i=0}^{p} \frac{\beta_i}{x - z_i}$$

$$(z_0 < z_1 < \ldots < z_p, \text{ réels}, \ \beta_i \text{ réels et } > 0),$$

alors les (n, p) polynomes $C(x)$ et les solutions y correspondantes, dont il s'agit plus haut, sont *réels et différents.*

Le cas le plus simple et le plus important est $p = 1$, un ou même les deux zéros a, b de $A(x)$, pouvant être infinis. Ici $C_n = \text{const.}$, et (33) donne précisément les relations d'orthogonalité (17 α, I) pour PT classiques.

Théorème IV. — 1° *Les polynomes orthogonaux classiques satisfont à l'équation différentielle*

$$(mx^2 + kx + l)\,\varphi_n'' + (-x + \sigma)\,\varphi_n' + n[1 - m(n-1)]\,\varphi_n = 0 \qquad (n \geq 0),$$

m, k, l, σ désignant des constantes ne dépendant pas de n, m et k pouvant être égales à zéro, $p(x)$ est égale à $\frac{1}{mx^2 + kx + l} e^{\int \frac{-x+\sigma}{mx^2+kx+l} dx}$; *l'intervalle d'orthogonalité est formé par les racines — finies ou non — de $mx^2 + kx + l$* (¹). 2° *Les dérivées de ces polynomes sont aussi polynomes orthogonaux respectivement de même classe, correspondant au même intervalle* (a, b), *avec*

$$p_1(x) = A(x)p(x) = e^{\int \frac{-x+\sigma}{mx^2+kx+l} dx} \qquad [A(x) = mx^2 + kx + l].$$

(¹) Ils coïncident avec les zéros de $A(x)\rho(x) \equiv A(x)p(x)$.

Pour démontrer (2°) il suffit de différentier (31) et appliquer (32) et (33). On a donc, avec les notations adoptées,

$$(35, \mathrm{I}) \quad x(1-x)y'' + [\alpha - (\alpha+\beta)x]y' + n(n+\alpha+\beta-1)y = 0$$
$$[y = \mathrm{T}_n(x; 0, 1; \alpha, \beta)] \quad (^1),$$

$$(35, \mathrm{L})\ (^2) \quad xy'' + (\alpha - hx)y' + nhy = 0 \quad [y = \mathrm{L}_n(x; \alpha)] \quad (n \geqq 0) \quad (^3), (^4)$$

$$(35, \mathrm{H}) \quad y'' - 2hxy' + 2nhy = 0 \quad [y = \mathrm{H}_n(x)].$$

On déduit (35, L, H) de (35, I) à l'aide du passage connu à la limite [61, 62, I].

$$(36, \mathrm{I}, \mathrm{L}, \mathrm{H}) \quad \begin{cases} \Phi'_n[x : a, b; p(t)] = n\Phi_{n-1}[x, a, b; \mathrm{A}(t)p(t)], \\ \mathrm{A}(x) = mx^2 + kx + l. \end{cases}$$

Donc, *dans le cas des polynomes de Jacobi* et *Laguerre la différentiation est équivalente à ce qu'on change* α, β *en* $\alpha+1, \beta+1$, *respectivement. Les polynomes d'Hermite possèdent à cet égard la propriété la plus simple* (*ce qu'on utilise dans la Statistique mathématique*) : *la c-fonction* $p(x)$ *ne subit aucun changement.*

On démontre, en suivant la marche indiquée par Laguerre [22 *b*], que : 1° *on a pour* $\Phi_n(x; p)$ *une équation différentielle de la forme* (31), *avec* A, B *et* C — *polynomes en* x, *si*

$$p(x) = e^{\mathrm{Q}(x)} \prod_{i=1} (x - a_i)^{\mathrm{A}_i}$$

[$\mathrm{Q}(x)$ — *polynome de degré* $q \geqq 0$, a_i, $\mathrm{A}_i = \mathrm{const.}$, $\mathrm{A}_i > -1$]; 2° *la*

---

(1) Dans $(-1, 1)$ on a

$$(1 - x^2)y'' + [\alpha - \beta - (\alpha+\beta)x]y' + n(n+\alpha+\beta-1)y = 0.$$

(2) Cette notation signifie dans ce que suit les polynomes de Jacobi, Laguerre, Hermite respectivement.

(3) On peut dire que l'équation

$$x(1-x)y'' + [\alpha - (\alpha+\beta)x]y' + \omega y = 0 \ (\omega = \mathrm{const.},\ \alpha, \beta > 0)$$

n'admet une solution régulière pour $x = 0, 1$ que si $\omega = n(n+\alpha+\beta-1)$. On fait des remarques analogues sur (35, L, H).

(4) Remarquons, avec Markoff, que $\int_a^b (\mathrm{A}p\varphi'_n)'\mathrm{G}_{n-1}(x)\,dx = 0$ (intégration par parties); donc $(\mathrm{A}p\varphi'_n)' = -\mathrm{C}_n p \varphi_n$ — l'equation différentielle cherchée.

seconde solution de cette équation est $\frac{R_n(x)}{p(x)}$; 3° *l'équation adjointe a pour solution, dans le cas de polynomes orthogonaux classiques,* $\Phi_n(x)\,p(x)$ *et* $R_n(x)$. Les polynomes elliptiques rentrent dans cette catégorie [12 *a*], ainsi que la classe suivante :

$$(37)\ \textit{polynomes ultra-elliptiques} : \varphi_n\left[x\,;\,\alpha_1,\,\alpha_2\,;\,\prod_{i=1}^{2m-1}(t-\alpha_i)^{-\frac{1}{2}}\right]\quad (m>2).$$

$$(\alpha_1<\alpha_2<\ldots).$$

Comme la seconde solution de (31) est $\varphi_n(x)\int\frac{e^{-\int\frac{B}{A}dx}}{\varphi_n^2(x)}$, on obtient pour les polynomes orthogonaux classiques (voir 2°) :

$$(38,\mathrm{I})\qquad \frac{R_n(x)}{p(x)}=\frac{2n+\alpha+\beta-1}{a_n(p)}\varphi_n(x)\int_x^\infty\frac{dx}{x^\alpha(1-x)^\beta\varphi_n^2(x)},$$

$$(38,\mathrm{L},\mathrm{H})\qquad \frac{R_n(x)}{p(x)}=\frac{h}{a_n}\int_{-\infty}^x\frac{e^{hx}\,dx}{x^\alpha\varphi_n^2(x)},\qquad \frac{2h}{a_n(p)}\int_{\infty i}^x\frac{e^{hx^2}dx}{\varphi_n^2(x)}.$$

Dans le seul cas des polynomes de Legendre la fonction $R_n(x)$ satisfait à la même équation différentielle que le polynome lui-même.

On ramène (31) à l'équation suivante, souvent plus avantageuse :

$$(39)\qquad \begin{cases} \omega''(x)+\sigma(x)\,\omega(x)=0,\\ \omega(x)=e^{\frac{1}{2}\int\frac{B}{A}dx}y(A\rho)^{\frac{1}{2}}y,\\ \sigma=\frac{C}{A}-\frac{1}{4}\left(\frac{B}{A}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{B}{A}\right)'. \end{cases}$$

$$(40,\mathrm{I},\mathrm{L},\mathrm{H})\qquad \begin{cases} \omega(x)=x^{\frac{\alpha}{2}}(1-x)^{\frac{\beta}{2}}T_n(x\,;\,\alpha,\,\beta),\\ x^{\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{hx}{2}}L_n(x\,;\,\alpha);\qquad e^{-\frac{hx^2}{2}}H_n(x);\\ \sigma(x)=\frac{n(n+\alpha+\beta-1)}{x(1-x)}-\frac{1}{4}\left[\frac{\alpha}{x}-\frac{\beta}{1-x}\right]^2+\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha}{x^2}+\frac{\beta}{(1-x)^2}\right]\\ \frac{\alpha(2-\alpha)}{4x^2}+\frac{h\left(n+\frac{\alpha}{2}\right)}{x}-\frac{h^2}{4},\qquad 2n+1-hx^2. \end{cases}$$

Application : *nouvelles représentations des polynomes orthogonaux classiques.* — Comparons (35, I, L) avec les équations différentielles pour

(41)
$$\begin{cases} F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \dfrac{\alpha.\beta}{1.\gamma} x + \dfrac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots \\ \text{(série hypergéométrique)}, \\ G(\alpha, \gamma; x) \equiv \lim_{s \to \infty} F\left(\alpha, s, \gamma; \dfrac{x}{s}\right) = 1 + \dfrac{\alpha}{1.\gamma} x + \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots; \end{cases}$$

(42, I)
$$\begin{cases} \Phi_n[x; 0, 1; t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}] \\ \quad = (-1)^n \dfrac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2n+\alpha+\beta-1)} F(n+\alpha+\beta-1, -n, \alpha; x), \\ \Phi_n[x; -1, 1; (1+t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}] \\ \quad = \dfrac{2^n.\Gamma(n+\beta)\Gamma(n+\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(2n+\alpha+\beta-1)} \\ \quad \times F\left(n+\alpha+\beta-1, -n, \beta; \dfrac{1-x}{2}\right), \end{cases}$$

(42, L)
$$\Phi_n(x; 0, \infty; t^{\alpha-1}e^{-t}) = (-1)^n \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} G(-n, \alpha; x);$$

(42, H)
$$\begin{cases} \Phi_{2n}(x; -\infty, \infty; e^{-t^2}) \\ \quad = \dfrac{(-1)^n \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} G\left(-n, \dfrac{1}{2}; x^2\right) \\ \Phi_{2n+1}(x; -\infty, \infty; e^{-t^2}) \\ \quad = \dfrac{(-1)^n \Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} x G\left(-n, \dfrac{3}{2}; x^2\right). \end{cases}$$ [*voir* (68, I)].

Rapprochons (42, I), pour $\alpha = \beta$, $x = \cos\frac{\theta}{n}$, et (42, L) avec la série

(43)
$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$$

(fonction de Bessel d'ordre ν);

(44)
$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n\left[\cos\frac{\theta}{n}; -1, 1; (1-t^2)^{\alpha-1}\right] \times \sqrt{\frac{\Gamma(n+1)}{\left(n+\alpha-\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+2\alpha-1)}} = \theta^{1-\alpha} J_{\alpha-1}(\theta)$$ [**12** *a*, 39];

(45)
$$e^{-x} x^{\frac{\alpha-1}{2}} \Phi_n(x; 0, \infty; e^{-t} t^{\alpha-1}) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-t} t^{n+\frac{\alpha-1}{2}} J_{\alpha-1}(2\sqrt{tx})\, dt \quad (x > 0)$$ [**40**, **41**].

6. **Fonction génératrice.** — La série infinie

(46)
$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_n(x) t^n \qquad (A_n = \text{const.}),$$

avec les A_n convenablement choisis, converge dans un certain domaine du plan (x, t) et représente une fonction $F(x, t)$ *qui est, par définition, la fonction génératrice de la suite* $\{A_n \varphi_n(x)\}$. Son expression précise dépend évidemment du choix, plus ou moins heureux, des A_n.

Cette expression étant connue, on tire de (46) beaucoup de propriétés de $\{\varphi_n(x)\}$, y compris l'orthogonalité. Les polynomes de Legendre en sont l'exemple le plus intéressant, avec

$$F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} \quad [12, a] \text{ (1)}.$$

Voici comment on peut trouver $F(x, t)$ pour les polynomes orthogonaux classiques. On trouve, en rapprochant (43), (44, I), *où* $\Pi_n(x) \equiv p(x)$ *ne dépend pas de n*, avec la série de Lagrange [15, 42]

$$(47) \qquad u(y)\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} D^n[f^n(x)\,u(x)]\frac{t^n}{n!}$$

$$[y = x + tf(y),\ y \to x \text{ pour } t \to 0]:$$

$$(48, \text{I, L, H}) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(x, t) = \dfrac{p(y)}{p(x)[1 - tq'(y)]} \\ {[y = x + tq(y);\ y \to x \text{ pour } t \to 0];} \\ q(y) = (x-a)(b-x), \qquad x - a, \\ {[a \text{ et } b \text{ finis, } b \text{ infini, } (a, b) = (-\infty, \infty)]} \end{array} \right.$$

$$(49, \text{I, L, H}) \quad A_n \varphi_n(x; p) = \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[\frac{p(y) : p(x)}{1 - tq'(y)}\right]_{t=0}, \quad \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\dfrac{p(y)}{1 - tq'(y)}}{t^{n+1}p(x)}dt.$$

---

(1) Faisons dans $I_s \equiv \int_{-1}^{1} \frac{x^s dx}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}}$ (s entier positif) la substitution

$$\sqrt{1 - 2tx + t^2} = 1 - ty.$$

Alors

$$I_s = \int_{-1}^{1}\left[y + \frac{t}{2}(1 - y^2)\right]^s dy,$$

et t ne figure ici que jusqu'au degré s; comme, d'autre part,

$$I_s = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^{1} P_n(x)\, x^s\, dx,$$

on doit avoir

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, x^k\, dx = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Ce procédé élégant est dû à Hermite [5, *b*].

C désignant un contour convenable. Ces formules permettent de trouver l'expression asymptotique ($n \to \infty$) de $\varphi_n(x)$. On peut développer des considérations analogues dans le cas de plusieurs variables [25, 29, 30]. Ainsi on trouve :

$$(50,\ \mathrm{I})\qquad \frac{(1+t+\sqrt{1-2tx+t^2})^{1-\alpha}(1-t+\sqrt{1-2tx+t^2})^{1-\beta}}{\sqrt{1-2tx+t^2}}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2-\alpha-\beta-n} \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n-1)\Gamma(n+1)}$$
$$\times \Phi_n[x;\ -1,\ 1;\ (1+t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}]t^n \ (^1).$$

$$(50,\ \mathrm{L})\qquad \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)^{\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)}}\, \varphi_n(x;\ 0, \infty;\ e^{-t} t^{\alpha-1}) t^n;$$

$$(50,\ \mathrm{H})\qquad e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n\, \Phi_n(x;\ -\infty,\ \infty;\ e^{-t^2}) \frac{t^n}{n!}\ (^2).$$

On a aussi [39],

$$(50\,bis,\ \mathrm{I})\qquad (1-2tx+t^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\alpha-1}\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)} \sqrt{\frac{\Gamma(n+2\alpha-1)}{\left(n+\alpha-\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}}$$
$$\times \varphi_n[x;\ -1,\ 1;\ (1-t^2)^{\alpha-1}]t^n.$$

On déduit (50, L, H) de (50, I) moyennant le passage connu à la limite.

Rapprochons (50, L), pour $\alpha = 1$, avec la relation

$$e^{-xy} = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-x)^n y^n}{n!},$$

---

(1) (49, I) et (50, I) donnent, pour les polynomes de Legendre,

$$\mathrm{P}_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{C}} \frac{dt}{t^{n+1}\sqrt{1-2xt+t^2}},$$

d'où l'intégrale connue de Laplace [12, *a*] :

$$\mathrm{P}_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{n+1}},$$

pouvant servir comme définition de $\mathrm{P}_n(x)$ ***pour toutes les valeurs possibles de*** n. On développe des considérations analogues pour les autres polynomes classiques.

(2) En vertu de (50, I), c'est la série de Taylor pour $f(x-t)$, $f(x) = e^{-x^2}$.

où l'on a effectué la transformation d'Euler $y = \frac{t}{1-t}$ [40] :

$$(51)\quad \Phi_n(x;\, 0,\, \infty;\, e^{-x}) = n!\left[\frac{x^n}{n!} - \frac{nx^{n-1}}{1(n-1)!} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \pm \ldots + (-1)^n\right].$$

7. Zéros des polynomes de Tchebichef. — Théorème V. — 1° *Les zéros de $\varphi_n(x;a,b;d\psi)$ sont réels, simples et compris entre a et b; 2° ils sont séparés par ceux de $\varphi_{n-1}(x;a,b;d\psi)$* (1) *et de $\Omega_n(x;a,b;d\psi)$* (2).

Nous désignons les racines de $\varphi_n(x;a,b;d\psi)$ par

$$(52)\qquad x_{i,n}(a,\,b;\,d\psi) \equiv x_{i,n}(d\psi) \equiv x_{i,n} \qquad (x_{1,n} < x_{2,n} < \ldots < x_{n,n}).$$

1° A été établi (théorème I, 3°); 2° est une conséquence immédiate de

$$(53)\quad \begin{cases} \varphi'_n(x_{i,n})\,\varphi_{n-1}(x_{i,n}) = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}\,K_{n-1}(x_{i,n}) > 0; \\[2mm] \dfrac{\Omega_n(x_{i,n})}{\Phi'_n(x_{i,n})} = \dfrac{1}{K_n(x_{i,n})} > 0 \quad [\textit{voir } (6),\ (30\ \textit{bis}),\ (40,\ \mathrm{I})]. \end{cases}$$

Théorème VI. — *Les zéros de $\varphi_n(x;a,b;d\psi)$ sont séparés par ceux de $\varphi_{n-1}[x;a,b;(x-a)^{\varepsilon_1}(b-x)^{\varepsilon_2}d\psi]$ $(\varepsilon_{1,2} = 0, 1)$ et séparent ceux de $(x-a)\varphi_n[x;a,b;(x-a)\,d\psi]$, $(b-x)\varphi_n[x;a,b;(b-x)\,d\psi]$, $(x-a)(b-x)\varphi_{n-1}[x;a,b;(x-a)(b-x)\,d\psi]$ (a ou b, ou tous deux étant finis, suivant le cas).*

Cet énoncé résulte du théorème V, combiné avec (17), (18), (23).

Théorème VII. — 1° *Les zéros de $(x-a)\varphi_n[x;(x-a)\,d\psi]$ sont séparés par ceux de $\varphi_n[x;(b-x)\,d\psi]$. Les zéros de $(b-x)\varphi_n[x;(b-x)\,d\psi]$ sont séparés par ceux de $\varphi_n[x;(x-a)\,d\psi]$.*

---

(1) Plus généralement, deux zéros consécutifs de $\varphi_n(x;a,b;d\psi)$ contiennent au moins un zéro de $\varphi_{n+n'}(x;a,b;d\psi)$ $(n' \geqq 1)$ [1, *a*].

(2) En suivant la méthode de Stieltjes [1, *d*], on démontre que si

$$\int_\alpha^\beta d\psi(x) \neq 0 \qquad (a \leqq \alpha < \beta \leqq b),$$

alors $R_n(x)$ *n'admet aucune racine.*

On le démontre, comme ci-dessus, en remarquant que [*voir* (17), (18)]

$$\varphi_n(x; d\psi) = H(x-a)\varphi_{n-1}[x; (x-a)\,d\psi] + K(b-x)\varphi_{n-1}[x; (b-x)\,d\psi],$$
$$H, K = \text{const.}, \qquad H > 0, \qquad K > 0.$$

On a donc :

$$(54) \quad \begin{cases} a < \eta_{1,n} < \zeta_{1,n} < \xi_{1,n} < \eta_{2,n} < \zeta_{2,n} < \xi_{2,n} < \ldots < \eta_{n,n} < \zeta_{n,n} < \xi_{n,n} < b, \\ 0 = \varphi_n[\xi_{i,n};\ (x-a)\,d\psi] \\ \quad = \varphi_n[\eta_{i,n};\ (b-x)\,d\psi] = \varphi_n[\zeta_{i,n};\ (x-a)(b-x)\,d\psi]. \end{cases}$$

$$(55) \quad a < x_{1,n} < \zeta_{1,n-1} < x_{2,n} < \zeta_{2,n-1} < \ldots < x_{n-1,n} < \zeta_{n-1,n-1} < x_{n,n} < b,$$

$$(56) \quad a < \eta_{1,n} < x_{1,n} < \xi_{1,n} < \eta_{2,n} < x_{2,n} < \xi_{2,n} < \ldots < \eta_{n,n} < x_{n,n} < \xi_{n,n} < b.$$

Ainsi, *si l'on change $d\psi(x)$ en $(x-a)\,d\psi(x)$ ou $(b-x)\,d\psi(x)$, les nombres $x_{i,n}$ croissent ou décroissent respectivement.* On a [1, b, ou $q(x) \equiv 1$] :

$$\frac{\partial x_{i,n}}{\partial \alpha}[a, b; (t-a)^{\alpha-1}(b-t)^{\beta-1}\, q(t)] > 0,$$

$$\frac{\partial x_{i,n}[a, b;\ (t-a)^{\alpha-1}(b-t)^{\beta-1}\, q(t)]}{\partial \beta} < 0 \qquad (\alpha \neq \beta);$$

$$(57) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_{i,n}}{\partial \alpha}[-h, h; (h^2 - t^2)^{\alpha-1}\, q(t)] \lesseqgtr 0, \quad \text{selon que } x_{i,n} \gtrless 0 \\ \qquad [\textit{voir}\,(64, \mathrm{I});\ q(t) \equiv q(-t)]; \\ \dfrac{\partial x_{i,n}}{\partial \alpha}[0, \infty;\ t^{\alpha-1} e^{-h}\, q(t)] > 0 \qquad [i = 1, 2, \ldots, n]. \end{cases}$$

A cet égard, on peut utiliser deux propositions dues à Markoff [43 *a*] : 1° *Si*

$$d\psi(x) = U(x; \xi)\,dx, \quad \text{avec} \quad D_x\left(\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial \xi}\right) > 0 \quad (a < x < b),$$

alors $\dfrac{\partial x_{i,n}(d\psi)}{\partial \xi} > 0$; 2° si

$$d\psi(x) = U(x; \xi)\,dx, \quad \text{avec} \quad D_\xi U > 0$$

et

$$D_x\left[\frac{(x-e)U}{\dfrac{\partial U}{\partial \xi}}\right] < 0 \qquad (a < x < b;\ a < e = \text{const.} < b),$$

alors

$$\frac{\partial [x_{i,n}(d\psi) - e]^2}{\partial \xi} > 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

8. Limitation des zéros de $\varphi_n(x)$. — α. *Applications des théorèmes précédents.* — Moyennant (57), on peut limiter, par exemple, les racines ξ_i du polynome de Legendre $\varphi_n(x; -1, 1; 1)$ en les comparant avec celles de $\varphi_n[x; -1, 1; (1-t^2)^\varepsilon]$, $\varepsilon = \pm\frac{1}{2}$:

$$
(58)\quad \begin{cases} \cos\dfrac{(2i-1)\pi}{2n} > \xi_i > \cos\dfrac{i\pi}{n+1}\ (\xi_i > 0); \\ \cos\dfrac{(2i-1)\pi}{2n} < \xi_i < \cos\dfrac{i\pi}{n+1}\ (\xi_i < 0)\ (^1) \qquad [1b; 43-a]. \end{cases}
$$

β. *Applications des théorèmes d'oscillation de Sturm.* — On les applique à l'équation différentielle (40, I, L, H) pour limiter la distance entre deux zéros consécutifs de $\varphi_n(x)$. Supposons, de plus, $\omega(b) = \omega'(b) = 0$. Alors

$$
\omega'(\eta) = 0, \qquad \omega''(\zeta) = 0, \qquad \sigma(\zeta) = 0 \qquad (x_{n,n} < \eta,\ \zeta < b)
$$

(en vertu du théorème de Rolle). Donc, *si dans* (40, I, L, H) $\omega(b) = \omega'(b) = 0$, *$\sigma(x)$ admet nécessairement une racine $\zeta < b$, et $x_{n,n} < \zeta$*. Des considérations analogues subsistent pour $x_{1,n}$. *Cela permet d'utiliser $\sigma(x)$ pour limiter $\{x_{i,n}\}$ supérieurement et inférieurement* (ce qui exige α, $\beta > 2$ pour les polynomes de Jacobi et de Laguerre).

γ. *Application de la formule de Darboux.* — On la rapproche avec celle obtenue par différentiation de

$$
(59)\quad \begin{cases} \dfrac{\varphi_{n-1}(x)}{\varphi_n(x)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_{n-1}(x_{i,n})}{(x - x_{i,n})\varphi'_n(x_{i,n})}\,; \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\varphi_n(x)}{x - x_{i,n}}\right]^2 \frac{\varphi_{n-1}(x_{i,n})}{\varphi'_n(x_{i,n})} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \mathrm{K}_{n-1}(x). \end{cases}
$$

Or, il existe dans chaque intervalle un point ζ tel que $\varphi_n(\zeta) \neq 0$ $(n \geqq 1)$;

---

(1) *Voir* (50)-(52, I). Comparons-les avec

$$
\varphi_n(x; -1, 1; [(1+t)^{\varepsilon_1}(1-t)^{\varepsilon_2}]) \qquad \left(\varepsilon_{1,2} = \pm\frac{1}{2},\ \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 < 0\right),
$$

et nous obtenons les limitations de Bruns [44], inférieures à celles données par (58):

$$
\cos\frac{2i\pi}{2n+1} < \xi_i < \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad [1, c].
$$

On tire de (59) :

$$(60)\quad \begin{cases} \delta_{n,\zeta} \equiv \min | x_{i,n} - \zeta | \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ \qquad < \dfrac{a_{n-1}}{a_n} \dfrac{|\varphi_n(\zeta)|}{\sqrt{K_{n-1}(\zeta)}} = \dfrac{a_{n-1}(d\psi)}{a_n(d\psi)} \sqrt{\dfrac{a_n^2(d\psi)}{a_{n-1}^2(d\psi_2)} - 1} \\ [d\psi_2 = (x-\zeta)^2 \, d\psi; \ voir\ (15)]; \qquad | x_{\nu,n} - c | \\ \qquad < \dfrac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \dfrac{|\varphi_n(c)|}{\sqrt{K_{n-1}(c)}} \qquad (\nu = 1, n; \ c > x_{n,n} \text{ ou } < x_{1,n}). \end{cases}$$

δ. *Application de fractions continues.* — Nous nous bornons à appliquer cette méthode [45] aux polynomes symétriques. On a

$$(61)\quad \begin{cases} \dfrac{\Phi_n(x)}{\Phi_{n-1}(x)} = x - \lambda_n : [\Phi_{n-1}(x) : \Phi_{n-2}(x)] \ (n \geqq 2) > 0 \text{ pour } x > \max(2\sqrt{\lambda_i}) \\ -x_{1,n} = x_{n,n} > \max(2\sqrt{\lambda_i}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

ε. *Application de quadratures mécaniques.* — On tire de [*voir* (39), (40, I)] :

$$(62)\quad \frac{\alpha_l(d\psi)}{\alpha_k(d\psi)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} H_i x_{i,n}^l(d\psi)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} H_i x_{i,n}^k(d\psi)} \qquad (0 \leqq k, \ l \leqq 2n-1; \ H_i > 0);$$

$$(63)\quad \begin{cases} x_{n,n} > \dfrac{\alpha_n(d\psi)}{\alpha_{n-1}(d\psi)} (0 \leqq a); \qquad \min | x_{i,n} | < \sqrt{\dfrac{\alpha_{2n-2}(d\psi)}{\alpha_{2n-4}(d\psi)}} < \max | x_{i,n} | \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; \ a, b \text{ arbitraires}); \\ x_{1,n} < a + b - \dfrac{\alpha_n(d\psi_1)}{\alpha_{n-1}(d\psi_1)} \qquad (0 \leqq a; \ a, b \text{ finis}); \\ \min | a + b - x_{i,n} | < \sqrt{\dfrac{\alpha_{2n-2}(d\psi_1)}{\alpha_{2n-4}(d\psi_1)}} < \max | a + b - x_{i,n} | \\ \qquad [a + b \text{ fini}; \ \psi_1 \equiv \psi(a + b - x)]. \end{cases}$$

ζ. *Méthodes directes.* — S_n, c_n étant connus, on a

$$(64)\qquad x_{n,n} > \frac{S_n}{n} > x_{1,n}; \qquad x_{1,n} < c_n < x_{n,n} \ (^1).$$

Si l'on connaît l'expression précise de $\Phi_n(x)$, on peut employer toutes les règles convenables d'algèbre, surtout celles portant sur les équations ayant toutes les racines réelles (*cf.*, par exemple, [22]). Si l'expression asymptotique de $\Phi_n(x)$ $(n \to \infty)$ est donnée, on peut en tirer souvent une *approximation indéfinie* de ces zéros.

η. *Méthodes spéciales.* — Elles utilisent les propriétés spéciales des polynomes en question. Par exemple, pour les polynomes de

(1) Exemple : polynomes de Laguerre.

Laguerre, on a

$$(65)\qquad x L'_{n+1} = (n+1)[L_{n+1} - L_n], \qquad L'_{n+1} - L'_n = -L_n.$$
$$[L_n \equiv (-1)^n \varphi_n(x;\, 0,\, \infty;\, e^{-t})],$$

ce qui permet de faire une étude géométrique des zéros [46].

Pour les polynomes d'Hermite, on applique la théorie des formes quadratiques [47].

Sommaire. — ($0 < \theta < 1$, Δx est la distance de deux racines successives).

$$(66;\, \mathrm{I})\quad \left\{\begin{array}{l}
x_{n,n} > 1 - \dfrac{\beta+1}{n+\alpha+\beta-1}, \qquad x_{1,n} < \dfrac{\alpha+1}{n+\alpha+\beta-1} \\
\qquad (\alpha,\ \beta > 0,\ \text{arbitraires}); \\
x_{n,n} < 1 - \dfrac{\beta(\beta-2)}{4n(n+\beta+1)+\beta(\beta+2)}, \\
\Delta x < \dfrac{2\pi}{\sqrt{[4n(n+\beta+1)+\beta(\beta+2)](1-\theta)}} \qquad (\alpha \leqq 2,\ \beta > 2) \\
\qquad \text{pour } x_{i,n} < \left[1 - \dfrac{\beta(\beta-2)}{4n(n+\beta+1)+\beta(\beta+2)}\right]\theta; \\
x_{1,n} > \dfrac{\alpha(\alpha-2)}{4n(n+\alpha+1)+\alpha(\alpha+2)}, \\
\qquad [(a,\ b) \equiv (0,\ 1)]. \\
\Delta x < \dfrac{2\pi}{\sqrt{[4n(n+\alpha+1)+\alpha(\alpha+2)](1-\theta)}} \\
\text{pour } x_{i,n} < \left[1 - \dfrac{\alpha(\alpha-2)}{4n(n+\alpha+1)+\alpha(\alpha+2)}\right]\theta \qquad (\alpha > 2,\ \beta \leqq 2).
\end{array}\right.$$

$$(66,\, \mathrm{L})\quad \left\{\begin{array}{l}
x_{n,n} < \dfrac{4n+\alpha+2}{h} \quad [\mathit{voir}\ (54,\, \mathrm{I})], \\
\Delta x < \dfrac{2\pi}{h}\sqrt{\dfrac{1}{\theta}-1},\ \text{pour } x_{in} < \dfrac{4n+\alpha-2}{h}(1-\theta) \quad (\alpha \leqq 2), \\
x_{n,n} < \dfrac{2(2n+\alpha)}{h}, \\
x_{1,n} > \dfrac{\alpha(\alpha-2)}{2h(2n+\alpha)} \quad (\alpha > 2); \qquad x_{n,n} > \dfrac{n+\alpha}{h} \quad (\alpha > 0), \\
x_{i,n} = C_{i,n}\dfrac{(i+1)^2}{n+1} \qquad \left(\alpha = h = 1;\ \dfrac{1}{4} < C_{ni} < 4;\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\right); \\
\dfrac{\pi}{\sqrt{\dfrac{(2n+\alpha)^2 h^2 - 1}{\alpha(\alpha-2)}}} \leqq \Delta x \leqq \dfrac{\pi}{\sqrt{\dfrac{(2n+\alpha)^2 h^2}{\alpha(\alpha-2)}\theta - 1}} \ (\alpha > 2), \\
\text{pour } \dfrac{\alpha(\alpha-2)}{h(2n+\alpha)(2-\theta)} < x_{i,n} < \dfrac{\alpha(\alpha-2)}{h(2n+\alpha)}\dfrac{1}{\theta}\left[\dfrac{\alpha(\alpha-2)}{(2n+\alpha)^2 h^2} < \theta\right].
\end{array}\right.$$

$$(66, \mathrm{H})\quad \left\{\begin{array}{l}
\sqrt{\dfrac{2n-8n^{\frac{1}{2}}}{h}} < -x_{1,n} = x_{n,n} < \sqrt{\dfrac{2n-2.3^{-\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}}{h}};\ [1]\\[2ex]
x_{i,2n} < \dfrac{2(i-n+1)}{\sqrt{h(n+1)}};\qquad x_{i,2n+1} > \dfrac{1}{2}\dfrac{i-n}{\sqrt{h(n+1)}}\quad (i \geqq n+2);\\[2ex]
\dfrac{1}{2}\dfrac{i-n}{\sqrt{(n+1)h}} < x_{i,2n+1} < x_{i,2n} < \dfrac{2(i-n+1)}{\sqrt{(n+1)h}}\quad (2n \geqq i \geqq n+2),\\[2ex]
\dfrac{\pi}{\sqrt{h(2n+1)}} \leqq \Delta x \leqq \dfrac{\pi}{\sqrt{h(2n+1)(1-\theta)}}\\[2ex]
\quad\text{pour } |x_{i,n}| < \sqrt{\dfrac{2n+1}{h}}\,\theta.\\[2ex]
\text{pour } d\psi(x) = |x|^{2k}e^{-hx^2}\,dx\left(k > -\dfrac{1}{2}\right).\\[2ex]
-x_{1,2n} = x_{2n,2n} < \sqrt{\dfrac{4}{h}\left(n+k-\dfrac{1}{2}\right)};\\[2ex]
-x_{1,2n+1} = x_{2n+1,2n+1}\\[1ex]
\qquad < \max\left[\sqrt{\dfrac{4n}{h}},\sqrt{\dfrac{4\left(n+k-\frac{1}{2}\right)}{h}}\right].\\[2ex]
\qquad [\textit{voir}\ (55),\ (68,\ \mathrm{I}),\ (57,\ \mathrm{II})].
\end{array}\right.$$

9. Développement (formel) de fonctions en séries procédant suivant les polynomes de Tchebichef. — En supposant l'existence de $\int_a^b f(x)x^n\,d\psi(x)$ $(n \geqq 0)$ [réalisée si, par exemple, $\int_a^b f^2(x)\,d\psi(x)$ existe], on a :

$$(67)\qquad f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}_n\varphi_n(x),\qquad \mathrm{A}_n \equiv \mathrm{A}_n(f) = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,d\psi(x);$$

$$(68)\qquad \int_a^b \left[f(x) - \sum_{i=0}^{n} \mathrm{A}_i\varphi_i(x)\right]^2 d\psi(x) = \int_a^b f^2(x)\,d\psi(x) - \sum_{i=0}^{n} \mathrm{A}_i^2 \geqq 0.$$

Théorème VIII. — *L'existence de* $\int_a^b f^2(x)\,d\psi(x)$ *entraîne la convergence de la série* $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}_n^2(f)$, *avec*

$$\int_a^b f^2(x)\,d\psi(x) \geqq \sum_{i=0}^{n} \mathrm{A}_i^2\qquad (n \geqq 0),$$

[1] Ce résultat a été amélioré tout récemment [69].

inégalité de Bessel. [La question importante de l'*égalité*

$$\int_a^b f^2(x)\,d\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2(f)$$

(formule de Parseval) sera discutée dans le second fascicule.]

Applications. — De (67) on tire les formules importantes :

$$G_n(x) = \int_a^b K_n(x, y)\,G_n(y)\,d\psi(y) \tag{69}$$

$$\left[K_n(x, y) \equiv \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x)\,\varphi_i(y)\right],$$

$$K_n(x) \equiv K_n(x, x) = \int_a^b K_n^2(x, y)\,d\psi(y), \tag{70}$$

$$\int_a^b (x-y)\,K_n(x, y)\,G_{n-1}(y)\,d\psi(y) = 0 \text{ (¹)}. \tag{71}$$

Donc, $K_n(x, y)$, considéré comme polynome en y, a tous ses zéros réels et simples compris entre (a, b), sauf au plus un d'eux, cette exception ne pouvant avoir lieu que si $a < x < b$.

$$\varphi_k(x) = h_k^2 \int_a^b \sum_{i=0}^{n} \frac{\varphi_i(x)\,\varphi_i(y)}{h_i^2}\,\varphi_k(y)\,d\psi(y) \qquad (h_i = \text{const.};\ k \leq n). \tag{72}$$

Soit (a, b) *fini.* On peut toujours choisir une suite de constantes réelles $\{h_n\}$ telles que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{h_n^2}$ converge uniformément pour $a \leq x,\ y \leq b$ [par exemple, $h_n = (n+1)\max|\varphi_n(x)|$ dans (a, b)].

(72) *conduit alors à une équation intégrale, dont les* $\varphi_n(x)$

(¹) On tire de (71) : 1°

$$(x-y)\,K_n(x, y) = A(x)\,\varphi_n(y) + B(x)\,\varphi_{n+1}(y),$$

d'où, en permutant x et y,

$$A(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}}\,\varphi_{n+1}(x), \qquad B(x) = -\frac{a_n}{a_{n+1}}\,\varphi_n(x),$$

c'est-à-dire la formule de Darboux. Ce procédé est dû, en partie, à M. Geronimus; 2° pour $x \leq a$ ou $\geq b$,

$$K_n(x, y) = C_n\,\varphi_n[y;\ \rho(y-x)\,d\psi(y)] \qquad [\rho = \pm 1,\ \textit{voir}\ (14)].$$

sont les fonctions fondamentales :

(73) $$\varphi_k(x) = h_k \int_a^b \mathrm{K}(x, y)\, \varphi_k(y)\, d\psi(y)$$

$$\left[\mathrm{K}(x, y) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\, \varphi_n(y)}{h_n^2};\ k \geqq 0\right].$$

La difficulté ici concerne le choix avantageux de $\{h_n\}$ (1).

Nous appelons (67) *développement de Tchebichef.*

Voici quelques propriétés minimales de (67) :

THÉORÈME IX. — *Parmi tous les polynomes* $G_{n-1}(x)$, *c'est le polynome*

$$P_{n-1}(x) \equiv P_{n-1}(x; f; d\psi) = \sum_{i=0}^{n-1} A_i(f)\, \varphi_i(x; d\psi)$$

formé par les n premiers termes du développement de Tchebichef pour $f(x)$, *qui rend minima l'expression*

$$\int_a^b [f(x) - G_{n-1}(x)]^2\, d\psi(x).$$

Cette valeur minimum est égale à

$$I_n(f; d\psi) \equiv I_n = \int_a^b [f - P_{n-1}]^2 d\psi = \int_a^b f^2(x)\, d\psi(x) - \sum_{i=0}^{n-1} A_i^2(f) \quad [8, 49].$$

Pour la démonstration, où l'on suppose, bien entendu, l'existence de $\int_a^b f^2(x)\, d\psi(x)$, il suffit d'écrire $G_{n-1}(x)$ sous la forme (11).

L'énoncé précédent conduit à plusieurs résultats importants.

(74) $$\min \int_a^b \frac{G_n^2(x)}{g_n^2}\, d\psi(x) = \int_a^b \Phi_n^2(x;\, a,\, b;\, d\psi)\, d\psi(x) = \frac{1}{a_n^2(a, b; d\psi)}\ (^2),$$

d'où le théorème suivant :

THÉORÈME X. — *Si* $\psi_1(y) - \psi_1(x) \leqq \psi(y) - \psi(x) \leqq \psi_2(y) - \psi_2(x)$,

---

(1) *Cf.*, pour les polynomes de Legendre, [48].

(2) C'est la valeur minimale de la forme quadratique

$$\sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{i+j}\, g_i\, g_j = \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{n} g_i x^i\right)^2 d\psi(x),$$

sous la condition $g_n = 1$. D'où (25, I).

x et $y(>x)$ *parcourant un ensemble de points partout denses dans* (a, b) *et comprenant* a *et* b, *alors*

$$a_n(a, b; d\psi_1) \geqq a_n(a, b, d\psi) \geqq a_n(a, b; d\psi_2).$$

En particulier,

$$p_1(x) \leqq p(x) \leqq p_2(x) \; (a \leqq x \leqq b)$$

entraîne

$$a_n(a, b; p_1) \geqq a_n(a, b; p) \geqq a_n(a, b; p_2);$$

$a \leqq a_1 < b_1 \leqq b$ *entraîne*

$$a_n(a, b; d\psi) \leqq a_n(a_1, b_1; d\psi) \quad [30];$$

$$a_n(a, b; d\psi) \geqq 1 : \sqrt{\int_a^b \left[\frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} \cos n \arc\cos \frac{2x-a-b}{b-a}\right]^2 d\psi(x)}$$
$$> \frac{2^{2n-1}}{(b-a)^n \sqrt{\alpha_0(d\psi)}} \quad (a, b \text{ finis}).$$

Historique. — *C'est la propriété minimale ci-dessus de* (67) *qui a conduit Tchebichef à la découverte de* PT *dans toute leur généralité.*

Tchebichef [8] pose le problème suivant :

Étant données les valeurs $f(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ *d'une fonction inconnue* $f(x)$, *déterminer sa valeur pour* $x = X$, *en supposant que* $f(x)$ *soit de la forme* $\sum_{i=0}^{m} f_i x^i$ $(m \leqq n)$, *et cela de telle manière que* $f(x)$ *soit affectée le moins possible par les erreurs affectant* $f(x_1), \ldots, f(x_{n+1})$.

En introduisant $n+1$ poids σ_i pour les $f(x_i)$, on réduit le problème à la recherche de la valeur minimum de

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sigma_i [f(x_i) - G_m(x_i)]^2,$$

et l'on trouve, comme ci-dessus,

$$f(X) = \sum_{k=0}^{m} A_k \varphi_k(X),$$

$$A_k = \sum_{i=1}^{n+1} \sigma_i f(x_i) \varphi_k(x_i) \left[\sum_{i=1}^{n+1} \sigma_i \varphi_k(x_i) \varphi_l(x_i) = \delta_{kl}\right].$$

D'où la désignation de ce procédé par Tchebichef : *interpolation par la méthode des moindres carrés.*

Écrivons $1+(x-z)G_{n-1}(x)$ (z arbitraire) sous la forme (11). On a

$$\min \int_a^b [1+(x-z)G_{n-1}(x)]^2 d\psi(x) = \int_a^b \left[\frac{K_n(x;\, z)}{K_n(z)}\right]^2 d\psi(x) = \frac{1}{K_n(z)}. \tag{75}$$

10. Quelques inégalités pour certaines classes spéciales de polynomes de Tchebichef. — Si $p'(x)$ existe, alors [*voir* (26, α)],

$$p(b)\varphi_n^2(b;\, p) \geqq p(a)\varphi_n^2(a;\, p), \quad \text{si } p'(x) \geqq 0 \text{ dans } (a,\, b).$$

Dans le même ordre d'idées, on a [51, a] le théorème suivant :

Théorème XI. — *$p(x)$ étant : 1° non décroissant dans (c, b) (b fini, $c < b$) ou, 2° non croissant dans (a, c) (a fini, $c > a$) ou, 3° non croissant dans (a, c) et non décroissant dans (c, b) (a, b finis, $a \leqq c \leqq b$), les mêmes propriétés subsistent respectivement pour :* 1° $|\varphi_n(x;\, -\infty, b;\, p)|\sqrt{p(x)}$, 2° $|\varphi_n(x;\, a, \infty;\, p)|\sqrt{p(x)}$, 3° $|\varphi_n(x;\, a, b;\, p)|\sqrt{p(x)}$.

Il en résulte [*voir* (28)],

$$\left\{\begin{array}{l} e^{-\frac{x}{2}}|\varphi_n(x;\, 0, \infty;\, e^{-t})| < 1 \qquad (x > 0); \\ e^{-\frac{x}{2}}|\varphi_n(x;\, 0, \infty;\, e^{-t}t^{\alpha-1})| \leqq \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\sqrt{\dfrac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)}} = |\varphi_n(0)|. \\ \qquad (\alpha \geqq 1;\ x \geqq 0); \\ |x|^k |\varphi_n(x;\, -1, 1;\, |t^{2k}|)| < \varphi_n(1) \qquad (k \geqq 0;\ |x| < 1). \end{array}\right. \tag{76}$$

On obtient des résultats analogues en utilisant l'équation différentielle, la fonction génératrice [52], de représentations spéciales par des intégrales définies, etc. (¹).

Par exemple, en utilisant les valeurs connues des intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\cos 2xu\, du = \sqrt{\pi}\, e^{-x^2},$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin^{2\nu-1}\varphi\, d\varphi}{(a-bi\cos\varphi)^{2\nu}} = \frac{1}{(a^2+b^2)^\nu}\frac{\Gamma(\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \qquad (\nu > 0,\ a \text{ et } b \text{ réels}),$$

(¹) *Cf.*, par exemple [53] (polynomes de Legendre), et [21] (de Laguerre).

et (55, I), (50 *bis*, I), on trouve :

$$(77)\quad H_{2n+\varepsilon}(x) = (-1)^{n+\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{\pi}}\, e^{x^2}\int_{-\infty}^{\infty} u^{2n+\varepsilon}e^{-u^2}\cos\left(2xu - \varepsilon\frac{\pi}{2}\right)du$$

$$(\varepsilon = 0,\ 1;\ h = 1);$$

$$(78)\quad \begin{cases} \varphi_n[\cos\theta;\ -1,\ 1;\ (1-t^2)^{\alpha-1}] \\ \quad = \dfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}{\pi\Gamma(2\alpha-1)}\sqrt{\dfrac{\left(n+\alpha-\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+2\alpha-1)}{\Gamma(n+1)}} \\ \quad \times\displaystyle\int_0^{\pi}(\cos\theta + i\sin\theta\sin\varphi)\sin\varphi^{2\alpha-2}\,d\varphi\ [39], \\ |\varphi_n[x;\ -1,\ 1;\ (1-t^2)^{\alpha-1}]| \leqq \varphi_n[1;\ -1,\ 1;\ (1-t^2)^{\alpha-1}] \\ \quad \left(-1 \leqq x \leqq 1;\ \alpha > \frac{1}{2}\right)\ (^1). \end{cases}$$

D'autre part, on peut intégrer (35, I) à l'aide de dérivées fractionnaires. Cela permet d'exprimer $T_n(x;\alpha,\beta)$ en fonction de $T_n\left(x;\frac{\alpha+\beta-1}{2},\frac{\alpha+\beta-1}{2}\right)$, ce qui, vu (78), donne :

$$(79)\quad \begin{cases} |\varphi_n[x;\ -1,\ 1;\ (1+t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}]| \leqq \varphi_n(1) \\ \quad (|x| \leqq 1;\ \beta > \alpha;\ \alpha+\beta \geqq 1), \\ |\varphi_n[x;\ -1,\ 1;\ (1+t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}]| \leqq |\varphi_n(-1)| \\ \quad (|x| \leqq 1;\ \alpha > \beta;\ \alpha+\beta \geqq 1). \end{cases}$$

Les inégalités (79) ont été établies par M. Kogbetliantz.

CHAPITRE III.

PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES DE $\varphi_n(x)$ POUR $n \to \infty$.

CAS D'UN INTERVALLE FINI.

1. Distribution asymptotique des zéros de $\varphi_n(x)$.

Théorème XII :

$$x_{1,n}(a,\ b;\ d\psi) \to a,\quad x_{n,n}(a,\ b;\ d\psi) \to b \qquad \text{pour } n \to \infty.$$

---

(1) (78), évidemment, a lieu pour $\alpha \geqq \frac{1}{2}$, mais pas pour $\alpha < \frac{1}{2}$, car

$$|\varphi_n[\pm 1;\ -1,1;\ (1-t^2)^{\alpha-1}]| \sim n^{\alpha-\frac{1}{2}} \qquad [\textit{voir } (30')].$$

Démonstration. — Le théorème V montre que

$$x_{1,n} \to a' \geqq a, \qquad x_{n,n} \to b' \leqq b.$$

Pour fixer les idées, supposons, par l'impossible, que $a' > a$, $b' < b$. Alors, en appliquant la formule de quadratiques mécaniques (39, I) à

$$\Pi(x) = \left(\frac{2x-c-d}{d-c}\right)^{2s} \qquad (a < c < a';\ b' < d < b;\ s \leqq n-1),$$

on a cette relation impossible pour n et s suffisamment grands [*voir* (41, I) et la remarque (1), p. 8] :

$$\theta^{2s}\int_a^b d\psi(x) > \int_a^b \Pi(x)\,d\psi(x) \geqq \int_a^c d\psi(x) + \int_d^b d\psi(x),$$

$$\theta = \max\left\{\left|\frac{2b'-c-d}{d-c}\right|,\ \left|\frac{2a'-c-d}{d-c}\right|\right\} < 1$$

Les formules établies plus haut (Chap. II) permettent, dans certains cas, d'évaluer l'ordre, par rapport à n, de $x_{1,n} - a$ et $b - x_{n,n}$. Ajoutons sans discussion quelques autres propriétés des $x_{i,n}$:

1° Dans chaque intervalle partiel (α, β) tel que

$$\int_\alpha^\beta d\psi(x) \neq 0,$$

$\psi(x)$ étant continue pour $x = \alpha, \beta$ [donc, en particulier, au voisinage d'un point de croissance de $\psi(x)$], ou

$$(*) \qquad \int_{\alpha'}^{\beta'} d\psi(x) \neq 0 \qquad (\alpha \leqq \alpha' < \beta' \leqq \beta),$$

on trouve pour $n \geqq n_0$ suffisamment grand, un au moins de $x_{i,n}$, et même autant d'eux que l'on veut sous la condition (*) [54].

2° α et $\beta > \alpha$ étant points de croissance de $\psi(x)$ et $\psi(x)$ étant constante dans $(\alpha + 0, \beta - 0)$, $\varphi_n(x)$ admet dans (α, β) une racine au plus [54].

3° Les relations limites (pour $n \to \infty$)

$$(1) \qquad b_{2n-1} \to c', \quad b_{2n} \to c'' \quad (c'c'' \neq 0) \qquad (\text{ou } \lambda_n \to \lambda,\ c_n \to c;\ \lambda > 0)$$

entraînent la distribution partout dense des racines de la suite

$[\varphi_n(x)]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ dans l'intervalle [55]

(2) $[(\sqrt{c'} - \sqrt{c''})^2, (\sqrt{c'} + \sqrt{c''})^2]$ [ou $(-2\sqrt{\lambda} + c, 2\sqrt{\lambda} + c)$],

en dehors duquel $\varphi_n(x)$ n'admet qu'un nombre limité de zéros.

2. Valeurs asymptotiques de $a_n, b_n, \ldots, \frac{\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_n(x)}$. — Soit d'abord $(a, b) = (0, 1)$.

D'après le théorème X, *l'ordre de a_n, par rapport à n, est au moins égal à 4^n.* Supposons, et cela a lieu dans des cas assez généraux, que :

(A) *l'ordre de a_n, par rapport à n, est égal à 4^n : $a_n \sim 4^n$.*

THÉORÈME XIII [16]. — *La condition* (A) *étant remplie pour* $(a, b) = (0, 1)$, *on a pour* $n \to \infty$: 1° $b_n \to \frac{1}{4}$, $c_n \to \frac{1}{2}$, $\lambda_n \to \frac{1}{16}$; 2° *les séries*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n - \frac{1}{4}\right)^{\varepsilon}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n - \frac{1}{2}\right)^{\varepsilon}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n - \frac{1}{16}\right)^{\varepsilon} \qquad (\varepsilon = 1, 2)$$

convergent; 3° $a_n = 4^n \mathrm{A}[1 + o(1)]$, $\mathrm{S}_n = \frac{n}{2} + \sigma + o(1)$, $\mathrm{A}(> 0)$ *et σ ne dépendant plus de n;* 4° $l_n l_{n-1} \to -4$, $\frac{l_n}{l_{n-2}} \to 1$.

Démonstration. — 1° $\Pi(x)$ désignant un polynome de degré $s, \geqq 0$ dans $(0, 1)$, l'inégalité de Schwartz, appliquée à

$$\int_0^1 \Pi(x)\,\varphi_n(x;\, \Pi\, d\psi)\,\varphi_{n+s}(x;\, d\psi)\, d\psi(x),$$

montre que $a_n(\Pi\, d\psi) \sim 4^n$. Il en résulte [*voir* (33, 1)], que b_n surpasse, pour n quelconque, un nombre fixe différent de zéro. Les relations

$$(3) \qquad \mathrm{T}_n(x) \equiv \frac{\cos n \arccos(2x - 1)}{2^{2n-1}} = x^n - \frac{n}{2}x^{n-1} + \ldots$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} t_i \varphi_i(x) + \frac{\varphi_n(x)}{a_n} \quad (t_i = \text{const.}),$$

$$(4) \qquad \begin{cases} \mathrm{S}_n - \dfrac{n}{2} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(c_i - \frac{1}{2}\right) = \sum_{i=2}^{2n}\left(b_i - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}; \\ 4\dfrac{16^n}{a_n^2} = \displaystyle\prod_{i=1}^{2n+1} 4b_i = \frac{1}{4}\prod_{i=1}^{n+1} 16\lambda_i, \end{cases}$$

où les t_i, comme on le voit aisément, sont bornés, quel que soit n, montrent que $\left|S_n - \frac{n}{2}\right|$ reste borné, d'où

$$\sum_{i=1}^{n} |u_i| < \tau, \quad 0 < H < \Pi_n \equiv \prod_{i=2}^{n} (1 + u_i) < K \qquad (|u_i| \equiv |4b_i - 1| < 3),$$

τ, H, K ne dépendant pas de n. On achève la démonstration en écrivant

$$\log \Pi_n = \sum_{i=2}^{n} u_i - \sum_{i=2}^{n} \theta_i u_i^2, \qquad \text{où } \theta_i > \frac{1}{32}.$$

2°, 3°, 4°. l désignant la somme $\sum_{i=2}^{\infty} \left(b_{2i-2} - \frac{1}{4}\right)\left(b_{2i-1} - \frac{1}{4}\right)$, on a [(20, II)] :

$$(5) \quad \sum_{i=2}^{n+1} \left(\lambda_i - \frac{1}{16}\right) = \sum_{i=2}^{n+1} \left(b_{2i-2} - \frac{1}{4}\right)\left(b_{2i-1} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \sum_{i=2}^{n+1} \left[c_{i-1}(x\, d\psi) - \frac{1}{2}\right]$$
$$= l + \frac{1}{16} + \frac{1}{4}\left(S_n - \frac{n}{2}\right) + o(1).$$

Écrivons (5) pour $d\overline{\psi}(\overline{x}) \equiv d\psi(1 - x)$ avec $\overline{\lambda}_n = \lambda_n$, $\overline{S}_n = n - S_n$, et ajoutons :

$$(6) \quad \sum_{i=2}^{\infty} \left(\lambda_i - \frac{1}{16}\right) = \frac{l + \overline{l}}{2} + \frac{1}{16}; \quad S_n - \frac{n}{2} + o(1) = 2(\overline{l} - l) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n - \frac{1}{2}\right).$$

La démonstration s'achève maintenant sans difficulté.

THÉORÈME XIV. — *Considérons le développement en fraction continue*

$$\int_0^1 \frac{d\psi(y)}{x - y} = \frac{1|}{|l_1 x} + \frac{1|}{|l_2} + \frac{1|}{|l_3 x} + \frac{1|}{|l_4} + \ldots$$

1° $\sum_{1}^{\infty} l_{2n+1}$ *diverge dans tous les cas où* $\psi(x)$ *est continue pour* $x = 0$.

2° *Si* $\int_0^1 \frac{d\psi(x)}{x}$ *existe, alors* $l_{2n+1} \equiv \varphi_n^2(0)$ [(20, II)] $\to \infty$, *les séries* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{l_{2n+1}}$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty} l_{2n}$ *convergent, et*

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_{2n} = -\int_0^1 \frac{d\psi(x)}{x} \; [16].$$

1° résulte immédiatement du fait que [*voir* (75, II)],

$$(7)\qquad \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} l_{2i+1}} = \frac{1}{K_n(0)} \leqq \int_0^1 (1-x)^{2n}\, d\psi(x).$$

Pour établir 2°, on remarque que, en posant $l'_i \equiv l_i\left(\frac{d\psi}{x}\right)$,

$$(8)\qquad \operatorname{Max} \int_0^1 \frac{d\psi(x)}{x} \{ 1 - [1 + xG_{n-1}(x)]^2 \} = -\sum_{i=1}^{n} l_{2i}[1\,a]$$
$$= \int_0^1 \frac{d\psi(x)}{x} - \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} l'_{2i+1}}.$$

La valeur asymptotique de $\frac{\Phi_{n+1}(x)}{\Phi_n(x)}$ s'obtient maintenant sans difficulté, moyennant la relation de récurrence (1, II) comme une des racines $z_{1,2}$ de l'équation caractéristique $z^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)z + \frac{1}{16} = 0$ (d'après le théorème de Poincaré [56]) dans tous les points x où $|z_1| \neq |z_2|$. Or,

$$\frac{\varphi_{n+1}^2(0)}{\varphi_n^2(0)} \to 1, \qquad \frac{\Phi_{n+1}(x)}{\Phi_n(x)} > \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \qquad \text{pour } x > \frac{3}{2}.$$

On a le théorème suivant :

Théorème XV [16]. — *Pour toutes les valeurs de* x, *sauf* $0 < x < 1$, $\frac{\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_n(x)} \to 4z_1$, z_1 *désignant la racine du plus grand module de l'équation* $z^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)z + \frac{1}{16} = 0$. *Pour* $0 \leqq x \leqq 1$,

$$\frac{\varphi_n(x)}{(1+\varepsilon)^n} \to 0 \qquad (\varepsilon > 0 \text{ arbitraire; [16]}).$$

Dans le cas de (a, b) *fini quelconque*, une transformation linéaire, [*voir* (70), (71, I)], conduit au théorème suivant :

Théorème XVI. — *Sous la condition* (A) : $a_n \sim \left(\frac{4}{b-a}\right)^n$, *on a pour* $n \to \infty$:

$$a_n = \left(\frac{4}{b-a}\right)^n A[1 + o(1)],$$
$$S_n = n\frac{b+a}{2} + \sigma + o(1), \qquad \lambda_n \to \left(\frac{b-a}{4}\right)^2, \qquad c_n \to \frac{b+a}{2},$$
$$\frac{\varphi_n(x)}{(1+\varepsilon)^n} \to 0 \qquad (a \leqq x \leqq b, \varepsilon > 0 \text{ arbitraire}),$$

$\frac{\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_n(x)} \to \frac{4}{b-a} z_1$, *pour x n'appartenant pas à l'intérieur de (a, b), z_1 désignant la racine de plus grand module de l'équation*

$$z^2 - \left(x - \frac{b+a}{2}\right) z + \left(\frac{b-a}{4}\right)^2 = 0.$$

D'ailleurs, si $a \geqq 0$, $b_{2n+1} \to \left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{2}\right)^2 \equiv b'$, $b_{2n} \to \left(\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{2}\right)^2 \equiv b''$, et $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{2n-1} - b')^\varepsilon$, $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{2n} - b'')^\varepsilon$ convergent toutes deux $(\varepsilon = 1, 2)$.

Il suffit d'établir la dernière partie. On remarque que

$$\lim \frac{b_{2n+2}}{b_{2n+2}} = \lim \frac{\varphi_{n+1}^2(0)}{\varphi_n^2(0)} \geqq \lim \frac{\varphi_{n+1}^2(a)}{\varphi_n^2(a)} = 1 (n \to \infty),$$

car $\frac{\varphi_{n+1}^2(x)}{\varphi_n^2(x)}$ décroît avec x $[(7, \text{II})]$ pour $x \leqq a$. D'ailleurs, on applique le théorème XIII, 2° à

$$\begin{aligned}(9) \quad \lambda_n - b'b'' = (b_{2n-1} - b')(b_{2n} - b'') \\ + b'(b_{2n-2} + b_{2n-1} - b' - b'') + (b'' - b')(b_{2n-1} - b').\end{aligned}$$

3. Valeurs asymptotiques de $\frac{\varphi_n(\xi)}{K_n(\xi)}, \frac{K_{n+1}(\xi)}{K_n(\xi)}, \ldots, \xi$ réel, $\leqq a$ ou $\geqq b$. — On transforme (a, b) en l'intervalle positif $(a - \xi, b - \xi)$ $(\xi \leqq a)$ ou $(\xi - b, \xi - a)$ $(\xi \geqq b)$. Combinons les résultats ci-dessus avec (14), (15), (19), (20, II).

THÉORÈME XVII. — *Quel que soit ξ réel, $\leqq a$ ou $\geqq b$, on a, pour $n \to \infty$,*

$$\frac{a_{n+1}^2(d\psi)}{a_n^2[(x-\xi)^2 d\psi]} = \frac{K_{n+1}(d\psi)}{K_n(d\psi)} \to \frac{(\sqrt{|b-\xi|} + \sqrt{|a-\xi|})^4}{(b-a)^2};$$

$$\beta_n \equiv \frac{\varphi_{n+1}^2(\xi)}{K_n(\xi)} \to \left(\frac{2}{b-a}\right)^2 \sqrt{(\xi-a)(\xi-b)} [\sqrt{|\xi-b|} + \sqrt{|a-\xi|}]^2;$$

$$\frac{\varphi_{n+1}(\xi)}{\varphi_n(\xi)} \to \rho \frac{(\sqrt{|b-\xi|} + \sqrt{|a-\xi|})^2}{b-a} \quad [\rho = +1 (\xi \geqq b), -1 (\xi \leqq a)];$$

$$D\left[\frac{\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_n(x)}\right]_{x=\xi} \to \frac{(\sqrt{|\xi-b|} + \sqrt{|a-\xi|})^2}{(b-a)\sqrt{(\xi-a)(\xi-b)}}.$$

4. Valeurs asymptotiques de

$$\varphi_n^{(k)}(\xi), \quad \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^{(k)}(\xi_1)\varphi_i^{(l)}(\xi_2), \qquad \xi, \xi_{1,2} \text{ réels}, \leqq a \text{ ou } \geqq b.$$

Théorème XVIII. — *Quels que soient les points réels* ξ, $\xi_{1,2}$, *pris en dehors de* (a, b), *on a pour* $n \to \infty$, k *et* l *étant finis et* $=0, 1, \ldots$:

$$1^{\circ} \qquad \varphi_n^{(k)}(\xi) = n^k \zeta^{n-k} \Phi_k(\xi)[1+o(1)],$$

$$2^{\circ} \qquad \sum_{i=0}^{n} \varphi_i^{(k)}(\xi_1)\varphi_i^{(l)}(\xi_2) = n^{k+l} \zeta_1^{n-k} \zeta_2^{n-l} \Phi_{k,l}(\xi_1, \xi_2)[1+o(1)],$$

$[\Phi_k(\xi), \Phi_{k,l}(\xi_1, \xi_2)$ *ne dépendant pas de* n *et* $\neq 0]$, *où, d'une façon générale*,

$$\zeta = \frac{1}{b-a}\left[2\xi - a - b + 2\sqrt{(\xi-a)(\xi-b)}\right], \qquad \text{avec } |\zeta| > 1.$$

Démonstration. — Soit d'abord $a > 0$, $\xi = 0$. De ce qui précède, résulte l'existence de

$$\lim \prod_{i=1}^{n} \frac{b_{2i-1}}{b'} = \beta', \qquad \lim \prod_{i=1}^{n} \frac{b_{2i}}{b''} = \beta'' \qquad (\beta'\beta'' \neq 0);\ (n \to \infty),$$

d'où

$$(10) \quad \begin{cases} \varphi_n(0) = (-1)^n \left[\dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}\right]^n \dfrac{2}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} \dfrac{\beta''}{\beta'}[1+o(1)]; \\ \mathrm{K}_n(0) = \dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}\right)^{2n}\left(\dfrac{\beta''}{\beta'}\right)^2\left(\dfrac{2}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}\right)^2[1+o(1)] \\ \qquad [\textit{voir } (33, \mathrm{I}), (20, \mathrm{II})]. \end{cases}$$

Une transformation linéaire ramène à celui-ci le cas général en question, et notre énoncé est ainsi établi pour $k = l = 0$. Traitons maintenant (10, II) comme une équation aux différences finies, linéaire et du premier ordre par rapport à l'inconnue $\varphi_n^{(k)}(x)$. Ainsi on établit : 1° d'abord pour $k = 1$, puis, par induction, pour k quelconque; 2° en résulte aisément.

Les théorèmes XIII-XVIII ont lieu sous la condition

$$(\mathrm{A}) \qquad a_n(a, b; d\psi) \sim \left(\frac{4}{b-a}\right)^n.$$

5. Ordre de grandeur de $a_n(a, b; d\psi)$. — Il suit de ce qui précède que si la condition (A) est remplie pour $a_n(d\psi)$, elle l'est aussi pour $a_n(\Pi\, d\psi)$, $\Pi(x)$-polynome, et même pour $a_n(q\,d\psi)$, où :

1° $q(x) = 0$ aux points

$$(a \leqq) x_1 < x_2 < \ldots < x_m (\leqq b) \qquad (m \geqq 0, \text{ fini}),$$

et cela de telle façon que dans le voisinage de x_i

$$\frac{q(x)}{|x-x_i|^{k_i}} > \mathrm{A} \qquad (k_i, \text{ A finis; } i=1, 2, \ldots, m);$$

2° $q(x) \geqq q_0 > 0$ dans la partie complémentaire de (a, b). En effet, on peut alors construire un polynome $\Pi(x)$ tel que

$$\frac{q(x)}{\Pi(x)} \geqq \tau > 0 \qquad (a \leqq x \leqq b) \ [16].$$

D'ailleurs, on a le théorème suivant :

Théorème XIX. — 1° *Ayant donné l'intervalle* $(0, b)$, *pour que*

$$\lim b_{2n} = \lim b_{2n+1} = 0 \qquad (n \to \infty),$$

il faut et il suffit que $\psi(x)$ *ait dans* $(0, b)$ *une infinité dénombrable de points de croissance* $\{x_i\}$ *ayant un seul point limite à l'origine. Cela subsiste pour le cas symétrique, si* $\lim \lambda_n = 0$. *Les zéros de* $\varphi_n(x)$ *tendent alors vers ces points* x_i.

2° *Dans le cas des relations limites* (1), *l'intervalle* (2) *ne sort pas de* (a, b). *Si* (2) *ne se confond pas avec* (a, b), $\psi(x)$ *n'admet en dehors de* (2) *qu'un nombre limité de points de croissance, et*

Si

$$a_n(a, b; d\psi) \neq 0 \qquad \left[\left(\frac{4}{b-a}\right)^n\right].$$

$$\int_\alpha^\beta d\psi(x) \neq 0 \qquad (a \leqq \alpha < \beta \leqq b),$$

alors les relations limites (1) *entraînent*

$$c' = b', \qquad c'' = b'' \quad (\text{du théorème XVI})$$

$$\left[\text{ou } \lambda = \left(\frac{b-a}{4}\right)^2 \qquad c = \frac{b+a}{2}\right].$$

1° résulte d'une proposition de Stieltjes [1, a]; 2° résulte des propriétés des racines de $\varphi_n(x)$ données plus haut.

On peut aller plus loin, si l'on considère le cas

$$(\mathrm{S}) \qquad d\psi(x) = p(x)\,dx, \qquad p(x) > 0,$$

presque partout dans (a, b), (L) $\displaystyle\int_a^b \frac{\log p(x)\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ *existe.*

THÉORÈME XX. — *La condition* (A) *est remplie dans le cas* (S), *nous appelons une telle* $p(x)$ S-*fonction. On a ici*

$$a_n(a, b; p) = \left(\frac{4}{b-a}\right)^n \sqrt{\frac{2}{\pi(b-a)}}\, e^{-\frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{\log p(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx} [1+o(1)] \quad [32].$$

La démonstration [où l'on ramène (a, b) à $(-1, 1)$] est basée sur la relation (82, I) et sur les propriétés suivantes de $\varphi_n(z; \pi)$: l'existence de (L) $\int_0^\pi \log\pi(\theta)\,d\theta$ entraîne

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(z; \pi) = o(|z|<1), \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n^2(\pi)} = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\pi(\theta)d\theta},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_n(z)}{z^n} \text{ existe } (|z|>1) \; [32].$$

On est conduit ainsi (avec les notations du théorème XVIII) au corollaire suivant :

COROLLAIRE. — $p(x)$ *étant une* S-*fonction, on a, quel que soit* ξ *en dehors de* (a, b),

$$\varphi_n(\xi; p) = \zeta^n \Phi(\xi)[1+o(1)] \; [32].$$

6. Autres coefficients $(a_{n,i})$ de $\varphi_n(x)$. Application. — On a [*voir* (4, II)] [16] :

$$(11) \qquad d_{n,n-2} \equiv \frac{a_{n,n-2}(-1, 1; p)}{a_n(-1, 1; p)} = -\frac{n}{4} + d(p) + o(1)$$

[sous la condition (A)]

[$d(p)$ ne dépendant pas de n]. On peut procéder de la même manière avec $a_{n,n-3}$, $a_{n,n-4}$, ... Nous nous bornons à donner ici des limites supérieures pour quelques-unes d'entre elles. On a

$$(12) \quad T_n(x) \equiv \frac{\cos n \arccos x}{2^{n-1}} \equiv x^n + \sum_{k=0}^{n-1} B_{n,k}x^k = \frac{\varphi_n(x)}{a_n} + \sum_{i=0}^{n-1} t_{n,i}\varphi_i(x).$$

Comparons les coefficients et utilisons les résultats précédents :

$$(13) \begin{cases} \dfrac{a_{n,n-3}}{a_n} = O(n), \qquad \dfrac{a_{n,n-4}}{a_n} = B_{n,n-4} + O(n), \qquad \dfrac{a_{n,n-5}}{a_n} = O(n^2), \\ \text{[sous la condition (A);} \quad (a, b) \equiv (-1, 1)]. \end{cases}$$

Les résultats obtenus pour a_n, $a_{n,n-1}$, $a_{n,n-2}$ conduisent au théorème suivant :

THÉORÈME XXI. — 1° *Sous la condition* (A) [*donc dans le cas* (S)], *les coefficients* $h_{i,n}$ *dans le développement* (12, II) *tendent, pour* $n \to \infty$, *vers des limites déterminées* [37];

2°
$$\sqrt[n]{\Delta_n(a,\, b;\, d\psi)} = \left(\frac{b-a}{4}\right)^{n-1} A^{-2}[1+o(1)] \quad (^1),$$

A *étant la constante du théorème XVI. D'ailleurs, si* $p(x)$ *est une* S-*fonction*,

$$\sqrt[n]{\Delta_n(a,\, b;\, d\psi)} = 2\pi\left(\frac{b-a}{4}\right)^n e^{\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\log p(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx}[1+o(1)].$$

On établit : 1° d'abord pour s, — degré du polynome $\Pi(x)$ en question —, $\leqq 3$ (comparaison des coefficients), puis, de proche en proche, pour s quelconque; 2° résulte du théorème XX, combiné avec (25, I).

7. **Expression asymptotique de $\varphi_n(x)$ pour $a \leqq x \leqq b$.** — Nous avons indiqué plusieurs représentations de PT : comme solutions de certaines équations différentielles ou aux différences finies, comme intégrales prises dans le domaine réel ou complexe, comme coefficients du développement en série de la fonction génératrice, etc. Toutes ces représentations sont utilisables pour obtenir l'expression asymptotique en question. Nous ne pouvons donner ici que des indications très brèves.

1° ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE. — Pour les PT classiques, on utilise les deux méthodes suivantes :

α. *Méthode de Liouville.* — On transforme (35, I, L, H, II) en

$$u_n''(t) + \sigma_n^2 u_n(t) = \mu(t)\, u_n(t) \quad [t = t(x)],$$

(1) Dans les cas où *l'expression précise* de a_n est connue (comme par exemple, pour les polynomes orthogonaux classiques), on obtient *l'expression précise* de $\Delta_n(d\psi)$ à l'aide de : $\Delta_n(d\psi) = \prod_{i=0}^{n-1} a_i^{-2}(d\psi)$ [*voir* (25, I)].

où t et $u_n(t)$ ont été convenablement choisis, et

$$\sigma_0^2 < \sigma_1^2 < \ldots < \sigma_n^2 < \ldots \qquad (\sigma_n^2 \to \infty)$$

est une suite illimitée de constantes positives. On obtient, en choisissant convenablement les constantes τ, $C_{1,2}$,

$$u_n(t) = C_1 \cos\sigma_n t + C_2 \sin\sigma_n t$$
$$- \frac{1}{\sigma_n} \int_\tau^t \mu(\xi)\, u_n(\xi) \sin\sigma_n(\xi - t)\, d\xi.$$

Substituons cette valeur de u_n dans l'intégrale du second membre, et continuons ce procédé. On obtient ainsi pour $u_n(t)$ une expression procédant suivant les puissances entières et négatives de σ_n. C'est bien l'expression cherchée [57].

β. *Méthode de Thomé.* — Introduisons dans (35, I) de nouvelles variables z et $\varphi(z)$ convenablement choisies, substituons

$$\varphi(z) = \sum_{i=0}^{n} b_i z_i$$

et étudions la nature des b_i pour $n \to \infty$. Puis écrivons l'équation différentielle sous la forme $\frac{d\varphi}{dz} + l\varphi + \psi = 0$, ψ dépendant de $\frac{d\varphi}{dz}$ et $\frac{d^2\varphi}{dz^2}$, et traitons-là comme une équation linéaire du premier ordre. Enfin, faisons $n \to \infty$ [58, 59].

2° Équation aux différences finies. — Les procédés employés ici sont analogues à celui de Liouville, mais ils exigent qu'on connaisse l'ordre, par rapport à $\frac{1}{n}$, de $\lambda_n - \lim\lambda_n$, $c_n - \lim c_n$ (Th. XVI) [60 *a*, *b*; 61].

3° Fonction génératrice. — *Méthode de Darboux.* — On considère les PT comme coefficients f_n du développement $\sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n$ de la fonction génératrice $F(x, t)$. Soient connus les points singuliers de $F(x, t)$ sur son cercle de convergence, prenons-le : $|t| = 1$, $t = e^{\theta i}$.

La méthode consiste en ce qu'on trouve une suite de fonctions

$$\omega_\nu(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{\nu,n} t^n$$

telle que

$$R_\nu(x, t) \equiv F(x, t) - \omega_\nu(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n - f_{\nu,n}) t^n$$

converge uniformément, pour $t \to e^{\theta i}$, vers une fonction $\varphi(\theta)$, pour laquelle les ν premières dérivées sont continues. On a alors

$$f_n = f_{\nu,n} + O\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad [15;\ 62].$$

4° Représentation par des intégrales. — α. *Méthode de Laplace.* — On représente la fonction en question — soit $u(x)$ — sous la forme

$$u(x) = \int f(x, t)\, \varphi(t)\, dt,$$

où $f(x, t)$ est égale à 1 dans un certain point t_0 du chemin d'intégration, pour toutes les valeurs de x en question, et tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$ dans tous les autres points t. En supposant x très grand, on considère un voisinage très petit du point $t = t_0$, où l'on remplace $\varphi(t)$ par quelques premiers termes $\sum_{i=0}^{n} a_i (t - t_0)^i$ de son développement en série, et l'on intègre, avec cette expression approchée de $\varphi(t)$, le long de tout le chemin donné. On obtient ainsi l'expression asymptotique de $u(x)$, si l'erreur commise tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$ [5c, 12a, 15; 62].

β. *Méthode du col.* — Elle est liée à la précédente. Supposons que l'on veut étudier l'intégrale $\int e^{f(x)} u(x)\, dx$, prise le long d'un certain chemin. Ici $u(x)$ varie lentement dans le domaine complexe (x) et y admet un développement de Taylor. On prend comme chemin d'intégration les lignes de plus grande pente pour $Rf(x)$ (¹), c'est-à-dire où $Rf(x)$ atteint le plus petit maximum possible et décroît le plus vite de l'un et de l'autre côté. On dit que le chemin d'intégration

(¹) Ra signifie la partie réelle de a.

passe par (ou est très voisin de) un *col*, déterminé par $\frac{df(x)}{dx} = 0$, des régions où $Rf(x)$ est positif vers celles où $Rf(x)$ est négatif et très grand en valeur absolue. C'est l'intégration auprès des cols qui donne essentiellement la valeur de notre intégrale. Là on utilise le développement de Taylor de $u(x)$ [15; 62].

5° Méthodes de comparaison. — On compare $\varphi_n(x; p)$ avec $\varphi_n(x, p_1)$, $p_1(x)$ étant choisie de telle façon que la valeur précise ou asymptotique de $\varphi_n(x; p_1)$ soit connue.

α. *Méthode de M. S. Bernstein* [63]. — Prenons le cas où

$$p(x) = \frac{q(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

$q(x)$ étant continue dans $(-1, 1)$, et considérons $q(x)$ comme limite d'un polynome $q_m(x)$ de degré m, pour $m \to \infty$ (en vertu du théorème de Weierstrass). Or, nous savons [*voir* (36, I)] que

$$\left| \varphi_n\left(x; \frac{q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right) - \varphi_n\left(x; \frac{q_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right) \right| \to 0 \qquad (-1 \leqq x \leqq 1; \ m \to \infty),$$

quel que soit *n fini*. On démontre que cela subsiste même *pour n infini*, $q(x)$ étant assujetti à certaines conditions de continuité. Cela exige une étude du déterminant (12, II), qui fournit l'expression cherchée. Cette méthode met en évidence la relation intime entre la théorie des polynomes de Tchebichef et celle de la meilleure approximation de fonctions continues à l'aide de polynomes.

β. *Méthode de M. Szegö* [64]. — Considérons le cas où

$$p(x) = \prod_{\nu=1}^{m} |x - x_\nu|^{\mu_\nu} q(x)$$

$$\left[\begin{array}{l} -1 \leqq x \leqq 1; \ -1 \leqq x_\nu \leqq 1; \ \mu_\nu \geqq 0, \ \mu_\nu \geqq -\frac{1}{2} \text{ pour } x_\nu = \pm 1; \\ 0 < q' < q(x) < q'' \text{ dans } (-1, 1), \ q(x) \text{ est (R) intégrable dans } (-1, 1) \end{array} \right].$$

On pose $\pi(\theta) = p(\cos\theta)\,|\sin\theta|$ (*voir* le n° 11, Chap. I), et l'on compare $\varphi_n(z; \pi)$ avec $\varphi_n(z; \pi_{1,2})$, où $\pi_{1,2}(\theta) = \frac{1}{t_{1,2}(\theta)}$, $t_{1,2}(\theta)$ étant polynomes trigonométriques positifs convenablement choisis. L'expression précise de $\varphi_n(z; \pi_{1,2})$ étant connue, à partir d'une certaine valeur de n, on trouve d'abord l'expression asymptotique de

$$\varphi_n(z; \pi) \qquad (|z| = 1; n \rightarrow \infty),$$

puis celle de $\varphi_n(x, -1, 1; p)$, à l'aide de (82, I), dans tels points x à l'intérieur de $(-1, 1)$, où $p(x)$ satisfait à certaines conditions concernant l'existence de dérivées.

Remarques. — 1° Si l'on connaît l'expression asymptotique de

$$\varphi_n(x; p) \qquad (n \rightarrow \infty),$$

$p(x)$ étant une S-fonction (théorème XX), alors, en tenant compte du théorème XXI (1)°, on peut trouver l'expression asymptotique de $\varphi_n(x; p\Pi)$, $\Pi(x)$-polynome.

2° En admettant l'existence de $p'(x)$ dans (a, b), on peut obtenir dans beaucoup de cas — et cela d'une manière élémentaire — l'expression asymptotique de $\varphi_n(x; a, b; p)$ (aussi de λ_n, c_n, ...), à l'aide de (26, II).

CAS D'UN INTERVALLE (a, b) INFINI.

Ce cas attend des chercheurs, car jusqu'à présent ce sont les PT classiques qui ont été étudiés (on trouve beaucoup de formules portant sur ces polynomes dans [65]).

8. Distribution des zéros de $\varphi_n(x)$. — En raisonnant comme ci-dessus (théorème XII), on démontre que : 1° *dans l'intervalle* (a, ∞) *ou* $(-\infty, b)$ $(a, b$ *finis*), $x_{n,n}$ *ou* $x_{1,n}$ *tend pour* $n \rightarrow \infty$, *vers* $+\infty$ *ou* $-\infty$ *respectivement;* 2° *dans* $(-\infty, \infty)$ *l'une au moins de* $|x_{1,n}|$, $|x_{n,n}|$ *croît indéfiniment.* La distribution générale des zéros est intimement liée au caractère — déterminé ou non — du problème correspondant des moments [1]; ils peuvent devenir, pour $n \rightarrow \infty$, partout denses dans l'intervalle en question, ou chacun d'eux tend vers une position déterminée. Cela sera discuté dans le second fascicule.

9. Valeur asymptotique de a_n. — En vertu des théorèmes X, XX,

---

[1] Si le problème correspondant des moments est déterminé, alors dans tous les cas, $x_{1,n} \rightarrow a$, $x_{n,n} \rightarrow b(n \rightarrow \infty)$; *voir* la remarque (1), p. 8.

on peut affirmer que *si dans un intervalle partiel* (α, β) $p(x)$ *est une S-fonction, alors* $a_n(a, b; p) < A\left(\frac{4}{\beta-\alpha}\right)^n$ (A *ne dépendant pas de* n); *donc* $a_n(a, b; p) \to 0$, *pour* $n \to \infty$, *si* $\beta - \alpha > 4$.

10. **Expression asymptotique de** $\varphi_n(x)$. — On applique ici toutes les méthodes indiquées plus haut, surtout la représentation intégrale, en utilisant la méthode de Laplace et celle du col. Cette dernière permet de trouver l'expression asymptotique de $\varphi_n(x)$, même *quand* n *et* x, *tous deux, deviennent très grands* [67].

La discussion du n° 7 s'applique ici, en ce qui concerne a_n, b_n, ..., $\varphi_n(x)$, dans des cas assez étendus.

11. **Sommaire :**

(14, I)

$$\left\{\begin{aligned}
&U_n(x) \equiv \sqrt{\frac{\pi\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+\beta)\Gamma(n+1)}{(2n+\alpha+\beta-1)\Gamma(n+\alpha+\beta-1)\Gamma^2\left(n+\frac{1}{2}\right)}}\\
&\qquad \times (-1)^n(1-\xi^{-1})^{2\alpha-2}(1+\xi^{-1})^{2\beta-2}\xi^{-n+\alpha+\beta-3}\\
&\qquad \times \varphi_n[x;\, 0,\, 1;\, t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}]\\
&\quad = (\xi-1)^{\alpha-\frac{3}{2}}(\xi+1)^{\beta-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2(2n-1)}\\
&\quad \times \frac{d^2}{d\xi^2}(\xi-1)^{\alpha-\frac{1}{2}}(\xi+1)^{\beta-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2.4(2n-1)(2n-3)}\\
&\quad \times \frac{d^4}{d\xi^4}(\xi-1)^{\alpha+\frac{1}{2}}(\xi+1)^{\beta+\frac{1}{2}} + \ldots\\
&\qquad\qquad \left[x = -\frac{(1-\xi)^2}{4\xi};\ |\xi| > 1\right] \quad [15].\\
&\sqrt{\frac{\pi\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+\beta)\Gamma(n+1)}{(2n+\alpha+\beta-1)\Gamma(n+\alpha+\beta-1)\Gamma^2\left(n+\frac{1}{2}\right)}}\\
&\quad \times (-1)^n\varphi_n[x;\, 0,\, 1;\, t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}]\\
&= (\sin\varphi)^{\frac{1}{2}-\alpha}(\cos\varphi)^{\frac{1}{2}-\beta}\left\{\left[1 - \frac{(2\alpha-1)(2\beta-1)}{4(2n-1)}\right]\right.\\
&\quad \times \cos\left[(2n+\alpha+\beta-1)\varphi - \frac{\pi}{4}(2\alpha-1)\right]\\
&\quad - \sin\left[(2n+\alpha+\beta-1)\varphi - \frac{\pi}{4}(2\alpha-1)\right]\\
&\quad \times \left.\left[\frac{(2\alpha-1)(2\alpha-3)}{8(2n-1)}\cot\varphi - \frac{(2\beta-1)(2\beta-3)}{8(2n-1)}\tan\!\mathrm{g}\,\varphi\right]\right\} + \frac{\tau_n}{n^2}\\
&\qquad (x = \sin^2\varphi;\ 0 < x < 1) \quad [15].
\end{aligned}\right.$$

(14 *bis*, I)

$$
\left\{
\begin{aligned}
\mathrm{P}_n(x) &\equiv \sqrt{\frac{2}{2n+1}}\,\varphi_n(x;\ -1,\ 1;\ 1) \\
&= \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n\Gamma(n+1)}\,\frac{1}{\sqrt{1-\xi^{-2}}} \\
&\quad\times\left[\xi^n - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n-1}\,\frac{\xi^{n-2}}{1-\xi^{-2}} + \frac{1.3}{2.4}\right. \\
&\qquad\left.\times\frac{1.3}{(2n-1)(2n-3)}\,\frac{\xi^{n-4}}{(1-\xi^{-2})^2} + \ldots\right] \\
&\qquad (\xi = x + \sqrt{x^2-1};\ |\xi| > 1). \\
\mathrm{P}_n(x) &= \frac{4}{\pi}\cdot\frac{2.4\ldots 2n}{1.3\ldots(2n+1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi}} \qquad [12a,\ 15,\ 1c,\ 71] \\
&\quad\times\left\{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi - \frac{\pi}{4}\right] - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+3}\right. \\
&\qquad\times\frac{\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\varphi - \frac{3\pi}{4}\right]}{2\sin\varphi} + \frac{1.3}{2.4} \\
&\qquad\left.\times\frac{1.3}{(2n+3)(2n+5)}\cdot\frac{\cos\left[\left(n+\frac{5}{2}\right)\varphi - \frac{5\pi}{4}\right]}{(2\sin\varphi)^2} + \ldots\right\} \\
&\qquad (x = \cos\varphi;\ -1 < x < 1).
\end{aligned}
\right.
$$

$\left[\text{Si l'on prend ici les } k \text{ premiers termes, l'erreur sera } \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^{k+\frac{1}{2}}}\right)\right]$ (¹).

(14, L)

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\varphi_n(x;\ 0,\ \infty;\ e^{-t}t^{\alpha-1}) \\
&\quad = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{\pi}}(-x)^{\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}}e^{\frac{x}{2}}n^{-\frac{1}{4}}e^{2\sqrt{-xn}}\left[1 + \frac{c_1}{\sqrt{n}} + \frac{c_2}{(\sqrt{n})^2} + \ldots\right] \\
&\qquad\qquad (x \text{ n'est pas réel positif}); \\
&\varphi_n(x,\ 0,\ \infty;\ e^{-t}t^{\alpha-1}) \qquad [66a,\ b]. \\
&\quad = (-1)^n\sqrt{\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha)}}\left[\frac{e^{\frac{hx}{2}}}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}}n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right. \\
&\qquad\qquad \left.\times\cos\left(2\sqrt{nx} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\alpha}{2}\right) + e^x\mathrm{R}_n\right] \\
&\qquad \mathrm{R}_n = x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\,\mathrm{O}\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}}\right) + x^{\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}}\,\mathrm{O}\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}+k}\right) \\
&\qquad \left(n^{-\delta} \leqq x \leqq n^{\varepsilon},\ 0 < \delta < 1,\ 0 < \varepsilon < \frac{1}{3}k,\ > \frac{3\varepsilon}{2}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

(¹) $2.\dfrac{2.4\ldots 2n}{1.3\ldots(2n+1)} = \sqrt{\dfrac{\pi}{n}}\left(1 - \dfrac{3}{8n} + \dfrac{25}{128n^2} + \ldots\right).$

$$(14\,bis,\ \mathrm{L})\quad \varphi_n(x;\ 0,\ \infty;\ t^{\alpha-1}e^{-t}) = (-1)^n \frac{x^{-\frac{\alpha-1}{2}} e^{\frac{x}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}(nx)^{\frac{1}{4}}} \left\{ \cos\left(2\sqrt{nx} - \frac{2\alpha-1}{4}\pi\right) \right.$$

$$+ \left[\frac{x^2}{12} - \frac{\alpha}{2}x + \frac{1}{16} - \frac{(\alpha-1)^2}{4}\right]$$

$$\left. \times (nx)^{-\frac{1}{2}} \sin\left(2\sqrt{nx} - \frac{2\alpha-1}{4}\pi\right) + \frac{\tau_n}{n} \right\}$$

$$\left(0 < c \leq x \leq d;\ c,\ d \text{ — finis, arbitraires; } \alpha > \frac{1}{2}\right). \quad [68].$$

$$(14,\ \mathrm{H})\quad \varphi_n(x;\ -\infty,\ \infty;\ e^{-t^2}) = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\pi^{\frac{1}{4}}} \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{4}} \left[\cos\left(x\sqrt{2n} + \frac{n\pi}{2}\right) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{2}\right)(2n)^{-\frac{1}{2}} \sin\left(x\sqrt{2n} + \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{\tau_n}{n} \right]$$

$$(x \text{ fini arbitraire}) \quad [68].$$

Pour passer des polynomes de Laguerre à ceux d'Hermite, on utilise (68, I). Pour le passage inverse, on utilise

$$(15)\qquad \varphi_n(x;\ 0,\ \infty;\ t^{\alpha-1}e^{-t}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)} \sqrt{\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)}}$$

$$\times \int_0^\pi W_n(\sqrt{x}\cos\varphi)\sin^{2\alpha}\varphi\, d\varphi$$

$$\left[\alpha > \frac{1}{2};\ W_n(x) \equiv (-2)^n \frac{\Gamma(n+1)\pi^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\Gamma(2n+1)}} \varphi_{2n}(x;\ -\infty,\ \infty;\ e^{-t^2})\right] \quad [68].$$

$$(16)\quad \left\{ \begin{array}{l} p(x) \equiv \dfrac{q(x)}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad 0 < l < q(x) < L(-1 \leq x \leq 1); \\ |q(x+\delta) - q(x)|\,|\log|\delta||^{1+\varepsilon} < A(\varepsilon,\ A > 0). \\ \varphi_n(x;\ -1,\ -1;\ p)\sqrt{q(x)} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos(n\varphi + \psi) + o(1) \\ \left[-1 \leq x = \cos\varphi \leq 1;\ \psi = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} \dfrac{\log q(z) - \log q(x)}{z - x}\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-z^2}}\, dz\right]; \end{array} \right. \quad [63].$$

$$
(17)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\displaystyle p(x) = q(x)\prod_{\nu=1}^{m} | x - x_\nu |^{\mu_\nu} \\
\displaystyle \Big[-1 \leqq x,\ x_\nu \leqq 1;\ \mu_\nu \geqq 0;\ \mu_\nu \gneqq -\frac{1}{2} \text{ pour } x_\nu = \pm 1; \\
\quad 0 < q' < q(x) < q''(-1 \leqq x \leqq 1), \\
\quad q(x) \text{ est (R) intégrable dans } (-1,\ 1) \Big] : \\
(\alpha)\quad \displaystyle \varphi_n(\xi;\ -1,\ 1;\ p) = \sqrt{\frac{2}{\pi \sin\alpha}}\, \frac{\mathrm{R}\left\{ e^{-i\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha - \frac{\pi}{4}\right]} \right\}}{\Delta(p;\ e^{i\alpha})} + o(1), \\
\quad -1 < \xi = \cos\alpha < 1;\ p(\xi) > 0; \\
\quad p'(\xi) \text{ et } p''(\xi) \text{ existent}; \\
\quad \displaystyle \Delta(p;\ z) = e^{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \log p(\cos\theta) \frac{1+ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}} d\theta} \\
(\beta)\quad p(x)\sqrt{1-x^2} = r(x) > 0 \quad \text{pour } x = 1 \text{ (ou } x = -1), \\
\quad r'(1) \text{ et } r''(1) \text{ existent} \\
\quad [\text{ou } r'(-1) \text{ et } r''(-1) \text{ existent}] : \\
\quad \displaystyle \varphi_n(1;\ -1,\ 1;\ p) = \sqrt{\frac{2}{\pi r(1)}} + o(1) \\
\quad \displaystyle \left[\text{ou } \varphi_n(-1;\ -1,\ 1;\ p) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi r(-1)}} + o(1) \right].
\end{array}
\right. \qquad [64].
$$

Remarquons qu'on peut différentier (14, I, L, H), τ_n y lésignant, d'une façon générale, une fonction de x restant finie pour $n \to \infty$, sa dérivée étant de la forme

$$n\tau_n \quad (14,\ \mathrm{I}), \qquad \sqrt{n}\,\tau_n \quad (14,\ \mathrm{L},\ \mathrm{H}) \quad [\textit{voir} \text{ th. IV, } 2^\circ].$$

On peut donc, moyennant (5, 6, II), trouver l'expression asymptotique de $\mathrm{K}_n(x, y)$ et $\mathrm{K}_n(x)$, pour $n \to \infty$.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. STIELTJES (Th.). — *Œuvres complètes* (Groningen, 1918), t. II : *a.* p. 402-566; *b.* p. 73-88; *c.* p. 236-252; *d.* p. 253-262.
2. LEBESGUE (H.). — *Leçons sur l'intégration*, 2e édition (Paris, 1928).
3. HOBSON (E. W.). — *The Theory of Functions of a Real Variable*, 2e édition (Cambridge, 1921), t. I.
4. PERRON (O.). — *Die Lehre von den Kettenbrüchen* (Leipzig, 1913).

5. *Correspondance d'Hermite et Stieltjes* (Paris, Gauthier-Villars, 1905), t. II : *a.* lettre 385, *b.* lettre 239; *c.* lettre 314.
6. CARLEMAN (T.). — *Sur les équations intégrales singulières* (Uppsala, 1923).
7. JORDAN (C.). — *Cours d'Analyse*, 2e édition (Paris, 1893), t. I, p. 368-375.
8. TCHEBICHEF (P.). — *Œuvres complètes* (Saint-Pétersbourg, 1907), t. I, p. 203-230, 381-384, 473-498, 501-508, 541-560 (en français).
9. TCHEBICHEF (P.). — *Ibid.*, t. II, p. 61-68, 219-242, 405-417.
10. SOKHOTSKI (J.). — *Théorie de résidus intégraux* (Thèse, en russe; Saint-Pétersbourg, 1868).
11. SOKHOTSKI (J.). — *Sur les intégrales définies et sur les fonctions employées dans les développements en séries* (Thèse, en russe, Saint-Pétersbourg, 1873).
12. HEINE (E.). — *Handbuch der Kugelfunktionen*, 2e édition (Berlin, 1878) : *a.* t. I, *b.* t. II.
13. POSSÉ (C.). — *Sur quelques applications des fractions continues algébriques* (Saint-Pétersbourg, 1886).
14. CHOKHATE (J.). — *Comptes rendus*, t. 191, 1930, p. 474-475.
15. DARBOUX (G.). — Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres (*Journ. de Math.*, 3e série, t. 4, 1878, p. 5-56, 377-416).
16. CHOKHATE (J.). — Sur le développement de l'intégrale $\int_a^b \frac{p(y)}{x-y}$ en fraction continue et sur les polynomes de Tchebichef (*Rendiconti di Palermo*, t. 47, 1923, p. 25-46).
17. CHOKHATE (J.). — *Comptes rendus*, t. 189, 1929, p. 618-620.
18. LEGENDRE. — *Mémoires de Mathématique et de Physique présentés à l'Académie royale des sciences par divers savants*, t. X (Paris, 1785), p. 411-434.
19. LEGENDRE. — *Mémoires de Mathématique et de Physique tirés des registres de l'Académie royale des sciences* (année 1784; Paris, 1787), p. 370-389.
20. JACOBI. — *Gesammelte Werke* (Berlin, 1891), t. 6, p. 184-202.
21. HILLE (E.). — *Proceedings National Academy of Sciences* (U. S. A.), t. 12, 1926, p. 261-269, 348-352.
22. LAGUERRE. — *Œuvres* (Paris, 1898), t. I : *a.* p. 428-437; *b.* p. 322-324; *c.* p. 415-419.
23. SONINE (N.). — *Mathematische Annalen*, t. 16, 1880, p. 1-80.
24. LAPLACE. — *Mécanique céleste*, t. IV, Livre X.
25. HERMITE (Ch.). — *Œuvres* (Paris, 1908), t. II, p. 293-346.
26. DARMOIS (G.). — *Statistique Mathématique* (Paris, 1928).
27. KRAWTCHOUK (M.). — *Comptes rendus*, t. 189, 1929, p. 620-623.
28. STEKLOFF (W.). — Sur la théorie de fermeture (*Mémoires de l'Académie des Sciences, Saint-Pétersbourg*, vol. 30, 1911, p. 32-86).
29. ORLOFF (G.). — *Sur quelques polynomes à une ou plusieurs variables* (Thèse, en russe, Saint-Pétersbourg, 1881).
30. APPELL (P.). — Sur les fonctions hypergéométriques à plusieurs variables, les polynomes d'Hermite et autres fonctions sphériques dans l'hyper-

espace (avec une bibliographie) (*Mémorial des sciences mathématiques*, fasc. III; Paris, 1925).

31. Szego (G.). — Ueber orthogonale polynome die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören (*Math. Zeitschrift*, t 9, 1921, p. 218-270).

32. Szego. — Ueber die Entwickelung einer analytischen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems (*Math. Annalen*, t. 82, 1921, p. 188-212).

33. Szego. — Beitrage zur theorie der Toeplitzschen Formen : (*a*) *Math. Zeitschrift*, t. 6, 1920, p. 167-202; *b*. t. 9, 1921, p. 169-190.

34. Szego (G.). — Ueber die Entwickelung einer willkürlichen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems (*Math. Zeitschrift*, t. 12, 1922, p. 61-94).

35. Fejér (L.). — Ueber trigonometrische Polynome (*Crelle*, t. 146, 1916, p. 53-82),

36. Christoffel (E B). — *Crelle*, t. 55, 1858, p. 61-82.

37. Shohat (J). — *Proceedings International Mathematical Congress* (Toronto, 1928), t. I, p. 611-618)

38. Stieltjes (Th.). — *Œuvres complètes* (Groningen, 1914), t. I : *a*. p. 434-439; *b*. p. 377-396.

39. Nielsen (N.). — *Théorie des fonctions métasphériques* (Paris, 1911).

40. Le Roy (E). — Sur les séries divergentes (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. II, 1900, p. 317-430).

41. Szego (G.). — *Math. Zeitschrift*, t. 25, 1926, p. 87-115.

42. Abramesco (N). — *Annali di Matematica*, 3e série, t. 31, 1922, p. 207-249.

43. Markoff (A.).. — *Math. Annalen*, t. 27, 1886. *a*. p. 177-182; *b*. p. 143-150.

44. Bruns (H). — *Crelle*, t. 90, 1881, p. 322-328.

45. Markoff (A.). — *Calcul des probabilités*, 4e édition (en russe) (Moscou, 1924).

46. Neumann (E. R.). — *Jahresberichte d. Deutschen Math. Vereinigung*, t. 30, 1921, p. 15-35.

47. Bottema (O.). — *Koninklijke Akad. von Wetenschappen te Amsterdam*, t. 33, 1930, p 495-503.

48. Goursat (E). — *Cours d'Analyse*, 2e édition, 1915, t. III, p. 539-541.

49. Gram (J. P.). — *Crelle*, t. 94, 1883, p. 41-73.

50. Shohat (J.). — *Transactions American Math. Society*, t. 29, 1927, p. 569-583.

51. Szego (G.). — *Math. Zeitschrift : a*. t. 4, 1919, p. 139-151; *b*. t. 1, 1918, p. 341 356; *c*. t. 25, 1926, p. 87-115.

52. Hille (E.). — A Class of Reciprocal Functions (avec une bibliographie sur les polynomes d'Hermite) (*Annals of Mathematics*, t. 27, 1926, p. 427-464).

53. Fejér (L.). — *Math. Zeitschrift*, t. 24, 1925, p. 285-298.

54. Hamburger (H.). — Ueber eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblem, I, II, III (*Math. Annalen*, t. 81, 82, 1920-1921, p. 235-319, 120-164, 168-187).

55. Blumenthal (O.). — *Ueber die Entwickelung einer willkurlichen Funktion nach den Nennern des Kettenbruches für* $\int_{-\infty}^{0}\frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{z-\xi}$ (Thèse, Göttingen, 1898).

56. POINCARÉ (H.). — *American Journal of Mathematics*, t. 7, 1885, p. 203-258.
57. STEKLOFF (W.) — Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions définies par les équations différentielles du second ordre (*Communications Soc. Math. de Kharkoff*, 1907, p. 1-103)
58. THOMÉ (L. W.). — *Crelle*, t 66, 1866, p. 322 337
59. POSSÉ (C.). — *Sur les fonctions analogues à celles de Legendre* (Thèse, en russe; Saint-Pétersbourg, 1873)
60. FORD (W. B.). — *a Annali di Matematica*, 3e série, t. 13, 1907, p. 263-328, *b Transactions American Math. Society*, t. 10, 1909, p. 319-336.
61. SHOHAT (J.) — *American Math. Monthly*, t. 33, 1926, p. 354-361.
62. COURANT (R.) et HILBERT (D.). — *Methoden der Mathematischen Physik*, I (Berlin, 1924).
63. BERNSTEIN (S.). — *Journal de Mathématiques*, t 9, 1930, p 127-177.
64. SZEGO (G). — *Math. Annalen*, t. 86, 1922, p. 114-139.
65. PÓLYA (G.) et SZEGO (G) — *Aufgabe und Lehrstäze aus der Analysis*, t. II (Berlin, 1915), p. 91-97.
66. PERRON (O.). — *a. Archiv für Mathematik und Physik*, t. 22, 1919, p. 329-340; *b. Crelle*, t. 151, 1921, p. 63-78
67 PLANCHEREL (M.) et ROTACH (W.). — Sur les valeurs asymptotiques des polynomes d'Hermite (*Commentarii Mathematicæ Helvetii*, t. 1, 1929, p. 227-254).
68. USPENSKY (J.) — On the development of Arbitrary Fonctions in Series of Hermite and Laguerre Polynomiales (*Annals of Mathematics*, t. 28, 1927, p. 593-619).
69. VAN VEEN (S. C.) — *Mathematische Annalen*, t. 105, 1931, p 408 436.
70 JORDAN (Ch.) — *Proceedings London Math. Soc.*, t. 20, 1926, p 297-325.
71. HOBSON (E. W). — *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics* (Cambridge, 1931).

TABLE DES MATIÈRES.