MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

G. EVANS

Stabilité et dynamique de la production dans l'économie politique

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 56 (1932)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1932__56__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT
Membre de l'Institut,
Professeur a la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE LVI

Stabilité et Dynamique de la Production dans l'Économie Politique

PAR M. G. EVANS
Professeur de Mathématiques pures au Rice Institute, Houston, Texas.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET C^ie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1932

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

STABILITÉ ET DYNAMIQUE

DE LA

PRODUCTION DANS L'ÉCONOMIE POLITIQUE

Par M. G. EVANS,

Professeur de Mathématiques pures au Rice Institute, Houston (Texas).

I. — Introduction.

1. **Préliminaires.** — Il n'est pas question de présenter ici une analyse de toute la théorie mathématique de l'économie politique et de ses développements modernes. Pour cela le lecteur se reportera aux traités, comme celui de Pareto [20, *c*], qui donnent beaucoup de détails sur l'équilibre économique, surtout du point de vue d'une théorie de la valeur. Ici nous voulons exposer des problèmes qui auront peut-être un nouvel intérêt pour les économistes, étant, soit nouveaux, soit considérés ous un aspect nouveau et peut-être suggestif.

Il n'est pas possible non plus de donner en quelques pages une bibliographie complète d'ouvrages sur les applications des mathématiques à l'économie politique. Nous citons seulement les ouvrages nécessaires pour notre exposition, et renvoyons le lecteur au livre de Jevons [15] et à la traduction anglaise du livre de Cournot [4] pour la bibliographie avant 1896, et aux traités modernes pour des renseignements plus récents. M. Zawadski donne un exposé historique et une évaluation critique de l'économie mathématique [29].

Les économistes d'aujourd'hui n'ont pas besoin d'être convaincus de l'utilité, et même de la nécessité, d'employer des raisonnements mathématiques pour l'analyse systématique d'une science où une arithmétique existe de son propre compte, avec la monnaie, — au moins s'ils n'envisagent pas l'économie politique comme le résidu qu'on obtient en écartant tous les problèmes résolus ou résolubles. Malgré la fascination de la recherche d'un tel résidu, on peut dire que si l'on agissait ainsi on restreindrait trop la nature de cette discipline. Mais une difficulté pour l'application des mathématiques surgit plutôt d'un autre côté. Tous les mathématiciens ne sont pas persuadés au même degré qu'il y ait un véritable intérêt pour eux, à chercher des applications mathématiques parmi les problèmes de nature économique, et qu'on y rencontre des problèmes résolubles seulement par des mathématiciens. En effet, afin que les mathématiques dominent une science il faut non seulement que le raisonnement mathématique soit nécessaire, mais aussi qu'il soit intéressant pour les mathématiciens.

De tels problèmes intéressants, on peut en rencontrer dans l'analyse de la stabilité économique et de ses liens avec la théorie de la monnaie. Nous en commençons ici l'exposition, en généralisant les situations économiques au point dynamique; mais nous nous bornons presque partout à la généralisation d'un seul problème, afin de le développer plus complètement. C'est le problème du monopole de Cournot [4].

Soient en effet u le nombre d'unités d'une marchandise produites en unité de temps, par un industriel, et q le coût de cette production en unité de temps, en y comprenant les dépenses nécessaires pour placer le produit sur le marché, et soit p le prix de vente; on peut nommer $\frac{q(u)}{u}$ le prix de revient. Nous désignons par y et nous appelons la *demande*, le nombre d'unités qui sont achetées, ou qui seraient achetées sous des conditions données, sur le marché. Pour le profit nous aurons la formule

$$\pi = py - q. \tag{1.1}$$

Le prix de vente sera déterminé théoriquement en se basant sur certaines hypothèses qu'on admettra concernant ces quantités. En suivant l'analyse de Cournot, nous supposerons d'abord les relations suivantes :

$$q = q(u), \qquad y = f(p), \tag{1.2}$$

$$y = u, \tag{1.3}$$

$$d\pi = 0. \tag{1.4}$$

Ainsi nous pourrons considérer le problème comme celui du maximum d'une fonction à une seule variable indépendante; la condition (1.4) prendra ou l'une ou l'autre des formes équivalentes suivantes :

$$(1.5) \qquad p + u\frac{dp}{du} - q'(u) = 0, \qquad \{p - q'(u)\}f'(p) + f(p) = 0,$$

qui sont en effet, avec l'aide de (1.2), (1.3), des équations à une seule variable.

La quantite $q'(u) = \frac{dq}{du}$ s'appelle le *coût marginal.* On dit que le régime est à *coûts croissants* si $q'(u)$ est une fonction croissante, c'est-à-dire si $q''(u) > 0$; si $q''(u) < 0$, on dit que le phénomène est à *coûts décroissants.*

C'est là l'analyse de l'an 1838. C'est un cas particulier. Mais les questions qui nous intéressent dépendent des problèmes qui se rencontrent dans l'administration des entreprises, et ainsi doivent refléter la croissance continuelle de l'organisation technique, établie dans les affaires. Cette organisation necessite la prévoyance des situations futures, les connaissances statistiques sur les prix et les demandes, et une analyse des coûts exacts de la production, même pour un intervalle de temps assez étendu. L'ordre de considérations nécessaires est par conséquent beaucoup agrandi.

Il faut donc considerer une généralisation de l'analyse que nous venons de donner. Si le prix ne reste pas constant pendant l'intervalle de temps à envisager on doit considérer la production et la vente comme aussi variables, et prendre les quantités u, y, π comme des coefficients différentiels; au lieu du profit instantané π on doit considérer le profit total sur l'intervalle de temps (t_0, t_1)

$$(1.6) \qquad \Pi = \int_{t_0}^{t_1} \pi \, dt,$$

et il n'est guère possible de se limiter à des lois de demande aussi simples que les (1.2), parce qu'on sait que la vente d'une marchandise dépend de la manière dont change le prix, peut-être plus que du prix même. On doit donc envisager des fonctions

$$(1.7) \qquad y = f\left(p, \frac{dp}{dt}\right),$$

et aussi d'autres formes contenant des intégrales ou des différences finies; en effet la demande au temps t peut dépendre des prix à des instants différents. C'est ainsi que le calcul des variations peut entrer dans le problème économique, car il faut déterminer p comme fonction de t pour rendre maximum le profit Π sur l'intervalle de temps.

On sait que s'il existe des fonctions qui puissent donner à Π une valeur maximum, par comparaison avec les fonctions qu'on obtient en les variant de tous les deux côtés, les dites fonctions *optima* seront composées d'arcs qui satisfont à l'équation différentielle d'Euler

$$\frac{\partial \pi}{\partial p} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \pi}{\partial p'} = 0, \tag{1.8}$$

où l'on a posé $p' = \frac{dp}{dt}$. Dans notre cas, donné par les équations (1.7), (1.3), où $\pi(p, p')$ ne contient pas t explicitement, il y a une intégrale première de (1.8), donnée par $\pi - p'\frac{\partial \pi}{\partial p'} = \text{const.}$, c'est-à-dire

$$pu - q(u) - \frac{dp}{dt}\left(p - \frac{dq}{du}\right)\frac{\partial f}{\partial p'} = \text{const.},$$

et le caractère du problème par rapport aux propriétés de maxima dépend d'une manière spéciale de la nature de la fonction

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial p'^2} = \left(p - \frac{dq}{du}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial p'^2} - \frac{d^2 q}{du^2}\left(\frac{\partial f}{\partial p'}\right)^2.$$

Mais il faut préciser beaucoup les fonctions qui entrent dans ces formules pour avoir un problème économique plutôt qu'un problème général du calcul des variations. Ainsi nous chercherons à éviter en grande partie les difficultés mathématiques en nous bornant aux cas et aux méthodes élémentaires. La remarque suivante sur les fonctions quadratiques nous sera utile.

La fonction $\varphi(x) = Lx^2 + Mx + N$ possède en effet, si $L \neq 0$, un seul maximum ou un seul minimum; cela aura lieu pour la valeur

$$x = -\frac{M}{2L}, \tag{1.9}$$

où la dérivée $\frac{d\varphi}{dx}$ égale zéro. Il y aura un maximum de $\varphi(x)$ pour cette valeur si $L < 0$, un minimum si $L > 0$,

$$\left\{\begin{array}{ll}\varphi\left(-\frac{M}{2L}\right) \text{ max.} & \text{si } L < 0, \\ \varphi\left(-\frac{M}{2L}\right) \text{ min.} & \text{si } L > 0.\end{array}\right. \tag{1,10}$$

En effet la dérivée seconde $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ est constante et égale à $2L$.

La valeur de ce maximum ou minimum est

$$\varphi\left(-\frac{M}{2L}\right) = N - \frac{M^2}{4L}. \tag{1.11}$$

Afin que $\varphi(0)$ soit plus grand que $\varphi(x)$ pour tout autre x, il faut et il suffit que

$$0 = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=0} = M, \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 2L < 0. \tag{1.12}$$

Cette remarque s'applique à la fonction $\varphi(x)$ définie pour toute valeur de x. Mais si l'on considère $\varphi(x)$ seulement pour un intervalle de valeurs de x, afin que les formules et les critères donnés soient valables il faut que les extrémités de cet intervalle ne donnent pas de valeurs de $\varphi(x)$ importantes pour le problème. C'est une critique qui devrait altérer la simplicité de la théorie généralement reçue de l'équilibre économique, parce qu'on n'y peut pas admettre des valeurs négatives de maintes quantités; les valeurs nulles se trouvent aux limites des domaines.

II. — Illustrations élémentaires.

2. Détermination des prix. — Il n'y a pas unanimité sur les buts de l'Économie Politique, même comme science mathématique. Beaucoup d'économistes croient que les théories mathématiques n'ont pas d'applications numériques possibles [**21**, p. 293; **29**, p. 320]. Pour d'autres, les buts pratiques existent mais ne dominent pas la théorie [**22**]. Par exemple, dans un cas particulier de la théorie de l'equilibre, comment pourrait-on résoudre 5209 équations portant sur 5209 inconnues? N'a-t-on pas fait dejà beaucoup lorsque l'on a réussi à trouver précisément 5209 telles équations, pas plus, pas moins, afin de savoir que les 5209 inconnues sont déterminées? On n'applique pas, et cela vaut mieux, ce raisonnement à la théorie cinétique des gaz.

En effet, s'il n'y a pas de contrôle numérique possible, comment peut-on être assuré que ce sont précisément ces équations, et pas d'autres, qui expliquent les phénomènes réels? D'abord c'est demander beaucoup à l'esprit humain de construire *a priori* de telles théories, et d'être certain que les phénomènes objectifs doivent s'encadrer dans les tableaux formés. Nous voyons déjà qu'il y a d'autres hypothèses admissibles. Ensuite, si l'on veut entrer dans les détails, comment savoir que les équations obtenues sont compatibles, afin que des solutions existent, et qu'elles sont indépendantes, afin que le système de solutions soit déterminé?

L'existence d'un nombre total d'équations égal au nombre d'inconnues dans le cas d'une valeur extrémale d'une fonction de plusieurs variables n'est qu'un résultat formel, soit si ces variables sont indépendantes, soit liées deja entre elles par plusieurs équations données. Mais on ne démontre pas ainsi qu'il y a vraiment un maximum ou même une valeur extrémale. M. Amoroso s'est occupe dernièrement de cette question d'independance, en faisant des hypothèses sur la valeur ou l'ophélimité totale [1, *b*].

Toutefois, on peut donner quelques illustrations de théories simples bien applicables.

Le problème élémentaire du monopole, exprimé au moyen des équations (1.1) à (1.4), se réduit à la connaissance numérique des deux fonctions $q(u)$, $f(p)$. En effet, on peut supposer de connaître assez bien la fonction $q(u)$, qui n'est que le résultat final de l'analyse des coûts, dont la connaissance n'est qu'une question de comptabilité. Mais la fonction qui représente la loi de la demande semble être calculable seulement après une lente et difficile étude statistique, entreprise individuellement pour chaque marchandise. Pour simplifier le problème, on devra substituer pour cette fonction une approximation comprenant seulement plusieurs constantes arbitraires.

Les approximations linéaires sont valables si les intervalles considérés ne sont pas trop étendus. Supposons donc que notre industriel représente la demande pour sa marchandise par une fonction linéaire, dont nous supposons le gradient négatif

$$y = ap + b, \qquad a < 0, \tag{2.1}$$

et dont il peut déterminer les coefficients a, b en faisant deux expériences sur le marché avec des prix de vente différents. Pour représenter la fonction de coût, laquelle il connaît mieux, supposons qu'il pose une fonction quadratique

$$q = \mathrm{A}u^2 + \mathrm{B}u + \mathrm{C}. \tag{2.2}$$

Avec ces simplifications, et en posant $y = u$, nous aurons pour le profit la formule

$$\pi = a(1 - \mathrm{A}a)p^2 + (b - 2\mathrm{A}ab - \mathrm{B}a)p - \mathrm{A}b^2 - \mathrm{B}b - \mathrm{C}. \tag{2.3}$$

Pour cette fonction quadratique nous écrirons immédiatement la valeur optimum de p et la valeur correspondante de $u = ap + b$,

$$p = \frac{b - 2\mathrm{A}ab - \mathrm{B}a}{-2a(1 - \mathrm{A}a)}, \qquad u = \frac{b + \mathrm{B}a}{2(1 - \mathrm{A}a)}, \tag{2.4}$$

et nous aurons

$$\frac{d^2\pi}{dp^2} = 2a(1 - \mathrm{A}a). \tag{2.5}$$

Le profit pour les valeurs (2.4) se calcule par moyen de (1.11). On trouve

$$\pi = -\frac{1}{a}\frac{(b + \mathrm{B}a)^2}{4(1 - \mathrm{A}a)} - \mathrm{C}. \tag{2.6}$$

C'est une quantité qui peut être négative, et représenter la perte minimum.

Les valeurs données par (2.4), si elles sont positives, produisent donc un maximum du profit dans le cas $(1 - \mathrm{A}a) > 0$, étant $a < 0$. Cette condition est donc satisfaite si le régime est à coûts croissants, $\mathrm{A} > 0$.

Le prix determiné par (2.4) peut-être ne sera pas suffisamment exact, mais il donnera à l'industriel un nouveau renseignement sur la demande, si dans le cas actuel celle-ci ne se trouve pas égale a u; l'industriel pourra par conséquent corriger encore les coefficients dans l'expression (2.1), et determiner une seconde approximation p pour le prix optimum; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il le trouve avec une approximation suffisante. Ainsi il aura une solution pratique de son problème, pour son plus grand profit, dans tous les cas où les hypothèses restent valables, c'est-à-dire si la demande est fonction de p, et le coût de u, et si u est tenu égal à la demande.

Le problème est différent, si par exemple on suppose que le prix de vente soit fixé par l'État. Dans ce cas l'industriel cherche seulement à rendre maximum son profit, avec p donné; c'est-à-dire en choisissant une valeur convenable de u dans la formule

$$\pi = pu - Au^2 - Bu - C = -Au^2 + (p - B)u - C,$$

p étant une constante. On aura donc

$$u = \frac{p - B}{2A}, \tag{2.7}$$

qui donne u comme fonction de p et représente une *fonction d'offre* pour l'industriel. Il n'y avait pas de fonction d'offre dans le premier problème du monopole.

Il y a un maximum de π dans le cas $A > 0$, car $\frac{d^2\pi}{du^2} = -2A$.

Si p est trop élevé, l'industriel ne pourra pas vendre tout son produit; pour le vendre il faut que $y \geqq u$. Posons donc $y = u$. Nous aurons

$$ap + b = \frac{p - B}{2A},$$

d'où

$$u = \frac{b + Ba}{1 - 2Aa}, \qquad p = \frac{2Ab + B}{1 - 2Aa}. \tag{2.8}$$

Avec l'hypothèse que A soit > 0 et que les autres constantes soient choisies de maniere que u et p de (2.8) soient positifs, il est évident que

$$\frac{b + Ba}{1 - 2Aa} > \frac{b + Ba}{2 - 2Aa},$$

et que les valeurs correspondantes de p satisfont à l'inégalité inverse; ainsi, on comprend qu'il est possible de fixer le prix contre un monopoleur inférieur, sous ces hypothèses, à celui qu'on aurait choisi si l'on était libre, mais en augmentant en même temps la production.

Ce résultat n'est pas un théorème genéral de comparaison, parce que nous l'avons établi seulement avec des fonctions très particulieres comme fonctions de demande, et l'on doit en général considérer la dérivée seconde de $f(p)$, qui n'est pas nécessairement nulle, pour avoir un théorème comprehensif [*voir* § 7]. Les formules obtenues sont valables comme des déterminations de valeurs approximatives des quantités cherchées, mais elles ne le sont pas toujours pour déterminer l'ordre de grandeur de ces valeurs. Malgré cela, le cas de la loi de demande linéaire est assez fréquent [11], [25], pour mériter une analyse à part.

3. Théorie de dimension. — Comme seconde illustration d'application pratique, nous considererons les *dimensions* des quantités économiques, dans le sens où on les emploie dans la physique. Prenons par exemple une seule marchandise, et désignons par J l'unité de quantité de ce bien, par M l'unité de valeur monétaire, et par T l'unité de temps; ce sont les quantités fondamentales. Prenons aussi diverses quantités secondaires $x, y, \ldots$ dont les unités soient désignées par X, Y, ... L'équation dimensionnelle

$$[x] = J^{\iota} M^{\mu} T^{\tau}$$

signifie que si l'on change les unités fondamentales en leur substituant de nouvelles unités

$$J' = kJ, \qquad M' = hM, \qquad T' = rT,$$

la mesure de la nouvelle unite de x sera donnée par l'expression

$$X' = k^{\iota} h^{\mu} r^{\tau} X,$$

et par suite la mesure de x par rapport à cette unité, par la formule

$$x' = k^{-\iota} h^{-\mu} r^{-\tau} x.$$

C'est ainsi qu'on dit dans la Physique que la vitesse a la dimension *un* par rapport à la longueur et *moins un* par rapport au temps.

Le théorème principal sur les dimensions est le suivant [1] :

Si

$$[x] = J^{\iota_1} M^{\mu_1} T^{\tau_1} \qquad \text{et} \qquad [y] = J^{\iota_2} M^{\mu_2} M^{\tau_2},$$

alors

$$\left\{ \begin{aligned} [xy] &= J^{\iota_1+\iota_2} M^{\mu_1+\mu_2} T^{\tau_1+\tau_2}, \\ \left[\frac{y}{x}\right] &= J^{\iota_2-\iota_1} M^{\mu_2-\mu_1} T^{\tau_2-\tau_1}, \end{aligned} \right. \tag{3.1}$$

et si y est fonction de x,

$$\left[\frac{dy}{dx}\right] = \left[\frac{y}{x}\right]. \tag{3.2}$$

---

[1] La démonstration est presque immédiate [7, *e*, Ch. II].

Il faut observer que $x+y$, $x-y$ n'ont pas de signification comme quantités et $[x+y]$, $[x-y]$ n'ont pas de signification, excepté dans le cas où l'on ait $i_1 = i_2$, $\mu_1 = \mu_2$, $\tau_1 = \tau_2$, car c'est seulement en ce cas qu'on peut déterminer le changement des unités et des mesures respectivement à la suite d'un changement des unités fondamentales. Une conséquence immédiate de ces idées est le principe suivant :

Afin qu'une relation entre quantités économiques reste valable quelles que soient les valeurs des unités employées, il faut que tous les deux membres de l'équation subissent les mêmes modifications à la suite d'un changement quelconque des valeurs unitaires. Donc, *si l'un des membre de l'équation a une dimension donnée par rapport à une certaine unité, l'autre doit posséder la même dimension pour cette unité*. C'est là un principe ou un criterium qu'on peut employer pour reconnaître une loi théorique de l'économie politique : *elle doit être susceptible d'une telle expression.*

Pour les quantités qui comparaissent dans les formules du problème du monopole, nous avons les relations

$$[yt] = [ut] = \mathrm{J}, \qquad [qt] = [\pi t] = \mathrm{M},$$

car u, y, π sont définies par unité de temps. On a aussi

$$[put] = \mathrm{M}.$$

Il s'ensuit, en rappelant les (3.1) (3.2),

$$(3.3) \qquad \left\{ \begin{array}{c} [y] = [u] = \mathrm{JT}^{-1}, \qquad [q] = [\pi] = \mathrm{MT}^{-1}, \qquad p = \mathrm{MJ}^{-1}, \\ \left[\dfrac{dq}{du}\right] = \left[\dfrac{q}{u}\right] = \mathrm{MJ}^{-1}. \end{array} \right.$$

D'ailleurs, si

$$q = \mathrm{A}u^2 + \mathrm{B}u + \mathrm{C}, \qquad y = ap + b,$$

on aura

$$[\mathrm{A}u^2] = [\mathrm{B}u] = [\mathrm{C}] = [q], \qquad [ap] = [b[= [y],$$

donc

$$(3.4) \qquad \left\{ \begin{array}{c} [\mathrm{A}] = \mathrm{MTJ}^{-2}, \qquad [\mathrm{B}] = \mathrm{MJ}^{-1}, \qquad [\mathrm{C}] = \mathrm{MT}^{-1}. \\ [a] = \mathrm{J}^2\mathrm{M}^{-1}\mathrm{T}^{-1}, \qquad [b] = \mathrm{JT}^{-1}. \end{array} \right.$$

Ici nous avons considéré un seul bien. Si nous en considérons d'autres il faudra introduire de nouvelles unités fondamentales; ainsi, s'il y a k biens différents il faudra prendre k unités correspondantes J_1, J_2, $\ldots$, J_k; car on ne saurait comparer, par exemple, l'unité de cheval avec l'unité de charbon.

C'est Jevons qui a introduit la considération des dimensions dans une théorie de l'économie politique, mais d'une façon assez imprécise [15]. En effet une application possible de cette analyse est de critiquer la théorie de Jevons même. Afin de déterminer les positions d'équilibre Jevons doit faire comparer les intensités de sensation dues aux quantités infinitésimales de deux ou de plusieurs produits.... « L'intensite de sensation est seulement un autre nom du degré d'utilité qui représente l'effet favorable produit sur le corps humain par la consommation d'un produit » [15, p. 129]. Il désigne par U la dimension de cette intensité. La dimension de l'utilité totale, qu'il suppose aussi d'être une quantité, et d'avoir ainsi une dimension précise. disons E, sera donc U multiplié par la dimension du bien. Il s'ensuit que tous les biens auront la même dimension $M = \frac{E}{U}$. En effet il leur donne à tous la même dimension; mais en considérant la théorie de la dimension selon la façon un peu mystique de son temps, il n'y voit rien d'étrange. On serait tenté de dire que Jevons et son école, en cherchant l'analyse mathématique de la valeur, avaient perdu, en général, la valeur de l'analyse mathématique.

Passons maintenant de cette application théorique à une petite application pratique, aux fonctions de coût. Nous prenons une illustration hypothétique, mais numérique.

Supposons qu'il y ait une fabrique de chaussures, dans laquelle la main-d'œuvre vient à coûter 24000 francs par semaine si la production monte à 50 chaussures par jour. Nous supposons que ce coût soit proportionnel à la production et vienne à constituer tout le terme Bu de la fonction de coûts. Il s'agit, d'abord, de calculer le coefficient B, en prenant comme unité de quantité la chaussure, comme unité de valeur monétaire le franc, et comme unité de temps la semaine (par exemple, de six jours).

On a donc $u = 300$, et $Bu = 24000$. Il s'ensuit que

$$B = 80,$$

avec le choix donné des unités fondamentales.

Changeons maintenant l'unité de temps, en passant de la semaine à l'année, et déterminons la nouvelle valeur de B. Dans le cas que nous traitons il est facile de refaire le calcul et de trouver la nouvelle valeur de B. Mais dans le cas général, si l'on devait considérer tous les coûts de la forme Bu, le calcul analogue serait plus long, et il serait ennuyeux de refaire toute la comptabilité. Et, en effet, ce n'est pas nécessaire.. Si nous rappelons la formule $[B] = MJ^{1}$ nous comprenons que B n'a pas de dimension par rapport au temps (ou mieux, que B a la dimension zero par rapport a cette unité) ; donc la mesure de B ne depend pas de l'unité de temps. La valeur reste toujours $B = 80$.

Si, par contre, on change l'unité de quantité, en prenant les mille chaussures comme telle unité, la formule de dimensions nous enseigne que l'unite de la quantite composée B sera divisée par 1000. La mesure de cette quantité par rapport à l'unite sera donc multipliée par 1000, et la nouvelle valeur de B sera $B = 80000$.

III. — Illustrations de la théorie de la monnaie.

4. La loi circulatoire de la monnaie. — Les questions qui ont rapport à l'assurance et à la finance sont pour la plupart séparées maintenant de l'économie politique. Une grande partie de l'économie financière n'est que ce qu'on appelle aujourd'hui mathematique financière, où l'on traite le problème du déplacement dans le temps, du crédit ou du revenu. Le contrôle mathematique exercé par la monnaie-numéraire fait naître beaucoup de problèmes mathématiques bien définis. Ainsi on a pu decouvrir de nombreuses relations qui lient le déplacement du crédit ou du revenu dans l'espace comme dans le temps; on a de cette façon des équations qui gouvernent le taux des changes etrangers, semblables à celles qu'on trouve pour le taux d'intérèt. Il existe une théorie de ces changes traitée par Cournot [4; 1, *a*; 7, *e*; 3].

On ne peut pas considérer ici ces deux déplacements. Mais nous parlerons brièvement d'une équation qui a rapport à la totalité des échanges en numéraire, afin d'en tirer des conséquences interessantes relatives a la théorie génerale economique (*voir* § 11). L'équation s'appelle loi circulatoire de la monnaie, ou équation des echanges; elle a été formulée par Simon Newcomb [19] (¹). Ici nous nous bornons à la forme instantanee de l'équation, employée par M. Divisia [5].

(¹) J'emprunte la citation de M Fisher [8, *b*. p 25].

Soient $e_\iota(t)\,\Delta t$ la quantité de monnaie depensee par l'individu (i) ou par le groupe (ι) d'individus dans le temps Δt, $m_\iota(t)$ la quantité de monnaie possédée par (ι) au temps t, et $\alpha_\iota(t)\,\Delta t$, $\beta_\iota(t)\,\Delta t$, ... les quantités des biens ou services α, β, ... achetées par (ι) pendant le temps Δt. Évidemment,

$$e_\iota(t) = \alpha_\iota(t)\,p_{\alpha\iota}(t) + \beta_\iota(t)\,p_{\beta\iota}(t) + \dots, \tag{4.1}$$

où $p_{\alpha_\iota}(t)$, $p_{\beta_\iota}(t)$, ... sont les prix au temps t pour (ι).

En definissant les sommes et moyennes

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{E}(t) = \Sigma_\iota\, e_\iota(t), && \mathrm{A}(t) = \Sigma_\iota\, \alpha_\iota(t), && \dots, \\ &p_\alpha(t) = \frac{1}{\mathrm{A}(t)}\Sigma_\iota \alpha_\iota(t)\,p_{\alpha\iota}(t) = \frac{\Sigma_\iota\, \alpha_\iota(t)\,p_{\alpha\iota}(t)}{\Sigma_\iota\, \alpha_\iota(t)}, && && \dots, \end{aligned}\right. \tag{4.2}$$

on déduit de (4.1) l'équation suivante :

$$\mathrm{E}(t) = \mathrm{A}(t)\,p_\alpha(t)\,\mathrm{B}(t)\,p_\beta(t) + \dots. \tag{4.3}$$

L'emploi de telles moyennes est naturel; en effet, ce n'est que par les moyennes que les fonctions elémentaires $e_\iota(t)$, $\alpha_\iota(t)$, ... peuvent avoir comme représentations approximatives des fonctions continues, et aussi des fonctions continues dérivables. L'individu même, tel que nous le considérons en économie politique, est une moyenne.

Nous introduirons les vitesses circulatoires $v_\iota(t)$,

$$v_\iota(t) = \frac{e_\iota(t)}{m_\iota(t)}, \tag{4.4}$$

et, en utilisant la quantité totale $\mathrm{M}(t)$ et les vitesses moyennes $\mathrm{V}(t)$,

$$\mathrm{M}(t) = \Sigma_\iota\, m_\iota(t), \qquad \mathrm{V}(t) = \frac{1}{\mathrm{M}(t)}\Sigma_\iota\, m_\iota(t)\,v_\iota(t), \tag{4.5}$$

nous aurons l'équation $\dot{\mathrm{E}}(t) = \mathrm{M}(t)\,\mathrm{V}(t)$, et ainsi la loi circulatoire instantanée de la monnaie

$$\mathrm{M}(t)\,\mathrm{V}(t) = \mathrm{A}(t)\,p_\alpha(t) + \mathrm{B}(t)\,p_\beta(t) + \dots = \mathrm{E}(t). \tag{4.6}$$

Si nous prenons les moyennes sur un intervalle de temps, T,

$$m_\iota = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_{t_0}^{t_0+1} m_\iota(t)\,dt,$$

$$\mathrm{M} = \Sigma_\iota m_\iota = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_{t_0}^{t_0+\mathrm{T}} \mathrm{M}(t)\,dt, \qquad \dots,$$

nous pourrons obtenir la loi circulatoire sous la forme

$$(4.7)\qquad MVT = Ap_a + Bp_\beta + \ldots = E = \int_{t_0}^{t_0+T} E(t)\,dt.$$

Nous pourrons aussi séparer les différentes classes de monnaie. Si par exemple, nous désignons par M la monnaie à cours forcé (or, notes de l'Etat, etc.), par $\overline{M}$ le montant des dépôts en banques sur lesquels on peut dépenser par chèques, et par V, $\overline{V}$ les vitesses moyennes correspondantes, nous aurons l'équation des échanges sous la forme

$$(4.8)\qquad (MV + \overline{M}\overline{V})T = Ap_a + Bp_\beta + \ldots = E.$$

Pour les États-Unis cette équation a été soumise à une étude statistique, et les valeurs de M, V, $\overline{M}$, $\overline{V}$ ont été calculées par M. Irving Fisher [8, *b*]. Il trouve que $\overline{M}$ dépasse de beaucoup M, et que $\frac{\overline{V}}{\overline{M}}$ dépasse également $\frac{V}{M}$.

5. **Les nombres indices.** — On peut poser la question maintenant de prendre des sommes ou des moyennes pondérées des quantités A, B, p_α, p_β, ..., du second membre des équations (4.6), (4.7), pour avoir un indice général des prix. La réponse à cette question n'est pas immédiate car il n'existe pas de définition *a priori* de prix moyen. En effet, chaque bien ou service a sa propre dimension J_i, et les prix correspondants ont les dimensions MJ_1^{-1}, MJ_2^{-1}, ..., MJ_k^{-1}.

Il faut donc introduire une définition et chercher un nombre qui partagera certaines propriétés des prix si tous les prix ont cette même propriété; qui croîtra s'ils croissent tous, etc. C'est ainsi que M. Irving Fisher a examiné les diverses expressions pour les indices monétaires moyens afin de trouver ceux qui possédaient le mieux ces propriétés. En même temps il lui fallait examiner des expressions correspondantes pour des indices de l'activité de commerce qui entraient avec ceux-là dans l'équation des échanges. Mais si, au lieu de chercher des indices moyens convenables, on traite les indices instantanés, on trouve qu'une seule de ces propriétés suffit pour déterminer la définition des indices; c'est la première de celles données par M. Fisher (¹).

(¹) « A price index should agree with the price ratios if these all agree with each

En effet, M. Divisia arrive à la définition cherchée avec un criterium qui exige en apparence beaucoup moins que la propriété mentionnée [5, p. 268]. Pour y arriver, posons

$$E(t) = E(t_0)\, P(t)\, U(t), \tag{5.1}$$

où $P(t)$, $U(t)$ seront deux nombres, chacun de dimensions nulles pour toutes les unités, avec $P(t_0) = U(t_0) = 1$; le premier, que nous appelons *indice monétaire* ou *indice des prix*, aura la propriété que sa différentielle s'exprime seulement par les différentielles dp_α, dp_β, ..., c'est-à-dire qu'il reste constant si tous les p_α, p_β, ... restent constants ; le second nombre, que nous appelons *indice d'activité de commerce*, ne changera que si les $A(t)$, $B(t)$, ... changent, et sa différentielle sera donc une fonction lineaire des dA, dB, ... C'est la propriété employée par M. Divisia. Neanmoins, il faut considerer les différentielles dp_α, dA, dp_β, dB, ..., comme des variations arbitraires, au lieu de celles seulement qui proviennent d'un changement dt concernant t.

De l'équation donnée

$$E = E_0 PU = A p_\alpha + B p_\beta + \dots, \tag{5.2}$$

nous tirons

$$E_0(U\, dP + P\, dU) = A\, dp_\alpha + B\, dp_\beta + \dots + p_\alpha\, dA + p_\beta\, dB + \dots,$$

et le criterium cité nous donne les relations

$$\begin{aligned} E_0 U\, dP &= A\, dp_\alpha + B\, dp_\beta + \dots, \\ E_0 P\, dU &= p_\alpha\, dA + p_\beta\, dB + \dots. \end{aligned}$$

Il s'ensuit, en rappelant (5.2),

$$\frac{dP}{P} = \frac{A\, dp_\alpha + B\, dp_\beta + \dots}{A p_\alpha + B p_\beta + \dots}, \qquad \frac{dU}{U} = \frac{p_\alpha\, dA + p_\beta\, dB + \dots}{A p_\alpha + B p_\beta + \dots}. \tag{5.3}$$

Mais

$$d \log P = \frac{dP}{P}, \qquad d \log U = \frac{dU}{U};$$

---

other A trade index should agree with the trade ratios if these all agree with each other » [8, *b*, p. 418].

ainsi, en introduisant encore la variable t, nous aurons, avec M. Divisia,

$$\left\{\begin{aligned} P(t) &= e^{\int_{t_0}^{t} \frac{A(t)\,d\,p_\alpha(t)+B(t)\,d\,p_\beta(t)+\dots}{A(t)\,p_\alpha(t)+B(t)\,p_\beta(t)+\dots}}, \\ U(t) &= e^{\int_{t_0}^{t} \frac{p_\alpha(t)\,d\,A(t)+p_\beta(t)\,d\,B(t)+\dots}{A(t)\,p_\alpha(t)+B(t)\,p_\beta(t)+\dots}} \end{aligned}\right. \tag{5.4}$$

En effet, ces deux nombres $P(t)$, $U(t)$ satisfont bien a l'équation (5.1).

Les indices moyens sur un intervalle de temps ne sont que des approximations des indices instantanés, qu'on obtient, par exemple, en évaluant les intégrales de (5.4) par la loi de la moyenne. Mais toutes les quantités qui entrent dans l'équation (5.4) elle-même, comme nous avons déjà reconnu, ne sont données déjà que par des approximations en moyenne.

Pour un intervalle de temps (t_0, t) assez long il devient évident, d'apres (5.4), que la valeur de l'indice monetaire, par exemple, depend de toute l'allure des fonctions $A(t)$, $p_\alpha(t)$, ..., entre $t = t_0$ et $t = t$. M. Fisher le reconnait en disant que, afin de calculer un tel indice, il faut separer l'intervalle en d'autres, assez petits, et considérer l'indice comme le produit qu'on obtient en multipliant les indices moyens pour les petits intervalles successifs. M. Divisia précise la même idée en constatant que l'indice monétaire est une *fonction de ligne*. Ainsi il critique tout indice historique que l'on peut inventer pour comparer les niveaux des prix aux temps modernes et aux temps anciens, si ces indices ne sont pas calculés en employant de petits intervalles de temps successifs.

Il y a d'autres indices qui ne sont pas des fonctions de lignes. Par exemple, le nombre

$$S(t) = P(t)\,U(t) \tag{5.5}$$

qu'on peut nommer *indice de valeur de commerce*, dépend, quant à sa valeur, seulement des quantités prises aux temps t_0 et t, sans égard aux valeurs de ces quantités prises aux temps intermédiaires. En effet,

$$S(t) = \frac{A(t)\,p_\alpha(t) + B(t)\,p_\beta(t) + \dots}{A(t_0)\,p_\alpha(t_0) + B(t_0)\,p_\beta(t_0) + \dots}. \tag{5.6}$$

Les indices peuvent être définis pour un groupe quelconque de personnes, si l'on peut donner numeriquement pour ce groupe l'equation des echanges correspondante

Designons par (1) un individu d'une certaine classe, par exemple un avocat ou ouvrier, et par $e_1(t)$ ses depenses par unité de temps, ou son salaire, et soit $N(t)$ le nombre total de personnes appartenant a toutes les classes que nous voulons considerer On peut nommer *salaire reduit* la quantite

$$\varepsilon_1(t) = \frac{N(t)\,e_1(t)}{L(t)} = \frac{N(t)\,e_1(t)}{e_1(t)+e_2(t)+\dots+e_N(t)}.$$

Si nous avons deux societes differentes, et si nous voulons faire une comparaison entre les rangs financiers, dans les deux societes, de deux individus correspondants, nous pourrons le faire avec les salaires reduits, $\varepsilon_1^1(t)$, $\varepsilon_1^2(t)$

$$L_{12}(t) = \frac{\varepsilon_1^2(t)}{\varepsilon_1^1(t)},$$

c'est un *indice lateral*

En designant par $S_0(t)$ l'indice de valeur $S(t)$, ou l'on a pris t_0 comme temps initial, nous aurons

$$S_0(t) = \frac{U(t)\,P(t)}{U(t_0)\,P(t_0)} = \frac{L(t)}{L(t_0)}.$$

Nous aurons donc l'identite evidente

$$(27)\qquad \frac{L_{12}(t)}{L_{12}(t_0)} = \frac{S_0^1(t)}{S_0^2(t)}\,\frac{N^{(1)}(t_0)\,N^{(2)}(t)}{N^{(2)}(t_0)\,N^{(1)}(t)}\,\frac{e_1^1(t_0)\,e_1^2(t)}{e_1^2(t_0)\,e_1^1(t)}.$$

IV — Les régimes de la production

6. Le cas approximatif – Soient n entrepreneurs qui produisent respectivement les quantites $u_1, u_2, \dots, u_n$ d'un bien donne, par unite de temps (nous conviendrons de considerer les services comme des biens), et subissent les couts correspondants $q_1, q_2, \dots, q_n$. Soient encore p le prix de vente et y la demande sur le marche Les profits pendant l'unite de temps ont les valeurs

$$\pi_i = p\,\bar{u}_i - q_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ou par $\bar{u}_i$ on designe la quantite vendue par l'individu (i), et $y = \sum_1^n \bar{u}_i$.

Nous nous bornons aux fonctions continues avec des derivées continues, jusqu'à l'ordre necessaire, en remplaçant les quantites actuelles par des moyennes, et ces moyennes par des approximations continues et dérivables, comme on le fait dans les théories de la probabilité.

Nous admettons les hypothèses

$$(6.1) \qquad y = f(p), \qquad q_i = q_i(u_i), \qquad \bar{u}_i = u_i,$$

et afin d'exposer bien les effets de l'organisation de la production plutôt que les effets secondaires, nous prenons identiques toutes les fonctions $q_i(u_i)$, nous posons

$$(6.2) \qquad q_i(u_i) = A u_i^2 + B u_i + C, \qquad y = ap + b,$$

pour la simplicité. Nous déterminerons certains regimes de la production de la manière suivante. On pourrait definir aussi des régimes mixtes.

La coopération. — Les quantités $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont telles que le profit total

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + \quad + \pi_n$$

soit maximum; c'est-à-dire que les entrepreneurs, tout en connaissant la loi de la demande, choisiront leurs productions de maniere à rendre maximum la seule quantité π.

La concurrence bornee. — C'est la concurrence qui etait définie par Cournot, ce qu'on appelle aussi quelquefois « régime à plusieurs monopoleurs » [1, *a*, p. 254]. On suppose que chaque π_i soit maximum comme fonction de la variable u_i correspondante, en envisageant p aussi comme fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Ainsi chaque entrepreneur cherche a rendre maximum son propre profit en considerant seulement les effets des changements de sa production individuelle sur la demande et sur le prix, comme si les autres productions restaient constantes.

La concurrence stricte. — Il peut arriver que l'entrepreneur fixe le prix en concurrence avec les autres entrepreneurs en le choisissant un peu inferieur au prix du marche, ou qu'il pense que sa production individuelle sera trop petite pour changer effectivement le prix, et il cherche a determiner sa production pour avoir le maximum de son profit a ce prix, actuel ou imaginé. Il ne lui convient pas de considérer un prix trop petit, si la demande n'est pas satisfaite à ce prix. En tous les cas, selon cette définition, il fixe sa contribution à la production, en cherchant à rendre maximum son profit, le prix et les contributions des autres entrepreneurs étant considérés comme constants.

Si $n = 1$ les définitions données pour la coopération et pour la concurrence bornee deviennent identiques à celle du monopole libre, considéré au paragraphe 2; la concurrence stricte pour $n = 1$ nous donne le second problème considéré au paragraphe 2.

On calcule facilement les prix d'équilibre pour ces régimes. Des expressions quadratiques

$$\pi_i = pu_i - A u_i^2 - B u_i - C,$$
$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_n,$$

on a immédiatement pour les dérivées par rapport aux u_i les valeurs suivantes :

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial u_i} = p + \frac{u_i}{a} - 2 A a_i - B,$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial u_i} = p + \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{a} - 2 A u_i - B,$$

en considérant $p = \dfrac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n - b}{a}$;

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial u_i} = p - 2 A u_i - B,$$

en considèrant p comme fixe pendant la différentiation.

Ainsi pour la *coopération* nous avons les équations linéaires

$$p + \frac{\Sigma u_i}{a} - 2 A a_i - B = 0, \qquad p = \frac{\Sigma u_i - b}{a},$$

et il s'ensuit que p et u_i auront les valeurs

$$(6.3) \quad \begin{cases} p_c = \dfrac{nb - 2 A ab - n B a}{-a(2n - 2 A a)}, \qquad u_1 = u_2 = \ldots = u_n = \dfrac{b + Ba}{2n - 2 A a}, \\ u_c = \Sigma u_i = \dfrac{b + Ba}{2 - \dfrac{2}{n} A a}. \end{cases}$$

Pour la *concurrence bornée* nous avons les équations

$$(6.4) \qquad p + \frac{u_i}{a} - 2 A u_i - B = 0, \qquad p = \frac{\Sigma u_i - b}{a},$$

et p et u_t auront les valeurs

$$(6.5)\quad \begin{cases} p_t = \dfrac{b - 2Aab - nBa}{-a(n+1-2Aa)}, & u_t = \dfrac{b + Ba}{n+1-2Aa}, \\ u_t = \Sigma u_t = \dfrac{b+Ba}{1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n}Aa}. \end{cases}$$

Dans le cas de la *concurrence stricte* les équations

$$p - 2Au_t - B = 0, \qquad p = \frac{\Sigma u_t - b}{a},$$

nous donnent

$$(6.6)\quad \begin{cases} p_s = \dfrac{2Ab + nB}{n - 2Aa}, & u_t = \dfrac{b + Ba}{n - 2Aa}, \\ u_s = \Sigma u_t = \dfrac{b+Ba}{1 - \dfrac{2}{n}Aa}. \end{cases}$$

Dans ce cas, étant donné le prix p arbitraire, la quantité qui serait produite par chaque entrepreneur pour rendre maximum son profit satisfait à l'equation $p - 2Au_t - B = 0$, d'où

$$u_t = \frac{p - B}{2A}.$$

C'est une offre individuelle au prix p. *L'offre totale* est donnée par une expression linéaire également

$$(6.7)\qquad u = rp + s, \qquad r = \frac{n}{2A}, \qquad s = \frac{nB}{2A},$$

et la position d'equilibre est donnée par la relation « offre = demande ». Si $A \leq 0$, il n'y a pas de fonction d'offre, car π_t ne sera pas maximum.

On trouve des conditions nécessaires pour que ces positions correspondent aux maxima des profits, en calculant certaines derivées secondes.

En designant par les indices m, c, r, s les quantités qui ont rapport respectivement aux régimes de monopole, de cooperation, de concurrence bornée et de concurrence stricte, nous avons les valeurs constantes

$$
(6\ 8)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d^2\pi_m}{du^2} = \frac{\partial^2\pi_c}{\partial u_i^2} = \frac{\partial^2\pi_{r_i}}{\partial u_i^2} = \frac{2-2\mathrm{A}a}{a},\\
&\left(\frac{\partial^2\pi_{s_i}}{\partial u_i^2}\right)_{p\ \text{const}} = -2\mathrm{A},
\end{aligned}
\right.
$$

qui doivent être $\leqq$ o dans les problemes correspondants. Afin que les résultats soient significatifs il faut aussi que $b + \mathrm{B}a > 0$.

On vérifie immédiatement les propositions suivantes, ou l'on suppose toujours $a < 0$.

a. Si $\mathrm{A} > 0$, on a

$$
u_m < u_c < u_r < u_s,
$$
$$
p_m > p_c > p_r > p_s
$$

b. Si $\frac{1}{a} < \mathrm{A} < 0$, on a

$$
u_m > u_c, \qquad u_c < u_r,
$$
$$
p_m < p_c, \qquad p_c > p_r,
$$

et dans ce dernier cas la condition pour que $u_m < u_r$, ou $p_m > p_r$, est $\mathrm{A} > \frac{1}{2a}$.

Si dans les formules que nous venons de donner pour les p_c, u_c, etc , le nombre n tend vers l'infini, les valeurs limites de ces quantites sont bien definies

$$
p_c = \frac{b - \mathrm{B}a}{-2a}, \qquad u_c = \frac{b + \mathrm{B}a}{2},
$$
$$
p_r = p_s = \mathrm{B}, \qquad u_r = u_s = b + \mathrm{B}a
$$

Mais si l'on calculait les profits correspondant à ces prix on verrait que les valeurs ainsi déterminées sont illusoires; car, en effet, les profits ne tendront pas vers zéro avec n infini, mais deviendront nettement negatifs à partir d'une valeur finie de n, et cela, dans le cas de la concurrence, même si la quantité C (qui represente les coûts d'oisiveté) tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. En général donc, pour l'économie politique moderne, le cas d'un nombre arbitrairement grand d'entrepreneurs n'a pas d'interêt.

Nous avons traite toutes ces questions de détermination de l'équilibre comme des problèmes de maxima, mais il faut observer qu'il y a des problèmes importants ou l'équilibre ne se trouve pas en annulant des dérivées. Par exemple, si l'Etat est monopoleur, il a quelquefois le dessein de donner la plus grande extension possible à l'entreprise, jusqu'au point d'annuler tous les profits [1, *a*, p. 273]. Ainsi pour déterminer le prix et la production il y aura les deux equations

$$up = q, \qquad u = f(p),$$

c'est-à-dire, dans le cas approximatif, pour déterminer u, l'equation

$$(1 - \mathrm{A}a)u^2 - (b + \mathrm{B}a)u - \mathrm{C}a = 0,$$

dont il faut choisir pour u la racine plus grande. Elle est evidemment plus grande que $\frac{b + \mathrm{B}a}{2(1 - \mathrm{A}a)} = u_m$, si π_m est positif.

7. Analyse avec des fonctions plus generales. — Revenons aux fonctions $f(p)$, avec $f'(p) < 0$, et aux fonctions $q_i(u_i)$, avec $q_i(u_i) > 0$; mais, pour simplifier, prenons pour les fonctions $q_i(u_i)$ une seule fonction $q(u_i)$. Alors, les positions d'equilibre sont determinees dans les cas (m), (c), (r), (s) respectivement par les equations

$$(7.1)\quad \left\{\begin{array}{llll} (m) & \dfrac{d\pi_m}{du} = p + \dfrac{u}{f'(p)} - q(u) = 0, & & u = f(p), \\ (c) & \dfrac{\partial\pi_c}{\partial u_i} = p + \dfrac{\Sigma u_j}{f'(p)} - q'(u_i) = 0, & & \Sigma u_j = f(p), \\ (r) & \dfrac{\partial\pi_{r_i}}{\partial u_i} = p + \dfrac{u_i}{f'(p)} - q'(u_i) = 0, & & \Sigma u_j = f(p), \\ (s) & \left(\dfrac{\partial\pi_{s_i}}{\partial u_i}\right)_{p\ \text{const}} = p \qquad - q'(u_i) = 0 & & \Sigma u_j = f(p) \end{array}\right.$$

Il s'ensuit que $u_{c_1} = u_{c_2} = \ldots$, $u_{r_1} = u_{r_2} = \ldots$, $u_{s_1} = u_{s_2} = \ldots$, et les équations deviennent par conséquent les suivantes :

$$(7.2)\quad \left\{\begin{array}{lll} (m) & p_m + u_m p_m' - q'(u_m) = 0, & u_m = f(p_m), \\ (c) & p_c + u_c p_c' - q'\left(\dfrac{u_c}{n}\right) = 0, & u_c = f(p_c), \\ (r) & p_r + \dfrac{u_r}{n} p_r' - q'\left(\dfrac{u_r}{n}\right) = 0, & u_r = f(p_r), \\ (s) & p_s \qquad - q'\left(\dfrac{u_s}{n}\right) = 0, & u_s = f(p_s), \end{array}\right.$$

avec

$$p_m' = \left(\frac{dp}{du}\right)_{u=u_m} = \frac{1}{f'(p_m)}, \qquad p_c' = \left(\frac{\partial p}{\partial u_i}\right)_{u_i = \frac{u_c}{n}} = \frac{1}{f'(p_c)},$$

les p' sont des quantités négatives.

On aura immédiatement des théorèmes de comparaison pour ces positions d'équilibre. Par exemple, dans le cas (s) de (7.1) on voit qu'une condition nécessaire pour que les π_{s_t} soient maxima, est que $\frac{\partial^2 \pi_{s_t}}{\partial u_t^2} = -q''(u_t)$ soit négatif ou nul, c'est-à-dire que l'on ait $q''(u_t) \geqq 0$ au point d'équilibre. Si, de plus, on a $q''(u_t) > 0$ pour tout u_t, on aura $p_r + \frac{u_r}{n} p'_r \geqq p_s$, si $u_r \geqq u_s > 0$, mais cela est impossible car $p'_r < 0$; par conséquent l'équation (r) de (7.2) n'est satisfaite pour aucun $u_r \geqq u_s$. Un raisonnement analogue s'applique aussi aux autres équations et l'on a le résultat : *si $q''(u) > 0$, les inégalités $p_r > p_s$, $p_c > p_s$, $p_m > p_s$ sont valables*.

De la même façon on vérifiera les faits suivants. Une condition nécessaire pour que les solutions de (7.1), équation (r), correspondent a un maximum de π_{r_t} est que

$$\left(p' + \frac{u}{n} p''\right) + \left[p' - q'\left(\frac{u}{n}\right)\right] \leqq 0 \qquad \text{pour } u = u_r,\ p = p_r.$$

Au moyen des $(7, 2)$ on constate les faits suivants :

Si $p' + \frac{u}{n} p'' < 0$ et $p' - q''\left(\frac{u}{n}\right) < 0$ *pour tout p et tout* $u = f(p)$, *alors*

$$p_c > p_r, \qquad u_c < u_r,$$

Si $q''(u) > 0$, $p''(u) \leqq 0$, *alors*

$$p_m > p_c > p_r > p_s \qquad \text{et} \qquad u_m < u_c < u_r < u_s,$$

8. Stabilité des prix et des régimes. — Dans le cas où il y a des fonctions d'offre et de demande, comme dans le cas de la concurrence stricte, on dit que si le prix du marché n'est pas celui de l'équilibre p_s, il aura ce prix comme limite pratique; car si la demande au prix du marché est supérieure à l'offre il y aura une hausse du prix, et dans le cas contraire une baisse, et l'on pense sans autre considération qu'ainsi le prix doit nécessairement s'approcher du prix d'équilibre. Mais cela dépend évidemment de la manière de faire la correction.

Prenons le cas approximatif, et supposons par exemple qu'après chaque tentative de déterminer les productions optima, le prix de vente prenne cette valeur précise qui soit adéquate, selon la formule de la demande, pour faire vendre tout le produit. Ainsi si le prix initial est p_1, les productions seront déterminées par les équations

$$p_1 - 2Au_i - B = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le nouveau prix p_2 sera donné par la loi de la demande $\Sigma u_i = ap_2 + b$, donc

$$np_1 - 2A(ap_2 + b) - nB = 0,$$

$$p_2 = \frac{n}{2Aa} p_1 - \frac{2Ab + nB}{2Aa}.$$

Après plusieurs tentatives nous aurons

$$p_k = \frac{n}{2Aa} p_{k-1} - \frac{2Ab + nB}{2Aa},$$

$$p_{k+1} - p_k = \frac{n}{2Aa}(p_k - p_{k-1})$$

Le procede sera donc convergent seulement si l'on a $n < |2Aa|$.

Ce n'est pas certainement la seule façon d'envisager les tentatives pour approcher des prix optima. Par exemple dans le cas de la concurrence bornée, on peut supposer que d'abord l'entrepreneur (1) change sa production de maniere à rendre maximum le profit π_1, pendant que les autres maintiennent leurs productions invariables, les prix changeant par rapport à la loi de la demande; c'est le cas imaginable si pour un changement de la production il faut acheter de nouvelles machines ([1]). En ecrivant la condition $\frac{\partial \pi_1}{\partial u_1} = 0$, on a l'équation

$$2(1 - Aa)\bar{u}_1 = (b + Ba) - (u_2 + u_3 + \ldots + u_n)$$

pour determiner la nouvelle production $\bar{u}_1$; peut-être on y arrivera par une suite d'approximations.

Si maintenant on suppose que les autres entrepreneurs changent successivement leurs productions dans la même façon, on aura $n - 1$ autres équations analogues, et si l'on ajoute toutes ces equations en nombre n, on aura une équation qui determinera un nouveau prix p_k au moyen de l'ancien prix p_{k-1}, qu'on suppose au commencement. On aura donc, après un calcul facile,

$$p_k = -\frac{b - 2Aab - nBa}{2a(1 - Aa)} - \frac{1}{2}\frac{n - 1}{1 - Aa} p_{k-1}$$

---

[1] Ceci est une reponse aux critiques elevees contre Cournot par plusieurs auteurs. Voir [20, a, p. 67] et [29, p. 68]

Ainsi on arrive lentement a une suite de prix $p_1, p_2, \ldots$, et le procede sera convergent, et le prix s'approchera du prix (6.5) seulement si l'on a $n - 1 < 2 | 1 - \lambda a |$.

La question de stabilite de prix ne s'impose pas aux cas du monopole et de la cooperation si l'on suppose que l'on connaisse la loi de la demande approximative. Cependant on doit admettre seulement des lois de demande de la forme $y = f(p)$; les situations qui sont stables sous ces conditions restrictives ne le sont peut-être plus, si on les remplace par d'autres moins restrictives, si par exemple on remplace $y = f(p)$ par $y = f\left(p, \frac{dp}{dt}\right)$, etc.

Sous ces conditions restrictives, on peut considérer aussi la stabilité des divers régimes de la production, si l'on n'admet pas les cas ou les situations optima se trouvent aux limites du domaine d'existence des variables, c'est-a-dire si les équations (6.3) a (7.1) donnent la vraie solution du probleme.

Étant donnes n entrepreneurs fabriquant une seule marchandise, on peut dire immédiatement que la coopération est plus stable que la concurrence, si n n'est pas trop grand. En effet, d'apres sa définition, c'est la coopération qui donne le maximum du profit total, et ainsi, par une répartition appropriée, le maximum du profit individuel. Ainsi si les entrepreneurs ne sont pas trop nombreux et se connaissent, ils choisiront ce régime. On remarque à cet egard un simple paradoxe dont la résolution échappe à tout raisonnement qui n'est pas mathematique; malgre le fait que dans la concurrence bornée on cherche à rendre maxima les profits individuels [ce qui rend maximum leur somme, qui est le profit total (?)], c'est dans la coopération qu'on rend maximum le profit total, donc les profits individuels. C'est un paradoxe qui n'est pas toujours résolu chez les auteurs qui traitent la valeur ou l'utilité au lieu du profit.

Quant au monopole, le même raisonnement n'est plus strictement valable. Certainement, entre n entrepreneurs — en écartant le cas exceptionnel où le maximum ne se trouve pas en annulant les derivées, — la coopération donne un profit total plus grand que dans le régime où l'un des entrepreneurs, par exemple le premier, produit le tout et les autres ne produisent rien. Mais cette alternative n'est pas le monopole; en effet, c'est le cas où l'on aurait $\pi_1 = pu_1 - q(u_1)$, mais $\pi_i = -q_i(0)$, $i = 2, 3, \ldots, n$. La quantité $q_i(0)$ représente le coût de maintenir oisif l'établissement (i), et cette quantité ne serait pas genéralement zéro. Mais dans le monopole il n'y a qu'un seul entrepreneur, et les $q_i(0)$, $i > 1$, doivent être remplacés par zéro.

Neanmoins, si $q_i(0)$ n'est pas trop grand, on pourra le remplacer par zero sans changer le sens des inegalites, car les valeurs relatives aux situations d'équilibre dependent d'une manière continue des fonctions données. Ainsi si les coûts d'oisiveté ne sont pas trop lourds, il n'est pas nécessairement utile aux entrepreneurs de remplacer un régime de cooperation par un autre monopole. Au contraire, si de nouveaux entrepreneurs pouvaient jouir des mêmes fonctions de coûts que les anciens, ils auraient avantage a commencer de nouvelles entreprises en concurrence et a imposer plus tard la coopération, plutôt que de mettre leurs fonds a la disposition du monopoleur. Mais pour une valeur donnée de n, on peut géneralement définir une nouvelle fonction de coûts pour la production $u_c = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ et remplacer la cooperation par un monopole, plus ou moins réel; en effet, etant données des fonctions de coût $q_1(u_1)\ldots, q_n(u_n)$, pour un minimum de coût total d'un produit total u_c on doit satisfaire aux equations

$$du_1 + du_2 + \ldots + du_n = 0,$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial q_2}{\partial u_2} du_2 + \quad + \frac{dq_n}{du_n} du_n = 0,$$

afin de définir la répartition la plus profitable $(u_1. u_2, \ldots, u_n)$ de la production entre les entrepreneurs.

Cependant, la différence entre monopole et coopération est précisément un cas où la possibilité d'un maximum aux limites de ce domaine entre en jeu; car la situation où $u_2 = u_3 + \ldots = u_n = 0$ se trouve sur ces limites. Il faudrait donc pour une discussion complète considerer des valeurs où les dérivées ne sont pas nulles. On arrive dans le cas approximatif plus facilement au même but en examinant directement le profit total pour la coopération

$$\pi_c = n \left\{ \frac{(b + Ba)^2}{-4a(n - Aa)} - C \right\},$$

qui d'ailleurs renferme le monopole comme cas particulier, pour $n = 1$.

Nous avons

$$\frac{d\pi_c}{dn} = \frac{1}{4}\left(\frac{b + \mathrm{B}a}{n - \mathrm{A}a}\right)^2 \mathrm{A} - \mathrm{C}.$$

Il s'ensuit que même dans un régime à coûts croissants ($\mathrm{A} > 0$), on peut choisir les constantes A, etc., afin d'avoir le monopole rendant un profit plus grand que la concurrence; en effet, on peut rendre $\pi_c > 0$, $\left(\frac{d\pi}{dn}\right)_{n=1} < 0$, et π_c maximum $\left(\text{c'est-à-dire } \frac{\partial^2 \pi}{\partial u_i^2} < 0\right)$, à la fois.

9. **La loi de la demande.** — Jusqu'ici nous avons pris la fonction de demande comme une donnée empirique. On peut aussi la regarder comme une représentation de l'emploi qu'on doit faire du bien considéré dans la production d'autres biens. Un tel emploi s'appelle *consommation indirecte;* la satisfaction des besoins personnels s'appelle *consommation directe*. Mais il n'existe pas de différence nette dans cette distinction, parce qu'une grande part de la consommation personnelle sert a la production des services; par exemple, la nourriture, les vêtements, la maison et les consultations médicales sont nécessaires pour produire les services d'un ouvrier. Ce qu'on peut appeler bien direct, au sens strict, semble ainsi se réduire aux seuls objets de luxe. C'est là un terme également indéfini. Mais en genèral on peut dire que la consommation est indirecte.

Considérons la fabrication d'un seul bien x en utilisant d'autres biens u, v, w en montants qui dependent de la quantité x :

(9.1) $$u = f_1(x), \qquad v = f_2(x), \qquad w = f_3(x),$$

et supposons qu'il existe une demande $x = f(p)$ pour x au prix p, et que le profit soit donné par une expression

(9.2) $$\pi = px - q(x) - up_u - vp_v - wp_w,$$

où $q(x)$ comprenne les coûts, en dehors de ceux dus aux achats de u, v, w aux prix p_u, p_v, p_w.

Si maintenant l'individu (x) cherche a rendre maximum son profit, etant donnés p_u, p_v, p_w, sous un régime quelconque, il déterminera x comme une certaine fonction de p_u, p_v, p_w, en éliminant p, u, v, w. Il s'ensuit que $u = f_1(x)$, $v = f_2(x)$, $w = f_3(x)$ seront déterminés comme fonctions des données, p_u, p_v, p_w. Si nous ajoutons toutes les demandes pour u, provenant de toutes les industries qui utilisent le bien u, nous aurons pour la demande totale une fonction de la forme

$$(9.3) \qquad u = F(p_u, p_v, p_w, \ldots),$$

où le nombre de variables indépendantes p_u, p_v, p_w, ... dépend du nombre des espèces de biens v, w, ... qui sont utilisés avec u.

Le cas particulier $u = F(p_u)$ que nous avons tant employé est celui où il n'y a pas de tels biens supplementaires, ou celui ou p_u seulement est variable, ou celui ou les autres se compensent par le moyen de leurs variations incoordonnées. Mais si tous les prix changent dans le même sens, comme on le voit assez souvent, on ne peut guère retenir cette relation, même comme approximation. On y pourrait substituer comme hypothese approximative dans ce cas une relation de la forme

$$(9.4) \qquad u = F(p_u, P),$$

ou P représente l'indice monétaire.

Quelquefois la fonction de demande peut manquer tout à fait, lorsque l'entrepreneur qui utilise u en fabriquant x prévoit l'effet de son emploi de u. C'est un cas analogue a celui où manque une fonction offre pour un bien dont les fabricants ne se trouvent pas en concurrence stricte; on le trouve certainement moins fréquemment.

Considérons pourtant deux monopoleurs (x) et (u), et supposons qu'il existe la fonction de demande $x = f(p)$ pour x mais que l'on puisse utiliser u seulement dans la production de x. Nous aurons donc les relations

$$u = f_1(x), \qquad x = f(p)$$

et les profits

$$\pi_x = px - q(x) - up_u, \qquad \pi_u = up_u - q_1(u),$$

où $q(x)$, $q_1(u)$ ont des significations évidentes.

Si maintenant (x) ne suppose pas que p_u soit indépendant de son activité, il doit faire une hypothèse alternative. Nous pourrions admettre, au titre d'exemple, que (x) et (u) fussent d'accord à faire maximum une combinaison convenable de leurs profits

$$(9.5) \qquad \pi = \varphi(\pi_x, \pi_u).$$

Les équations $\frac{\partial \pi}{\partial p} = 0$, $\frac{\partial \pi}{\partial p_u} = 0$ donneraient, en ce cas, deux relations pour déterminer les inconnues p, p_u, donc x, u, mais ne donneraient pas une fonction de demande pour u, de l'espèce que nous avons employée. L'équation $u = f_1(x)$ constituerait une des équations pour déterminer la position de l'équilibre.

Considérons maintenant des dépendances linéaires pour les demandes de deux biens, aux prix p_1 et p_2 respectivement, de la forme suivante :

$$(9.6) \qquad \begin{cases} y_1 = a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + b_1, \\ y_2 = a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + b_2, \end{cases}$$

où l'on peut supposer $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$. Les a_{12}, a_{21} n'ont aucune détermination générale de signe. Si ces deux coefficients sont négatifs on dit que les biens sont *complémentaires;* on emploie l'un préférablement avec l'autre. Si tous les deux sont positifs les biens sont *supplémentaires;* on peut substituer l'un à l'autre jusqu'à un certain point. Mais il peut arriver qu'on ait une dépendance d'un genre pour un bien et de l'autre genre pour l'autre. Il peut arriver aussi que le déterminant $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ soit nul; c'est le cas où le rapport de combinaison ou de substitution de (1) et (2) est fixe.

Si Δ n'est pas nul on peut exprimer les relations (9.6) sous la forme

$$(9.7) \qquad \begin{cases} p_1 = r_{11}y_1 + r_{12}y_2 + s_1, \\ p_2 = r_{21}y_1 + r_{22}y_2 + s_2, \end{cases}$$

avec $r_{11}\Delta = a_2^2$, $r_{12}\Delta = -a_{12}$, $r_{21}\Delta = -a_{21}$, $r_{22}\Delta = a_{11}$. Ainsi, en prenant $\Delta > 0$, on a pour les biens complémentaires $r_{11} < 0$, $r_{22} < 0$, $r_{12} > 0$, $r_{21} > 0$, mais pour les biens supplémentaires tous les r_{ij} sont négatifs.

Pour déterminer les positions optima il faut ajouter des hypothèses convenables. Par exemple, on peut considérer les maxima des profits

$$\pi_1 = p_1y_1 - A_1u_1^2 - B_1u_1 - C_1,$$
$$\pi_2 = p_2y_2 - A_2u_2^2 - B_2u_2 - C_2,$$

avec $y_1 = u_1$, $y_2 = u_2$, ou les maxima d'autres fonctions, par exemple, de $\pi_1 + k^2\pi_2$.

10. Considérations générales. — Il est fort naturel de procéder à une généralisation abstraite et de considérer des systèmes d'équations renfermant tous les biens et services et des fonctions générales prenant des valeurs maxima. Mais si l'on identifie ces fonctions avec les utilités ou ophélimités [Pareto] individuelles ou totales, on arrive à cette difficulté, que ces choses ne sont pas mesurables. Ainsi on devra partir des éléments differentiels d'indifférence déterminant les systèmes de déplacements qui laisseront des montants de biens u, v, w, ... également désirables

$$X(u, v, w, ..)\,du + Y(u, v, w, ...)\,dv + Z(u, v, w, ...)\,dw + ... = 0.$$

M. Irving Fisher semble être le premier, parmi les économistes, à reconnaître que ces équations différentielles ne sont pas nécessairement complètement intégrables, qu'il n'existe pas en effet nécessairement des « surfaces » d'indifférence ou, par conséquent, des fonctions indices de la valeur, mais qu'on peut partir de ces éléments différentiels pour établir des positions d'équilibre possible [(8, *a*, Ch. IV]. Voir aussi [20, *b*], [20, *c*, p. 546], [6], [28, *a*, *b*], [7, *a*]. [7, *d*]) (¹). Cependant on ne saurait dire que les équilibres étaient stables, ou dans quels cas ils correspondraient à de vraies solutions des problèmes de l'économie politique. On a en effet généralisé les fonctions sans généraliser les idées.

On pourrait par contre généraliser les idées et retenir au même temps une analyse simple.

11. Les crises économiques. — Nous considérerons en effet le système général économique par l'introduction de l'indice monétaire, mais nous le simplifierons beaucoup. Revenons donc à notre approximation linéaire pour la loi de la demande, en supposant que le coefficient de p dépende de l'indice monetaire P, avec un retard de mesure T. En effet nous supposerons qu'on ait

$$(11.1) \qquad y(t) = a\,\frac{p(t)}{P(t-T)} + b \qquad (a < 0,\ b > 0),$$

de façon que l'effet d'un prix élevé $p(t)$ sera moins considérable si le niveau général des prix est déjà élevé. Pour simplifier encore les choses supposons qu'il y ait une fonction d'offre linéaire de la forme

$$u(t) = rp(t) + s \qquad (r > 0,\ s < 0),$$

(¹) MM. R. Frisch et I. Fisher ont inventé une méthode de contrôle statistique de ces éléments differentiels [6; 4, *c*]. La situation particulière pour la monnaie est examinee par MM. Divisia [5] et Fréchet [9, *c*].

et que l'offre soit égale à la demande,

$$u(t) = y(t).$$

De ces équations, en posant

$$\frac{a\,p(t)}{\mathrm{P}(t-\mathrm{T})} + b = r\,p(t) + s,$$

on obtient immédiatement les valeurs

$$(11.2) \qquad p(t) = \frac{(b-s)\,\mathrm{P}(t-\mathrm{T})}{r\,\mathrm{P}(t-\mathrm{T}) - a}, \qquad u(t) = \frac{rb\,\mathrm{P}(t-\mathrm{T}) - as}{r\,\mathrm{P}(t-\mathrm{T}) - a},$$

d'où

$$(11.3) \qquad \begin{cases} dp(t) = \dfrac{-a(b-s)}{[r\,\mathrm{P}(t-\mathrm{T}) - a]^2}\, d\mathrm{P}(t-\mathrm{T}), \\[2ex] du(t) = r\,dp(t) = \dfrac{-a\,r(b-s)}{[r\,\mathrm{P}(t-\mathrm{T}) - a]^2}\, d\mathrm{P}(t-\mathrm{T}). \end{cases}$$

Il est à remarquer que les numérateurs et les dénominateurs des expressions dans (11.2) et (11.3), étant données nos hypothèses, sont des fonctions de $\mathrm{P}(t-\mathrm{T})$ qui ne s'annulent pas et sont d'ailleurs essentiellement positives. Ainsi $dp(t)$ et $du(t)$ ont tous les deux le même signe algébrique que $d\mathrm{P}(t-\mathrm{T})$.

Si maintenant nous formons les expressions analogues aux (11.2), (11.3) pour tous les biens qui entrent dans les formules pour $\mathrm{P}(t)$, $\mathrm{U}(t)$,

$$\frac{d\mathrm{P}(t)}{\mathrm{P}(t)} = \frac{\Sigma\, u(t)\, dp(t)}{\Sigma\, u(t) p(t)},$$

$$\frac{d\mathrm{U}(t)}{\mathrm{U}(t)} = \frac{\Sigma\, p(t)\, du(t)}{\Sigma\, u(t) p(t)},$$

nous pourrons les substituer dans ces formules et obtenir des équations differentielles pour $\mathrm{P}(t)$, $\mathrm{U}(t)$. Nous aurons ainsi deux équations de la forme suivante :

$$(11.4) \qquad \begin{cases} d\log \mathrm{P}(t) = \mathrm{F}[\mathrm{P}(t-\mathrm{T})]\, d\mathrm{P}(t-\mathrm{T}), \\ d\log \mathrm{U}(t) = \mathrm{G}[\mathrm{P}(t-\mathrm{T})]\, d\mathrm{P}(t-\mathrm{T}), \end{cases}$$

où les fonctions F, G seront connues, essentiellement positives, et ne tendront pas vers zéro si $\mathrm{P}(t-\mathrm{T})$ ne tend pas vers zéro.

Il s'agit maintenant d'examiner les solutions de ces équations. Il suffit évidemment de connaître $\mathrm{P}(t)$ sur un intervalle de temps $(t_0,$

$t_0+\mathrm{T}$) de longueur T afin de connaître $d\log\mathrm{P}(t)$ dans l'intervalle $(t_0+\mathrm{T},\ t_0+2\mathrm{T})$ par la formule (11.4), et par une intégration de trouver $\mathrm{P}(t)$ dans ce nouvel intervalle. Ainsi on peut déterminer $\mathrm{P}(t)$ successivement d'un intervalle à l'autre pour tous les instants ultérieurs à $t_0+\mathrm{T}$. Pour determiner $\mathrm{U}(t)$, il suffit de connaître $\mathrm{P}(t)$ sur l'intervalle $(t_0,\ t_0+\mathrm{T})$ et la valeur de $\mathrm{U}(t)$ à l'instant $t_0+\mathrm{T}$. Les indices $\mathrm{P}(t)$, $\mathrm{U}(t)$ seront donc connus pour $t>t_0+\mathrm{T}$.

Mais les fonctions F, G sont positives. Supposons donc que $\mathrm{P}(t)$ soit une fonction croissante de t dans l'intervalle initial $(t_0, t_0+\mathrm{T})$. Il s'ensuit que $d\mathrm{P}(t)$, $d\mathrm{U}(t)$ restent positives pour tous les instants ultérieurs, et donc que $\mathrm{P}(t)$, $\mathrm{U}(t)$ continuent a croître tous les deux. Le niveau des prix deviendra de plus en plus haut, et en même temps les quantités de biens qui entrent dans les échanges augmenteront continuellement, jusqu'à ce qu'il survienne une modification radicale pour les conditions, et que les hypothèses ne soient plus valables. Le mouvement rétrograde, une fois commencé, aura le même caractère de permanence.

Ainsi nous avons réussi à construire avec de simples hypothèses les mouvements caractéristiques des cycles de « prospérité » et de « dépression » des crises économiques.

Pour cette analyse il n'est pas nécessaire de supposer que l'intervalle T soit le même pour tous les biens; en changeant T d'un bien à l'autre on compliquerait les formules, sans en modifier la nature. Il n'est pas nécessaire également de nous restreindre aux fonctions continues; on pourrait considerer aussi les fonctions à variation bornée, avec des sauts brusques, dus par exemple à la création d'un impôt.

Cette utilisation de l'indice des prix nous donne une illustration du mouvement économique. C'est ce qu'on pourrait nommer le mouvement lent, parce que les dérivées par rapport à t y sont considérées comme négligeables.

V. — Plusieurs problèmes dynamiques de l'économie politique.

12. Une loi linéaire différentielle de demande. — Nous revenons maintenant au problème du monopole, mais avec la loi de demande

$$y(t)=ap(t)+b+h\frac{dp(t)}{dt}, \tag{12.1}$$

qui est un cas particulier de la formule $y = f(p, p')$ du paragraphe 1; nous retenons toujours l'hypothèse $a < 0$, $b > 0$ [7, a] [1]. Nous retenons aussi la fonction des coûts

$$q = \mathrm{A}[u(t)]^2 + \mathrm{B}\,u(t) + \mathrm{C}, \tag{12.2}$$

où nous nous bornons à supposer $\mathrm{A} > 0$. Nous faisons aussi l'hypothèse

$$y(t) = u(t), \tag{12.3}$$

et nous chercherons à rendre maximum le profit total

$$\Pi = \int_{t_0}^{t_1} \pi\, dt = \int_{t_0}^{t_1} (py - \mathrm{A}\,u^2 - \mathrm{B}\,u - \mathrm{C})\, dt \tag{12.4}$$

sur l'intervalle de temps (t_0, t_1), en nous bornant à considérer des fonctions $p(t)$ continues, à dérivée première bornée et continue, excepté un nombre fini de discontinuités [nous dirons que $p(t)$ est ainsi de la classe D′].

S'il y a une fonction $p(t)$ qui donne à Π une valeur maximum, sous les conditions (12.1) a (12.4) et si la fonction $p(t) + \psi(t)$ représente une autre fonction arbitraire de la classe considérée D′, la forme

$$\xi(t) = p(t) + x\,\psi(t)$$

représentera une famille de fonctions de la classe D′. Il est évident que la quantité

$$\begin{aligned} \Pi(x) = \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ & \xi(a\xi + b + h\xi') - \mathrm{A}(a\xi + b + h\xi')^2 \\ & - \mathrm{B}(a\xi + b + h\xi') - \mathrm{C} \Big\}\, dt \end{aligned} \tag{12.5}$$

nous donne une fonction quadratique de x. A cause de la remarque

---

[1] M. Amoroso [1, c] fait la critique suivante de cette loi (12.1) de la demande: « Ora e facile vedere che la forma. . [C'est la formule (12.1)]... non e teoricamente possibile, in quanto se moltiplichiamo ambo i membri per dt, e poniamo $dt = 0$, ricaviamo $dp = 0$, il che vorrebbe dire che la curva statica della domanda (cioe la curva della domanda, quale è ordinariamente considerata nella economia classica) è une parallela all'asse della quantita ».

Est-ce qu'il y a ici peut-être une petite ambiguité entre les variations virtuelles de $p(t)$ et les variations réelles dans le temps? D'ailleurs, il n'est pas necessaire que la loi citée soit toujours valable; elle n'est évidemment qu'une approximation lineaire convenable, et qu'on peut employer dans une certaine classe de problèmes et contrôler par les statistiques.

déjà faite sur les fonctions quadratiques (§ 1), pour que la valeur de Π pour une certaine fonction $p(t)$ soit plus grande que sa valeur pour toute autre fonction $(p(t) + \psi p(t)$, il suffit que l'on ait

$$\left[\frac{d\,\Pi(x)}{du}\right]_{x=0} = 0, \qquad \frac{d^2\,\Pi(x)}{dx^2} < 0, \tag{12.6}$$

quelle que soit $\psi(t)$ de la classe D′; en effet, dans ce cas on aura

$$\Pi(0) > \Pi(1).$$

On calcule immédiatement les deux expressions

$$\begin{aligned} \frac{d\,\Pi(x)}{dx} = \int_{t_0}^{t} \Big\{ & [2a(1-\mathrm{A}a)\xi(t) + h(1-2\mathrm{A}a)\xi'(t) \\ & \qquad + (b - 2\mathrm{A}ab - \mathrm{B}a)]\,\psi(t) \\ & + [h(1-2\mathrm{A}a)\xi(t) \\ & \qquad - h(2\mathrm{A}b + \mathrm{B}) - 2\mathrm{A}h^2\xi'(t)]\,\psi'(t) \Big\}\,dt, \end{aligned} \tag{12.7}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\,\Pi(x)}{dx^2} = \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ & 2a(1-\mathrm{A}a)\psi(t)^2 \\ & + 2h(1-2\mathrm{A}a)\psi(t)\psi'(t) - 2\mathrm{A}h^2\psi'(t)^2 \Big\}\,dt, \end{aligned} \tag{12.8}$$

dont la seconde, en effet, ne dépend pas de x. On peut effectuer l'intégration du second terme de (12.8) et obtenir la formule

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Pi}{dx^2} &= h(1-2\mathrm{A}a)\psi(t)^2\Big]_{t=t_0}^{t=t_1} \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ 2a(1-\mathrm{A}a)\psi(t)^2 - 2\mathrm{A}h^2\psi'(t)^2 \Big\}\,dt. \end{aligned} \tag{12.9}$$

Considérons d'abord le problème où l'on donne d'avance les valeurs $p(t_0) = p_0$, $p(t_1) = p_1$ et où il s'agit seulement de déterminer $p(t)$ entre t_0 et t_1, appartenant à la classe D′.

Dans ce cas, $\psi(t_0) = \psi(t_1) = 0$, et il n'y a que l'intégrale qui reste dans (12.9). Mais cette intégrale est forcément négative, si $\psi(t)$ n'est pas identiquement nul, puisque nous avons $a < 0$, $\mathrm{A} > 0$. Par conséquent, la seconde des conditions (12.6) est satisfaite. Il s'ensuit qu'il ne peut exister qu'une seule $p(t)$ qui satisfasse à la première; autrement les deux valeurs correspondantes de Π seraient chacune moindre que l'autre. Il existe une telle fonction $p(t)$ continue avec ses dérivées première et seconde (de la classe C″).

Afin de la trouver on met $x = 0$ dans (12.7) et en supposant que p', p'' soient continues, on effectue une intégration par parties sur les termes qui contiennent $\psi'(t)$. Ainsi les termes qui viennent en dehors de l'intégrale disparaissent tous, parce qu'ils contiennent ou $\psi(t_0)$ ou $\psi(t_1)$ comme facteur. Il vient donc l'expression

$$\left(\frac{d\Pi}{dx}\right)_{x=0} = \int_{t_0}^{t_1} [2\,\mathrm{A}h^2 p''(t) + 2a(1-\mathrm{A}a)p(t) + (b - 2\,\mathrm{A}ab - \mathrm{B}a)]\,\psi(t)\,dt,$$

qui s'annule si l'expression entre parenthèses est nulle. Mais ainsi nous avons une équation différentielle de second ordre dont les solutions sont bien de la classe C''.

En effet si nous posons

$$f_0 = \frac{b - 2\,\mathrm{A}ab - \mathrm{B}a}{-2a(1-\mathrm{A}a)}, \qquad m^2 = \frac{-a(1-\mathrm{A}a)}{\mathrm{A}h^2},$$

l'équation différentielle s'écrit sous la forme suivante :

$$(12.10) \qquad p'' - m^2 p = -m^2 f_0$$

avec la solution générale

$$(12.11) \qquad p(t) = f_0 + \mathrm{C}_1\, e^{m(t-t_0)} + \mathrm{C}_2\, e^{-m(t-t_0)}$$

ou

$$(12.12) \qquad p(t) = f_0 + (p_0 - f_0)\operatorname{ch} m(t-t_0) + \mathrm{C}'\operatorname{sh} m(t-t_0),$$

ce qu'on vérifie facilement en faisant la différentiation. Il y a une et une seule solution telle que $p(t_0) = p_0$, $p(t_1) = p_1$, c'est-à-dire telle que

$$p_0 - f_0 = \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2, \qquad p_1 - f_0 = \mathrm{C}_1\, e^{m(t_1-t_0)} + \mathrm{C}_2\, e^{-m(t_1-t_0)}.$$

Il n'est pas nécessaire d'insister sur les propriétés de ces solutions en forme de fonctions exponentielles (¹). Mais il y a plusieurs généralisations de ce problème qui sont plus étroitement liées que celui-ci même aux questions économiques.

13. Le problème de l'extrémité libre. — Quant au problème que nous venons de résoudre on dirait immédiatement qu'il était légitime de commencer avec un prix donné p_0, mais que le prix final p_1 était

(¹) Sur les relations de ces propriétés élémentaires avec le problème économique, *voir* [7, *a*].

un élément du problème qu'il fallait déterminer afin d'avoir un maximum de Π. Passons donc à cette détermination de p_1 et au *maximum maximorum* de Π.

Quel que soit le prix final p_1, la fonction $p(t)$ qui prend cette valeur et donne à Π une valeur maximum est une solution de (12.10). Il suffit donc de considérer les solutions de (12.10) pour lesquelles $p(t_0)=p_0$; ce sont precisément les fonctions (12.12). Si l'on remplace $\xi(t)$ par l'expression (12.12) ou C' prend la place de x, la quantité Π devient une fonction quadratique de C', et les dérivées par rappoit à C' seront données par (12.7) a (12.9) avec

$$\psi(t) = \operatorname{sh} m(t-t_0).$$

Mais en faisant l'integration par parties de (12.7) c'est l'intégrale cette fois qui s'annule en vertu de (12.10) et la partie en dehors de l'integrale qui reste, et cela seulement pour la valeur $t=t_1$. On calcule donc facilement

$$\begin{aligned}(13.1)\quad \frac{d\Pi}{dC'} &= h \operatorname{sh} m(t_1-t_0)\\ &\times \big\{ [f_0+(p_0-f_0)\operatorname{ch} m(t_1-t_0)](1-2Aa)-(2Ab+B)\\ &\quad -2Ah(p_0-f_0)m \operatorname{sh} m(t_1-t_0)\\ &\quad + C'[(1-2Aa)\operatorname{sh} m(t_1-t_0)-2Ahm \operatorname{ch} m(t_1-t_0)]\big\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(13.2)\quad \frac{d^2\Pi}{dC'^2} &= \operatorname{sh} m(t_1-t_0)\\ &\times \big\{ h(1-2Aa)\operatorname{sh} m(t_1-t_0)-2Ah^2m \operatorname{ch} m(t_1-t_0)\big\}.\end{aligned}$$

On déduit immédiatement de ces formules qu'il y a une valeur de C' et une seule telle que $\frac{d\Pi}{dC}=0$, sauf dans le cas exceptionnel où $\frac{d^2\Pi}{dC'^2}=0$. En effet, si $h<0$, le second membre de (13.2) est nécessairement négatif étant donne que $a<0$, $A>0$), et la valeur determinee de C' nous conduit a un maximum de Π.

Cependant, c'est le cas $h>0$ qui est le cas pratique, à cause du fait que généralement la perspective d'un prix plus élevé conduit aux achats immédiats plutôt que la perspective d'un prix moins élevé; c'est surtout le cas dans la spéculation.

Si $h>0$, nous posons

$$m=\sqrt{m^2}=\frac{1}{h}\sqrt{\frac{-a(1-Aa)}{A}},$$

et mettons (13.2) sous la forme

$$(13.3)\qquad \frac{d^2\Pi}{dC'^2} = 2h\sqrt{-Aa(1-Aa)}\,\mathrm{sh}\, m(t_1-t_0)\,\mathrm{ch}\, m(t_1-t_0)$$
$$\times\left\{\frac{1-2Aa}{2\sqrt{-Aa(1-Aa)}}\,\mathrm{th}\, m(t_1-t_0)-1\right\},$$

dont le signe algébrique dépend de l'expression entre accolades { }. La constante $\frac{1-2Aa}{2h\sqrt{-Aa(1-Aa)}}$ est > 1 (on le vérifie en prenant le carré de cette fraction), et th $m(t_1 - t_0)$ est une fonction croissante de $(t_1 - t_0)$ qui va de 0 à 1. Il y aura donc une valeur T de $t_1 - t_0$ telle que si $t_1 - t_0 < T$ on aura $\frac{d^2\Pi}{dC'^2} < 0$, et Π maximum, tandis que si $t_1 - t_0 > T$ on aura cette dérivée > 0 et il n'y aura pas de maximum de Π, et par suite pas de solution de notre problème.

Il est intéressant de noter ici, dans le cas pratique ($h > 0$), qu'il n'y a pas de stabilité à partir d'un intervalle de temps plus grand qu'une certaine valeur $T = T(h)$. La fonction $p(t)$ sortira de tout domaine où les hypothèses donnees sont applicables.

On peut chercher à imposer la stabilité par une modification du problème. Par exemple, on peut remplacer la condition $u(t) = y(t)$ par une autre

$$(13.4)\qquad \int_{t_0}^{t_1} u(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} y(t)\,dt.$$

Ainsi on obtient un problème de calcul des variations où il y a deux fonctions inconnues $p(t)$ et $u(t)$, soumises à la condition isopérimétrique (13.4). Mais cette condition, que la production totale soit égale à la demande totale remplace une condition plus restrictive, et augmente l'instabilité. En effet, on peut résoudre le problème facilement et vérifier le fait qu'en général il n'existe plus de fonction optimum.

Nous avons une condition plus restrictive si nous gardons la relation $u(t) = y(t) = ap(t) + b + hp'(t)$ mais ajoutons la condition isopérimétrique :

$$\int_{t_0}^{t_1} u(t)\,dt = K(t_1 - t_0),$$

c'est-à-dire admettons que la production totale soit donnée. En effet, c'est ainsi que la production de quelques biens est stabilisée naturellement. Mais quant aux prix, on sait seulement que l'intervalle de stabilité T est généralement augmenté.

14. Maximum instantané du profit. — Il y a une forme limite du problème du paragraphe 13 lorsque l'intervalle de temps $t_1 - t_0$ tend vers zéro. On peut déterminer une valeur limite de $\frac{dp}{dt}$ à l'instant $t = t_0$ lorsque t_1 tend vers t_0, si $p(t)$ prend la valeur p_0 à t_0 et donne à Π sa valeur maximum sur (t_0, t_1).

De (12.12) nous avons $(p')_{t=t_0} = m\mathrm{C}'$, et de (13.1) si $t_1 - t_0$ tend vers zéro,

$$p_0(1 - 2\mathrm{A}a) - (2\mathrm{A}b + \mathrm{B}) - 2\mathrm{A}hm\mathrm{C}' = 0;$$

donc

$$(p')_{t=t_0} = \frac{1 - 2\mathrm{A}a}{2\mathrm{A}h}p(t_0) - \frac{2\mathrm{A}b + \mathrm{B}}{2\mathrm{A}h}.$$

Ainsi, si l'on pose le problème à chaque instant, on a l'équation différentielle

$$(14.1) \qquad \frac{dp}{dt} = \frac{1 - 2\mathrm{A}a}{2\mathrm{A}h}p(t) - \frac{2\mathrm{A}b + \mathrm{B}}{2\mathrm{A}h}.$$

La solution qui au temps t_0 prend la valeur p_0 est donnée par

$$(14.2) \qquad p(t) = \frac{2\mathrm{A}b + \mathrm{B}}{1 - 2\mathrm{A}a} + \left(p_0 - \frac{2\mathrm{A}b + \mathrm{B}}{1 - 2\mathrm{A}a}\right)e^{\frac{1-2\mathrm{A}a}{2\mathrm{A}h}(t-t_0)}.$$

C'est le même résultat que nous obtenons en cherchant le maximum de $\pi(t) = py - q(u)$ comme fonction du seul p' sous les hypothèses (12.1) à (12.3), afin de déterminer la « meilleure » direction, à chaque t, pour partir de la valeur de p correspondante [1]. En effet, la relation $\frac{\partial\pi}{\partial p'} = 0$ nous donne l'équation

$$p - 2\mathrm{A}ap - 2\mathrm{A}b - 2\mathrm{A}hp' - \mathrm{B} = 0$$

qui n'est que (14.1). C'est un type de problème que nous pouvons appeler « du monopoleur imprévoyant ». Nous voyons que la solution (14.2) ne peut pas être identique à celle du paragraphe 13; en effet,

---

[1] Il n'est pas évident que les quantités du second ordre sont les mêmes dans les deux illustrations données. Mais on peut vérifier immédiatement la relation

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial p'^2} = \lim_{t_1=t_0}\left(\frac{\partial^2\Pi}{dp_0'^2}\frac{1}{t_1 - t_0}\right).$$

il n'existe pas d'intervalle critique T. Dailleurs, la seule constante qui soit solution de (14.1) a la valeur

$$p = \frac{(2Ab + B)}{(1 - 2Aa)};$$

cette valeur ne dépend pas de h mais n'est pas égale au prix p_m du problème de Cournot. Finalement, avec $h > 0$, si $p(t_0)$ n'est pas égale à cette constante, nous aurons un phénomène d'instabilité, indiqué par les valeurs limites $p(\infty) = \infty$ ou $-\infty$.

Le vrai type de régime d'imprévoyance est la concurrence stricte. En effet, si nous faisons l'hypothèse que les entrepreneurs, en nombre n, acceptent la condition du marché comme donnée, et que chacun cherche à rendre maximum son profit, l'équation

$$p - 2Au_i - B = 0$$

subsistera encore, avec $nu_i = y = ap + b + hp'$. On aura donc

$$np - 2A(ap + b + hp') - nB = 0,$$

ce qu'on pourra écrire sous la forme d'une équation différentielle

$$\frac{dp}{dt} = \frac{n - 2Aa}{2Ah} p - \frac{2Ab + nB}{2Ah}, \tag{14.3}$$

avec la solution

$$p(t) = \frac{2Ab + nB}{n - 2Aa} + \left(p_0 - \frac{2Ab + nB}{n - 2Aa}\right) e^{\frac{n - 2Aa}{2Ah}(t - t_0)}. \tag{14.4}$$

La seule solution constante de (14.3) est la valeur p_s de (6.6); la formule (14.4) renferme comme cas particulier ($n = 1$) la formule (14.2); mais le prix est encore plus instable pour $n > 1$, puisque $n - 2Aa > 1 - 2Aa$ sous les hypothèses données concernant A, a, h. Pour la production, on trouve

$$u(t) = n\frac{b + Ba}{n - 2Aa} + \frac{n}{2A}\left(p_0 - \frac{2Ab + nB}{n - 2Aa}\right) e^{\frac{n - 2Aa}{2Ah}(t - t_0)}, \tag{14.5}$$

de manière que le prix et la production augmentent ensemble ou s'abaissent ensemble, comme pendant les crises économiques.

Il y a évidemment d'autres méthodes aussi à employer afin de construire un phénomène dynamique instantané. On peut admettre des relations différentielles hypothétiques pour définir l'offre et la demande à chaque instant [1, c], et l'on peut introduire de telles expressions qui lient l'offre et la demande si l'on pose $\frac{dr}{dt} = u - y$, au lieu d'imposer l'équilibre dynamique $u - y = 0$, en faisant une hypothèse convenable sur les *stocks* r [7, *e*, Chap. IV].

Le régime de la concurrence bornée peut se considérer soit de ce point de vue, soit en cherchant à rendre maxima les profits totaux. Chaque profit Π_i sur l'intervalle de temps (t_0, t_1) doit être maximum comme fonction de la u_i correspondante, tandis qu'il y a la liaison

$$\Sigma u_i = f(p, p')$$

entre les fonctions variables. Ce problème a été résolu par M. Roos, quant aux conditions nécessaires et suffisantes, pour le problème approximatif et aussi pour le problème plus général [23, *a*, *b*].

Le monopoleur qui est assez prévoyant pour chercher le maximum d'un profit total Π sur un intervalle (t_0, t_1) de temps comme aux paragraphes 12, 13, le sera aussi au point de peser l'effet d'un second intervalle avant de venir au bout du premier. Il commencera son problème de nouveau à partir d'un certain instant t_0 $(t'_0 < t_1)$, pour un nouvel intervalle (t'_0, t'_1) $t'_1 > t_1$. Il ne pourra pas prendre $t'_0 - t_0$ trop petit sans détruire le bénéfice de sa prévoyance (quoique ainsi ce ne soit pas exactement le problème que nous venons de résoudre); par contre il ne voudra pas se limiter à un seul problème avec $t_1 - t_0$ très grand, de crainte de rencontrer des situations imprévues au commencement.

Peut-être au lieu du maximum de $\Pi = \int_{t_0}^{t_1} \pi \, dt$ il considérera le maximum d'un profit réduit $\int_{t_0}^{t_1} \pi\varphi(t - t_0)\, dt$, où le facteur

$$\varphi(\tau) = \varphi(t - t_0)$$

sera une fonction positive et décroissante de τ qui correspond à sa connaissance des situations futures et qui devient effectivement nulle à partir d'un certain intervalle de temps $\tau = \mathrm{T}$. Il posera $t_1 - t_0 = \mathrm{T}$.

La fonction $\varphi(t - t_0)$ peut comprendre comme cas particulier le facteur dû au taux d'intérêt, par exemple

$$\varphi(t - t_0) = e^{-i(t-t_0)}$$

afin de rapporter la valeur du profit toute au temps t_0 (1),

---

(1) Cette « force d'intérêt » a été introduite en ce genre de problème par MM. Hotelling [14] et Roos [23, *e*] spécialement par rapport aux questions d'amortissement.

Cependant, il y a des situations douées d'une période naturelle ou déterminée du temps, par exemple celles qui dépendent directement des produits agricoles. Pour ces industries on n'a pas toujours, même en première approximation, $u(t) = y(t)$, mais il existe des stocks $r(t)$,

$$\frac{dr}{dt} = u - y,$$

et les deux fonctions $p(t)$, $r(t)$ sont à déterminer. Ainsi, si nous posons

$$\Pi = \int_{t_0}^{t_1} \{ py - q(u) \} \varphi(t - t_0)\, dt$$

avec $y = f(p, p')$ et

$$u = y + \frac{dr}{dt} = f(p, p') + r',$$

nous aurons un problème simple de calcul des variations. Pour le discriminant de la forme quadratique correspondante nous aurons la valeur

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial p'^2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial r'^2} - \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial p' \partial r'} \right)^2 = -(p - q') q'' \frac{\partial^2 f}{\partial p'^2} \{ \varphi(t - t_0) \}^2.$$

15. **Le remplacement.** — Il convient de signaler un type de problème, d'application pratique, où l'on cherche directement à rendre maximum une quantité Π. C'est le problème où l'on remplace, à un instant ω à determiner, $t_0 < \omega < t_1$, une machine usée ou insuffisante par une autre, peut-être d'une espèce différente; ou, moins généralement, le problème du dépérissement, où l'on cherche à déterminer le temps ω tel que le profit avec une machine donnée soit maximum [**14**; **15**, *e*]. La question peut se poser indirectement, d'une façon assez générale, avec l'introduction de nouvelles fonctions inconnues, comme un problème de Mayer, à extrémités libres; mais il convient de l'étudier aussi directement, avec des méthodes appropriées. C'est ainsi que M. Roos l'a traité quant aux conditions nécessaires du premier ordre [**23**, *f*]. Nous considérerons ici un cas simple, en comptant le dépérissement selon les concepts de M. Hotelling et en analysant le problème comme M. Roos; mais il faut pour le moment abandonner les méthodes tout à fait élémentaires.

Nous supposons un monopoleur qui possède une machine (ou fabrique) dont la production soit $u(t)$ par unité de temps, à un prix de vente $p(t)$; soient

$$y(t) = u(t) = f(p, p') \tag{15.1}$$

la demande, et $i(t)$ une autre fonction connue qui représentera le taux d'intérêt à l'instant t. Posons

$$\varphi(t_1 - t_0) = e^{-\int_{t_0}^{t_1} i(t)\,dt},$$

et désignons par $D_1 = D_1(u)$ une fonction positive qui représentera le dépérissement de valeur par unité de temps. La valeur de la machine après l'intervalle de temps (τ_0, ω), si cette valeur est rapportée à l'instant t_0, sera donnée par l'expression

$$V_1 = \left[K_1 - \int_{t_0}^{\omega} D_1(u)\,dt\right] \varphi(\omega - t_0), \tag{15.2}$$

K_1 étant sa valeur au temps t_0. L'accroissement de valeur sera donc la quantité négative $V_1 - K_1$. Au même temps, l'entrepreneur aura un profit total $\int_{t_0}^{\omega} [pu - q_1(u)]\varphi(t - t_0)\,dt$. Ainsi pour la valeur du service de la machine pendant l'intervalle (t_0, ω) de temps, si cette valeur est toujours rapportée à t_0, on aura l'expression

$$I_1 = K_1[\varphi(\omega - t_0) - 1] + \int_{t_0}^{\omega} \{[pu - q_1(u)]\,\varphi(t - t_0) - D_1(u)\,\varphi(\omega - t_0)\}\,dt.$$

Si cette machine est remplacée par une autre, dont la valeur neuve est K_2, on aura une expression analogue pour la seconde machine :

$$\begin{aligned} I_2 = {} & K_2[\varphi(t_2 - t_0) - \varphi(\omega - t_0)] \\ & + \int_{\omega}^{t_2} \{[pu - q_2(u)]\,\varphi(t - t_0) - D_2(u)\,\varphi(t_2 - t_0)\}\,dt, \end{aligned}$$

où les valeurs sont encore rapportées à l'instant t_0. Nous supposerons que $p(t)$ soit continue, de la classe D', et de la classe C'' à l'intérieur des deux intervalles partiels (t_0, ω) et (ω, t_1).

L'entrepreneur aura un bénéfice maximum sur l'intervalle (t_0, t_1) s'il peut trouver $p(t)$ et ω afin que l'expression $I = I_1 + I_2$ soit maximum.

En posant

$$\varphi(\omega - t_0) - 1 = -\int_{t_0}^{\omega} \iota(t)\, e^{-\int_{t_0}^{t} \iota(t)\,dt}\, dt,$$

$$\varphi(t_2 - t_0) - \varphi(\omega - t_0) = -\int_{\omega}^{t_1} \iota(t)\, e^{-\int_{t_0}^{t} \iota(t)\,dt}\, dt,$$

l'expression I s'écrit sous une forme intégrale

$$\text{(15.3)} \qquad \mathrm{I} = \int_{t_0}^{\omega} \mathrm{F}_1(p, p', t, \omega)\, dt + \int_{\omega}^{t_1} \mathrm{F}_2(p, p', t, \omega)\, dt$$

avec

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_1 = {} & \{ p f(p, p') - q_1(f(p, p')) \} \varphi(t - t_0) \\ & - \mathrm{D}_1(f(p, p'))\, \varphi(\omega - t_0) - \mathrm{K}_1 \iota(t)\, \varphi(t - t_0), \\ \mathrm{F}_2 = {} & \{ p f(p, p') - q_2(f(p, p')) \} \varphi(t - t_0) \\ & - \mathrm{D}_2(f(p, p'))\, \varphi(t_1 - t_0) - \mathrm{K}_2 \iota(t)\, \varphi(t - t_0). \end{aligned}$$

Si le problème est résolu, la quantité I sera maximum avec ω et $p(\omega)$ fixes, aux valeurs optima, quant aux variations des arcs sur les intervalles intermédiaires (t_0, ω) et (ω, t_1). Ainsi ces deux arcs doivent satisfaire aux équations d'Euler correspondantes :

$$\frac{\partial \mathrm{F}_i}{\partial p} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathrm{F}_i}{\partial p'} = 0.$$

Il faut trouver encore deux relations pour déterminer ω, $p(\omega)$.

On peut maintenant considérer une variation de $p(\omega)$ avec ω fixe, comme dans le problème classique où il y a la possibilité dexistence d'un sommet. On trouve donc immédiatement la condition

$$\text{(15.4)} \qquad \left[\frac{\partial}{\partial p'} \mathrm{F}_1(p, p', t, \omega) \right]_{t=\omega-0} = \left[\frac{\partial}{\partial p'} \mathrm{F}_2(p, p', t, \omega) \right]_{t=\omega+0}.$$

Finalement il faut exécuter une variation avec un changement de ω. Une telle variation est dessiné dans la figure. En suivant un procédé analogue à celui de Weierstrass (¹) et supposant les conditions analogues de continuité, mais basées sur les deux fonctions F_1, F_2, on

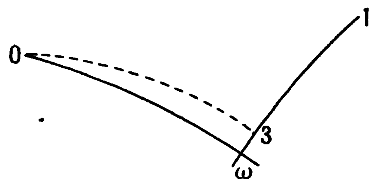
(¹) BOLZA, *Lectures on the Calculus of Variations* (Chicago, 1904), p. 33, 36.

aura le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
&I_{03}-(I_{0\omega}+I_{\omega 3}) \\
&\quad =(t_3-\omega)\Big\{[p'(\omega+o)-p'(\omega-o)]\Big[\frac{\partial}{\partial p'}F_1(p,p',t,\omega)\Big]_{t=\omega-0} \\
&\qquad + F_1[p,p'(\omega-o),\omega,\omega]-F_2[p,p'(\omega+o),\omega,\omega] \\
&\qquad +\int_{t_0}^{\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}F_1(p,p',t,\omega)\,dt+\int_{\omega}^{t_1}\frac{\partial}{\partial\omega}F_2(p,p',t,\omega)\,dt+\eta\Big\},
\end{aligned}$$

où $\lim\limits_{t_3=\omega}\eta=o$.

La quantité entre accolades { } sera donc nulle. Par le moyen



de (15.4), on peut écrire cette relation sous la forme

$$\begin{aligned}
(15.5)\qquad & p'(\omega-o)\Big[\frac{\partial}{\partial p'}F_1(p,p',t,\omega)\Big]_{t=\omega-0} \\
&\qquad - F_1[p,p'(\omega-o),\omega,\omega]-\int_{t_0}^{\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}F_1(p,p',t,\omega)\,dt \\
&= p'(\omega+o)\Big[\frac{\partial}{\partial p'}F_2(p,p',t,\omega)\Big]_{t=\omega+0} \\
&\qquad - F_2[p,p'(\omega+o),\omega,\omega)+\int_{\omega}^{t_1}\frac{\partial}{\partial\omega}F_2(p,p',t,\omega)\,dt.
\end{aligned}$$

Dans le cas que nous considérons, $\frac{\partial F_2}{\partial\omega}=o$ [*voir* (15.2)].

M. Roos, bien qu'il considère des fonctions D_t, q_t beaucoup plus générales en y introduisant plusieurs variables, limite le problème un peu en considérant $u(t)$, comme $p(t)$, continue à $t=\omega$. Si dans notre cas nous faisons la même hypothèse, les relations (15.4), (15.5) deviennent plus simples. En effet, si $\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{t=\omega}\neq o$, on peut déduire de la continuité de $u(t)=f(p,p')$ la continuité de p' à $t=\omega$. Ainsi les (15.4), (15.5) prennent la forme suivante

$$(15.4') \qquad q'_1(u_\omega) + D'_1(u_\omega) = q'_2(u_\omega) + D'_2(u_\omega)\varphi(t_1 - \omega)$$

$$(15.5') \qquad q_1(u_\omega) + D_1(u_\omega) + \iota(\omega)\left\{ K_1 - \int_{t_0}^{\omega} D_1(u)\,dt \right\}$$
$$= q_2(u_\omega) + D_2(u_\omega)\;\varphi(t_1 - \omega) + \iota(\omega)K_2,$$

où par u_ω on désigne la valeur de $u(t)$ pour $t = \omega$.

Mais au lieu de considérer $u(t)$ comme continue pour $t = \omega$, il conviendrait plutôt d'admettre des discontinuités, en ce point, de toutes les fonctions, y compris la $p(t)$; l'entrepreneur changerait probablement le prix brusquement à cet instant s'il agissait en monopoleur. Ainsi il faudrait remplacer (15.4) par deux équations en $p(\omega - 0)$ et $p(\omega + 0)$.

On dirait aussi, quant à l'emploi pratique de la fonction $D(u)$, qu'on devait la remplacer par une constante, ce qui simplifierait (15.5′), où l'on devait la généraliser beaucoup, non pas surtout par l'adjonction d'autres variables, p, p', u', ... autres que u, mais plutôt en la changeant de type, parce que le dépérissement par unité de temps peut dépendre de toute l'histoire antérieure de la fonction $u(t)$, comme il arrive pour les fonctions de la Physique considérées par M. Volterra.

VI. — Problèmes d'ordre zéro.

16. Introduction. — Nous avons noté le manque de stabilité dans les situations économiques où l'on doit considérer la dérivée $\frac{dp}{dt}\cdot$ Ces difficultés ne se présentaient pas dans les problèmes primitifs de Cournot, si l'on excepte les considérations de dynamique dans le paragraphe 8. Convenons donc, afin de classer un peu les questions, de dire que les problèmes où les dérivées n'entrent pas nécessairement sont des problèmes d'*ordre zéro*. Les autres sont d'un ordre supérieur.

L'économie classique, même mathématique, s'est restreinte pour la plupart des cas aux problèmes et aux théories d'ordre zéro (1).

(1) Pareto a considéré des mouvements vibratoires des prix et des autres quan-

Malgré le fait qu'on y emploie systématiquement la différentiation, ce n'est que comme procédé de calcul; on ne se soucie guère des dérivées $\frac{dp}{dt}$, $\frac{du}{dt}$, etc., des variables. C'est ainsi une théorie de statique, plutôt que de dynamique, qui intervient dans cette analyse. Est-ce donc qu'on doit retomber sur la théorie classique et sur l'équilibre, si l'on se borne aux problèmes d'ordre zero ? Il est interessant de constater qu'on peut donner à cette question une réponse négative. En effet, nous avons déjà trouvé un exemple du contraire, en traitant le mouvement lent de l'indice des prix au moyen de la loi de demande

$$y = a\frac{p(t)}{P(t-T)} + b.$$

Dans ce problème les considérations dynamiques précisément nous intéressaient.

Les problèmes de ce genre méritent une étude plus étendue. Peut-être offrent-ils des exemples de crises économiques qu'on pourrait éliminer, si cela était désirable, avec la méthode de stabilisation proposée par M. Irving Fisher [8, *b*]. Il fixerait convenablement de temps en temps la valeur d'or qui correspondait à l'unite officielle de la monnaie; ainsi il pourrait peut-être borner la variation de l'indice monétaire $P(t)$. En effet, depuis la guerre, plusieurs pays ont dû employer une méthode semblable pour régler leurs finances. Mais il paraît moins possible qu'on puisse borner avec cette méthode les variations des derivees des prix et des indices, dans les problèmes d'ordre superieur.

Nous examinerons brièvement quelques problèmes d'ordre zéro, en commençant par le plus simple.

17. **La réclame.** — Prenons le cas approximatif et supposons qu'on ajoute a la fonction quadratique $Au^2 + Bu + C$ un coût de réclame z. On peut supposer, comme l'hypothèse la plus simple, qu'on en

---

tités par l'introduction d'une force d'inertie, plus ou moins artificielle, en analogie avec la Mécanique, sous la forme d'une fonction de $\frac{du}{dt}$ (*voir* [20, *a*, vol. 2, p. 282]). Il considere les crises comme une « résonance » de petites vibrations (*ibid.*, p. 286) (*voir* aussi [18, *a*, *b*, *c*], [24]).

reçoive l'avantage d'une croissance de la demande, proportionnelle à z

$$y = ap + b + kz \qquad (a < 0,\ k > 0).$$

Pour résoudre les équations dans le problème du monopole il faut seulement remplacer b par $b + kz$ et C par $C + z$ dans les formules déjà obtenues au paragraphe 2. Ainsi, nous aurons,

$$(17.1) \qquad p = \frac{(b + kz)(1 - 2Aa) - Ba}{-2a(1 - Aa)}, \qquad u = \frac{(b + kz) + Ba}{2(1 - Aa)}$$

avec $1 - Aa > 0$.

Mais pour savoir si la réclame est utile, il faut savoir aussi si le profit augmente ou diminue. Nous aurons pour cette quantité la valeur [*voir* (2.6)]

$$\pi = -\frac{1}{a}\,\frac{(b + kz + Ba)^2}{4(1 - Aa)} - C - z,$$

d'où nous tirons

$$(17.2) \qquad \frac{d\pi}{dz} = \frac{b + kz + Ba}{-2a(1 - Aa)}k - 1.$$

Il s'ensuit que le profit augmente si l'on a

$$(17.3) \qquad -\frac{1}{2a}\,\frac{b + kz + Ba}{1 - Aa}k > 1.$$

Nous obtenons aussi de (17.1) les relations

$$(17.4) \qquad \frac{dp}{dz} = \frac{(1 - 2Aa)}{-2a(1 - Aa)}k, \qquad \frac{du}{dz} = \frac{1}{2(1 - Aa)}k.$$

Ces formules ont une signification évidente. De (17.3) on déduit que s'il y a un avantage à faire de la réclame à une valeur donnée z, cet avantage deviendra encore plus grand avec une augmentation de z. Et si l'on a le cas des coûts croissants, $A > 0$, ou même $A > \frac{1}{2a}$, le prix et la production croîtront continuellement en même temps que le profit et la demande, comme pendant les périodes de crises économiques. Avec les coûts décroissants où $\frac{1}{2a} > A > \frac{1}{a}$, il est possible de faire augmenter la production et le profit tout en diminuant le prix.

Les résultats que nous venons d'obtenir ne sont qu'une conséquence de notre hypothèse que k soit constante. Mais cette hypothèse nous offre un moyen de comprendre le phénomène pratique de l'existence des industries qui dépensent fantastiquement pour la reclame.

18. **Une loi héréditaire de la demande.** — L'analyse du probleme du monopole, de rendre maximum un profit Π sur un intervalle (t_0, t_1) de temps, dépend des relations que l'on suppose exister entre les quantités y et p, u et q, et y et u; en changeant ces relations on obtient de nouveaux problèmes. Ainsi on aura un problème de traînée de la production si l'on suppose les relations

$$y(t) = ap(t) + b, \qquad q = \mathrm{A}\,u(t)^2 + \mathrm{B}\,u(t) + \mathrm{C},$$
$$u(t) = y(t - \mathrm{T}), \qquad \Pi = \int_{t_0}^{t_1} (py - q)\,dt.$$

On aura un problème de production discontinue si l'on suppose les relations

$$y(t) = ap(t) + b, \qquad \int_{t_0}^{t_1} y(t)\,dt = \mathrm{U},$$
$$q = \mathrm{AU}^2 + \mathrm{BU} + \mathrm{C}, \qquad \Pi = \int_{t_0}^{t_1} (py - q)\,dt;$$

ici on peut supposer que toute la production est achevée en un seul instant t_0, par une moisson.

Ces deux problèmes d'ordre zéro se résolvent immédiatement au moyen des fonctions quadratiques par l'introduction du paramètre x, comme dans le probleme du paragraphe 12 [7, e, Chap. XV]. Le second problème conduit à une équation intégrale d'une forme très simple

$$2y(t) - b - \mathrm{B}a - 2\mathrm{A}a\int_{t_0}^{t_1} y(\tau)\,d\tau = 0,$$

qu'on résout en posant

$$m = \int_{t_0}^{t_1} y(\tau)\,d\tau.$$

Plus interessant est le problème où l'on suppose une loi de la demande de la forme

$$(18.1) \qquad y(t) = ap(t) + b + \int_{t_0}^{t} h(\tau, t)\,p(\tau)\,d\tau,$$

ce qu'on appelle une loi de demande *héréditaire*. Cette loi est linéaire, mais la demande au temps t dépend, en outre du prix au temps t, des prix aux temps antérieurs τ, $t_0 < \tau < t$, en effet, la contribution à la demande due aux prix pratiqués pendant l'intervalle τ à $\tau + \Delta\tau$ s'exprime par l'expression approximative $h(t, \tau) y(\tau) \Delta\tau$. Un cas particulier important est celui où le « poids » de la contribution dépend seulement de l'intervalle du temps entre τ et t, $h(t, \tau) = h(t - \tau)$ [23, a] (1).

En général, par exemple, si $h(t, \tau)$ est continue et $a \neq 0$, on peut résoudre l'équation (18.1) et obtenir pour $p(t)$ une expression de la même forme

$$(18.2) \qquad p(t) = ry(t) + s + \int_{t_0}^{t} k(t, \tau) y(\tau)\, d\tau \qquad \left(r = \frac{1}{a}\right),$$

qui réduit aussi à la forme

$$(18.2') \qquad p(t) = ry(t) + s + \int_{t_0}^{t} k(t - \tau) y(\tau)\, d\tau,$$

dans le cas particulier $h(t, \tau) = h(t - \tau)$. Nous pourrons donc partir également bien de ces dernières formes de la relation.

Pour simplifier, posons encore

$$(18.3) \qquad u = y, \qquad q = q(u) = \mathrm{A}\, u^2 + \mathrm{B}\, u + \mathrm{C},$$

et supposons qu'on ait

$$r < 0, \qquad \mathrm{A} > 0.$$

La quantité $\Pi = \int_{t_0}^{t_1} (py - q)\, dt$, que nous cherchons à rendre

---

(1) Si l'on avait $h(t, \tau) = h(t - \tau)$ il serait naturel de considérer aussi une loi de la forme

$$y(t) = ap(t) + b + \int_{t-\mathrm{T}}^{t} h(t - \tau) p(\tau)\, d\tau.$$

Cette équation intégrale a été traitee dernièrement par M. Volterra [27]. Il y aurait lieu peut-etre de considérer aussi une loi de la forme d'une equation de Fredholm,

$$y(t) = ap(t) + b + \int_{t_0}^{t_1} h(t, \tau) p(\tau)\, d\tau \qquad (t_0 \leqq t \leqq t_1),$$

qui dépend des prix passés et aussi de l'expectative des prix futurs.

maximum, prend la forme suivante :

$$
(18.4)\quad \Pi = \int_{t_0}^{t_1}\Big[r y(t)^2 + s y(t) + y(t)\int_{t_0}^{t} k(t,\tau) y(\tau)\, d\tau - A y(t)^2 - B y(t) - C \Big]\, dt.
$$

En remplaçant $y(t)$ par $y(t)+x\psi(t)$, cette quantité deviendra une fonction quadratique de x.

On aura

$$
\left(\frac{d\Pi}{dx}\right)_{x=0} = \int_{t_0}^{t_1}\Big[2(r-A)y(t) + s - B + \int_{t_0}^{t} k(t,\tau)y(\tau)\,d\tau \Big]\psi(t)\,dt + \int_{t_0}^{t_1} dt\, y(t)\int_{t_0}^{t} k(t,\tau)\psi(\tau)\,d\tau,
$$

et par un changement de l'ordre des intégrations dans la seconde intégrale, qui devient $\int_{t_0}^{t_1} dt\,\psi(t)\int_{t}^{t_1} k(\tau, t)y(\tau)\,d\tau$ (en interchangeant aussi les paramètres d'integration), on aura finalement :

$$
\left(\frac{d\Pi}{dx}\right)_{x=0} = \int_{t_0}^{t_1}\Big[2(r-A)y(t) + s - B + \int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)y(\tau)\,d\tau \Big]\psi(t)\,dt,
$$

avec

$$
\begin{aligned}
K(t,\tau) &= k(t,\tau) \qquad (\tau \leqq t),\\
&= k(\tau, t) \qquad (\tau \geqq t)
\end{aligned}
$$

La fonction $K(t,\tau)$ est donc symétrique, $K(t,\tau) = K(\tau,t)$.

D'une manière analogue nous aurons aussi la formule

$$
(18.5)\quad \frac{d^2\Pi}{dx^2} = 2(r-A)\int_{t_0}^{t_1}\psi(t)^2\,dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)\psi(t)\psi(\tau)\,dt\,d\tau
$$

La dérivée $\left(\frac{d\Pi}{dx}\right)_{x=0}$ sera nulle pour toute $\psi(t)$ si $y(t)$ est solution de l'équation intégrale a noyau symétrique :

$$
(18.6)\qquad y(t) + \frac{1}{2(r-A)}\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)y(\tau)\,d\tau = -\frac{s-B}{2(r-A)}.
$$

Nous faisons l'hypothèse que le noyau $K(t,\tau)$ soit *négatif défini*, c'est-à-dire que l'intégrale double en (18.5) soit négative ou nulle pour toute fonction $\psi(t)$ qui n'est pas identiquement nulle. Alors, *il y aura une fonction $y(t)$ et une seule qui donnera à Π une valeur maximum; l'équation* (18.6) *aura $y(t)$ comme solution univoque.*

En effet, la quantité $\frac{d^2\Pi}{dx^2}$ est négative, puisque nous avons $r < 0$, $A > 0$. Dans ce cas, si $y(t)$ est une solution de (18.6), Π sera plus grande pour $y(t)$ que pour toute autre fonction $y(t) + \psi(t)$. Il ne peut pas exister une seconde solution $y_2(t)$ de (18.6), car, en ce cas, si l'on écrivait Π_2 pour la valeur correspondante de Π, on aurait en même temps, $\Pi > \Pi_2$, en posant $\psi = y_2 - y$, et $\Pi_2 > \Pi$, en échangeant les rôles de y_2 et y et posant $\psi = y - y_2$.

Il reste donc à demontrer qu'il existe toujours une solution de (18.6), c'est-à-dire que $\frac{1}{2(r - A)}$ n'est pas une *valeur caractéristique* du noyau. En effet, on sait que s'il n'existait pas de telle solution, il y aurait une fonction $Y(t)$, non identiquement nulle, solution de l'équation homogène

$$y(t) + \frac{1}{2(r - A)} \int_{t_0}^{t_1} K(t, \tau) y(\tau) \, d\tau = 0.$$

Mais cette équation est le cas particulier de (18.6) où $s - B = 0$, et elle possède la solution $y(t) \equiv 0$. La quantité Π, avec $s - B = 0$, serait donc maximum pour $y(t) \equiv 0$ et pour $y(t) \equiv Y(t)$, par le raisonnement précédent, et nous aurions encore la même contradiction. Il existe donc toujours une et une seule solution de (18.6).

Le problème que nous venons de considérer garde son intérêt si nous ajoutons une condition isopérimétrique, par exemple, que la production totale pendant l'intervalle de temps (t_0, t_1) est donnee egale a K. On introduit une constante isopérimétrique par un procédé qui est habituel dans la theorie du calcul des variations. Nous pouvons l'examiner également bien, quant au problème d'ordre zéro, sous une forme un peu plus générale..

19. **Fonctionnelles d'ordre zéro.** — Nous disons que le nombre Π est *fonctionnelle* de la fonction $p(t)$ sur l'intervalle (t_0, t_1) :

$$\Pi = F[p(\tau)] = F\left[p\binom{t_1}{\tau}_{t_0}\right], \tag{19.1}$$

ou tout simplement $\Pi = F[p]$, si à chaque fonction $p(t)$, d'une classe donnée $\{p(t)\}$ définie sur l'intervalle (t_0, t_1), correspond une valeur de Π. Les profits totaux des paragraphes 12, 13, 15, 18 sont donc des fonctionnelles. Une fonctionnelle Π sera *d'ordre zéro* si elle est définie pour toute $p(t)$ d'une certaine classe sans égard à la propriété de ces fonctions de posséder une dérivée ou non; nous nous bornons ici à la classe de fonctions continues, bornées et réelles. Le profit total Π du paragraphe 18 est une fonctionnelle d'ordre zéro. Étant donnée une classe de fonctions $\{\psi(t)\}$ [pour nous la classe $\{p(t)\}$], nous disons, suivant Volterra, que Π possède une *variation première* pour une fonction $p_0(t)$ de $\{p(t)\}$ si la limite

$$(19.2) \qquad \delta\Pi = \delta\,\mathrm{F}[p_0, \psi] = \lim_{\varepsilon=0} \frac{\mathrm{F}[p_0(\tau) + \varepsilon\,\psi(\tau)] - \mathrm{F}[p_0(\tau)]}{\varepsilon}$$

existe pour toute $\psi(t)$ de $\{\psi(t)\}$(¹). Une fonctionnelle Π sera *continue* (d'ordre zéro), selon Volterra, pour $p_0(t)$ de $\{p(t)\}$, si avec $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver $\eta > 0$ tel que

$$|\,\mathrm{F}[p_0 + \psi] - \mathrm{F}[p_0]\,| < \varepsilon,$$

pour toute $\psi(t)$, $|\psi(t)| < \eta$, de la classe $\{p(t)\}$; elle sera dite continue dans un champ R si la même inégalité a lieu pour toute $p_0(t)$ dans R.

Si la limite (19.2) est uniforme pour toute $p_0(t)$ dans R et si $|\,\mathrm{F}[p_1] - \mathrm{F}[p_2]\,| < \mathrm{M}\max|p_1 - p_2|$, p_1, p_2 de R, cette variation s'exprime comme intégrale de Stieltjes ; si l'on substitue à la seconde condition cette autre plus restrictive, que

$$|\,\mathrm{F}[p_1] - \mathrm{F}[p_2]\,| < \mathrm{M}\int_{t_0}^{t_1} |p_1 - p_2|\,dt,$$

la variation prend la forme d'une intégrale de Lebesgue [26]. Si la fonctionnelle possède une différentielle, comme M. Fréchet l'a définie [9, *a*], c'est-à-dire què l'accroissement de F diffère d'une fonctionnelle linéaire T de l'accroissement $\Delta p(t)$ de $p(t)$ par un infinitésimal d'ordre supérieur à $\max|\Delta p|$, la variation est égale à la différentielle, et celle-ci s'exprime comme intégrale de Stieltjes.

(¹) V. Volterra, *Les fonctions de lignes* (Paris, 1911). Pour ces questions générales, *voir* aussi, P. Lévy, *Analyse fonctionnelle* (*Memorial des Sciences mathematiques*, fasc. V). Paris, 1925.

La variation seconde sera définie comme la limite

$$(19.3) \qquad \delta^2 F[p_0, \psi, \varphi] = \lim_{\varepsilon = 0} \frac{\delta F[p_0 + \varepsilon\varphi, \psi] + \delta F[p_0, \psi]}{\varepsilon},$$

lorsque $\delta F[p, \psi]$ existe pour toute $p(t)$ dans un voisinage (d'ordre o), et que la limite (19.3) existe. Sous des conditions peu restrictives [1] on peut écrire $\delta^2 F[p_0, \psi, \varphi] = \delta^2 F[p_0, \varphi, \psi]$, et

$$F[p + \varepsilon\psi] = F[p] + \varepsilon\delta F[p, \psi] + \frac{\varepsilon^2}{2}\{\delta^2 F[p, \psi, \psi] + E[p, \psi]\},$$

où $\lim\limits_{\varepsilon=0} E[p, \psi] = 0$, avec p, ψ donnés.

Comme dans le calcul des variations on peut etablir des conditions necessaires pour que $F[p]$ soit maximum pour une fonction donnée $\bar{p}(t)$ qui se trouve à l'intérieur du champ R où $F[p]$ est donnée, en même temps qu'une seconde fonctionnelle $G[p]$ conserve une valeur donnée K, dans ce cas, assez général, où les variations premières sont linéaires en φ, et les variations secondes bilinéaires en ψ, φ [13]. Si $G[\bar{p}] = K$ et $F[\bar{p}]$ est maximum, et s'il existe une fonction $\psi_2(t)$ telle que $\delta G[\bar{p}, \psi_2]$ ne soit pas nulle, alors il y aura une constante isopérimétrique λ telle que la fonctionnelle $H = F + \lambda G$ ait pour $p(t) = \bar{p}(t)$ une variation première nulle pour toute ψ.

On peut démontrer facilement qu'il faut aussi que l'on ait

$$\delta^2 H\left\{\bar{p}, \psi - \frac{\delta G[\bar{p}, \psi]}{\delta G[\bar{p}, \psi_2]}\psi_2, \psi - \frac{\delta G[\bar{p}, \psi]}{\delta G[\bar{p}, \psi_2]}\psi_2\right] \leqq 0$$

pour toute $\psi(t)$, c'est-à-dire que $\delta^2 H[\bar{p}, \psi_1, \psi_1] \leqq 0$ pour toute ψ_1 telle que $\delta G[\bar{p}, \psi_1] = 0$. En effet, toute fonction ψ_1 telle que

$$\delta G[p, \psi_1] = 0$$

peut s'exprimer sous la forme

$$\psi_1(t) = \psi(t) - \frac{\delta G[p, \psi]\psi_2(t)}{\delta G[p, \psi_2]}.$$

La solution générale de cette équation intégrale est donnée par l'ex-

---

(1) On aura ce résultat, par exemple, si $F(p)$ possede une differentielle seconde [9, *b*]. Cette differentielle est une fonction bilineaire des accroissements.

pression

$$\psi(t) = \psi_1(t) + m\,\psi_2(t) \qquad (m \text{ constante arbitraire}).$$

On peut trouver d'autres conditions nécessaires en suivant les méthodes développés par M^lle Le Stourgeon [16] pour les problèmes d'ordre 1 sans condition isoperimétrique.

On voit par la petite analyse que nous venons de donner que le problème abstrait de l'économie politique correspond a une theorie du calcul des variations assez généiale. L'auteur a fait un essai pour résumer une théorie possible du systeme economique dans cette forme, au moyen des stocks, des quantites produites et échangées et de leurs derivées [7, *b*, *c*]; et après lui, M. Roos en a fait un autre du même genre [23, *c*, *d*]. Les extremales d'un tel systeme s'expriment par des équations intégro-differentielles ou a derivées fonctionnelles. Si au lieu de partir de fonctionnelles determinées et bien définies, comme le sont les profits, qui doivent prendre des valeurs maxima, on commence avec les équations aux derivées fonctionnelles, comme on part des équations aux differentielles totales dans les theories de la valeur, on retombe logiquement sur des questions d'integrabilite de ces systèmes d'equations. Cette question d'intégrabilité a été approfondie par M. Paul Levy [17].

Mais on doit confesser que ces théories générales économiques ne sont encore utiles que pour l'indication de cas particuliers instructifs, et leurs developpements purement formels n'ont pas encore l'interêt qu'ils sont appeles à recueillir pour l'économie politique. On peut dire la même chose, quant aux théories, dites generales, qu'on trouve déjà exposées dans les traités systématiques de l'economie rationnelle. Toutefois, un tel exposé mathématique possede l'avantage considérable de rendre nettement evident le manque de generalite et l'insuffisance des théories classiques qu'il remplace.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. Amoroso (L.). — *a. Lezioni di Economia matematica* (Bologna, 1921).

   b. Discussione del sistema di equazioni che definiscono l'equilibrio del consumatore (*Annali di Economia dell'Università Bocconi*, vol. 4, 1928).

   c. Le equazioni differenziali della Dinamica Economica (*Giorn. degli Economisti e Rev. di Statistica*, vol. 69, 1929).

2. Auspitz et Lieben. — *Untersuchungen über die Theorie des Preises* (Leipziq, 1889).
3. Bray (H.). — Rates of exchange (*Amer. Math. Monthly*, vol. 30, 1923).
4. Cournot (A.). — *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* (Paris, 1838); nous citons la traduction anglaise de Bacon (N.); *Researches into the mathematical theory of wealth*, 2e édition (New-York, 1927).
5. Divisia (F.). — *Économique rationnelle* (Paris, 1928).
6. Edgeworth (F.). — *Mathematical Psychics* (London, 1881).
7. Evans (G.). — *a.* The dynamics of monopoly (*Amer. Math. Monthly*, vol. 31, 1924).

   b. Economics and the Calculus of Variations (*Proc. Nat. Acad. of Sciences*, vol. 11, 1925).

   c. The mathematical theory of Economics (*Amer. Math. Monthly*, vol. 32, 1925).

   d. Cournot on Mathematical Economics (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 35, 1929).

   e. Mathematical introduction to Economics (New-York, 1930).

8. Fisher (I.). — *a. Mathematical researches on the theory of value and prices* (New-York, 1892); nous citons la traduction française de Moret (J.), *Recherches mathématiques sur la théorie de la valeur et des prix* (Paris, 1917).

   b. The purchasing power of money (New-York, 1911); nous citons l'édition de 1922.

   c. The business cycle largely a « Dance of the dollar » (*Journ. Amer. Statistical Assoc.*, vol. 18, 1923).

   d. Our unstable dollar and the socalled business cycle (*Journ. Amer. Statistical Assoc.*, vol. 20, 1925).

   e. A statistical method for measuring « marginal utility » and testing the justice of a progressive income tax (*Economic Essays Contributed in Honor of John Bates Clark*, New-York, 1927).

9. Fréchet (M.). — *a.* Sur la notion de différentielle d'une fonction de ligne (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 15, 1914).

   b. Sur les fonctionnelles bilinéaires (*Ibid.*, vol. 16, 1915).

c. Sur l'existence d'un indice de désirabilité des biens indirects (*C. R. Acad. Sc.*, vol. 187, 1928).

10. Frisch (R.). — Sur un problème d'Économie pure (*Norsk Math. Forinings Skifter*, 1re série, nº 16, 1926).

11. Graziadei (A.). — *Quantità e prezzi di equilibrio* (Roma, 1918).

12. Gossen (H.). — *Entwickelung der Gesetze des menschlichen Verkehrs, und der daraus fliessenden Regeln für menschliches Handeln* (Braunschweig, 1854); on en trouvera un résumé dans [29].

13. Hahn (H.). — Ueber die Lagrange'sche Multiplicatorenmethode (*Sitz. ber. Akad. Wien*, vol. 131, 1922).

14. Hotelling (H.). — A general mathematical theory of depreciation (*Journ. Amer. Statistical Assoc.*, vol. 20, 1925).

15. Jevons (W.). — *The theory of Political Economy* (London, 1871); nous citons la traduction française par Barrault (H.) et Alfassa (M.), avec préface de Painlevé (P.), *La théorie de l'Économie politique* (Paris, 1909).

16. Le Stourgeon (E.). — Minima of functions of lines (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 21, 1920).

17. Lévy (P.). — Sur l'intégration des équations aux dérivées fonctionnelles partielles (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, vol. 37, 1914).

18. Moore (H.). — *a. Generating economic cycles* (New-York, 1923).

b. Elasticity of demand and flexibility of prices (*Journ. Amer. Statistical Assoc.*, vol. 18, 1922).

c. A theory of economic oscillations (*Quart. Journ. Economics*, vol. 41, 1926).

19. Newcomb (S.). — *Principles of Political Economy* (New-York, 1885).

20. Pareto (V.). — *a. Cours d'Économie politique*, 2 vol. (Lausanne et Paris, 1896 et 1897).

b. Sunti di alcuni capitoli di un nuovo trattato di economia pura (*Giorn. degli Economisti e Rev. di Statistica*, vol. 20, 1900).

c. Manuale di Economia politica (Milano, 1906); nous citons la traduction française par Bonnet (A.), *Manuel d'Économie politique*, 2e édition (Paris, 1927).

21. Pietro-Tonelli (A. de). — *Lezioni di scienza economica razionale e sperimentale* (Rovigo, 1919); nous citons l'édition française de Gambier (H.), *Traité d'Économie rationnelle* (Paris, 1927).

22. Ricci (U.). — Il metodo in Economia politica (*Scritti giuridici*, Milano, 1928).

23. Roos (C.). — *a.* A mathematical theory of competition (*Amer. Journ. of Math.*, vol. 47, 1925).

b. Generalized Lagrange problems in the Calculus of Variations (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 30, 1928).

c. Dynamical Economics (*Proc. Nat. Acad. of Sciences*, vol. 13, 1927).

d. A dynamical theory of Economics (*Journ. of Pol. Economy*, vol. 35, 1927).

e. A mathematical theory of depreciation and replacement (*Amer. Journ. of Math.*, vol. 50, 1928).

f. A general problem of minimizing an integral with discontinuous integrand (*Trans. Amer. math. Soc.*, vol. 31, 1929).

24. SCHAMS (E.). — Konstanz und Variabilität ökonomischer Grössenbeziehungen (*Zeits. des Instituts für Weltwirtschaft und Seeverkehr an der Universität Kiel*, vol. 31, 1930).
25. SCHULTZ (H.). — The statistical law of demand as illustrated by the demand for sugar (*Journ. of Pol. Economy*, vol. 33, 1925).
26. SMILEY (W.) et EVANS (G.). — The variation of a functional (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 36, 1930).
27. VOLTERRA (V.). — Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaires (*Journ. de Math. pures et appliquées*, vol. 7, 1928).
28. WALRAS (L.). — *a*. *Teoria matematica della richezza sociale* (dans la *Biblioteca dell'Economista*, vol. 11, 1878) [collection de plusieurs mémoires datant de 1874].

    b. *Éléments d'Économie politique pure, ou théorie de la richesse sociale* (Lausanne, 1874 et 1877).
29. ZAWADZKI (W.). — *Les Mathématiques appliquées à l'Économie politique* (Paris, 1914).

Ouvrages à consulter.

AMOROSO [1, *a*], DIVISIA [5], EVANS [7, *e*], FISHER [8, *b*], PARETO [20, *c*], ZAWADZKI [29].

TABLE DES MATIÈRES.