MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

PANAJIOTIS ZERVOS

Le problème de Monge

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 53 (1932)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1932__53__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT
Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,
Professeur a la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE LIII

Le problème de Monge

Par M. Panajiotis ZERVOS
Professeur a la Faculté des Sciences de l'Université d'Athènes.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET C^ie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1932

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placee à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numeros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

LE

PROBLÈME DE MONGE

Par M. Panajiotis ZERVOS,

Professeur à la Faculté des sciences
de l'Université d'Athènes.

INTRODUCTION.

Le problème de Monge à une variable indépendante dans le sens le plus large, consiste à intégrer explicitement un système de $k(k \leq n - 1)$ équations de Monge

$$(\alpha) \quad F_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n+1}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

les F étant des fonctions homogènes par rapport à $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n+1}$.

Par intégration explicite nous entendons celle où l'on exprime les variables x par des fonctions déterminées d'un paramètre, de $n - k$ fonctions arbitraires de ce paramètre et de leurs dérivées jusqu'à celle d'un certain ordre, pouvant contenir aussi un nombre fini de constantes arbitraires.

Monge a résolu le problème pour le cas $n = 2$, $k = 1$. Le résultat de Monge a pu être étendu à certaines équations ou à certains systèmes indéterminés de la forme (α) dans lesquels $n > 2$.

Dans le cas $n > 2$, $k < n - 1$, entrent des systèmes d'équations de Monge qui ont été l'objet de travaux de Serret, Darboux, MM. Hadamard, Goursat, Hilbert, Cartan et d'autres. Par M. Hilbert a été mis hors de doute, un fait pressenti par plusieurs géomètres relatif à l'impossibilité de l'intégration explicite dans des cas généraux.

Le problème de Monge est lié avec le problème de la réduction d'un système d'équations de Pfaff à une forme canonique.

Si $k = n - 1$, la solution générale dépend d'une fonction arbitraire d'un argument et le problème de Monge est équivalent au problème de l'intégration explicite des systèmes de Pfaff de n equations à $n+2$ variables d'un système déterminé. Cela nous ramène à des problèmes d'équivalence de deux systèmes de n équations aux différentielles totales à $n+2$ variables vis-à-vis du groupe de transformations ponctuelles à $n+2$ variables. C'est ainsi que M. Cartan a pu reconnaître si un système de la forme (α) dans le cas $k = n - 1$ est intégrable explicitement.

M. Vessiot a trouvé avec des hypothèses un peu plus générales un théorème équivalent a celui de M. Cartan en appliquant sa théorie générale nouvelle des problèmes d'intégration, fondée sur la considération des faisceaux de transformations infinitésimales. Cette théorie corrélative a celle de M. Cartan ouvre un horizon vaste des recherches pour le problème de Monge. Pour le même problème à deux fonctions nconnues a plusieurs variables indépendantes, on a des résultats très essentiels de M. E. Goursat.

CHAPITRE I.

L'ÉQUATION DE MONGE DU PREMIER ORDRE.

1. L'équation.

$$f\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) = 0, \tag{1}$$

courbes intégrales. Méthode de Monge. — Le problème de l'intégration de l'équation (1) peut être formulé en ces termes :

Déterminer les courbes qui sont tangentes en chacun de leurs points à l'une des génératrices du cône (T)

$$f\left(x, y, z, \frac{Y-y}{X-x}, \frac{Z-z}{X-x}\right) = 0, \tag{T}$$

ayant ce point pour sommet.

Cherchons d'abord la condition à laquelle doivent satisfaire p et q pour que le plan

$$(2) \qquad Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

ait en commun avec le cône deux génératrices confondues avec une génératrice déterminée. Si l'on pose $\frac{Y-y}{X-x} = t$, on a à exprimer que l'équation

$$(3) \qquad f(x, y, z, t, p + qt) = 0$$

a une racine double en t; donc la condition cherchée sera le résultat de l'élimination de t entre l'équation (3) et sa dérivée par rapport à t. On arrive évidemment à la même condition si l'on élimine y', x' entre les équations

$$f(x, y, z, y', z') = 0, \qquad z' = p + qy', \qquad f_{y'} + qf_z = 0.$$

Soit

$$(4) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

le résultat de l'élimination; si (S) est une surface intégrale de l'équation (4), considérée comme une équation aux derivées partielles, on a que, en chaque point M de la surface (S), le cône (T) touche le plan tangent à la surface suivant une genératrice. Donc, *à chaque équation de Monge* (1) *correspond une equation* (4) *qui est l'équation tangentielle de* (1). L'équation (4) est appelée aussi équation *adjointe* de (1).

Inversement, soit une équation aux dérivées partielles non linéaire de la forme (4); elle lie les coefficients angulaires p, q du plan tangent à une surface intégrale passant par un point donné de l'espace; alors la position de ce plan dépend d'un seul paramètre arbitraire et l'on en déduit que ce plan enveloppe, en général, un cône (T) ayant le point M comme sommet. L'équation de ce cône est le résultat de l'élimination des p, q entre les (2) (4) et l'équation

$$(Y - y)\frac{\partial F}{\partial p} - (X - x)\frac{\partial F}{\partial q} = 0.$$

Il en résulte : *à une équation aux dérivées partielles* (4) *correspond une équation de Monge* (1) *qu'on trouve par l'élimination des* p, q

entre l'équation (4), *et les équations*

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad \frac{\partial F}{\partial p}\,dy - \frac{\partial F}{\partial q}\,dx = 0.$$

Le cône (T) qui est l'enveloppe des ∞^1 plans représentés par l'équation (2) dont les coefficients p, q vérifient (4) est appelé *cône élémentaire* associé au point (x, y, z). En nous rappelant qu'un élément de contact dont les éléments (x, y, z, p, q) satisfont à (4) s'appelle élément de contact intégral, on peut dire que le cône élémentaire associé au point (x, y, z) est l'enveloppe des éléments de contact intégraux appartenant à ce point. Soient une surface (S) intégrale de l'equation (4), un point (x, y, z) de cette surface et le cône (T) qui correspond. Par ce point (x, y, z) passe, comme on sait, une seule caractéristique de (S) ayant comme tangente au point (x, y, z) une génératrice de (T) qui a ce point comme sommet.

Cherchons une courbe *non caractéristique* située sur (S) et tangente à chacun de ses points à la caractéristique de (S) passant par ce point. On voit qu'il existe, en général, sur (S) une telle courbe, puisqu'on peut considérer la surface (S) comme engendrée par une famille de caractéristiques dont chacune rencontre la caractéristique infiniment voisine et alors ces caractéristiques ont une enveloppe; cette courbe admet comme tangente en chaque point la génératrice du (T) relative à ce point. Inversement, soit (Γ) une courbe qui satisfait à (1) sans être caractéristique de (4); alors le lieu des courbes caractéristiques tangentes à (Γ) est une surface intégrale de (4) et la courbe (Γ) est l'enveloppe des caractéristiques.

Il existe, par conséquent, sur une surface intégrale une seule courbe qui satisfait à (1) sans être caractéristique et c'est *l'enveloppe de ses caractéristiques*. Par analogie avec le cas des surfaces développables on l'appelle *arête de rebroussement*. Lie a donné à de pareilles courbes le nom de *courbes intégrales*. On dit donc *courbe intégrale* toute courbe satisfaisant à (1) sans être caractéristique.

Si $V(x, y, z, a, b) = 0$ est une intégrale complète de (4), une surface intégrale quelconque est définie par les caractéristiques

$$V = 0, \qquad \frac{\Delta V}{\Delta a} = 0 \qquad [b = \varphi(a)]$$

et l'enveloppe des caractéristiques est définie par les équations

$$(5) \qquad V = 0, \qquad \frac{\Delta V}{\Delta a} = 0, \qquad \frac{\Delta^2 V}{\Delta a^2} = 0,$$

donc toutes les courbes intégrales peuvent être représentées par ces équations (5) qui permettent de calculer x, y, z en fonction de paramètre a, φ étant une fonction arbitraire de a.

Si une courbe intégrale est tangente a une surface intégrale de (4), le contact est au moins du second ordre. Cette propriéte, ainsi qu'un certain nombre d'autres des courbes intégrales ont été indiquees par Sophus Lie.

Soit comme exemple l'equation $dx^2+dy^2=k^2dz^2$. L'équation adjointe est $k^2(p^2+q^2)=1$, et les formules (5) donnent la solution générale où

$$V=(1-a^2)x+K(1+a^2)z+2ay+4f(a)=0,$$

$f(a)$ étant une fonction arbitraire de a.

Euler a trouvé, le premier, l'intégrale explicite de l'équation

$$dx^2+dy^2=dz^2.$$

2. Résolution de l'équation

$$dx^2+dy^2+dz^2=ds^2. \tag{6}$$

Formules de Serret. — L'intégration de l'équation (6) a été faite d'abord par Serret, par le moyen de l'interprétation géométrique de (6) en coordonnées rectangulaires. Il a cherché à exprimer x, y, z et s d'une courbe quelconque en fonction d'un paramètre θ. Selon les idées de Monge il avait envisagé toute courbe comme une arête de rebroussement d'une surface developpable. Cette surface, lieu géométrique des tangentes de la courbe, est représentée par les équations

$$\Phi=z-px-qy+u=0, \qquad \delta\Phi=du-x\,dp-y\,dq=0,$$

p, q, u considérés comme fonctions d'un paramètre θ; alors l'arête de rebroussement sera représentée par le système d'équations

$$\Phi=0, \qquad \delta\Phi=0, \qquad \delta^2\Phi=0.$$

On en déduit, facilement par différentiation en tenant compte des équations elles-mêmes, les expressions de dx, dy, dz, en fonction de p, dp, d^2p, d^3p, q, dq, d^2q, d^3q, du, d^2u, d^3u et d'ici on prend

$$ds=\Sigma A_i d^i u \qquad (i=1,2,3),$$

où les A_i ne contiennent pas u. En intégrant par parties chaque terme de ds et, en posant $u = \frac{\psi'}{A'''_3 - A''_2 + A'_1}$, on exprime s en fonctions de ψ, p, q et de ses dérivées successives ; les Ψ, p, q sont considérés comme des fonctions d'une variable indépendante. Nous remarquons que la variable indépendante θ est restée jusqu'ici indéterminée. Serret l'a choisie de manière qu'on prend des formules plus simples et il a ainsi exprimé x, y, z, s en fonction d'un paramètre θ et de deux fonctions arbitraires $\psi(\theta)$ et $\varphi(\theta)$ et des dérivées successives de ces deux fonctions [36].

De nouvelles formules pour la résolution de l'équation (3) ont été données par Darboux par la méthode que nous allons exposer.

3. Méthode de Darboux pour l'équation

$$f(dx_1, dx_2, \dots dx_n) = 0. \tag{7}$$

— Considérons d'abord l'équation de Serret (6) écrite

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dx_4^2, \tag{6'}$$

posons

$$dx_i - a_i\, dx_4 = 0$$

et

$$x_i - a_i x_4 = b_i \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{8}$$

on aura

$$\Sigma a_i^2 = 1 \tag{9}$$

et

$$\frac{db_i}{da_i} = -x_4 \tag{10}$$

et le problème de l'intégration de l'équation se ramène au suivant :

Déterminer les expressions a_i, b_i les plus générales satisfaisant aux equations

$$\frac{db_1}{da_1} = \frac{db_2}{da_2} = \frac{db_3}{da_3}. \tag{11}$$

Nous voyons qu'on a six fonctions à déterminer : comme il y a trois relations entre elles, alors il y aura trois fonctions arbitraires; nous prenons pour de telles fonctions arbitraires deux des a_i, par exemple a_1, a_2 et une autre U au choix de laquelle nous conduit la theorie de contact. Nous remarquons, en effet, que les relations (11) expriment que les deux courbes (A) décrite par le point (a_1, a_2, a_3) et (B) décrite par le point (b_1, b_2, b_3) doivent avoir pour chaque valeur de t leurs tangentes et par conséquent leurs plans osculateurs parallèles, ce qui montre que (B) sera l'arête de rebroussement d'une surface développable dont les plans tangents seront parallèles aux plans osculateurs de (A) d'où il suit que, si l'on pose

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a''_1 & a''_2 & a''_3 \end{vmatrix} - U = \Phi,$$

où U est une fonction quelconque de t, les valeurs de X, Y, Z déduites des équations $\Phi = 0$, $\frac{d\Phi}{dt} = 0$, $\frac{d^2\Phi}{dt^2} = 0$ seront précisément celles de b_1, b_2, b_3 qui, en vertu des formules (8), (10), font connaître les x_1, x_2, x_3, x_4 en fonction de t.

Darboux étend sa méthode pour l'intégration de l'équation (7) en posant

$$dx_i - a_i\,dx_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

et

$$x_i - a_i x_n = b_i \tag{12}$$

d'où

$$\frac{db_i}{da_i} = -x_n. \tag{13}$$

Le problème ainsi se ramène au suivant : Déterminer les expressions les plus générales a_i, b_i d'un certain paramètre satisfaisant aux équations

$$\frac{db_1}{da_1} = \frac{db_2}{da_2} = \ldots = \frac{db_{n-1}}{da_{n-1}}, \tag{14}$$

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 1) = 0. \tag{15}$$

Le nombre des fonctions a_i, b_i est $2(n-1)$ et le nombre des relations (14) et (15) est $n-1$. Nous choisirons comme $n-1$ fonctions arbitraires $n-2$ des a_i et une fonction U à laquelle nous conduit une marche analogue à la précédente. En effet, nous posons

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ a'_1 & a'_2 & \dots & a'_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{(n-2)} & a_2^{(n-2)} & \dots & a_{n-1}^{(n-2)} \end{vmatrix} = \mathrm{U}.$$

On peut écrire

$$\mathrm{U} = \Sigma \lambda_i b_i,$$

où les λ_i sont liés par les relations rencontrées à la théorie de contact

$$\Sigma \lambda_i a_i^{(k)} = 0,$$

où

$$a_i^{(k)} = \frac{d^{(k)} a_i}{dt^k} \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1;\ k = 1, 2, \dots, n-2).$$

On voit aisement que les valeurs des b_i se déterminent par les équations

$$\mathrm{U} = \Sigma b_i \lambda_i, \qquad \frac{d\mathrm{U}}{dt} = \sum b_i \frac{d\lambda_i}{dt}, \qquad \dots, \qquad \frac{d^{n-2}\mathrm{U}}{dt^{n-2}} = \sum b_i \frac{d^{n-2}\lambda_i}{dt^{n-2}},$$

d'où en vertu des relations (12), (13), (15), on détermine les $x_1, x_2, \dots, x_n$ en fonction de $a_1, a_2, \dots, a_{n-2}$, U et de ses dérivées successives, U étant une fonction arbitraire [14].

Il est manifeste que plusieurs questions géométriques trouvent leur solution dans la méthode de G. Darboux.

4. Une classe particuliere d'équations. Méthode de M. J. Hadamard. — M. Hadamard en étudiant un problème de la Physique mathématique [30] a été conduit à la recherche de la solution générale d'un système de $n - 1$ équations différentielles de la forme

$$\sum_k \mathrm{F}_{ik}(y_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots, n:\ i = 1, 2, \dots, n-1),$$

par les F nous désignons les opérations différentielles de la forme

$$\mathrm{A}_0 \mathrm{D}^n + \mathrm{A}_1 \mathrm{D}^{n-1} + \dots + \mathrm{A}_n,$$

où D est un symbole de dérivation et les A sont des fonctions quelconques de la variable indépendante. Nous remarquons d'abord qu'on peut toujours, moyennant des introductions d'inconnues auxiliaires, ramener le système donné à un système de la forme

$$\Sigma a_{ik} y'_k + \Sigma b_{ik} y_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m;\ i = 1, 2, \ldots, m-1),$$

où les a_{ik}, b_{ik} sont des fonctions de la variable indépendante.

Chaque premier membre peut être considéré comme somme de deux termes dont l'un contient des dérivées et l'autre des variables seulement. Comme le nombre des équations est $m - 1$, nous avons $m - 1$ termes contenant des m dérivées. Il suffit alors par un changement des variables convenables de remplacer chacun de ces termes par une dérivée pour obtenir un nouveau système à $m - 1$ dérivées. Ce qui est toujours possible dans le cas qui nous occupe, car on a

$$\Sigma a_{ik} y'_k = (\Sigma a_{ik} y_k)' - \Sigma a'_{ik} y_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

et si l'on pose $\Sigma a_{ik} y_k = z_i$, on prend

$$z'_i + \sum_{\rho=1}^{m-1} \gamma_{i\rho}\, z_\rho + \delta_{im}\, y_m = 0,$$

les $\gamma_{i\rho}$, δ_{im} désignant des constantes ou fonctions de t. Nous avons supposé les $\Sigma a_{ik} y_k$ indépendantes entre elles de sorte qu'on peut considérer les z_i indépendantes. En éliminant le y_m nous obtenons $m - 2$ équations à $m - 1$ variables de la même forme du système donné. On procède alors sur lui de la même manière. En suivant ainsi on parviendra à une seule équation de la forme

$$u'_1 + b_1 u_1 + b_2 u_2 = 0,$$

qui définit la fonction u_2 après avoir choisi arbitrairement u_1. Remontant alors la série des calculs précédents effectués, on arrive à exprimer $y_1, y_2, \ldots, y_m$ à l'aide d'une fonction arbitraire et de ses dérivées successives jusqu'à l'ordre $m - 1$.

5. L'équation de Monge

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1};\ \frac{dx_2}{dx_1}, \frac{dx_3}{dx_1}, \ldots, \frac{dx_{n+1}}{dx_1}\right) = 0. \tag{16}$$

— Cette équation admet une infinité de solutions dépendantes de

$n-1$ fonctions arbitraires car on peut se donner arbitrairement

$$x_h = f_h(x_1) \qquad (h = 2, 3, \ldots, n)$$

et il reste une équation pour déterminer x_{n+1} en fonction de x_1. J'appelle ici *courbe intégrale* toute courbe satisfaisant à l'équation (16). Si l'on introduit les variables

$$x'_j = \frac{dx_j}{dx_1} \qquad (j = 2, 3, \ldots, n+1),$$

l'équation est équivalente au système

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; x'_2, x'_3, \ldots, x'_{n+1}) = 0,$$
$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{x'_2} = \ldots = \frac{dx_{n+1}}{x'_{n+1}}.$$

Je conserve les variables $x_\lambda (\lambda = 1, 2, \ldots, n+1)$ et fais un changement des variables x'_j en prenant pour types de transformations les suivants

$$x'_{n+1} = p_1 + \sum p_h x'_h, \qquad \frac{\partial f}{\partial x'_h} + p_h \frac{\partial f}{\partial x'_{n+1}} = 0,$$

le nouveau système est

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \tag{17}$$
$$\frac{dx_i}{P_i} = \frac{dx_{n+1}}{\Sigma p_i P_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{18}$$

où F est la transformée de la fonction f, en supposant que nous nous mettons dans le cas général. Donc à chaque équation (16) correspond une équation de la forme (17) qui s'appelle *équation adjointe* de (16). Si je considère $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme n variables indépendantes, x_{n+1} comme une fonction de ces n variables, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ comme des dérivées partielles, j'ai une équation aux dérivées partielles pour les courbes caractéristiques de laquelle il faut adjoindre aux équations (18) les équations

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{-dp_i}{X_i + p_i X_{n+1}}.$$

Réciproquement, à chaque équation aux dérivées partielles correspond une équation (16) qu'on obtient en éliminant $p_1, p_2, \ldots, p_n$ entre (17) et (18). Nous pouvons aussi ici considérer le *cône élémentaire* correspondant.

6. Conditions nécessaires et suffisantes auxquelles sont soumises les x de toute courbe intégrale. — Soit $V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; a_1, \ldots, a_n) = 0$ l'intégrale complète de l'équation (17); nous avons démontré qu'on peut remplacer l'équation (16) par le système

$$(19)\quad V = 0,\quad \sum_\lambda \frac{\partial V}{\partial x_\lambda} dx_\lambda = 0,\quad \sum \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\dfrac{\partial V}{\partial a_\iota}}{\dfrac{\partial V}{\partial a_n}}\right) dx_\lambda = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Pour la démonstration [50] nous avons substitué aux variables p_ι les a_i définis par les relations

$$(20)\qquad \frac{\partial V}{\partial x_\iota} + p_\iota \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}} = 0$$

et par l'application des propriétés des déterminants, nous avons déduit toute relation de la forme

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\dfrac{\partial V}{\partial a_\iota}}{\dfrac{\partial V}{\partial a_k}}\right) dx_\lambda = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

d'où la proposition.

Par un procédé, qui m'avait été indiqué par M. Engel, notre proposition résulte plus aisément de la manière suivante.

Je fais encore le changement des variables x_λ, p_ι en x_λ, a_ι en prenant comme type des transformations les (20). Les variables x_λ, a_ι étant liées par la relation $V = 0$ peuvent être considérés comme coordonnées de l'équation $F(x_\iota, p_\iota) = 0$.

Les conditions pour que les éléments de l'équation (17) soient unis deviennent à cause de l'équation $V = 0$

$$\sum \frac{\partial V}{\partial x_\lambda} dx_\lambda + \sum \frac{\partial V}{\partial a_\iota} da_\iota = 0,$$
$$\sum \frac{\partial V}{\partial x_\lambda} dx_\lambda = 0,$$

ou encore

$$(21)\qquad \begin{cases} \sum \dfrac{\partial V}{\partial x_\lambda} dx_\lambda + \sum \dfrac{\partial V}{\partial a_\iota} da_\iota = 0, \\ \sum \dfrac{\partial V}{\partial a_\iota} da_\iota = 0, \end{cases}$$

nous remarquons maintenant que si l'on pose

$$\omega = \sum \frac{\partial V}{\partial a_i} da_i,$$

on aura, en désignant par ω' le covariant bilinéaire,

$$\omega' = \sum \delta\left(\frac{\partial V}{\partial a_i}\right) da_i - \sum d\left(\frac{\partial V}{\partial a_i}\right) \delta a_i,$$

ou encore

$$\omega' = \sum\sum \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\partial V}{\partial a_i}\right) \delta x_\lambda \, da_i - \sum\sum \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\partial V}{\partial a_i}\right) dx_\lambda \, \delta a_i;$$

or, pour avoir les équations différentielles du système caractéristique (20), il n'y a qu'à ajouter aux équations (21) l'équation $\omega' = 0$ et considérer les δx_λ, δa_i comme quantités arbitraires soumises seulement aux conditions

$$\sum \frac{\partial V}{\partial x_\lambda} \delta x_\lambda = 0, \qquad \sum \frac{\partial V}{\partial a_i} \delta a_i = 0,$$

on prend ainsi pour les dx_λ les équations

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\dfrac{\partial V}{\partial a_i}}{\dfrac{\partial V}{\partial a_n}}\right) dx_\lambda = 0,$$

qui conduisent à notre proposition.

L'élimination des a_i entre les équations (19) fournit l'équation (16). On obtient ainsi les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles sont soumises les x de toute courbe integrale. Ces conditions peuvent se mettre sous la forme

$$(22) \qquad V = 0, \qquad \sum \frac{\partial V}{\partial a_i} da_i = 0, \qquad \sum \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\dfrac{\partial V}{\partial a_i}}{\dfrac{\partial V}{\partial a_n}}\right) dx_\lambda = 0.$$

7. Applications diverses. — Il est facile de voir qu'on peut déduire des équations (22) la suivante :

$$\frac{\Delta^2 V}{\Delta a^2} = \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \, \partial a_k} a'_i a'_k + \sum \frac{\partial V}{\partial a_i} a''_i = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

où les a sont considérés comme des fonctions d'une variable indépendante. Donc les trois conditions sont

$$V = 0, \quad \frac{\Delta V}{\Delta a} = 0, \quad \frac{\Delta^2 V}{\Delta a^2} = 0. \tag{23}$$

on remarque qu'ici il faut supposer que les a_i ne sont pas des constantes, c'est-à-dire que les équations (23) appartiennent à toute courbe intégrale mais *non caractéristique*; donc, si l'on appelle courbe intégrale toute courbe satisfaisant à l'equation (16) mais *non caractéristique*, on a que les x_λ vérifient les équations (23) et les équations differentielles

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial a_i}}{\frac{\partial V}{\partial a_n}}\right) dx_\lambda = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n+1),$$

c'est ainsi que pour $n = 2$ nous avons comme solution générale, qui donne les x de toute courbe integrale, les equations (23).

Si l'on pose $\frac{\partial V}{\partial a_i} : \frac{\partial V}{\partial a_n} = -b_i$ on prend pour equations (22) les suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ll} V = 0, & \sum_i \frac{\partial V}{\partial a_i} a'_i = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial a_i} + b_i \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0, & b_i + \sum_k \frac{\partial}{\partial a_k}\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial a_i}}{\frac{\partial V}{\partial a_n}}\right) a'_k = 0, \end{array}\right. \tag{24}$$

Botasso [3] s'appuyant sur ces équations a etabli des théorèmes donnant les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une suite Σ simplement infinie de caracteristiques de (17), admet une enveloppe en dehors de l'integrale singuliere.

On remarque qu'on pourrait deduire des equations (19), (22) ou (24) des familles differentes des courbes integrales si l'on assujettit les fonctions arbitraires a à des relations convenablement choisies.

CHAPITRE II.

L'ÉQUATION DE MONGE D'ORDRE SUPERIEUR. SYSTÈMES DE MONGE.

8. L'équation

$$f(x, y, z, y', z', y'', z'') = 0. \tag{25}$$

Théorie de M. Ed. Goursat. — Soit une équation de la forme

$$(26) \qquad V(x_1, x_2, x_3; a_1, a_2, a_3) = 0,$$

ajoutons les équations

$$(27) \qquad \sum \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

$$(28) \qquad \sum \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} dx_i\, dx_k + \sum \frac{\partial V}{\partial x_i} d^2 x_i = 0;$$

on en déduit

$$(29) \qquad \sum \frac{\partial V}{\partial a_i} da_i = 0, \qquad \sum\sum \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial a_k} dx_i\, da_k = 0.$$

Soit encore une équation

$$(30) \qquad \psi(a_1, a_2, a_3; da_1, da_2, da_3) = 0,$$

homogène en da; alors en éliminant entre les équations (29), (30) les da_1, da_2, da_3, on arrive à une équation de la forme

$$(31) \qquad F(a_1, a_2, a_3; x_1, x_2, x_3; dx_1, dx_2, dx_3) = 0,$$

homogène en dx ; si maintenant on élimine les a entre les équations (26), (27), (28), (31), on prend une équation de la forme

$$(32) \qquad A + \Sigma B_i d^2 x_i = 0.$$

les A, B_i ne contenant pas des $d^2 x_i$. Supposons que si l'on considère x_3 comme fonction des x_1, x_2, l'équation (26) soit une intégrale complète d'un système linéaire en involution des équations aux dérivées partielles du second ordre représentant une famille de surfaces (Σ) dépendant de trois paramètres a_1, a_2, a_3. Soit en outre que l'équation (30) presente la relation à laquelle doivent satisfaire a_1, a_2, a_3 pour que l'enveloppe E des surfaces (Σ) soit également une intégrale du système en involution. Si l'on a pris pour a_1, a_2, a_3 des fonctions d'un paramètre variable a satisfaisant à la relation (30), les caractéristiques de la surface mobile (Σ) ont une enveloppe (A) que nous appelons, avec M. Goursat, l'*arête de rebroussement* de la surface intégrale (E). Toutes les courbes (A) satisfont à une même équation de Monge du second ordre.

En effet : considérons x_1, x_2, x_3 comme des fonctions d'une variable indépendante qui définissent l'arête de rebroussement (A) et remarquons, avec M. Goursat, que la surface (Σ) a un contact du second ordre avec (A) au point où la caractéristique située sur (Σ) touche cette enveloppe. On aura alors les x_i coordonnées de la courbe (A) satisfaisant aux équations (26), (27), (28), (29), (30), et par conséquent on a l'équation (31), d'où il résulte une équation de Monge de la forme (32); si l'on pose $x_1 = x$, $y_2 = y$, $z_3 = z$ et si l'on considère x comme variable indépendante, l'équation (32) prend la forme

$$z'' = M(x, y, z, y', z')y'' + N(x, y, z, y', z'). \tag{32'}$$

On voit aussi que l'intégration de l'équation (32') se ramène à l'intégration de l'équation (30) qui est une équation de Monge du premier ordre.

M. Goursat montre également comment, étant donné un système linéaire en involution

$$\left\{\begin{array}{l} r + \lambda s + \mu = 0, \\ s + \lambda t + \nu = 0, \end{array}\right. \tag{33}$$

on peut obtenir directement l'équation correspondante sans connaître l'intégrale complète, et il indique aussi qu'une équation de la forme (32') étant donnée on peut reconnaître, par des opérations algébriques et des différentiations si elle correspond à un système en involution. On peut enfin former ce système. Une différence donc entre l'équation de Monge du premier et celle du second ordre est évidente : à toute équation (1) correspond, en général, une équation aux dérivées partielles du premier ordre tandis qu'à une équation (25) ne correspond pas, en général, un système en involution et cela arrive même lorsque l'équation (25) est lineaire en y'' et z'' [28].

Beudon a utilisé des procédés relatifs aux équations de Monge du second ordre pour exprimer sans aucun signe de quadrature $x, y, \mathfrak{J}$ en fonction d'un argument, ayant posé

$$\mathfrak{J} = \int \{ M(x, y, y')y'' - N(x, y, y') \} dx.$$

Il a cherché pour cela à déterminer une fonction $a(x, y, y')$ de manière que l'équation de Monge

$$M(x, y, y')y'' - N(x, y, y') = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}y' + \frac{\partial a}{\partial y'}y'' + z'',$$

découle d'un système en involution de la forme (33); il ramène la détermination de a à une équation aux dérivées partielles du second ordre [2]. Ces questions ont été étudiées d'une façon générale par M. E. Cartan au moyen des théories des covariants bilinéaires pour lesquelles nous aurons plus loin à nous occuper.

9. **L'équation**

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4; dx_1, \quad, dx_4; d^2x_1, \ldots, d^2x_4) = 0. \tag{34}$$

— On peut aussi faire correspondre à une équation aux dérivées partielles du premier ordre a trois variables indépendantes une équation du deuxième ordre en partant d'une intégrale complète de cette équation, et dans ce cas très particulier, la solution de l'équation de Monge se donne par des formules très simples pouvant être considérées comme une extension des formules de Monge.

Soit, en effet, une équation aux dérivees partielles du premier ordre

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, p_1, p_2, p_3) = 0 \tag{35}$$

et

$$V(x_1, x_2, x_3, x_4; a_1, a_2, a_3) = 0, \tag{36}$$

une intégrale complète de cette équation. Formons les relations suivantes :

$$dV = 0, \qquad d^2V = 0, \tag{37}$$

on en tire les équations

$$\Delta V = 0, \tag{38}$$

$$\sum\sum \frac{\partial^2 V}{\partial a_i\, \partial x_\lambda} da_i\, dx_\lambda = 0 \tag{39}$$

Δ désigne toute différentielle par rapport aux a. Ajoutons l'équation

$$\sum\sum \frac{\partial^2 V}{\partial a_i\, \partial a_k} da_i\, da_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{40}$$

Si l'on élimine entre les équations (38), (39) et (40) les da_i on obtient une équation qui contient les x, dx, et a; entre celle-ci et les (36), (37) éliminons les a. On arrive ainsi, en général, à une équation de la forme (34), linéaire par rapport aux d^2x; on voit encore que des équations (36), (39), (40), on en déduirait

$$\sum \frac{\partial V}{\partial a_i} d^2 a_i = 0, \tag{41}$$

par conséquent l'équation de Monge correspondante à l'équation (35) de la manière citée plus haut aura comme solution celle qui se donne par les équations (36), (38), (40), (41).

10. Systèmes de Monge de $n-1$ équations à $n+1$ variables. Méthode de M. Goursat. — M. Goursat a donne une méthode très élégante relative à l'integration d'un système de Monge [24].

Par la méthode de M. Goursat nous approfondissons les méthodes de Monge et de Darboux et nous voyons, on peut dire, comment on peut étendre les résultats de Monge. Soit un système de $n-1$ equations de Monge,

$$f_i(x_1, \ldots, x_{n+1}; dx_1, \ldots, dx_{n+1}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{42}$$

le cône (T) correspondant de sommet $M(x_1, \ldots, x_{n+1})$ est représenté par les équations

$$f_i(x_1, \ldots, x_{n+1}; X_1 - x_1, \ldots, X_{n+1} - x_{n+1}) = 0. \tag{43}$$

Soit le plan (P)

$$X_{n+1} - x_{n+1} - \sum_i p_k(X_k - x_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{44}$$

les équations (43), (44) déterminent les génératrices du cône (T) situées dans le plan (P). Si l'on pose

$$\frac{X_2 - x_2}{X_1 - x_1} = a,$$

les équations (43) définissent les rapports

$$\frac{X_\rho - x_\rho}{X_1 - x_1} \qquad (\rho = 3, 4, \ldots, n+1),$$

en fonction de a et l'équation (44) prend la forme

$$U(a) = \varphi_{n+1}(a) - p_1 - p_2 a - \Sigma p_\mu \varphi_\mu(a) = 0 \qquad (\mu = 3, 4, \ldots, n). \tag{45}$$

Cherchons maintenant à déterminer les coefficients p de façon que le plan (P) ait en commun avec le cône (T) n génératrices confondues avec une génératrice déterminée lorsque nous dirons, avec M. Goursat, que le plan est *osculateur du cône* (T).

On aura comme conditions nécessaires et suffisantes pour que le plan (P) soit osculateur du cône (T) des $n-1$ équations de la forme

$$F_i(x_1, \ldots, x_{n+1}; p_1, \ldots, p_n) = 0, \tag{46}$$

qui résultent de l'élimination de a entre les équations

$$U(a) = 0, \quad U'(a) = 0, \quad \ldots, \quad U^{(n-1)}(a) = 0,$$

qui expriment que l'équation (45) possède une racine multiple d'ordre n. Les équations (46) sont dites les équations *tangentielles* du cône (T) de sommet $M(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$.

Si l'on considère $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme n variables indépendantes et x_{n+1} comme une fonction de ces n variables avec $p_k = \dfrac{\partial x_{n+1}}{\partial x_k}$, les équations (46) forment un système d'équations aux dérivées partielles que nous appelons, avec M. Goursat, *système associé* du système (42).

Donc à tout système de Monge (42) correspond un système associé de la forme (46). Supposons que ce système soit en involution et soit

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; a, b) = 0$$

une intégrale complète de ce système; alors si $b = \varphi(a)$ la fonction $\varphi(a)$ étant une fonction arbitraire de a et

$$\frac{\Delta V}{\Delta a} = \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\varphi'(a), \quad \ldots,$$

les formules

$$V = 0, \quad \frac{\Delta V}{\Delta a} = 0, \quad \frac{\Delta^2 V}{\Delta a^2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\Delta^n V}{\Delta a^n} = 0, \tag{47}$$

forment l'intégrale générale du système de Monge (42).

11. Application de la méthode de M. Goursat. — Cette méthode s'applique toutes les fois que le système associé est en involution.

Soit donné un système de Monge (α) où $i < n-1$. La méthode de M. Goursat s'applique si l'on pouvait adjoindre à ce système $n-i-1$ équations nouvelles de la même forme de façon que le système associé du système ainsi formé soit en involution. Considérons, avec M. Goursat, l'équation de Serret traitée par Darboux. Soient i équations de la forme (7).

Joignons les $n-i-1$ équations

$$(48)\qquad \frac{dx_\rho}{dx_1} = \psi_\rho\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right) \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, n-i-1),$$

les ψ_ρ étant arbitraires. Les équations (α), (48) forment un système de $n-1$ équations de Monge à $n+1$ variables dont le système associé est en involution, et alors la méthode de M. Goursat est applicable.

Pour l'équation (6′) de Serret on trouve de cette façon que la solution générale se donne par les formules

$$V = 0, \qquad \frac{\Delta V}{\Delta a} = 0, \qquad \frac{\Delta^2 V}{\Delta a^2} = 0, \qquad \frac{\Delta^3 V}{\Delta a^3} = 0,$$

où

$$V = x_4 - \Sigma p_k x_k - \psi(a) \qquad (k = 1, 2, 3),$$

$\psi(a)$ étant une fonction arbitraire de a et p_k des fonctions de a définies par les équations

$$p_1 + p_2 a + p_3 \varphi(a) = U(a), \qquad p_2 + p_3 \varphi'(a) = U'(a), \qquad p_3 \varphi''(a) = U''(a)$$

avec

$$U(a) = \sqrt{1 + a^2 + \varphi^2(a)}$$

et $\varphi(a)$ désignant une fontion arbitraire de a.

Nous avons cherché [46] à appliquer la méthode de M. Goursat à l'équation de la forme

$$(49)\qquad f\left(x_1, \frac{dx_2}{dx_1}, \frac{dx_3}{dx_1}, \ldots, \frac{dx_n}{dx_1}\right) = \frac{dx_{n+1}}{dx_1};$$

adjoignons à (49) $n-2$ relations de la forme

$$\frac{dx_h}{dx_1} = \varphi_h\left(x_1, \frac{dx_2}{dx_1}\right) \qquad (h = 3, 4, \ldots, n).$$

On voit que le système associé

$$F_i(x, p) = 0,$$

du système de Monge constitué par les équations (46) prendra une forme telle que

$$\frac{\partial F_k}{\partial p_1} = 0, \qquad \frac{\partial F_k}{\partial x_h} = 0, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial p_1} = 1$$
$$(h = 2, 3, \ldots, n, n+1;\ k = 2, 3, \ldots, n-1)$$

et l'on en conclut que pour que le système associé soit en involution, il faut et il suffit qu'on ait identiquement

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_1} = 0,$$

ce qui arrive forcément si l'équation est de la forme

$$f_1(x_1) + f_2\left(\frac{dx_2}{dx_1}, \frac{dx_3}{dx_1}, \ldots, \frac{dx_n}{dx_1}\right) = \frac{dx_{n+1}}{dx_1},$$

les équations adjointes sont alors de la forme

$$\frac{dx_\rho}{dx_1} = \varphi_\rho\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right) \qquad (\rho = 3, 4, \ldots, n).$$

Il serait intéressant de chercher des systèmes de Monge pour lesquels la méthode de M. Goursat s'applique. Une question qui résulte dans une telle recherche est la suivante : dans quels cas l'élimination de a entre n équations de la forme

$$\sigma_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, p_1, p_2, \ldots, p_n, a) = 0$$

donne-t-elle un système en involution ?

Ainsi avons-nous fait [49] quelques remarques relatives à cette question pour l'application de la méthode de M. Goursat; ce qui nous a fourni l'occasion de retrouver les résultats précédents pour (49) comme des cas particuliers de résultats plus généraux.

M. Gross [29] a étudié aussi des cas où l'on trouve, sans aucune quadrature, des solutions de certains systèmes différentiels indéterminés.

CHAPITRE III.

IMPOSSIBILITÉ D'UNE INTÉGRATION EXPLICITE DANS LE CAS GÉNÉRAL.

12. Impossibilité de l'extension de la méthode de Monge. — Considérons l'équation de Monge à quatre variables

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4;\ dx_1, dx_2, dx_3, dx_4) = 0$$

et $V(x_1, x_2, x_3, x_4; a_1, a_2, a_3)$ l'intégrale complète de l'équation adjointe (Chap. I). On pourrait être tenté de croire que d'une manière analogue à celle du cas de trois variables, les équations

$$(50) \qquad V = 0, \qquad \frac{\Delta V}{\Delta a} = 0, \qquad \frac{\Delta^2 V}{\Delta a^2} = 0, \qquad \frac{\Delta^3 V}{\Delta a^3} = 0.$$

fournissent la solution générale

Nous avons remarqué [44] qu'il n'en est rien en général.

Prenons, par exemple, l'équation (6'); on a alors comme $V = 0$ l'équation

$$x_4 - a_1 x_1 - a_2 x_2 - b x_3 - a_3 = 0, \qquad b^2 = 1 - a_1^2 - a_2^2,$$

on ne peut pas dire que x_k tirées des (50) fournissent la solution de l'équation (6') les a_i étant des fonctions *arbitraires* de la variable indépendante, par conséquent *indépendantes* entre elles.

Nous avons démontré à ce propos que pour que les (50) donnent une solution, il faut que les a_1, a_2 ne soient pas indépendants mais liés par la relation

$$a_1'^2 + a_2'^2 = (a_1 a_2' - a_2 a_1')^2$$

et nous avons également donné [45] une proposition beaucoup plus générale qui s'énonce ainsi : il est impossible, en général, de déduire des équations (19) ou (22) l'équation $\frac{\Delta^3 V}{\Delta a^3} = 0$; d'où l'on est conduit à se demander s'il existe ou non une fonction

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

telle que les (19), (22) puissent se mettre sous la forme des $n+1$ autres équations dont quatre soient les suivantes :

$$V_1 = 0, \qquad \frac{\Delta V_1}{\Delta a} = 0, \qquad \frac{\Delta^2 V_1}{\Delta a^2} = 0, \qquad \frac{\Delta^3 V_1}{\Delta a^3} = 0.$$

Reprenons, par exemple, l'équation (6'). M. Goursat a trouvé une fonction

$$V_1 = x_4 - \Sigma p_i x_i - b,$$

[où les p_i sont des fonctions déterminées d'un paramètre a et d'une fonction arbitraire $\varphi(\alpha)$ et b une seconde fonction arbitraire $\psi(a)$] telle que les équations

$$V_1 = 0, \qquad \frac{\Delta V_1}{\Delta a} = 0. \qquad \frac{\Delta^2 V_1}{\Delta a^2} = 0, \qquad \frac{\Delta^3 V_1}{\Delta a^3} = 0,$$

donnent la solution générale de l'équation (6') et plus généralement

la méthode de M. Goursat montre comment on peut étendre la méthode de Monge.

13. **Théorème de M. Hilbert. Généralisations.** — Dans un article [31] publié en 1912, M. Hilbert a démontré un théorème affirmant l'impossibilité d'exprimer la solution générale de l'équation

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2, \tag{51}$$

par des formules

$$\left\{\begin{array}{l} x = \varphi(t, w, w_1, w_2, \ldots, w_r), \\ y = \psi(t, w, w_1, \ldots, w_r), \\ z = \chi(t, w, \ldots, w_r), \end{array}\right. \tag{52}$$

φ, ψ, χ désignant des fonctions déterminées de leur argument, où t est un paramètre, w une fonction arbitraire de t et $w_1, \ldots, w_r$ les dérivées successives de w.

Pour la démonstration de M. Hilbert on part de l'identité à laquelle conduirait l'équation (51) lorsqu'il existe une solution de la forme (52). En faisant quelques remarques sur la forme de cette identité, on en déduit d'abord que tous les deux membres de l'identité en question ne contiennent pas w_{r+2}, w_{r+1}; on suppose ensuite que la première des *équations (52) est résolue par rapport à w_r et que sa valeur est introduite* dans les deux autres équations. Soit qu'on prenne ainsi

$$\psi = f(t, w, w_1, \ldots, w_{r-1}, x),$$
$$\chi = g(t, w, w_1, \ldots, w_{r-1}, x),$$

en s'appuyant sur certaines identités qu'on trouve facilement on en conclut

$$f_{w_{r-1}} = 0, \qquad f_{w_{r-2}} = 0, \qquad \ldots, \qquad f_t = 0,$$

c'est-à-dire que f peut contenir x seulement. On en déduit aussi en tenant compte de l'équation (51) que $g_x = f_{xx}^2$ et alors $g = \mathrm{X} + \mathrm{W}$, X étant une fonction de x seulement et W une fonction de t, w, $w_1, \ldots, w_{r-1}$; on voit finalement que W est une constante c'est-à-dire g une fonction de x seulement; or, dans la solution (52) nous supposons $r \geqq 1$ et l'impossibilité de l'intégration explicite de (51) est établie.

L'analyse de M. Hilbert s'étend d'elle-même à toute équation donnant $\frac{dz}{dx}$ en fonction de x, y, z, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ par une expression non homographique en $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Nous avons généralisé [49] le théorème de M. Hilbert en utilisant le même mode de démonstration et affirmé l'impossibilité d'une intégration explicite pour d'autres équations de Monge.

14. Remarques diverses. — I. M. Hilbert, dans son Mémoire cité avant d'étudier l'équation (51), considère l'équation de Monge du premier ordre (1); on peut trouver une equation V telle que des équations

$$\sum \frac{\partial V}{dx}\, dx = 0, \tag{53}$$

$$\sum \frac{\partial^2 V}{\partial a\, dx}\, dx = 0, \tag{54}$$

résulte par l'élimination de a l'équation (1).

Si l'on pose

$$V(x, y, z, a) = b, \tag{55}$$

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \gamma, \tag{56}$$

nous avons les équations (53), (55), (56) qui donnent a, b, γ en fonction de $x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$; on voit aussi que

$$\frac{db}{da} = \gamma \tag{57}$$

et obtenons une transformation de (1) à la forme spéciale (57).

Inversement les (55), (56) et l'équation $\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} = \frac{d\gamma}{da}$ qu'on déduit des (54), (56) donnent x, y, z en fonction de a, b, γ, $\frac{d\gamma}{da}$.

Nous avons considéré plus généralement [49] un système de $n-1$ équations de Monge (α) pour lequel nous supposons l'existence d'une fonction $V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; a_1)$ telle que les équations du système résultent de l'élimination de a_1 entre les

$$\left\{\begin{array}{l} \sum \dfrac{\partial V}{\partial x_i}\, dx_i = 0, \\ \sum \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_1\, dx_i}\, dx_i = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \sum \dfrac{\partial^n V}{\partial a_1^{n-1}\, \partial x_i}\, dx_i = 0. \end{array}\right. \tag{58}$$

Si l'on pose

$$(59) \qquad V = a_2, \qquad \frac{\partial^\lambda V}{\partial a_1^\lambda} = a_{2+\lambda} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1;\ \lambda = 1, 2, \ldots, n-1),$$

on a

$$(60) \qquad \frac{da_\rho}{da_1} = a_{\rho+1} \qquad (\rho = 2, 3, \ldots, n),$$

alors les équations (59), et l'équation $\frac{\partial^n V}{\partial a_1^n} = \frac{da_{n+1}}{da_1}$ déterminent les x_i en fonction des a_i, $\frac{da_{n+1}}{da_1}$.

Inversement les valeurs des $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ tirées en fonction des x, dx des équations (59), et

$$\sum \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i = 0,$$

vérifient les équations (60) si l'on tient compte des équations (α).

II. D'une façon générale, M. Hilbert a rattaché le problème de l'intégration explicite d'un système d'équations differentielles indétermine à un problème beaucoup plus général d'après lequel il s'agit, étant donnés deux systèmes différentiels, de reconnaître si l'on peut établir une correspondance univoque entre les solutions de l'un et les solutions de l'autre. M. Cartan a substitué a cet énoncé un autre beaucoup plus precis en donnant une définition d'équivalence de deux systèmes différentiels basée sur la notion du prolongement d'un système [10].

CHAPITRE IV.

ÉQUIVALENCE ENTRE LE PROBLEME DE MONGE ET L'INTEGRATION D'UN SYSTEME DE PFAFF.

Supposons le système (α) résolu par rapport à

$$\frac{dx_{n+2-\rho}}{dx_1} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, k),$$

posons

$$\frac{dx_\lambda}{dx_1} = u_\lambda \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots, n+1-k);$$

si l'on considère les u_λ comme de nouvelles variables on se ramène à un système de Pfaff de $2n+1-k$ variables

$$(61)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_{n+2-\rho}}{dx_1} = f_\rho(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1};\ u_2, u_3, \ldots, u_{n+1-k}), \\ dx_\lambda - u_\lambda\, dx_1 = 0. \end{cases}$$

Les deux systèmes (α) et (61) sont équivalents. On voit ainsi qu'un système de Monge de k équations à $n+1$ variables peut être remplacé par un système de Pfaff où le nombre d'équations et celui des variables a augmenté de $n-k$ unités.

Considérons le cas particulier $k = n-1$, alors le système (α) sera un système de $n-1$ équations de Monge à $n+1$ variables et le système (61) sera un système de n équations de Pfaff à $n+2$ variables.

15. Rappel de certains résultats des théories de M. E. Cartan. — Soit S un système de Pfaff

$$(62)\quad \omega_i = \sum_k X_{ik}\, dx_k = 0 \quad [k = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, r\,(r < n-1)].$$

Le système S peut s'écrire d'une infinité de façons en remplaçant les variables x_k par un nouveau système quelconque des variables qui soient des fonctions distinctes des premières. Il est essentiel de savoir sa *classe*, c'est-à-dire le nombre minimum de variables que l'on puisse laisser figurer dans les équations du système S par un changement des variables. Soit γ la classe de ce système.

Lorsque le système S a été mis sous une forme où n'entrent que γ variables et leurs différentielles, nous dirons qu'il a été ramené à une forme *réduite*. Nous déterminons la classe γ et nous mettons le système S sous une forme réduite en nous servant des *éléments caractéristiques* que nous allons définir.

On sait qu'un élément linéaire (dx_k) est *élément linéaire intégral* si les $dx_1, \ldots, dx_n$ vérifient les équations (62); deux éléments linéaires intégraux (dx_k) et (δx_k) sont *en involution* s'ils vérifient les équations $\omega'_i = 0$.

Un élément linéaire intégral est *caractéristique* s'il est en involution avec tous les autres éléments linéaires intégraux issus du même point. Pour former les équations qui définissent les éléments caractéristiques supposons, pour fixer les idées, qu'on a résolu le système S par rapport à dx_1, dx_2, $\ldots$, dx_r et que nous portons dans ω'_1,

$\omega'_2, \ldots, \omega'_r$ les expressions de $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_r$ tirées des équations $\omega_i(\delta) = 0$; nous exprimons alors que les $\omega'_i = 0$ après ladite substitution sont indépendants de $\delta x_{r+1}, \delta x_{r+2}, \ldots, \delta x_n$; c'est-à-dire nous égalons à zéro les coefficients de $\delta x_{r+1}, \ldots, \delta x_n$; on prendra ainsi certaines équations

$$\pi_1(d) = 0, \quad \ldots, \quad \pi_\mu(d) = 0,$$

qui définissent avec les $\omega_i(d) = 0$ le système caractéristique de S.

Désignons-le par S_1; on démontre que quel que soit le système S, le système caractéristique S_1 est complètement intégrable; pour que tout élément intégral linéaire soit un élément caractéristique il faut et il suffit que S soit complètement intégrable. On appelle *variable caractéristique* toute intégrale de S_1; et *multiplicité caractéristique* toute multiplicité dont tous les éléments linéaires sont caractéristiques.

Le nombre des équations linéaires indépendantes de S_1 est appelé *ordre* de S_1. On démontre que la classe de S est égale à l'ordre de S_1 et que si l'on fait dans S un changement des variables en prenant pour variables indépendantes des variables caractéristiques distinctes, on ramène S à une forme réduite. Supposons que l'on ait obtenu p intégrales $f_1, f_2, \ldots, f_p$ du système caractéristique; si l'on fait un changement des variables de façon que ces intégrales soient p des nouvelles variables $y_1, y_2, \ldots, y_p$ par exemple, le nouveau système de Pfaff où l'on a fait

$$y_i = c_i, \qquad dy_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

est au plus de classe $\gamma - p$; mais il peut être de classe inférieure. Par exemple, si ce nouveau système est de classe r, il sera complètement intégrable.

Si S contient seulement $r+1$ variables il serait complètement intégrable et par suite de classe r; donc S ne peut pas être de classe $r+1$. Quant à une équation de Pfaff sa classe est toujours un nombre *impair*.

16. Formes canoniques. Systèmes dérivés, systèmes spéciaux. — On sait les résultats de Pfaff, Darboux, Frobenius, Weber relatifs à la réduction d'une forme de Pfaff à une forme canonique. On sait bien qu'une telle forme ω de classe $2p$ peut être ramenée à la forme canonique

$$\Sigma z_i\, dy_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

z_i, y_i formant un système de $2p$ variables distinctes et une forme de Pfaff ω de classe $2p + 1$ se ramène à la forme canonique

$$dy_{p+1} + \Sigma z_i\, dy_i.$$

Le seul invariant d'une forme de Pfaff vis-à-vis du groupe des transformations ponctuelles les plus générales est la classe de cette forme.

Une équation $\omega = 0$ est ramenée à la forme canonique lorsqu'on l'a mise sous la forme

$$\Sigma Y_i\, dy_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

si ω est de classe $2p$, et sous la forme

$$dy_{p+1} + \Sigma z_i\, dy_i = 0,$$

si ω est de classe $2p+1$.

Une équation de Pfaff de classe trois peut toujours être ramenée à la forme canonique

$$dy_2 - y_3\, dy_1 = 0.$$

Quant aux systèmes de Pfaff dont nous avons à nous servir dans la suite, nous utiliserons la forme canonique suivante :

$$(63)\quad \begin{cases} dy_1 = 0, \quad dy_2 = 0, \quad \ldots, \\ dy_{\rho-1} = 0, \quad dy_\rho = 0, \quad dy_{\rho+2} - y_{\rho+3}\, dy_{\rho+1} = 0, \\ dy_{\rho+3} - y_{\rho+4}\, dy_{\rho+1} = 0, \quad \ldots, \quad dy_{r+1} - y_{r+2}\, dy_{\rho+1} = 0. \end{cases}$$

Ainsi par exemple nous nous servirons de la forme

$$(64)\quad \begin{cases} dy_2 - y_3\, dy_1 = 0, \\ dy_3 - y_4\, dy_1 = 0. \end{cases}$$

Supposons que le système S est ramené à la forme canonique (63), on prend alors l'intégrale générale représentée par les formules

$$(65)\quad \begin{cases} y_1 = c_1, \quad y_2 = c_2, \quad \ldots, \quad y_\rho = c_\rho, \quad y_{\rho+1} = a, \\ y_{\rho+2} = \varphi(a), \quad y_{\rho+3} = \varphi'(a), \quad \ldots, \quad y_{r+2} = \varphi^{(r-\rho)}(a), \end{cases}$$

$\varphi(a)$ étant une fonction arbitraire.

Soit S un système de r équations à $r + 2$ variables et soit qu'on ajoute aux équations du système S les équations

$$(66)\quad \begin{cases} dx_{r+1} - x_{r+3}\, dx_{r+2} = 0, \qquad dx_{r+2} - x_{r+4}\, dx_{r+3} = 0, \qquad \ldots, \\ dx_{r+l-1} - x_{r+l+1}\, dx_{r+l} = 0, \end{cases}$$

où $x_{r+3}, \ldots, x_{r+l+1}$ sont de nouvelles variables. Ces équations (66) avec celles de (S) forment un système Σ qui a évidemment la propriété suivante : toute solution

$$x_i = \varphi_i(a) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r+2),$$

du système S fournira la solution

$$x_i = \varphi_i(a), \qquad x_{r+3} = \frac{\varphi'_{r+1}(a)}{\varphi_{r+2}(a)} = f_{r+3}(a),$$
$$x_{r+4} = \frac{\varphi'_{r+2}(a)}{f'_{r+3}(a)} = f_{r+4}(a), \qquad \ldots,$$

du système Σ; et réciproquement, de toute solution

$$x_\rho = f_\rho(\alpha) \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r+l+1),$$

du système Σ on déduit une solution de S; nous dirons avec M. Cartan que Σ est un *prolongement* de S.

Considerons maintenant le système S

$$(67)\qquad \begin{cases} \omega = \Sigma a_i\, dx_i \\ \varpi = \Sigma b_i\, dx_i \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

on peut en général le ramener par un changement de variables à la forme canonique (64) comme il a été démontré pour la première fois par M. Engel [17]; S. Lie [33] a démontré le même par des considérations géométriques. Weber [43] s'appuyant sur les résultats de M. Engel a trouvé des résultats plus généraux dont il a déduit les précédents. Enfin M. Cartan a donné une méthode plus directe pour ladite réduction [7].

Considérons les covariants bilinéaires

$$\begin{aligned} \omega' &= \Sigma a_{ik}(dx_i\, \delta x_k - dx_k\, \delta x_i) \\ \varpi' &= \Sigma b_{ik}(dx_i\, \delta x_k - dx_k\, \delta x_i) \end{aligned} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

α'. Supposons d'abord que ω' devienne identiquement nul si l'on tient compte des équations

$$(68)\qquad \omega(d) = 0, \qquad \omega(\delta) = 0, \qquad \varpi(d) = 0, \qquad \varpi(\delta) = 0,$$

que nous désignons pour abréger

$$\omega' = 0 \qquad (\operatorname{mod} \omega, \varpi) \tag{69}$$

L'équation $\omega = 0$ sera de classe 3 (cas général) ou de classe 1.

1° Classe 3 : on la ramène par changement des variables à la forme canonique

$$\Omega = dy_2 - y_3\, dy_1 = 0 \tag{70}$$

et le système (67) peut être remplacé par un système de la forme

$$\Omega = dy_2 - y_3\, dy_1 = 0, \qquad \Pi = H_1\, dy_1 + H_3 dy_3 + H_4\, dy_4 = 0,$$

et l'on aura, en vertu de (70),

$$\Omega' = dy_3\, \delta y_1 - dy_1\, \delta y_3 = 0 \quad (\operatorname{mod} \Omega, \Pi),$$

ce qui exige

$$H_4 \equiv 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \Pi = H_1\, dy_1 - H_3\, dy_3 = 0.$$

De l'hypothèse que S n'est pas complètement intégrable il s'ensuit

$$\Pi' \not\equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} \Omega, \Pi)$$

et que H_1 et H_3 ne peuvent pas être nuls et l'équation $\Pi = 0$ peut s'écrire

$$dy_3 + \frac{H_1}{H_3}\, dy_1 = 0.$$

le rapport $H_1 : H_3$ dépend nécessairement de y_4 et en prenant ce coefficient pour y_4 le système S se mettra sous la forme (64).

2° Classe 1 : elle est alors complètement intégrable; on l'écrit donc sous la forme

$$dy_1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

On tire x_1 en fonction de y_1, x_2, x_3, x_4 et l'on ramène le système S sous la forme

$$dy_1 = 0, \qquad H_2\, dx_2 + H_3\, dx_3 + H_4\, dx_4 = 0,$$

où les H_i contiennent y_1 ; donc la seconde équation peut être regardée comme une équation de Pfaff à trois variables non complètement intégrable ayant y_1 comme paramètre; on peut donc la mettre sous la forme

$$dy_3 - y_4\, dy_2 - K\, dy_1 = 0$$

et le système S sous la forme canonique

$$dy_1 = 0, \qquad dy_3 - y_4\, dv_2 = 0$$

Si enfin $\omega' = 0$, $\varpi' = 0$, on aura le système S réductible à la forme

$$dy_1 = 0, \qquad dy_2 = 0.$$

β'. Supposons maintenant que ω' n'est pas nul en tenant compte des équations (68); nous allons remplacer le système donné par un autre équivalent de la même forme $\Omega = 0$, $\Pi = 0$, mais où

$$\Omega' = 0 \qquad (\bmod \Omega, \Pi).$$

Nous remarquons d'abord qu'on peut remplacer une équation de S par une autre de la forme

$$\lambda\omega + \mu\varpi = 0,$$

λ, μ désignant des fonctions arbitraires des x; on sait que

$$(\lambda\omega + \mu\varpi)' = \lambda\omega' + \mu\varpi' \qquad (\bmod \omega, \varpi),$$

donc pour avoir

$$\Omega' = (\lambda\omega + \mu\varpi)' = 0 \qquad (\bmod \omega, \varpi),$$

il suffit qu'on ait

(71) $$\lambda\omega' + \mu\varpi' = 0 \qquad (\bmod \omega, \varpi),$$

or, il est facile de déterminer le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ de sorte qu'on ait l'identité (71); et, en effet, soit par exemple qu'on introduit dans ω' les valeurs de dx_3, dx_4, δx_3, δx_4 en fonction de dx_1, dx_2, δx_1, δx_2 tirees des équations (68), on aura alors pour ω' et ϖ' des expressions de la forme

$$\omega' = A(dx_1\, \delta x_2 - dx_2\, \delta x_1),$$
$$\varpi' = B(dx_1\, \delta x_2 - dx_2\, \delta x_1),$$

lorsqu'on voit qu'il suffit de choisir λ, μ de façon que $\lambda A + \mu B = 0$ pour qu'on ait l'identité (71); on remplace donc le systeme (67) par

$$\Omega \equiv \Sigma A_i\, dx_i = 0,$$
$$\Pi \equiv \Sigma B_i\, dx_i = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Omega' = 0 \qquad (\bmod \Omega, \Pi).$$

L'équation $\Omega = 0$, qui jouit d'une propriété invariante, est appelée par M. Cartan *équation dérivée* du système donné.

On revient ainsi au premier cas et l'on a à réduire cette équation à une forme canonique.

Donc *la réduction du système donné à sa forme canonique dépend uniquement de la réduction de l'équation dérivée à sa forme canonique.*

M. Cartan applique sa méthode par la recherche de l'équation dérivée pour l'équation (1). Supposons qu'on l'a résolue par rapport à $\frac{dz}{dx}$

$$\frac{dz}{dx} = \mathrm{F}\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right),$$

elle équivaut au système

$$\omega = dy - u\,dx = 0, \qquad \varpi = dz - \mathrm{F}(x, y, z, u)\,dx = 0,$$

où l'on considère u comme une nouvelle variable; on a

$$\omega' = du\,\delta x - dx\,\delta u, \qquad \varpi' = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}(du\,\delta x - dx\,\delta u),$$

donc

$$\left(\varpi - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}\omega\right)' = 0$$

et l'équation dérivée est

$$\Omega = \varpi - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}\omega = 0,$$

ou bien

$$\Omega = dz - p\,dx - q\,dy = 0 \tag{72}$$

avec

$$p = \mathrm{F} - u\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}, \qquad q = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} \tag{73}$$

et l'on a à réduire à sa forme canonique l'équation (72) où p, q sont liés par celle qui résulte en éliminant u parmi les (73); on retombe ainsi sur la méthode classique.

La même méthode a été employée par M. Cartan pour l'équation

$$\frac{dz}{dx} = \mathrm{A}\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \mathrm{B}\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right)$$

qui se ramène au système

$$\omega = dy - u\,dx = 0,$$
$$\varpi = dz - \mathrm{A}(x, y, z, u)\,du - \mathrm{B}(x, y, z, u)\,dx = 0,$$

il l'applique ensuite pour le calcul de $z = \int y^m \frac{d^2y}{dx^2} dx$ où y est une fonction arbitraire de x et pour le calcul aussi des quadratures

$$u = \int \frac{dx}{1+xy}, \qquad v = \int \frac{dy}{1+xy},$$

x, y étant liés par une fonction arbitraire [*cf.* Beudon, 2].

Considérons maintenant un système S de r équations (62) $\omega_i = 0$ et soit qu'on a

$$(74) \qquad \Sigma l_i \omega'_i \equiv 0 \qquad (\bmod\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r),$$

l_i désignant des fonctions des variables. On aura aussi

$$(74') \qquad (\Sigma l_i \omega_i)' \equiv 0 \qquad (\bmod\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r)$$

nous dirons alors que l'équation

$$(75) \qquad \Sigma l_i \omega_i = 0$$

appartient *au système dérivé* de (S) que nous définissons avec M. Cartan de la manière suivante :

Le *système dérivé de* S *est formé de toutes les équations distinctes de la forme* (75) où l_1, l_2, ... l_r *sont des fonctions quelconques des variables telles qu'on a l'identité* (74). Nous le désignons par S'. Il est formé, comme on le voit, par l'ensemble des équations de S telles que deux éléments linéaires intégraux quelconques de S soient en involution à chacune d'elles. Soit r' le nombre des équations de S'; on peut évidemment écrire les équations de S de façon que les r' équations de S' soient

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \omega_{r'} = 0$$

on aura

$$\omega'_1 \equiv \omega'_2 \equiv \ldots \equiv \omega'_{r'} \equiv 0 \qquad (\bmod\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r)$$

pour que le système S soit complètement intégrable il faut et il suffit que le système S' se confonde avec S.

Considérons un système S non complètement intégrable de r équations à $r+2$ variables.

Si l'on résout ces équations par rapport à $dx_1, \ldots, dx_r$ on obtient

$$(76) \qquad \omega_\rho(d) = dx_\rho - (a_\rho\, dx_{r+1} + b_\rho\, dx_{r+2}) = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r),$$

et les ω'_ρ s'expriment uniquement au moyen du binome

$$[dx_{r+1}, dx_{r+2}] \text{ (1)}$$

c'est-à-dire

(77) $$(\rho = 1, 2, \ldots, r)\omega'_\rho = K_\rho[dx_{r+1}, dx_{r+2}] \qquad (\operatorname{mod} \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_r)$$

comme S n'est pas complètement intégrable, tous les K_ρ ne sont pas nuls; soit $K_r \pm 0$; alors on tire des relations (77)

$$\left(\omega_i - \frac{K_i}{K_r}\omega_r\right)' \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_r)$$

et le système dérivé S' est

$$\omega_i - \frac{K_i}{K_r}\omega_r = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r-1).$$

Si l'on prend dans S pour ω_i les combinaisons

$$\omega_i - \frac{K_i}{K_r}\omega_r \qquad (i = 1, 2, \ldots, r-1),$$

on aura le système S sous la forme

$$\omega_i = 0, \qquad \omega_r = 0 \qquad \text{où } \omega'_i = 0 \qquad (\operatorname{mod} \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r).$$

Cherchons S'' c'est-à-dire la dérivée du système

(78) $$\omega_i = 0.$$

Les ω'_i, si l'on remplace $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{r-1}$; $\delta x_1, \ldots, \delta x_{r-1}$ par leurs expressions tirées des $\omega_i(d) = 0$, $\omega_i(\delta) = 0$ deviennent des combinaisons linéaires de

$$[dx_r, dx_{r+1}], \quad [dx_r, dx_{r+2}], \quad [dx_{r+1}, dx_{r+2}]$$

ou encore de

$$[\omega_r, dx_{r+1}], \quad [\omega_r, dx_{r+2}], \quad [dx_{r+1}, dx_{r+2}];$$

or, puisque ces ω'_i doivent être nuls en tenant compte de l'équation $\omega_r = 0$, il reste des identités de la forme

(79) $$\omega_i = L_i[\omega_r, dx_{r+1}] + M_i[\omega_r, dx_{r+2}] \qquad (\operatorname{mod} \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{r-1})$$

---

(1) Nous désignons par $[\omega_1, \omega_2]$ la forme bilinéaire $\omega_1(d)\,\omega_2(\delta) - \omega_2(d)\,\omega_1(\delta)$; d'après cela on écrit $[dx_{r+1}, dx_{r+2}]$ à la place de $dx_{r+1}\,\delta x_{r+2} - dx_{r+2}\,\delta x_{r+1}$.

ou encore

$$(79') \qquad \omega'_i = [\omega_r, L_i\, dx_{r+1} + M_i\, dx_{r+2}] \qquad (\text{mod}\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{r-1}).$$

Cela posé, nous distinguons :

1° Le cas général où le rapport $L_i : M_i$ n'est pas le même quel que soit i; alors la forme $(79')$ montre que les $\omega'_i = 0$ se réduisent à deux équations distinctes; il y a donc des $r - 3$ relations distinctes de la forme

$$\Sigma\, l_i \omega_i \equiv 0,$$

et par conséquent le système S″ se compose de $r - 3$ équations; dans ce cas nous dirons avec M. Cartan que le système S est un système *normal*.

2° Le cas où le rapport $L_i : M_i$ est indépendant de i, alors $r - 2$ équations distinctes forment le système S″, pour notre but le résultat essentiel est que le *système* S *peut alors se mettre sous la forme*

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \Omega_i = dy_i - (A_i\, dy_r + B_i\, dy_{r+1}) = 0, \\ \Omega_r = dy_r - y_{r+2}\, dy_{r+1} = 0, \end{cases}$$

les A_i, B_i étant indépendantes de y_{r+2}.

Pour le démontrer déterminons d'abord la classe de S′ ou, ce qui est le même, l'ordre du système caractéristique; nous remarquons pour cela que dans ce cas on peut écrire

$$L_i\, dx_{r+1} + M_i\, dx_{r+2} = \mu_i(a\, dx_{r+1} + b\, dx_{r+2})$$

et l'on voit qu'il suffit qu'un élément linéaire intégral du système S′ satisfasse aux relations

$$\omega_r = 0, \qquad a\, dx_{r+1} + b\, dx_{r+2} = 0$$

pour qu'il satisfasse aux équations $\omega'_i = 0$, donc le nombre des équations qui définissent les éléments caractéristiques de S′ est $r + 1$ et *la classe de* S′ *est* $r + 1$.

Soit maintenant $\varphi_h(x_1, x_2, \ldots, x_{r+2})$ $(h = 1, \ldots, r+1)$ les intégrales premières du système

$$(80) \qquad \omega_\lambda = 0, \qquad a\, dx_{r+1} + b\, dx_{r+2} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, r).$$

Posons $\varphi_h(x_1, \ldots, x_{r+2}) = y_h$ en prenant pour variables nouvelles

les y_h et une des anciennes variables x_{r+2} par exemple, on peut écrire les équations $\omega_i = 0$ de manière à ne contenir que $y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}$ et l'on peut alors donner aux équations $\omega_i = 0$ du système S′ la forme

$$dy_i - (A_i\,dy_r + B_i\,dy_{r+1}) = 0,$$

les A_i, B_i contenant seulement $y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}$.

D'autre part l'équation $\omega_r = 0$ appartient au système (80) et comme les y_h sont des intégrales premières de ce système, elle établit une relation linéaire entre les dy_h et par conséquent si l'on tient compte des équations de S′ on peut écrire l'équation $\omega_r = 0$ sous la forme $dy_r - H\,dy_{r+1} = 0$, où H ne peut pas contenir seulement $y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}$ sinon, en effet, le système S serait complètement intégrable; donc on peut considérer H comme une nouvelle variable y_{r+2}, c'est-à-dire on peut écrire

$$\Omega_r = dy_r - y_{r+2}\,dy_{r+1} = 0,$$

et S serait un prolongement de S′.

3° Le cas, où tous les L_i, M_i sont nuls.

Le système S′ est complètement intégrable et on le remplacerait par

$$dy_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r-1)$$

où les y_i sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_{r+2}$ donnant les intégrales premières des équations de S′. Substituons aux variables x_1, x_2, ..., x_{r+2} les y_i, x_r, x_{r+1}, x_{r+2} et tenons compte des $dy_i = 0$, alors $\omega_r = 0$ devient une équation de Pfaff à trois variables où les y_i sont considérés comme des paramètres, c'est-à-dire on aura pour ω_r une forme

$$A\,dx_r + B\,dx_{r+1} + \Gamma\,dx_{r+2},$$

où A, B, Γ contiennent les y_i comme des paramètres et l'équation $\omega_r = 0$ peut être ramenée à la forme canonique

$$dy_r - y_{r+2}\,dy_{r+1} = 0;$$

on a donc finalement, pour le système S, la forme canonique

$$\text{(II)} \qquad dy_i = 0, \qquad dy_r - y_{r+2}\,dy_{r+1} = 0.$$

Soit maintenant que nous nous trouvons dans le second cas; comme S′ sera de classe $r+1$ et il se compose de $r-1$ équations, on peut partir de S′ et procéder comme précédemment où l'on partait de S.

On constate alors que S'' se compose de $r-2$ équations et que trois cas sont possibles :

α'. $S^{(3)}$ est formé de $r-4$ équations et S' est alors un système normal; comme S est le prolongement de S' on s'aperçoit que S est le prolongement d'un système normal.

β'. $S^{(3)}$ est formé de $r-3$ équations et S'' est de classe r.

γ'. $S^{(3)}$ est formé de $r-2$ équations; le système S'' est alors son propre dérivé; donc le système S'' est complètement intégrable.

D'une façon générale désignons par α_i le nombre des équations linéairement indépendantes dont est composé le système $S^{(i)}$, et par γ_i sa classe et posons $\alpha_i - \alpha_{i+1} = \mu_i$. Supposons que $\gamma_\rho - \alpha_\rho = 2$; alors on a d'après ce qui précède $\mu_\rho = 1$ et $\mu_{\rho+1}$ sera ou bien 2, ou 1, ou zéro. Si $\mu_{\rho+1} = 2$ le système $S^{(\rho)}$ est par définition un système normal. Si $\mu_{\rho+1} = 0$ on a aussi $\mu_{\rho+2} = \mu_{\rho+3} = \ldots = 0$ et le système $S^{(\rho+1)}$ est son propre dérivé; il en est de même de $S^{(\rho+2)}$ etc. Donc le système $S^{(\rho+1)}$ est complètement intégrable.

Si

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{r-h-1} = 1 \quad \text{et} \quad \mu_{r-h} = 2,$$

on a

$$\alpha_1 = r-1, \quad \alpha_2 = r-2, \quad \ldots, \quad \alpha_{r-h} = h$$

et

$$\alpha_{r-h+1} = h-2,$$

$$\gamma_1 = r+1, \quad \gamma_2 = r, \quad \ldots, \quad \gamma_{r-h-1} = h+3,$$

et alors $S^{(r-h-1)}$ est un système normal de $h+1$ équations et de classe $h+3$; comme on a vu plus haut $S^{(r-h-2)}$ sera un prolongement de $S^{(r-h-1)}$ et l'on peut prendre un système de variables tel que les équations de $S^{(r-h-1)}$ ne contiennent que les variables $y_1, y_2, \ldots, y_{h+3}$ et leurs différentielles, la dernière équation du système $S^{(r-h-2)}$ étant $dy_{h+2} = y_{h+4}\, dy_{h+3}$. Le système $S^{(r-h-3)}$ s'obtient en joignant aux équations du système $S^{(r-h-2)}$ une équation de plus qu'on peut écrire sous la forme

$$dy_{h+3} - y_{h+5}\, dy_{h+4} = 0.$$

En continuant de la même manière, on voit aisément qu'on peut choisir les variables $y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}, y_{r+2}$ de telle sorte que les équations de S prennent la forme

$$(81) \qquad \begin{cases} \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \ldots, \quad \omega_{h+1} = 0, \\ dy_\rho - y_{\rho+2}\, dy_{\rho+1} = 0 \qquad (\rho = h+2, \ldots, r). \end{cases}$$

Donc S est un prolongement du système normal $S^{(r-h-1)}$. Nous dirons que S *est un système spécial s'il n'y a pas de valeurs de* i ($i = 1, 2, \ldots, r-2$) *pour lesquelles* μ_i *soit différent de zéro et de un*. Donc *si un système* S *de* r *équations et de classe* $r+2$ *n'est pas normal, un prolongement d'un système normal sera un système spécial* [10, 20].

17. Systèmes intégrables explicitement. Théorème de M. E. Cartan. — La question d'existence d'une intégrale générale explicite d'un système S est liée avec celle de la réduction d'un système S à une forme canonique.

Soit le système spécial S et que

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{r-\rho-1} = 1, \qquad \mu_{r-\rho} = \mu_{r-\rho+1} = \ldots = \mu_{r-1} = 0.$$

D'après ce qui précède le système $S^{(r-\rho)}$ est complètement intégrable et le système $S^{(r-\rho-1)}$ se compose de $\rho+1$ équations et il est de classe $\rho+3$; nous pouvons donc raisonner comme dans le troisième cas. On peut d'après cela mettre ce système sous la forme

$$(82)\qquad dy_1 = 0, \quad \ldots, \quad dy_\rho = 0, \quad dy_{\rho+2} - y_{\rho+3}\, dy_{\rho+1} = 0.$$

Prenons comme nouvelles variables les $y_1, y_2, \ldots, y_{\rho+3}$ et $r-\rho-1$ des anciennes variables $x_{\rho+4}, \ldots, x_{r+2}$ par exemple; alors $S^{(r-\rho-2)}$ est composé de $\rho+2$ équations dont $\rho+1$ équations sont les (82) et l'autre équation peut être mise sous la forme

$$\omega_{\rho+2} = \mathrm{H}\, dy_{\rho+1} + \mathrm{K}\, dy_{\rho+2} + \Sigma\, \mathrm{T}_\nu\, dx_\nu$$
$$(\nu = \rho+4, \rho+5, \ldots, r+2).$$

En exprimant maintenant que l'équation $[dy_{\rho+1}, dy_{\rho+3}] = 0$ est une conséquence des équations $\omega_{\rho+2}(d) = 0$, $\omega_{\rho+2}(\delta) = 0$, on voit que $\omega_{\rho+2} = 0$ s'écrira

$$(83)\qquad dy_{\rho+3} - y_{\rho+4}\, dy_{\rho+1} = 0$$

ou $y_{\rho+4}$ est une nouvelle variable.

On constate de même que $S^{(r-\rho-3)}$ est formé des équations (82), (83) et de l'équation $dy_{\rho+4} - y_{\rho+5}\, dy_{\rho+1} = 0$ et ainsi de suite; on arrive finalement à la forme canonique

$$(84)\quad \begin{cases} dy_1 = 0, \quad dy_2 = 0, \quad \ldots, \quad dy_\rho = 0, \\ dy_{\rho+2} - y_{\rho+3}\, dy_{\rho+1} = 0, \quad \ldots, \quad dy_{r+1} - y_{r+2}\, dy_{\rho+1} = 0. \end{cases}$$

Donc :

a'. Tout système spécial de r équations à $r+2$ variables se réduit à la forme canonique (84).

b'. Le nombre des équations de la forme $dy_i = 0$ dans la forme canonique (84) coïncide au nombre ρ où $r-\rho$ est le plus petit des indices des μ, égaux a o; en d'autres termes : tous les systèmes de r équations à $r+2$ variables pour lesquels le nombre ρ a la même valeur peuvent être ramenés à une même forme canonique. La forme canonique (84) à laquelle se ramène le système spécial S indique que le système S est intégrable explicitement; il suffit, en effet, de poser $y_{\rho+1} = a$, $y_{\rho+2} = \varphi(a)$, φ désignant une fonction arbitraire de a, pour avoir l'intégrale générale explicite du système S donnant les multiplicités intégrales M_1

$$(85)\quad \begin{cases} y_1 = c_1, \quad \ldots, \quad y_\rho = c_\rho, \\ y_{\rho+1} = a, \quad y_{\rho+2} = \varphi(a), \quad y_{\rho+3} = \varphi'(a), \quad \ldots, \quad y_{r+2} = \varphi^{(r-\rho)}(a), \end{cases}$$

par conséquent si le changement des variables qui fait passer du système S à la forme canonique (84) est défini par les formules

$$x_i = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_{r+2}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r+2),$$

on a l'intégrale générale de S par les formules

$$(86)\qquad x_i = f_i[c_1, c_2, \ldots, c_\rho, a, \varphi'(a), \varphi'(a), \ldots, \varphi^{(r-\rho)}(a)].$$

Donc : *tout système spécial a une intégrale générale explicite, inversement : si un système de r équations à r + 2 variables est intégrable explicitement est un système spécial.* Pour le démontrer on remarque que si un système S, prolongement d'un système normal Σ, admet une intégrale explicite, (Σ) admettrait également une intégrale générale explicite, comme cela résulte de la forme (81) à laquelle se ramène un système qui est un prolongement d'un système normal. Puis on démontre qu'il est impossible qu'un système Σ intégrable explicitement soit un système normal, d'où le beau théorème de M. Cartan : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un* *système* S *de* r *équations à* $r+2$ *variables a une solution générale explicite est qu'il soit un système spécial.*

Après les systèmes spéciaux les systèmes les plus simples sont les systèmes normaux de r équations à $r+2$ variables dont le second dérivé est spécial de $r-3$ équations. On voit facilement qu'un tel système normal se ramène à la forme

$$dy_2 - y_3\,dy_1 = 0, \quad \ldots, \quad dy_r - y_{r+1}\,dy_1 = 0, \quad dy_{r+2} - F\,dy_1 = 0,$$

F étant une fonction arbitraire de $r+2$ variables y_i; donc la solution générale est

$$y_1 = a, \quad y_2 = \varphi(a), \quad y_3 = \varphi'(a), \quad \ldots, \quad y_{r+1} = \varphi^{(r-1)}(a) \text{ et } y_{r+2}$$

est donnée par l'intégration de l'équation différentielle

$$dy_{r+2} = F[a, \varphi(a), \varphi'(a), \ldots, \varphi^{(r-1)}(a), y_{r+2})\,da.$$

18. Conséquences du théorème de M. É. Cartan. — Si un système de Monge se ramène à un système de Pfaff spécial, alors en vertu du théorème de Cartan il aura une solution générale explicite; donc il serait intéressant *de chercher des systèmes de Monge qui se ramènent à des systèmes spéciaux.*

D'après ce que nous avons vu, tout système de Pfaff de deux équations à quatre variables est un système spécial.

Soit le système

$$(87) \qquad f_i(dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n+1}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

où les f_i ne renferment pas x; on le remplace par un système équivalent de $n-1$ équations a $n+1$ variables de la forme

$$(88) \qquad \frac{dx_k}{dx_{n+1}} = \varphi_k\left(\frac{dx_1}{dx_{n+1}}\right) \qquad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

En introduisant une nouvelle variable

$$x_{n+2} = \frac{dx_1}{dx_{n+1}},$$

on arrive à un système S de n équations de Pfaff à $n+2$ variables

$$\omega_1 = dx_1 - x_{n+2}\,dx_{n+1} = 0, \qquad \omega_k = dx_k - \varphi_k(x_{n+2})\,dx_{n+1} = 0.$$

On voit facilement que le système S' qui est composé de $n-1$ équations est de même forme que S, a $r+1$ variables et si S$'$ n'est pas complètement intégrable, on voit de même que S$''$ est de même forme à n variables et ainsi de suite; donc S est un système spécial; il admet par conséquent une solution générale explicite. On peut généraliser ce résultat. Considérons un système de q équations $(q < n-1)$

$$F_i(dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n+1}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

si l'on adjoint $n-q-1$ équations de même forme

$$F_{q+1}(dx_1, \ldots, dx_{n+1}) = 0, \qquad F_{q+2}(dx_1, \ldots, dx_{n+1}) = 0, \qquad \ldots, \\ F_{n-1}(dx_1, \ldots, dx_{n+1}) = 0$$

le système ainsi complété est de la forme précédente et l'intégrale générale de S aura la forme explicite avec plusieurs fonctions arbitraires.

On pourrait chercher des cas où un système de trois équations à cinq variables est un système spécial, en particulier soit un système de la forme

$$(89) \qquad \begin{cases} \omega_1 = dx_2 - x_3\,dx_1 = 0, \qquad \omega_2 = dx_3 - x_4\,dx_1 = 0, \\ \omega_3 = dx_5 - f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\,dx_1 = 0. \end{cases}$$

Cherchons à déterminer la fonction f de manière que S soit un système spécial. Formons S$'$, on a

$$\omega'_1 = 0, \qquad \omega_2 = [dx_1, dx_4], \qquad \omega'_3 = f'_{x_4}[dx_1, dx_4] \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1, \omega_2, \omega_3),$$

on a donc

$$\omega'_3 - f'_{x_4}\omega'_2 = 0,$$

et les équations de S$'$ sont

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_3 - f'_{x_4}\omega_2 = 0$$

ou bien

$$\varpi_1 = \omega_1 = dx_2 - x_3\,dx_1 = 0, \qquad \varpi_2 = dx_5 - f'_x\,dx_3 - (f - x_4 f'_x)\,dx_1 = 0,$$

d'où

$$\varpi'_1 = [dx_1, dx_3],$$
$$\varpi'_2 = f''_{x_4^2}[dx_3, dx_4] + x_4 f''_{x_4^2}[dx_1, dx_4] + \lambda[dx_1, dx_3] \qquad (\mathrm{mod}\ \varpi_1, \varpi_2).$$

Pour que le système S$''$ soit formé d'une équation, il faut et il suffit qu'on ait

$$f''_{x_4^2} = 0,$$

c'est-à-dire que f soit linéaire par rapport à x_4. Si l'on pose

on a

$$x_1 = x, \qquad x_2 = y, \qquad x_5 = z,$$

$$x_3 = y', \qquad x_4 = y'', \qquad \frac{dx_5}{dx_1} = z'$$

et le système S se ramène à l'équation de Monge du second ordre

$$z' = f(x, y, y', y'', z). \tag{90}$$

inversement, toute équation (90) se ramène à un système de la forme (89); donc, pour que (90) soit intégrable explicitement il faut que f soit linéaire en y''; cette condition est d'ailleurs suffisante [12].

CHAPITRE V.

THÉORIES GÉNÉRALES SUR LA CORRESPONDANCE ENTRE LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET LES ÉQUATIONS DE MONGE.

19. **Équations de Monge et systèmes en involution de types différents.** — α'. Remarquons qu'aux théories relatives aux systèmes en involution des équations aux dérivées partielles du premier ordre, on peut faire correspondre dans quelques cas particuliers des théories relatives à l'intégration des systèmes de Monge; on voit une telle correspondance dans la méthode de M. Goursat, où à des systèmes de Monge correspondent les systèmes dits *associés* et, lorsque ces systèmes associés sont en involution, on a des solutions générales explicites des systèmes de Monge correspondants [47].

β'. Une correspondance entre des systemes en involutions linéaires d'équations aux dérivées partielles du second ordre et d'une équation de Monge du second ordre, nous avons déjà rencontré (Chap. II) où l'on a vu que dans le cas étudié, l'intégration de l'équation de Monge du second ordre se ramène à l'intégration d'une équation de Monge du premier ordre [28].

γ'. Soit un système en involution non linéaire; on peut, au moyen d'une intégrale complète, lui faire correspondre deux équations de Monge de la forme

$$\Phi_i\left(a_1, a_2, a_3, a_4; \frac{da_2}{da_1}, \frac{da_3}{da_1}, \frac{da_4}{da_1}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2), \tag{91}$$

telles que pour obtenir l'intégrale générale du système en involution il faudrait obtenir les expressions les plus générales de quatre fonctions a_1, a_2, a_3, a_4, d'une seule variable vérifiant les deux relations (91).

δ'. M. Cartan a montré comment est liée à la théorie des équations de Monge dans l'espace à cinq dimensions, l'étude de certains systèmes en involution de trois équations aux dérivées partielles du second ordre, à une fonction inconnue de trois variables indépendantes lorsque les trois familles de caractéristiques à deux dimensions sont confondues et lorsque la famille unique dépend de huit paramètres. M. Cartan a montré que l'intégration d'un tel système en involution se ramène à l'intégration d'un système de cinq équations de Pfaff, complètement intégrable et d'une équation de Monge

$$F\left(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5; \frac{dX_2}{dX_1}, \frac{dX_3}{dX_1}, \frac{dX_4}{dX_1}, \frac{dX_5}{dX_1}\right) = 0 \tag{92}$$

et réciproquement il a montré comment toute équation de Monge de la forme (92) sous certaines conditions donne naissance à un système en involution du type dit; si deux tels systèmes en involutions conduisent à une même équation de Monge non linéaire ils sont réductibles l'un à l'autre par une transformation de contact [9].

20. Faisceaux des transformations infinitésimales. Faisceaux dérivés. Théorie de M. Vessiot. — On doit à M. Vessiot [39, 41] une théorie nouvelle des problèmes généraux d'intégration. Cette théorie ouvre un chemin nouveau pour l'étude des systèmes différentiels indéterminés et elle est corrélative à la théorie de M. Cartan sur le problème de Pfaff. Cette théorie se trouve basée sur la notion de correspondance entre un système d'équations différentielles et d'un système d'équations linéaires aux dérivées partielles.

Soit d'abord un système S d'équations différentielles ordinaires; on peut lui faire correspondre, comme on sait, une équation linéaire aux dérivées partielles E, de sorte que les solutions de E soient des intégrales premières de S et inversement. On a ainsi entre S et E une sorte de *dualité*; on peut dire que S, E sont corrélatifs. Considérons ensuite avec M. Cartan un système S de s équations de Pfaff à n variables complètement intégrable

$$\omega_i = \Sigma a_{k,i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s;\ k = 1, 2, \ldots, n). \tag{93}$$

Choisissons arbitrairement $n - s$ formes différentielles linéaires

$\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_{n-s}$ indépendantes entre elles, et indépendantes des formes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$; on peut évidemment exprimer $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ en fonction des $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$; $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_{n-s}$ d'une manière et d'une seule; donc on exprimera toute différentielle totale

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n,$$

linéairement au moyen de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s, \varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_{n-s}$ les coefficients étant linéaires et homogènes en $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ divergentes c'est-à-dire formes linéaires indépendantes relativement aux $\frac{\partial f}{\partial x_i}$; on a ainsi une identité de la forme

$$(94) \quad df = Z_1 \omega_1 + Z_2 \omega_2 + \ldots + Z_s \omega_s + X_1 \varpi_1 + X_2 \varpi_2 + \ldots + X_{n-s} \varpi_{n-s}.$$

Le système de $n - s$ équations aux dérivées partielles

$$X_\rho = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, n - s)$$

admet comme solutions s intégrales premières indépendantes du système complètement intégrable S et l'on sait qu'au système S *correspond un système complet*

$$(95) \qquad X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad \ldots, \quad X_{n-s} = 0$$

et réciproquement. Donc les deux systèmes S, E sont corrélatifs et l'intégration de chacun entraîne celle de l'autre. On peut encore dire qu'étant donné un système S de s équations de Pfaff à n variables complètement intégrable et un système complet E de $n - s$ équations linéaires aux dérivées partielles, il existe une dualité entre S et E telle que l'intégration de chacun d'eux entraîne celle de l'autre *si l'on a une identité de la forme* (94), $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_{n-s}$ étant de nouvelles fonctions linéaires entre $dx_1, dx_2, \ldots, dx_s$ et $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-s}$ étant des fonctions de nouvelles formes en $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$.

M. Vessiot considère un système de Pfaff *quelconque* et étend à ce cas cette notion de *dualité* : soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s, \varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_{n-s}$, n expressions de Pfaff indépendantes en dx et f une fonction indéterminée. On peut écrire une identité de la forme (94); alors les opérations linéaires $X_1, \ldots, X_{n-s}$, $Z_1, \ldots, Z_s$ sont entièrement définies; mais si l'on se donne seulement le système de Pfaff $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0, \ldots, \omega_s = 0$, on peut remplacer dans l'identité (94) les ω_i par d'autres expressions linéaires en ω_i, c'est-a-dire les ω_i ne sont définis qu'à une substitution linéaire près et l'on peut choisir $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_{n-s}$ arbitrairement de sorte que si l'on a fait un premier choix, on pourra les remplacer ensuite par d'autres expressions qui sont linéaires en ω_i et ϖ_j. De tels remplacements des ω_i et des ϖ_j ont pour effet de remplacer $X_1, X_2, \ldots, X_{n-s}$ par des combinaisons linéaires homogènes de la forme

$$(96) \quad X = \lambda_1(x_1, \ldots, x_n) X_1 + \ldots + \lambda_m(x_1, \ldots, x_n) X_m \qquad (m = n - s)$$

et peuvent donner pour $Z_1, Z_2, \ldots, Z_s$ des formes entièrement arbitraires en $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$.

Si l'on considère comme symboles de transformations infinitésimales les expressions telles que $X_j f$, on peut dire que X donne pour une détermination des $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ une transformation infinitésimale. Les remarques précédentes de M. Vessiot l'ont conduit à faire correspondre à tout système d'équations de Pfaff, non un système de transformations $X_1, X_2, \ldots, X_m$ mais l'ensemble des transformations infinitésimales données par la formule (96), ou les λ_j sont des fonctions arbitraires des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et les X_j sont supposées divergentes. Un tel ensemble est appelé par M. Vessiot un *faisceau de transformations infinitésimales*; les X_j supposées divergentes constituent une base du faisceau; on peut évidemment prendre comme base définissant le faisceau m autres transformations quelconques divergentes du faisceau. Cela revient à effectuer sur $X_1, X_2, \ldots, X_m$ une substitution lineaire homogène, dont les coefficients sont des fonctions arbitraires des $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Soit un faisceau $\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$; associons aux transformations de base $X_1, X_2, \ldots, X_m$, $n - m$ transformations arbitraires $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-m}$ de manière que $X_1, X_2, \ldots, X_m, Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-m}$ soient dans leur ensemble divergentes. Nous aurons une identité de la forme (94) où $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_m, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-m}$ seront n expressions de Pfaff indépendantes. Il en résulte que les déplacements infinitésimaux qui satisfont au système $\omega_i = 0 (i = 1, 2, \ldots, s)$ sont précisément ceux qui correspondent aux diverses transformations infinitésimales du faisceau $\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ et toute multiplicité intégrale du faisceau $\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ est une multiplicité intégrale du système de Pfaff $\omega_i = 0$ et reciproquement.

Inversement, étant donné un système d'équations de Pfaff, on peut lui faire correspondre un faisceau des transformations équivalent. Nous dirons, avec M. Vessiot, qu'un faisceau $\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ et un système $\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_s = 0$ qui se correspondent ainsi sont *corrélatifs* ou *dualistiques* l'un de l'autre. C'est cette correspondance qui fait voir qu'à la théorie des systèmes d'équations de Pfaff correspond par une sorte de dualité une théorie des faisceaux de transformations infinitésimales.

Une multiplicité à p dimensions est dite *intégrale* d'un faisceau de transformations, si elle est invariante par p transformations divergentes de ce faisceau. *Intégrale complète* est appelée une famille de multiplicités intégrales, telle qu'il passe par chaque point de l'espace une multiplicité et une seule de cette famille. Toute intégrale complète à p dimensions est fournie par un système complet de p équations $U_1 f = 0$, $U_2 f = 0$, $\ldots$, $U_p f = 0$ dont les premiers membres sont des transformations du faisceau. Les transformations U_1, U_2, $\ldots$, U_p définissent un *sous-faisceau complet* du faisceau donné. Tout problème d'intégration équivaut à la recherche des *sous-faisceaux complets* d'un certain faisceau F. Dans la théorie de M. Vessiot on considère au lieu des multiplicités intégrales isolées, des intégrales complètes.

M. Cartan utilise pour le problème de l'intégration d'un système de Pfaff, les propriétés des covariants bilinéaires $\omega'_i = \delta\omega_i(d) - d\omega_i(\delta)$ tandis que M. Vessiot, les crochets de Jacobi

$$(X_i f, X_h f) = X_i(X_h f) - X_h(X_i f) \qquad (i, h = 1, 2, \ldots, m)$$

qui sont des transformations infinitésimales covariantes aux transformations $\{X_1, \ldots, X_m\}$. Si elles appartiennent toutes au faisceau, le faisceau sera dit complet et nous écrirons avec M. Vessiot

$$(X_i, X_h) = 0 \qquad (\operatorname{mod} X_1, X_2, \ldots, X_m),$$

pour exprimer que ces crochets s'expriment en fonction linéaire homogène de $X_1, \ldots, X_m$. Lorsqu'un faiscean n'est pas complet, les crochets (X_i, X_h) s'exprimeront en fonction linéaire homogène de $X_1, X_2, \ldots, X_m$ et d'autres transformations infinitésimales Z_1, $Z_2, \ldots, Z_{m'}$, qu'on pourra choisir de manière que $X_1, X_2, \ldots, X_m$, $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{m'}$, soient divergentes. Ce faisceau $\{X_1, \ldots, X_m$, $Z_1, \ldots, Z_{m'}\}$ est appelé par M. Vessiot le *dérivé* du faisceau $\{X_1$,

$X_2, \ldots, X_m\}$, c'est-à-dire l'ensemble des crochets $(X_i f, X_h f)$ des transformations du faisceau F prises deux à deux constitue un faisceau F′ qui contient F : c'est le *dérivé* de F.

Pour les crochets (X_i, X_h) on a des identités-congruences dites *formules de structure*, de la forme

$$(X_i, X_h) \equiv \Sigma c_{i,h,j} Z_j \qquad (\operatorname{mod} F)$$
$$(i, h = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, m'),$$

la nature du faisceau au point de vue de son intégration dépend essentiellement de sa structure; c'est par des comparaisons de structure que l'on reconnaît si l'on peut passer d'un faisceau à un autre par un changement des variables. Un faisceau complet est un faisceau qui est identique à son dérivé F′. Le F′ a de même un dérivé et ainsi de suite. Une propriété très intéressante est que le degré du dernier dérivé d'un faisceau de transformations infinitésimales est égal au nombre minimum de variables effectives, auquel on puisse par un changement des variables, réduire ce faisceau.

Dans la théorie de M. Cartan joue un grand rôle la réduction de certains systèmes d'équations de Pfaff à des formes canoniques. On considère aussi dans la théorie de M. Vessiot des formes ou des types canoniques, et l'on a le problème de la réduction d'un faisceau à une forme canonique ou semi-canonique. Un tel problème a été étudié par M. Vessiot dans le cas particulier où le dérivé F′ est de degré $m+1$, m désignant le degré de F; on sait alors que les formules de structure sont de la forme simple

$$(X_i, X_h) \equiv c_{i,k} Z \qquad (\operatorname{mod} F) \; (i, k = 1, 2, \ldots, m),$$

Z étant une transformation quelconque du dérivé (ne faisant pas partie de F).

Comme on a considéré pour un système de Pfaff la forme canonique (63), on considère ici la forme canonique

$$X = \frac{\partial f}{\partial x} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_0} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + x_{\rho+1} \frac{\partial f}{\partial x_\rho}, \; \frac{\partial f}{\partial x_{\rho+1}}; \; \frac{\partial f}{\partial z_1}, \; \frac{\partial f}{\partial z_2}, \; \ldots, \; \frac{\partial f}{\partial z_r}.$$

La connaissance d'une intégrale complète dans ce cas permet de réduire, par un changement des variables, le faisceau donné F à une forme canonique; sur cette forme canonique on cherche ensuite les autres intégrales complètes. M. Vessiot aussi a introduit la notion du *prolongement d'un faisceau* qu'il utilise pour l'étude du problème de l'intégration des faisceaux ; il a donné le théorème qui correspond à celui de M. Cartan pour l'intégration explicite des systèmes spéciaux et a édifié une théorie corrélative à celle de M. Cartan. Il a montré que dans le cas considéré, si les degrés des F', F'', ... *croissent d'une unité* quand on passe de chacun de ces dérivées au suivant, la solution générale du problème de l'intégration de F (pour $s = 1$) se donne par des formules explicites. On a ainsi, avec des hypothèses un peu plus générales, l'équivalent du théorème de M. Cartan.

21. Dualité entre les équations de Monge et les équations aux dérivées partielles non linéaires. — Soit un système d'équations de Monge ; on forme le système équivalent de Pfaff : de ce système, par la théorie de M. Vessiot, on peut passer à un faisceau des transformations infinitésimales. On voit donc que nous pouvons étudier les systèmes de Monge au moyen de la théorie de M. Vessiot. Cette théorie d'ailleurs indique le chemin pour édifier une théorie du problème de Monge en s'appuyant sur une dualité *entre les équations de Monge* et *les équations aux dérivées partielles non linéaires*. Nous n'avons indiqué ici que trop peu de choses de la théorie très importante de M. Vessiot. Mais on distingue à première vue quel vaste champ de recherches ouvre cette méthode.

CHAPITRE VI.

LE PROBLÈME DE MONGE A PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

22. Théories de M. Goursat. — Nous allons envisager des équations de Monge à deux fonctions inconnues d'un nombre quelconque de variables indépendantes. M. Goursat a indiqué une classe de telles équations pour lesquelles nous pouvons exprimer explicitement les deux fonctions au moyen de variables indépendantes, des fonctions arbitraires de ces variables et de ses dérivées partielles.

Il considère l'équation

$$(97)\qquad \begin{cases} F(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}; P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}) = 0, \\ P_h = \dfrac{\partial x_{n+2}}{\partial x_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n+1), \end{cases}$$

et $x_{n+2} = \varphi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ **une multiplicité** intégrale M_{n+1}, ainsi qu'une **multiplicité** quelconque M_n

$$(98) \qquad x_{n+1} = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad x_{n+2} = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Si la multiplicité (98) est contenue dans une intégrale M_{n+1}, on a

$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi[x_1, x_2, \ldots, x_n; f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$$

et

$$(99) \qquad q_i = P_i + P_{n+1} p_i \qquad \text{avec} \quad p_i = \frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \quad q_i = \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En éliminant $P_1, P_2, \ldots, P_n$ entre (97), (99) on en déduit

$$(100) \quad F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; q_1 - p_1 P_{n+1}, \ldots, q_n - p_n P_{n+1}, P_{n+1}) = 0$$

et l'on définit P_{n+1} en un point x_i de M_n; toute racine holomorphe dans le domaine (D) de ce point donne une intégrale M_{n+1} holomorphe dans (D); la conclusion est en défaut pour une racine qui satisfait en même temps à la condition

$$(101) \qquad \frac{\partial F}{\partial P_1} p_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial P_n} p_n - \frac{\partial F}{\partial P_{n+1}} = 0.$$

En éliminant enfin P_{n+1} entre les (100), (101), nous aurons

$$(102) \qquad \Phi(x_1, \ldots, x_{n+1}, x_{n+2}; p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0,$$

qui est l'équation différentielle des multiplicités singulières de (97). Ces multiplicités sont analogues aux courbes intégrales pour une équation de Monge à trois variables. On intègre explicitement de la manière suivante : soit $V(x_1, \ldots, x_{n+2}; a_1, \ldots, a_{n+1}) = 0$ une intégrale complète de (97). Les multiplicités singulières M_n sont représentées par les équations

$$V = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial a_1} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0,$$

$$H \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_1^2}, & \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial a_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial a_n} \\ \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_n \partial a_1}, & \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_n \partial a_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_n^2} \end{vmatrix} = 0,$$

où l'on a remplacé a_{n+1} par une fonction arbitraire $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Inversement, soit donnée une équation de la forme (102); M. Goursat donne les conditions nécessaires pour que cette équation définisse les multiplicités singulières d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre : le rapport $\frac{\partial \Phi}{\partial p_i} : \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}$ doit être indépendant de i en tenant compte de l'équation elle-même; ces conditions ne sont pas suffisantes dans tous les cas; mais, comme le démontre M. Goursat, on peut toujours si elles sont remplies, intégrer l'équation (102) en exprimant explicitement les variables et les deux fonctions inconnues au moyen de n paramètres auxiliaires d'une fonction arbitraire de ces paramètres et de leurs dérivées jusqu'au second ordre. Pour sa démonstration, M. Goursat remplace (102) par un système de deux équations de Pfaff à $3n+1$ variables

$$\omega_1 = dx_{n+1} - \Sigma p_i\, dx_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\omega_2 = dx_{n+2} - f\,dx_n - \Sigma q_j\, dx_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1),$$

ayant supposé que (102) est écrite sous la forme

$$q_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2};\, p_1, p_2, \ldots, p_n;\, q_1, q_2, \ldots, q_{n-1})$$

et il cherche des intégrales de ce système.

M. Goursat est parti de l'équation (97); il remarque qu'on pourrait partir d'un système en involution d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à une seule fonction inconnue et de généraliser les résultats précédents [26].

On trouve cette généralisation dans un travail très important où M. Goursat applique des méthodes relatives aux systèmes semi-linéaires et il donne un certain nombre de types bien définis d'équations de Monge de la première classe (54).

M. Goursat a signalé aussi quelques cas particuliers où une équation de Monge à deux variables indépendantes de la forme

$$\Sigma A_{ik}\, dz_i\, dz_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

admet une solution explicite (27).

Il a etudié encore le problème de l'intégration d'un système formé de deux équations de la forme précédente (55).

On distingue facilement que les théories de M. Goursat offrent aux recherches un champ étendu.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. BEUDON (J.). — Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles dont les caractéristiques dépendent d'un nombre fini de paramètres (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. 13, 1896; suppl.).
2. — Sur les changements des variables (*Bul. Soc. math.*, t. 28, 1900, p. 107-116).
3. BOTTASSO (M.). — Sur une solution du problème de Monge relatif à l'équation $f(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) = 0$ à coefficients variables (*C. R. Acad. Sc.*, t. 140, 1905, p. 1579).
4. CARTAN (E.). — *Lecons sur les invariants intégraux* (Paris, 1922).
5. — Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. 18, 1901, p. 241-311).
6. — Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre (*Ibid.*, 3e série, t. 27, 1910, p. 108-192).
7. — Sur quelques quadratures dont l'élément différentiel contient des fonctions arbitraires (*Bul. Soc. math.*, t. 29, 1901, p. 118-130).
8. — Sur l'intégration de certains systèmes de Pfaff de caractère deux (*Ibid.*, t. 29, 1901, p. 233-302).
9. — Sur les systèmes en involution d'équations aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue de trois variables indépendantes (*Ibid.*, t. 39, 1911, p. 352-443).
10. — Sur l'équivalence absolue de certains systèmes d'équations différentielles et sur certaines familles de courbes (*Ibid.*, t. 42, 1914, p. 12-48).
11. — Sur l'intégration de certains systèmes d'équations différentielles (*C. R. Acad. Sc.*, t. 158, 1914, p. 326).
12. — Sur l'intégration de certains systèmes indéterminés (*J. für reine und angew. Math.*, t. 145, 1914, p. 86-91).
13. DARBOUX (G.). — Sur l'intégration de l'équation $dx^2 + dy^2 = ds^2$ et de quelques équations analogues (*Journ. de Math. pures et appl.*, 2e série, t. 18, 1873, p. 236-241).
14. — Sur la résolution de l'équation $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ et de quelques équations analogues (*Ibid.*, 4e série, t. 3, 1887, p. 305-325).
15. — Sur le problème de Pfaff (*Bul. sc. Math.*, 2e série, t. 6, 1882.
16. — Solutions singulières des équations aux dérivées partielles (*Mém. des sav. étrang. Acad.*, t. 27, 1883, n° 2).
17. ENGEL (F.). — Zur Invariantentheorie der Système von Pfaff'scher Gleichungen (*Leipziger Berichte*, t. 41, 1889, p. 157-176; 1890, p. 192-207).
18. — Eine neue Methode in der Invariantentheorie der Differential gleichungen (*Leipziger Berichte*, 1905, p. 161-232).
19. FROBENIUS (G.). — Ueber das Pfaffs'sche Problem (*J. für reine und angew. Math.*, t. 82, 1877, p. 230-315).
20. GOURSAT (E.). — *Leçons sur le problème de Pfaff* (Paris, 1922).

21. — *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (Paris, 1921).

22. — *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. I, II (Paris, 1896, 1898).

23. — Le problème de Backlund (*Mém. Sc. Math.*, fasc. 6, 1925).

24. — Sur le problème de Monge (*Bul. Soc. math.*, t. 33, 1905, p. 201-210).

25. — Sur les éléments singuliers d'un système de deux équations de Pfaff (*Bul. Soc. math.*, t. 52, 1924, p. 38-49).

26. — Le problème de Monge à plusieurs variables indépendantes (*C. R. Acad. Sc.*, t. 186, 1928). (*Voir* aussi *C. R.*, t. 190, p. 1029.).

27. — Sur quelques problèmes de la théorie des congruences (*Bul. sc. Math.*, 2e série, t. 52, 1928, p. 397; t. 53, 1929, p. 196.

28. — Recherches sur les systèmes en involution d'équations du second ordre (*Journ. Éc. Polytech.*, 2e série, 3e cahier, 1897, p. 75-130).

29. Gross (W.). — Ueber Differentialgleichungssysteme erster Ordnung, diren Lösungen sich integrallos darstellen lassen (*Mathematische Annalen*, t. 73, p. 109-172).

30. Hadamard (J.). — Sur l'équilibre de plaques élastiques circulaires libres ou appuyées et celui de la sphère isotrope (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. 18, 1901).

31. Hilbert (D.). — Ueber den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen (*Festschrift Heinrich Weber*, 1912).

32. Lie (S.). — *Géométrie der Berührungs transformationem I* (Leipzig, 1896).

33. — Ueber Berührungstransformationem und Differentialgleichungen (*Leipzig Berichte*, 1898, p. 113-180).

34. Lie (S.) et Engel (F.). — *Théorie der Transformationsgruppen* 2 (Leipzig, 1898).

35. Monge (G.). — Supplément où l'on fait voir que les équations aux différences ordinaires pour lesquelles les conditions d'intégrabilité ne sont pas satisfaites sont susceptibles d'une véritable intégration, etc. (*Mém. Ac. Sc.*, 1784, p. 502-576).

36. Serret (J.). — Sur l'intégration de l'équation $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ (*Journal Math. pures et appl.*, 1re série, t. 13, 1848, p. 353-368).

37. Vessiot (E.). — *Leçons de Géométrie supérieure*, 1919.

38. — Sur une théorie nouvelle des problèmes d'intégration (*C. R. Acad. Sc.*, t. 178, 1924, p. 1137).

39. — Sur une théorie nouvelle des problèmes généraux d'intégration (*Bul. Soc. math.*, t. 52, 1924, p. 336-395).

40. — Sur l'intégration des faisceaux des transformations infinitésimales de degré n à $n+1$ variables (*C. R. Acad. Sc.*, t. 184, 1927, p. 143).

41. — Sur l'intégration des faisceaux de transformations infinitésimales dans le cas où, le degré du faisceau étant n, celui du faisceau dérivé est $n+1$ (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. 45, 1928, p. 189-253).

42. Weber (E.). — *Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem und die Théorie der partiellen Differentialgleichungen erster ordnung* (Leipzig, 1900).

43. — Zur Invariantentheorie der Systeme Pfaff'scher Gleichungen (*Leipzig Berichte*, 1898, p. 207-229).

44. ZERVOS (P.). — Sur le problème de Monge (*C. R. Acad. Sc.*, 10 avril 1905).

45. — Sur le problème de Monge (*C. R. Acad. Sc.*, 11 septembre 1905).

46. — Sur une méthode de M. Goursat dans le problème de Monge (*C. R. Acad. Sc.*, 25 mai 1908).

47. — Sur la correspondance entre les théories d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre et d'intégration des systèmes de Monge (*Atti de l'IV Congresso internationale dei Matematici Roma*, vol. II, p. 94-98).

48. — Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre à trois variables indépendantes (*International Congress of Mathematicians*, Cambridge, 1912, p. 415-417).

49. — Sur l'intégration de certains systèmes indéterminés d'équations différentielles (*J. für reine und angew. Math.*, t. **143**, 1913, p. 300-312).

50. — Sur l'équivalence des systèmes d'équations différentielles (*Bul. Soc. math. Grèce*, 1919).

51. — Sur quelques remarques relatives aux théories de l'intégration de systèmes en involution du second ordre (*Ibid.*, 1919).

52. — Sur l'intégration de certains systèmes différentiels indéterminés (*C. R. du Congrès international des mathématiciens*, Strasbourg, septembre 1920, p. 329-331).

53. — Remarques sur certaines transformations des équations aux dérivées partielles (*Ibid.*, 1920, p. 259-264).

54. GOURSAT (E.). — Sur une généralisation du problème de Monge (*Ann. Fac. des Sciences de Toulouse*, 1930).

55. — Sur un système d'équations aux dérivées partielles (*Ann. Éc. Norm.*, 1930, p. 325).

TABLE DES MATIÈRES.

V. — Théories générales sur la correspondance entre les équations aux dérivées partielles et les équations de Monge.

VI. — Le problème de Monge a plusieurs variables indépendantes.