

J. HAAG

Le problème de Schwarzschild

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 46 (1931)

http://www.numdam.org/item?id=MSM_1931__46__1_0

© Gauthier-Villars, 1931, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémorial des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS;

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,

Professeur à la Sorbonne,

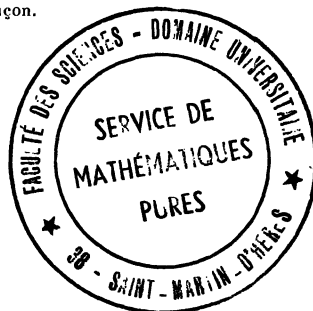
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE XLVI

Le problème de Schwarzschild

PAR M. J. HAAG

Professeur à l'Université de Besançon.



PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C^o, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55.

1931

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

LE

PROBLÈME DE SCHWARZSCHILD

Par **M. J. HAAG,**

Professeur à l'Université de Besançon.



INTRODUCTION.

Parmi les problèmes dont se sont occupés les mathématiciens, il en est peu qui aient acquis une aussi rapide célébrité que le « problème de Schwarzschild ». Cela tient à deux causes principales.

La première consiste en ce fait que le problème de Schwarzschild constitue la première application concrète et rigoureuse de la théorie einsteinienne de la relativité généralisée. Les conséquences simples qui s'en déduisent ont pu être soumises au contrôle de l'expérience et ont soulevé, de la part des relativistes, un enthousiasme parfois excessif en faveur de la géniale conception du célèbre physicien allemand. Nous verrons, au cours du présent fascicule, que cet enthousiasme s'est un peu refroidi par la suite, car les « preuves » expérimentales de la théorie d'Einstein apparaissent maintenant beaucoup moins nettes qu'il y a une dizaine d'années.

La seconde cause de célébrité du problème de Schwarzschild est d'avoir expliqué l'avance mystérieuse du périhélie de Mercure et d'avoir provoqué la découverte de la déviation de la lumière par la masse du Soleil. La compréhension plus ou moins vague de ces deux phénomènes, surtout du second, n'exige pas une culture mathématique bien avancée et c'est ce qui mit à la mode la théorie d'Einstein. D'innombrables articles de presse et ouvrages de vulgarisation prétendirent initier le grand public aux mystères de cette théorie, qui

éclipsait celle de Newton. Des polémiques passionnées s'ensuivirent et pendant quelques années, le monde fut partagé en deux camps : les relativistes et les antirelativistes.

Fort heureusement, toutes les modes sont fugitives et le problème de Schwarzschild est rentré dans le domaine d'où il n'aurait pas dû sortir : le domaine des mathématiciens, des astronomes et des physiciens.

La bibliographie du problème de Schwarzschild est extrêmement abondante et cela s'explique par l'extraordinaire publicité à laquelle nous venons de faire allusion. Il nous a donc été impossible de citer tous les travaux écrits sur ce sujet et nous nous en excusons à l'avance.

CHAPITRE I.

LE PROBLÈME EXTÉRIEUR.

1. **Énoncé du problème.** — Du point de vue purement mathématique, le problème extérieur de Schwarzschild s'énonce aisément. Il s'agit de trouver un ds^2 de la forme

$$(1) \quad ds^2 = A dt^2 - B dr^2 - C(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

où A, B, C désignent des fonctions de la seule variable r , choisies de telle manière que les dix équations d'Einstein dans le vide [24, 1]

$$(2) \quad G_{ik} = 0$$

soient vérifiées identiquement.

C'est donc une simple question d'analyse, qui se résout d'ailleurs facilement.

Du point de vue physique, le problème se pose avec beaucoup moins de netteté et l'interprétation concrète de son énoncé a soulevé de nombreuses discussions [24, 48, 49, 50, 2, 14].

On peut évidemment, à la manière habituelle des relativistes, [24, 1, 2], commencer par résoudre le problème mathématique, sans se préoccuper de la signification des variables; puis, une fois connu le ds^2 , préciser cette signification. Cette méthode choque beaucoup

de physiciens, et même de mathématiciens, qui aiment savoir dès le début de quoi ils parlent.

Essayons donc de présenter le problème physique *a priori*.

Le but poursuivi est de *déterminer le champ de gravitation d'une sphère matérielle fixe, homogène ou composée de couches concentriques homogènes*; ou comme on dit encore de déterminer un *champ de gravitation statique et à symétrie sphérique*.

Des objections se présentent immédiatement.

D'abord, les mots « sphère », « sphères concentriques » n'ont, *a priori*, aucune signification précise; puisque nous ne savons pas à l'avance si l'espace est euclidien.

En second lieu, qu'entendons-nous par le mot « fixe »? Il présuppose un repérage de l'espace et du temps.

Du point de vue métaphysique, la question est sans issue et l'énoncé mathématique donné plus haut est le seul qui ait un sens clair et indiscutable.

Si l'on veut pourvoir les variables r , θ , φ , t d'une signification concrète, il est *indispensable d'admettre au préalable certaines notions primordiales d'origine expérimentale*.

En premier lieu, nous choisissons un *trièdre de référence* $Oxyz$, dont l'origine est le point O que nous considérons comme le centre de la masse attractive et dont les axes ont une orientation invariable par rapport aux étoiles fixes [14, §2). Nous supposons que *l'on sait mesurer*, directement ou indirectement, *les angles de sommet* O et que cette mesure jouit des *mêmes propriétés qu'en Géométrie euclidienne*. Nous appelons alors θ la *colatitude* et φ la *longitude* d'une direction quelconque, par rapport au trièdre fondamental $Oxyz$.

Quant à r , c'est, pour le moment, une fonction quelconque de la distance radiale OM , et nous appelons *sphères* de centre O les surfaces $r = \text{const.}$, sans rien préjuger de leur nature euclidienne ou non euclidienne.

Enfin, la variable t représente un temps absolu, valable pour tout l'espace et que nous appellerons le *temps cosmique* [15, 2]. Pratiquement, ce temps est mesuré par une horloge quelconque, placée en un lieu déterminé.]

Nous savons maintenant ce que signifie l'expression « sphère matérielle fixe ».

Cela posé, nous *postulons* que la structure de l'Univers ainsi constitué est telle que son ds^2 ait la forme (1). Aucune nécessité logique ne nous impose cette forme. Seules, des considérations de symétrie militent en sa faveur.

La symétrie spatiale sphérique entraîne la formule (1), complétée par un terme de la forme $2\lambda dr dt$, λ étant fonction de r [48, 49]. Mais, la symétrie dans le temps supprime ce terme (1) [1, 2].

2. Divers systèmes de variables. — Les variables précédentes sont partiellement indéterminées, du fait de r [12]. Cette indétermination peut être levée en imposant une condition supplémentaire aux coefficients A, B, C.

Par exemple, on peut prendre $C = r^2$. Dans ce cas, r est le *rayon géodésique* (2) de la sphère (r). On obtient ainsi les *coordonnées de Schwarzschild*.

On peut aussi supposer $B = 1$; cela revient à prendre r égal à la distance radiale.

On peut encore s'imposer la relation $C = Br^2$. L'élément linéaire de l'espace se présente alors, au facteur B près, sous la forme euclidienne. On obtient les *coordonnées isotropiques*.

Le choix de la variable r étant fait, on peut enfin passer en *coordonnées cartésiennes* x, y, z , en posant les formules habituelles de transformation de la Géométrie euclidienne. La formule (1) devient

$$(3) \quad ds^2 = A dt^2 - E(x dx + y dy + z dz)^2 - F(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

en posant

$$(4) \quad E = \frac{Br^2 - C}{r^4}, \quad F = \frac{C}{r^2}.$$

3. Calcul du ds^2 . — *Einstein a, le premier, posé le problème de Schwarzschild* [25]. Mais, il n'en a donné qu'une solution approchée, en coordonnées cartésiennes. Cette solution était toutefois

(1) S'il existait, la vitesse radiale de la lumière ne serait pas la même dans les deux sens. Elle serait donnée tantôt par la racine positive, tantôt par la racine négative de l'équation du second degré

$$Br'^2 - 2\lambda r' - A = 0.$$

Pour le cas où le corps central est en rotation uniforme, voir [14], tome II.

(2) C'est-à-dire qui serait déduit d'opérations géodésiques effectuées sur cette sphère.

suffisante pour lui permettre d'expliquer l'avance du périhélie de Mercure et de prévoir la déviation des rayons lumineux par le Soleil.

La première solution rigoureuse est due à Schwarzschild [53, 14, t. II].

De nombreuses solutions ont été proposées depuis par différents auteurs [14, tome II, p. 108]. Elles peuvent évidemment toutes se déduire de l'une d'elles par un changement de variables. Nous nous contenterons d'exposer l'une des plus simples, qui est due à Eddington [24, 14 (tome II)].

Partons de (1), en posant

$$(5) \quad \begin{cases} A = e^\lambda, & B = e^\mu, & C = r^2; \\ x_1 = r, & x_2 = \theta, & x_3 = \varphi, & x_4 = t. \end{cases}$$

Les G_{ik} sont donnés par la formule classique

$$(6) \quad G_{ik} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left\{ \begin{matrix} i & k \\ & \alpha \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i & \alpha \\ & \beta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k & \beta \\ & \alpha \end{matrix} \right\} \\ + \frac{\partial^2 \log \sqrt{-g}}{\partial x_i \partial x_k} - \left\{ \begin{matrix} i & k \\ & \alpha \end{matrix} \right\} \frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}.$$

Pour calculer les symboles de Christoffel, employons l'artifice suivant [53, 35]. Formons les équations différentielles des géodésiques, en extrêmant l'intégrale

$$(7) \quad \int [A t'^2 - B r'^2 - C(\theta'^2 + \sin^2 \theta \varphi'^2)] ds,$$

où les accents indiquent une dérivation par rapport à s . En les comparant avec les équations classiques

$$(8) \quad x_i'' + \left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ & i \end{matrix} \right\} x_\alpha' x_\beta' = 0,$$

nous en déduisons les $\left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ & i \end{matrix} \right\}$. Nous obtenons ainsi

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix} \right\} = \frac{\mu'}{2}, & \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} = -r e^{-\mu}, \\ \left\{ \begin{matrix} 3 & 3 \\ & 1 \end{matrix} \right\} = -r e^{-\mu} \sin^2 \theta, & \left\{ \begin{matrix} 4 & 4 \\ & 1 \end{matrix} \right\} = \frac{\lambda'}{2} e^{\lambda-\mu}, \\ \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 3 \\ & 3 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r}, & \left\{ \begin{matrix} 1 & 4 \\ & 4 \end{matrix} \right\} = \frac{\lambda'}{2}, \\ \left\{ \begin{matrix} 3 & 3 \\ & 2 \end{matrix} \right\} = -\sin \theta \cos \theta, & \left\{ \begin{matrix} 2 & 3 \\ & 3 \end{matrix} \right\} = \cot \theta; \end{array} \right.$$

d'où

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} G_{11} = \frac{\lambda''}{2} + \frac{\lambda'}{4}(\lambda' - \mu') - \frac{\mu'}{r}, \\ G_{22} = e^{-\mu} \left[1 + \frac{r}{2}(\lambda' - \mu') \right] - 1, \\ G_{33} = G_{22} \sin^2 \theta, \\ G_{44} = -e^{\lambda - \mu} \left[\frac{\lambda''}{2} + \frac{\lambda'}{4}(\lambda' - \mu') + \frac{\lambda'}{r} \right]; \end{array} \right.$$

les quantités non écrites étant identiquement nulles.

Les équations (2) se réduisent aux trois suivantes :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda'' + \frac{\lambda'}{2}(\lambda' - \mu') - \frac{2\mu'}{r} = 0, \\ 1 + \frac{r}{2}(\lambda' - \mu') = e^{\mu}, \\ \lambda'' + \frac{\lambda'}{2}(\lambda' - \mu') + \frac{2\lambda'}{r} = 0. \end{array} \right.$$

En retranchant la troisième de la première, on trouve $\lambda' = -\mu'$.
Moyennant quoi, la deuxième devient

$$(12) \quad e^{\mu} = 1 - r\mu'$$

et entraîne les deux autres. L'intégration de (12) est évidente et l'on aboutit finalement, en choisissant l'unité de temps, au célèbre ds^2 de Schwarzschild

$$(13) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

où m désigne une constante d'intégration.

4. **Emploi du principe d'Hamilton.** — On peut éviter le calcul des G_{ik} , en utilisant le principe d'Hamilton généralisé [59, 20, 21, 14 (tome II, p. 110)] qui consiste à extrêmer l'intégrale quadruple

$$(14) \quad \int H \sqrt{-g} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

avec

$$(15) \quad H = g^{ik} \left[\left\{ \begin{array}{cc} i & k \\ r & s \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cc} r & s \\ s & s \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{cc} i & r \\ s & s \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cc} k & s \\ r & r \end{array} \right\} \right].$$

Le champ d'intégration est arbitraire et les variations des g^{ik} sont supposées nulles sur la frontière de ce champ.

Si l'on applique cette méthode au ds^2 d'Eddington, on trouve

$$(16) \quad H = \frac{2e^{-\mu}}{r^2} (1 + \lambda' r)$$

et l'intégrale (14) devient

$$(17) \quad 2 \int e^{\frac{\lambda-\mu}{2}} (1 + \lambda' r) \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \, dt.$$

Si l'on intègre dans un hypercylindre limité par les sections droites $r = r_0$ et $r = r_1$, on est conduit à extrêmer l'intégrale définie

$$(18) \quad \int_{r_0}^{r_1} e^{\frac{\lambda-\mu}{2}} (1 + \lambda' r) \, dr,$$

où λ et μ sont les fonctions inconnues. Il est facile de constater que l'on ne retombe pas sur la formule (13).

Cette discordance provient de ce que les variations de g^{11} et g^{44} ne sont pas nulles sur la surface latérale de l'hypercylindre qui sert de champ d'intégration.

Si l'on se rapporte à la démonstration du principe d'Hamilton généralisé (20), on constate qu'elle repose sur l'identité

$$(19) \quad \delta(H\sqrt{-g}) = \sqrt{-g} \left[G_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} G \right] \delta g^{ik} + \sum_{\alpha} \frac{\partial K_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}},$$

en posant

$$(20) \quad K_{\alpha} = \left\{ \begin{matrix} i & k \\ \alpha & \end{matrix} \right\} \delta(g^{ik} \sqrt{-g}) - \left\{ \begin{matrix} i & k \\ i & \end{matrix} \right\} \delta(g^{k\alpha} \sqrt{-g}).$$

Si les δg^{ik} sont nuls sur la frontière, on voit que l'intégrale de chacun des termes $\frac{\partial K_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}$ est nulle et en extrêmant (14), on retombe sur les équations (2).

Plus généralement, il en est ainsi si l'on suppose simplement que K_{α} s'annule pour les valeurs extrêmes que peut prendre x_{α} à l'intérieur du champ d'intégration, quand on donne des valeurs constantes quelconques aux trois autres variables.

S'il n'en est pas ainsi, il faut annuler l'intégrale de

$$\delta(H\sqrt{-g}) - \sum_{\alpha} \frac{\partial K_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}$$

et non pas de $\delta(H\sqrt{-g})$.

Dans le cas du dS^2 d'Eddington, K_3 et K_4 sont identiquement nuls; K_1 s'annule aux bornes de r ; mais,

$$K_2 = e^{\frac{\lambda+\mu}{2}} \cos\theta (\delta\lambda + \delta\mu)$$

ne s'annule pas aux bornes de θ et l'on doit retrancher

$$-e^{\frac{\lambda+\mu}{2}} \sin\theta (\delta\lambda + \delta\mu)$$

de $\delta(H\sqrt{-g})$, ce qui revient à ajouter $2e^{\frac{\lambda+\mu}{2}} \sin\theta$ à $H\sqrt{-g}$. Au lieu d'extrêmer l'intégrale (18), il faut extrêmer la suivante

$$\int_{r_0}^{r_1} \left[e^{\frac{\lambda-\mu}{2}} (1 + \lambda' r) + e^{\frac{\lambda+\mu}{2}} \right] dr.$$

On obtient ainsi les équations différentielles

$$-(1 + \lambda' r) + e^{\mu} = 0, \quad 1 - r\mu' - e^{\mu} = 0,$$

qui conduisent bien à (13).

On voit qu'il ne faut pas appliquer le principe d'Hamilton sans précautions.

5. Les difficultés précédentes ne se présentent pas en coordonnées cartésiennes [39, 59].

Partons de (3), en prenant $F = 1$. Pour calculer la fonction H , remarquons qu'elle est invariante pour toute substitution orthogonale à coefficients constants. Nous pouvons en profiter pour supposer $x_1 = r$, $x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = t$ [39]. En utilisant les équations des géodésiques, on trouve

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{Bmatrix} &= \frac{\alpha'}{2\alpha}, & \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 3 & 3 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \frac{Er}{\alpha}, \\ \begin{Bmatrix} 4 & 4 \\ & 1 \end{Bmatrix} &= \frac{\Lambda'}{2\alpha}, & \begin{Bmatrix} 1 & 4 \\ & 4 \end{Bmatrix} &= \frac{\Lambda'}{2\Lambda}, \end{aligned}$$

en posant $\alpha = 1 + Er^2$. Les autres symboles sont nuls.

On en déduit

$$H = -\frac{Er}{\alpha} \left(\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{A'}{A} \right).$$

D'autre part, posons

$$\sqrt{-g} = \sqrt{A\alpha} = \beta,$$

Nous avons à extrêmer l'intégrale

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{Er^3}{\alpha} \beta' dr.$$

Cela donne, en choisissant l'unité de temps,

$$\frac{Er^3}{\alpha} = 2m, \quad \beta = 1;$$

et l'on retrouve (13).

Le procédé réussit parce que $\sum_{\alpha} \frac{\partial K_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}$, qui est invariant pour la substitution orthogonale ci-dessus, se réduit à $\frac{\partial K_1}{\partial r}$, K_1 s'annulant pour r_0 et r_1 .

Observons toutefois que, si cette méthode conduit bien au ds^2 de Schwarzschild, elle ne nous assure pas que ce ds^2 satisfait nécessairement aux équations (2), car les variations des g^{ik} ne sont pas arbitraires dans le champ d'intégration, puisqu'elles dépendent seulement de deux fonctions de r . Seule, la méthode du n° 3 nous donne cette assurance.

6. Si, dans (13), on change r en $f(r)$, on obtient le ds^2 le plus général

$$(21) \quad ds^2 = \left[1 - \frac{2m}{f(r)} \right] dt^2 - \frac{f'^2(r) dr^2}{1 - \frac{2m}{f(r)}} - f^2(r) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

On a les *coordonnées isotropiques* pour

$$\frac{r^2 f'^2}{1 - \frac{2m}{f}} = f^2;$$

d'où

$$f = \frac{(Cr + m)^2}{2Cr} \quad (C = \text{const.}).$$

Le choix de la constante C revient à choisir l'unité de r . En prenant $C = 2$, on a

$$(22) \quad ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{m}{2r}}{1 + \frac{m}{2r}} \right)^2 dt^2 - \left(1 + \frac{m}{2r} \right)^4 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

$$(23) \quad ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{m}{2r}}{1 + \frac{m}{2r}} \right)^2 dt^2 - \left(1 + \frac{m}{2r} \right)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

CHAPITRE II.

LE PROBLÈME INTÉRIEUR.

7. Énoncé du problème. — Il s'agit encore de trouver un ds^2 de la forme (1), mais obéissant, à l'intérieur d'une sphère de centre O , aux équations d'Einstein *dans la matière* et non plus dans le vide.

Le problème a été posé et résolu sous cette forme par Schwarzschild, qui supposait la sphère *fluide et homogène* (54). Il a été repris par M. Brillouin dans le cas d'une *sphère fluide composée de couches concentriques homogènes* (6), qui en a déduit, par un passage à la limite, le cas où la densité est une fonction quelconque de r . Le même cas a été traité directement par De Donder [20]. J. Haag a traité le cas plus général où l'on suppose une sphère matérielle quelconque, *la densité et les efforts intérieurs obéissant simplement à la symétrie sphérique* [32].

8. Calcul du ds^2 dans le cas général. — Plaçons-nous tout de suite à ce dernier point de vue, qui comprend tous les autres comme cas particuliers (*cf.* 14, tome II, p. 114).

Le tenseur matériel a pour composantes mixtes [18, 20]

$$(24) \quad T_i^j = \rho u_i u^j - p_i^j,$$

où ρ désigne la *densité propre*, p_i^j les composantes du tenseur des

pressions internes et u^i les composantes de la vitesse *macroscopique* généralisée :

$$u^i = \frac{dx_i}{ds}.$$

Reprenons les notations d'Eddington (n° 3).

La sphère matérielle étant au repos, on a d'abord

$$u^1 = u^2 = u^3 = 0, \quad u^4 = \frac{dt}{ds} = e^{-\frac{\lambda}{2}};$$

d'où

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0, \quad u_4 = e^{\frac{\lambda}{2}}.$$

Quant aux p_i^j , ils sont nuls si l'un au moins des indices est égal à 4. Si i et j diffèrent de 4, p_i^j représente la composante suivant l'axe Mx_i de la pression exercée sur l'élément unitaire normal à Mx_j ; en appelant Mx_i la tangente en M à la ligne le long de laquelle x_i varie seul.

Eu égard à la symétrie sphérique, la quadrique directrice des tensions au point M est de révolution autour de OM. On en conclut

$$\begin{aligned} p_i^j &= 0, & \text{si } i \neq j; \\ p_1^1 &= p, & p_2^2 = p_3^3 = q; \end{aligned}$$

p désignant la pression normale qui s'exerce sur un élément perpendiculaire à OM et q la pression normale qui s'exerce sur un élément passant par OM.

Le cas du *fluide parfait* sera obtenu pour $p = q$.

Nous supposons enfin que ρ , p , q sont fonctions de la seule variable r .

Les composantes mixtes du tenseur matériel sont, d'après (24),

$$(25) \quad \begin{aligned} T_i^j &= 0, & \text{si } i \neq j; \\ T_1^1 &= -p, & T_2^2 = T_3^3 = -q, & T_4^4 = \rho. \end{aligned}$$

Cela posé, les équations d'Einstein dans la matière sont [24, 1]

$$(26) \quad G_{ik} = -8\pi \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right).$$

Or, nous avons

$$\begin{aligned} T &= T_i^i = \rho - p - 2q; \\ T_{ij} &= 0, \quad \text{si } i \neq j; \\ T_{11} &= p e^\mu, \quad T_{22} = q r^2, \quad T_{33} = q r^2 \sin^2 \theta, \quad T_{44} = \rho e^\lambda. \end{aligned}$$

En nous reportant aux formules (10), les équations (26) s'écrivent

$$(27) \quad \begin{cases} \frac{\lambda''}{2} + \frac{\lambda'}{4} (\lambda' - \mu') - \frac{\mu'}{r} = 4\pi e^\mu (q - p - \rho), \\ \lambda' - \mu' + \frac{2}{r} = \frac{2}{r} e^\mu [1 + 4\pi r^2 (p - \rho)], \\ \frac{\lambda''}{2} + \frac{\lambda'}{4} (\lambda' - \mu') + \frac{\lambda'}{r} = 4\pi e^\mu (2q + p + \rho). \end{cases}$$

On sait, d'autre part, que la divergence du tenseur matériel est nulle, comme conséquence des équations (27) :

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{d(T_i^k \sqrt{-g})}{dx_k} \quad \lambda \left\{ \begin{matrix} i & k \\ j & \end{matrix} \right\} = 0.$$

En se reportant aux formules (9), on voit que ces équations se réduisent à la suivante, obtenue pour $i = 1$:

$$(28) \quad p' + \frac{p + \rho}{2} \lambda' + \frac{2}{r} (p - q) = 0.$$

Cette équation doit être une conséquence des équations (27).

En ajoutant et retranchant la première et la troisième équation (27), on a

$$(29) \quad \lambda'' + (\lambda' - \mu') \left(\frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} \right) = 16\pi q e^\mu,$$

$$(30) \quad \lambda' + \mu' = 8\pi r e^\mu (p + \rho).$$

La deuxième équation (27) et l'équation (30) donnent de même, par addition et soustraction,

$$(31) \quad \lambda' = \frac{e^\mu - 1}{r} + 8\pi r p e^\mu,$$

$$(32) \quad \mu' = \frac{1 - e^\mu}{r} + 8\pi r \rho e^\mu.$$

En portant dans (29), on retrouve (28). Il nous reste donc, en définitive, le système (28), (31), (32).

9. **Emploi du principe d'Hamilton.** — On retombe sur les équations générales (26) en extréman, par rapport aux $g^{\alpha\beta}$, l'intégrale quadruple

$$(33) \quad \int (H + 16\pi M) \sqrt{-g} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4,$$

où l'on a posé

$$(34) \quad M = \sqrt{T} (\sqrt{g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}} - \sqrt{T}).$$

Dans le cas actuel, la fonction H doit, bien entendu, être corrigée comme au n° 4 et l'on est ramené à extréman, par rapport à λ, μ , l'intégrale définie

$$\int \left[e^{\frac{\lambda-\mu}{2}} (1 + \lambda' r) + e^{\frac{\lambda+\mu}{2}} + 8\pi e^{\frac{\lambda+\mu}{2}} r^2 M \right] dr,$$

avec

$$M = \sqrt{T} (\sqrt{-e^{-\mu T_{11}} + e^{-\lambda T_{11}} + \dots} - \sqrt{T}),$$

les termes non écrits sous le radical étant indépendants de λ et μ .

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial \mu} &= \frac{1}{2} e^{-\mu T_{11}} = \frac{p}{2}, \\ \frac{\partial M}{\partial \lambda} &= -\frac{1}{2} e^{-\lambda T_{11}} = -\frac{q}{2}. \end{aligned}$$

Dès lors, on constate que l'équation de Lagrange relative à μ redonne (31) et l'équation relative à λ redonne (32).

Quant à l'équation (28), elle ne peut être obtenue qu'en annulant la divergence de T_{ik} et non comme conséquence du principe ci-dessus. Cela provient de ce que les variations des g^{ik} ne sont pas arbitraires, comme nous l'avons expliqué à la fin du n° 5.

Von Laue a fait un calcul analogue (39), à partir des coordonnées cartésiennes (*cf.* n° 5).

10. **Intégration des équations précédentes.** — On peut choisir arbitrairement λ et μ en fonction de r . Les équations (31) et (32) donnent p et q ; puis, (28) donne q .

Imaginons maintenant que l'on se donne ρ en fonction de r . L'équation (32) est linéaire en $e^{-\mu}$ et admet pour intégrale générale

$$(35) \quad e^{-\mu} = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{2n}{r};$$

n désignant une constante et m l'intégrale définie

$$(36) \quad m = \int_0^r 4\pi\rho r^2 dr.$$

Si l'on veut que e^μ ne s'annule pas pour $r = 0$, il faut prendre $n = 0$ et l'on a

$$(37) \quad e^\mu = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}}.$$

On voit que la seule connaissance de la densité détermine la nature de l'espace à l'intérieur de la sphère.

Quant au coefficient de dt^2 , il n'est déterminé que si l'on connaît p en fonction de r ; auquel cas l'équation (31) donne λ par une quadrature.

En éliminant λ' entre (31) et (28), on obtient

$$(38) \quad p' + \frac{p + \rho}{2r} \left(\frac{e^\mu - 1}{r} + 8\pi r p e^\mu \right) + \frac{2}{r}(p - q) = 0.$$

De cette équation, on peut tirer q si l'on connaît p .

On peut aussi imaginer que l'on se donne la relation qui existe entre p et q . L'équation (38) ramène alors le calcul de p à l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre.

En particulier, dans le cas du fluide, on a $q = p$; l'équation (38) se réduit à une équation de Riccati. Si l'on pose

$$(39) \quad (p + \rho) e^{-\frac{\mu}{2}} = z,$$

cette équation prend la forme simple

$$(40) \quad z' + 4\pi r z^2 e^{\frac{3\mu}{2}} = \rho' e^{-\frac{\mu}{2}}.$$

Ayant z , on a p par (39); puis λ par (30), qui devient, en intégrant,

$$(41) \quad \lambda + \mu = 8\pi \int z r e^{\frac{3\mu}{2}} dr.$$

Dans le cas particulier de la sphère fluide et homogène, la formule (36) devient

$$(42) \quad m = \frac{4}{3} \pi \rho r^3.$$

D'où-

$$(43) \quad e^{\mu} = \frac{1}{1 - \frac{8}{3} \pi \rho r^2}.$$

L'équation (40) donne

$$(44) \quad \frac{1}{z} = \frac{3}{4\rho} \int e^{\frac{\mu}{2}} d\mu = \frac{3}{2\rho} e^{\frac{\mu}{2}} + A \quad (A = \text{const.}).$$

Portant (43) et (44) dans (39), on a p . Enfin, (41) devient, en tenant compte de (40),

$$(45) \quad \lambda + \mu = -2 \int \frac{dz}{z} = -2 \log z + \log B \quad (B = \text{const.}).$$

D'où

$$(46) \quad e^{\lambda} = B e^{-\mu} \left(\frac{3}{2\rho} e^{\frac{\mu}{2}} + A \right)^2 = B \left(A e^{-\frac{\mu}{2}} + \frac{3}{2\rho} \right)^2,$$

11. Cas du tenseur constant. — Supposons que p, q, ρ soient des constantes.

Première solution. — L'équation (28) nous donne, en supposant $p + \rho \neq 0$,

$$\lambda' = \frac{4}{r} \cdot \frac{q - p}{\rho + p}.$$

En portant dans (31), on a

$$e^{\mu} (1 + 8\pi\rho r^2) = 1 + 4 \frac{q - p}{\rho + p}.$$

En comparant à (35), on voit qu'il faut prendre

$$p = q, \quad \rho = -3p.$$

D'où, en choisissant l'unité de temps

$$(47) \quad ds^2 = dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \alpha r^2} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2);$$

en posant

$$(48) \quad \alpha = \frac{8\pi\rho}{3}.$$

Deuxième solution. — On peut aussi satisfaire à (28) en prenant

$$-\rho = p \doteq q.$$

On a alors (43) et, d'après (30), $\lambda + \mu = 0$, en choisissant l'unité de temps. D'où

$$(49) \quad ds^2 = (1 - \alpha r^2) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \alpha r^2} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

12. Calcul des constantes d'intégration. — Ces constantes se calculent par la condition que *les coefficients du ds^2 ne subissent aucune discontinuité sur la surface de la sphère matérielle [18] et que la pression p s'y annule.*

La formule (37) nous montre d'abord que la constante m de (13), qui était restée indéterminée, est maintenant définie par la formule (36), en donnant la valeur a à la borne supérieure de l'intégrale. Ce serait la masse de la sphère matérielle si celle-ci était euclidienne. Nous l'appellerons la *pseudo-masse*.

La fonction p est déterminée par la condition de s'annuler pour $r = a$. Dans le cas de la sphère fluide, la fonction z doit prendre la valeur $z_a = \rho a \sqrt{1 - \frac{2m}{a}}$, pour $r = a$.

Enfin, la constante d'intégration de (41) est déterminée par la condition que $\lambda + \mu$ soit nul pour $r = a$.

Dans le cas particulier de la *sphère fluide et homogène*, on trouve [24]

$$(50) \quad ds^2 = \frac{1}{4} \left(3 \sqrt{1 - \frac{2m}{a}} - \sqrt{1 - \frac{2mr^2}{a^3}} \right)^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m^2 r}{a^3}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2);$$

$$(51) \quad p = \rho \frac{\sqrt{1 - \frac{2mr^2}{a^3}} - \sqrt{1 - \frac{2m}{a}}}{3 \sqrt{1 - \frac{2m}{a}} - \sqrt{1 - \frac{2mr^2}{a^3}}},$$

en posant

$$(52) \quad m = \frac{4}{3} \pi \rho a^3.$$

La réalité du ds^2 et de p exige la condition

$$(53) \quad 2m < a.$$

Pour que e^λ ne s'annule pas lorsque r varie de 0 à a et que p ne devienne pas infini, il faut et il suffit que l'on ait en outre

$$3 \sqrt{1 - \frac{2m}{a}} > 1$$

ou

$$(54) \quad m < \frac{4a}{9},$$

condition qui entraîne (53).

Dans les mêmes conditions, la pression p est toujours positive.

On voit, en définitive, qu'en réunissant la formule (50) et la formule (13), on a un ds^2 qui obéit aux équations d'Einstein dans tout l'espace, dont les coefficients sont des fonctions continues de r et qui ne présente aucune singularité si l'inégalité (54) est satisfaite.

Cette inégalité s'écrit encore

$$\rho < \frac{1}{3\pi a^2}.$$

Elle exprime que la densité ne peut pas dépasser une certaine *densité critique* [54, 20]. Si cette densité était atteinte, la pression deviendrait infinie, ce qui est physiquement impossible.

Pour le Soleil, par exemple, l'inégalité (54) est largement vérifiée (n° 19).

13. Cas de la sphère creuse. -- Soient a et b les rayons extérieur et intérieur. Supposant toujours la matière *fluide et homogène*, et la pression nulle en dehors de cette matière, nous avons, par (41) et (42),

$$(55) \quad A = -\frac{1}{2\rho} e^{\frac{\mu_a}{\rho}} = -\frac{1}{2\rho} e^{\frac{\mu_b}{\rho}}.$$

Si l'on adopte la formule (37), ceci est impossible. Les conditions aux limites ne sont compatibles que si l'on reprend l'intégrale générale (35). Les deux équations (55) déterminent alors les deux constantes n et A . En particulier,

$$n = \frac{4}{3} \pi \rho b (a^2 + ab + b^2) = m_0 \frac{b}{a-b},$$

en appelant m_0 la pseudo-masse de la sphère creuse. On a ensuite e^λ par (46), la constante B étant toujours déterminée par la condition que $\lambda + \mu$ s'annule pour $r = a$.

A l'extérieur de la sphère, c'est-à-dire pour $r > a$, on a tou-

jours (13). Mais, cette fois, il faut prendre

$$m = m_0 + n = m_0 \frac{a}{a-b}.$$

A l'intérieur de la sphère, c'est-à-dire pour $r < b$, on a

$$(56) \quad k e^\lambda = e^{-\mu} = 1 - \frac{2n}{r},$$

k désignant une constante, que nous ne pouvons plus prendre *a priori* égale à l'unité, car l'unité de temps a été choisie pour le ds^2 extérieur. Pour calculer cette constante, nous utilisons la continuité de e^λ . D'après (46) et (55), on doit avoir

$$\frac{1}{k} \left(1 - \frac{2n}{b} \right) = 1 - \frac{2m}{a};$$

d'où $k = 1$.

La formule (56) a l'inconvénient de ne plus avoir aucun sens pour $r < 2n$. Il y a une *sphère catastrophique* (n° 14). Pour l'éviter, il faut garder la formule (37) et abandonner l'homogénéité du fluide, en supposant que la loi de densité est telle que l'équation (40) admette une intégrale prenant la même valeur que $\rho e^{-\frac{\mu}{2}}$ pour $r = a$ et pour $r = b$. Dans ce cas, on a un ds^2 euclidien à l'intérieur de la sphère et cela est bien conforme à la loi de Newton [cf. 15].

CHAPITRE III.

PROPRIÉTÉS DU CHAMP DE GRAVITATION.

14. Nature de l'espace extérieur. — L'élément linéaire de l'espace extérieur est donné, d'après (13), par la formule

$$(57) \quad d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

On voit que l'espace n'est pas euclidien [24, 1, 2].

Dans un plan méridien $\varphi = \text{const.}$, le ds^2 est le même que celui de

la surface de révolution obtenue en faisant tourner une parabole de paramètre $4m$ autour de sa directrice [59, 39, 2, 14, tome II].

Toutefois, si r devient très grand, l'espace devient sensiblement euclidien et l'on peut dire que r, θ, φ représentent les coordonnées polaires ordinaires pour un observateur très éloigné de la sphère matérielle.

La distance radiale est

$$(58) \quad d = \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} = [\sqrt{r(r-2m)} + 2m \log(\sqrt{r-2m} + \sqrt{r})]_{r_0}^{r_1}.$$

Elle n'est réelle que si $r_0 > 2m$. C'est pourquoi la sphère de rayon $2m$ a été désignée sous le nom de *sphère catastrophique* [7, 8, 20]. Mais, en réalité, il faut observer que, d'après (53), cette sphère est intérieure à la sphère matérielle et la formule (58) cesse d'être applicable avant que r atteigne la valeur critique $2m$ [1, 39].

Si $\frac{m}{r_0}$ est très petit, on a asymptotiquement

$$(59) \quad d = r_1 - r_0 + m \log \frac{r_1}{r_0}.$$

Le terme correctif $m \log \frac{r_1}{r_0}$ mesure en quelque sorte l'écart dû à ce que l'espace n'est pas euclidien. Si on l'évalue pour la distance de la surface du Soleil à la Terre, on trouve 8^{km} [2], nombre très inférieur à la précision de la mesure astronomique. On ne peut donc pas espérer mettre en évidence, de cette manière, le caractère non euclidien de l'espace environnant le Soleil.

P. Painlevé a observé [49, 12] que si, dans la formule (21), on prend pour $f(r)$ une fonction quelconque dont la dérivée tende vers un pour r infini, on retombe toujours sur des coordonnées polaires euclidiennes pour des régions très éloignées. Il en a conclu qu'il était arbitraire de poser $f(r) = r$ et qu'on pouvait imaginer une infinité d'autres ds^2 conformes aux observations astronomiques.

Cette critique est, au fond, une question de mots et pourrait être faite tout aussi bien en Mécanique classique. Que faut-il entendre par rayon vecteur r ? Est-ce le rayon géodésique (n° 2), ou la distance radiale, ou une fonction asymptotique. C'est une pure affaire de convention et qui n'a rien à voir avec la nature physique de l'espace [1, 2].

Pratiquement, les coordonnées de Schwarzschild ne diffèrent pas des coordonnées polaires euclidiennes dans tout le système solaire.

Mais, il en est encore de même si l'on change, avec M. Brillouin [7], r en $r + 2m$; ou bien si l'on adopte les *coordonnées isotropiques* [24, 1] de la formule (22), ce qui revient à changer r en $r + m + \frac{m^2}{4r}$.

15. Le nombre π . — Pour faire ressortir le caractère non euclidien de l'espace de Schwarzschild, on peut, avec Eddington [24], calculer le nombre π' correspondant à cet espace, en définissant ce nombre comme le *rappor*t entre la longueur d'une circonférence de centre O et la longueur du diamètre de cette circonférence.

En réalité, nous ne pouvons pas mesurer complètement ce diamètre, à cause du rayon catastrophique $2m$. Mais, nous pouvons tourner cette difficulté, en définissant π' par la formule

$$\pi' = \frac{\pi(r_1 - r_0)}{d},$$

d étant donné par (58).

On voit d'abord que $\pi' < \pi$, puisque $d > r_1 - r_0$.

Si r_1 est très grand vis-à-vis de r_0 et si r_0 est de l'ordre de m , on a asymptotiquement

$$\frac{\pi - \pi'}{\pi} = \frac{m}{r_1} \log \frac{r_1}{m}.$$

Par exemple, pour une masse d'une tonne et un rayon de 5^m [24], on a ($n^\circ 19$)

$$\frac{m}{r_1} = \frac{3 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^{32} \cdot 5} = 1,5 \cdot 10^{-25};$$

d'où

$$\pi - \pi' = 2,7 \cdot 10^{-23}.$$

La 23^e décimale de π est seule modifiée.

16. Nature de l'espace intérieur. — Nous supposons la sphère fluide et homogène, donc la formule (50), qui nous donne

$$(60) \quad d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2mr^2}{a^3}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

La distance radiale est

$$(61) \quad R = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2mr^2}{a^3}}} = \sqrt{\frac{a^3}{2m}} \operatorname{arc} \sin \left(r \sqrt{\frac{2m}{a^3}} \right).$$

Si l'on pose

$$u = R \sqrt{\frac{2m}{a^3}},$$

on a

$$r = \sqrt{\frac{a^3}{2m}} \sin u$$

et la formule (60) devient

$$(62) \quad d\sigma^2 = \frac{a^3}{2m} [du^2 + \sin^2 u (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)].$$

Elle convient à une *hypersphère* de rayon $\sqrt{\frac{a^3}{2m}}$. Donc, *l'espace intérieur est un espace sphérique* [54, 39, 2, 14, tome II]. Dans le cas du Soleil, le rayon de cet espace est environ 500 fois le rayon du Soleil [54, 39].

Si l'on développe R suivant les puissances de r, la formule (61) s'écrit, en se bornant aux deux premiers termes,

$$(63) \quad R = r \left(1 + \frac{r^2}{a^2} \cdot \frac{m}{3a} \right).$$

Si $\frac{m}{a}$ est très petit, $\frac{R}{r}$ diffère très peu de l'unité.

Pour $r = a$, on a

$$(64) \quad R = a + \frac{m}{3}.$$

L'erreur commise en confondant R avec a est $\frac{m}{3}$, soit environ 500^m dans le cas du Soleil. Sa répercussion sur le nombre π (n° 15) est $\pi \frac{m}{3a}$, soit, pour le cas du Soleil, 2. 10⁻⁶ environ.

Si l'on combine (59) et (64), on voit que *la distance radiale depuis O jusqu'à M* est approximativement

$$(65) \quad d = r + \frac{m}{3} + m \log \frac{r}{a}.$$

Elle diffère très peu de r. Pour la distance de la Terre au centre du Soleil, l'erreur est environ de 8^{km}, 5.

17. Le temps. — Pour r infiniment grand, la formule (13) prend la forme de Minkowski. Donc, pour l'observateur très éloigné, notre trièdre de référence est un trièdre de Galilée et la variable t mesure le temps au sens ordinaire du mot.

En un lieu déterminé extérieur à la sphère matérielle, le temps propre est donné par la formule

$$(66) \quad \tau = t \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}.$$

Il est inférieur au temps cosmique.

La vitesse de la lumière, mesurée localement, est $\frac{d\sigma}{d\tau} = 1$. Elle est constante.

Si on la mesure avec les coordonnées r , θ , φ et le temps t , comme le ferait un observateur très éloigné, la vitesse radiale est

$$\frac{dr}{dt} = 1 - \frac{2m}{r}.$$

La vitesse transversale est

$$r \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}.$$

Si l'on adopte les coordonnées isotropiques, la vitesse est la même

dans toutes les directions et vaut $\frac{1 - \frac{2m}{r}}{\left(1 + \frac{2m}{r}\right)^3}$.

Mais, tout cela dépend évidemment du sens que l'on attribue à l'expression « vitesse de la lumière ».

Pratiquement, cette vitesse est la même pour tous les observateurs et indépendante de la direction du rayon lumineux.

A l'intérieur de la sphère fluide et homogène, on a des considérations analogues, mais qui ne semblent présenter qu'un intérêt purement spéculatif [54, 24, 2].

18. La loi de Newton. — On sait que, lorsque le ds^2 est très voisin d'un ds^2 de Minkowski, le champ de force gravitationnel dérive approximativement du potentiel $\Omega = \frac{1}{2} g_{11}$ [24, 1; 14, tome II].

A l'extérieur de la sphère matérielle, nous avons, en négligeant

une constante additive, $\Omega = -\frac{m}{r}$. On retrouve le *potentiel newtonien*. Si l'on choisit l'unité de masse de telle manière que la constante de la gravitation soit égale à un, on voit que la constante m des formules (13) et (50) n'est autre que la masse gravitationnelle de la sphère attractive.

A l'intérieur de la sphère fluide et homogène, on a

$$\Omega = \frac{1}{8} \left[3 \sqrt{1 - \frac{2m}{a}} - \sqrt{1 - \frac{2mr^2}{a^3}} \right]^2$$

ou, en supposant $\frac{m}{a}$ très petit et négligeant une constante additive,

$$\Omega = \frac{mr^2}{2a^3} = \frac{2}{3} \pi \rho r^2.$$

La force attractive $\frac{d\Omega}{dr} = \frac{4}{3} \pi \rho r$ est encore conforme à la loi de Newton [2].

Il ne faut pas oublier toutefois que ceci n'est *qu'une première approximation*. D'ailleurs, on s'en aperçoit nécessairement en calculant directement la *masse véritable* de la sphère attractive. Son volume est, d'après le n° 16, $2 \pi a^3 \frac{u - \sin u \cos u}{\sin^3 u}$, en posant

$$\frac{2\tilde{m}}{a} = \sin^2 u.$$

Donc, sa masse est [54]

$$m' = 2 \pi \rho a^3 \frac{u - \sin u \cos u}{\sin^3 u} = \frac{3}{2} m \frac{u - \sin u \cos u}{\sin^3 u}.$$

Ce n'est que pour $\frac{m}{a}$ infiniment petit, c'est-à-dire quand la loi de Newton devient rigoureuse, que l'on a $m' = m$. On asymptotiquement

$$\frac{m'}{m} = 1 + \frac{3}{5} \frac{m}{a},$$

ce qui donne, pour le Soleil, 1,0000127.

19. Les unités. — Les unités adoptées jusqu'à présent sont telles que la vitesse de la lumière et la constante de la gravitation soient égales à l'unité. Nous les appellerons les *unités naturelles*.

Si l'on prend pour unité de temps la seconde, l'unité de longueur vaut 300000^{km} .

Pour trouver l'unité de masse, remarquons que le symbole de dimensions de la constante de la gravitation est $M^{-1}L^3T^{-2}$. En unités C. G. S., cette constante vaut $6,65 \cdot 10^{-8}$. En passant du système naturel au système C. G. S., on doit prendre $L = 3 \cdot 10^{10}$, $T = 1$; donc

$$6,65 \cdot 10^{-8} = M^{-1} \cdot 27 \cdot 10^{30};$$

d'où

$$M = 4,06 \cdot 10^{38}.$$

Telle est la valeur de l'unité naturelle de masse en grammes.

Voyons maintenant comment s'écrit la formule (13), quand les unités sont arbitraires.

Partons des unités naturelles et supposons que les unités de longueur, de temps et de masse deviennent L , T , M fois plus petites. Si l'on désigne par des lettres accentuées les nouvelles mesures, on a

$$r' = Lr, \quad dt' = T dt, \quad ds' = L ds, \quad m' = Mm;$$

d'où

$$ds'^2 = \frac{L^2}{T^2} \left(1 - \frac{2m'}{r'} \frac{L}{M} \right) dt'^2 - \frac{dr'^2}{1 - \frac{2m'}{r'} \frac{L}{M}} - r'^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

D'autre part, si V et f désignent les nouvelles mesures de la vitesse de la lumière et de la constante de la gravitation, on a

$$f = M^{-1}L^3T^{-2}, \quad V = LT^{-1};$$

d'où

$$\frac{L}{M} = \frac{f}{V^2}, \quad \frac{L}{T} = V.$$

En portant dans le formule ci-dessus et supprimant les accents, il vient (14)

$$(67) \quad ds^2 = V^2 dt^2 \left(1 - \frac{2fm}{V^2 r} \right) - \frac{dr^2}{1 - \frac{2fm}{V^2 r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Nous garderons, par la suite, les unités naturelles, qui donnent des formules plus simples.

Évaluons, dans ce système, la valeur de m pour le Soleil :

$$m = \frac{2 \cdot 10^{33}}{4,06 \cdot 10^{38}} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} \text{ environ.}$$

Si l'on observe que cette quantité est homogène à une lon-

gueur ⁽¹⁾, on peut obtenir sa valeur en kilomètres, en multipliant le nombre précédent par $3 \cdot 10^5$. On obtient approximativement $1^{km},47$.

CHAPITRE IV.

LE PÉRIHÉLIE DE MERCURE.

20. **Mouvement d'une masse très petite dans le champ de Schwarzschild.** — On sait que la ligne d'univers correspondant à un tel mouvement est une géodésique.

On peut calculer les géodésiques du ds^2 de Schwarzschild, en partant des équations (8). Mais, il est plus simple d'écrire les équations de Lagrange relatives à l'intégrale (7), car on obtient immédiatement des intégrales premières [14, 39].

On a d'abord

$$r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{ds} = \text{const.}$$

On peut toujours supposer qu'on a choisi le trièdre de référence de telle manière que $\frac{d\varphi}{dt}$ soit nul au temps zéro. Dans ce cas, la constante ci-dessus est nulle, φ est constant, *la trajectoire est plane*.

L'équation de Lagrange relative à θ nous donne maintenant

$$(68) \quad r^2 \frac{d\theta}{ds} = C.$$

Puis, celle qui est relative à t nous donne, en tenant compte de (68),

$$(69) \quad \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{dt}{d\theta} = A r^2 \quad (A = \text{const.}).$$

On a enfin l'équation (13), qui se réduit ici à

$$(70) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 d\theta^2.$$

(1) La longueur $2m$ est appelée quelquefois le *rayon gravitationnel*.

Pour avoir l'équation de la trajectoire, nous éliminons dt et ds entre (68), (69) et (70). En posant $\frac{1}{r} = u$, on obtient

$$(71) \quad \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = A^2 - \frac{1}{2}(1 - 2mu) \left(\frac{1}{C^2} + u^2\right).$$

En dérivant par rapport à θ , on en déduit

$$(72) \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{m}{C^2} + 3mu^2.$$

Avec la loi de Newton, on obtiendrait, au second membre de (71), un trinôme du second degré en u . La loi d'Einstein se traduit donc par la présence du terme $2mu^3$ dans (71), ou $3mu^2$ dans (72). L'équation (71) peut être intégrée par les fonctions elliptiques et l'on peut étudier toutes les formes que peuvent affecter les courbes intégrales [22, 36, 42, 30]. Mais, c'est là un exercice purement spéculatif. Le principal intérêt de la question réside, en effet, dans son application au *mouvement des planètes*. Comme la loi de Newton est très approximativement d'accord avec ce mouvement, on sait à l'avance que *l'effet Einstein est extrêmement petit* et cela permet de le calculer facilement d'une manière approchée.

Bien des méthodes ont été employées à cet effet. Voici l'une des plus simples (1).

Si l'on néglige, dans (72), le terme correctif $3mu^2$, on a *l'orbite képlérienne*

$$(73) \quad u = \frac{1 + e \cos \theta}{p}, \quad \frac{m}{C^2} = \frac{1}{p}.$$

En remplaçant u par cette valeur approchée dans le terme correctif, on obtient l'équation

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{p} + \frac{3m}{p^2} (1 + 2e \cos \theta + e^2 \cos^2 \theta),$$

qui admet pour intégrale particulière

$$(74) \quad u = \frac{1 + e' \cos \theta}{p'} + \frac{3me'}{p'^2} \sin \theta \left(\theta + \frac{e}{3} \sin \theta \right),$$

(1) Nous en verrons une autre, également simple, au n° 23.

e' et p' désignant des constantes dont il est inutile d'écrire l'expression, car les rapports $\frac{e'}{e}$ et $\frac{p'}{p}$ diffèrent de l'unité par des quantités de l'ordre de $\frac{m}{p}$.

L'équation (74) est l'équation approchée de la trajectoire.

Si θ n'est pas très grand, le terme correctif est de l'ordre de $\frac{m}{p^2}$. Son rapport au terme principal est de l'ordre de $\frac{m}{p}$, ce qui est très petit (1), conformément à nos prévisions.

21. Avance du périhélie. — On appelle *périhélie* d'une planète le point de l'orbite le plus rapproché du Soleil. Son angle polaire est obtenu en annulant la dérivée $\frac{du}{d\theta}$ (2) :

$$-\sin \theta + \frac{3m}{p'} \left(\theta \cos \theta + \sin \theta + \frac{2e}{3} \sin \theta \cos \theta \right) = 0.$$

On a d'abord la solution $\theta = 0$. Le passage suivant a lieu pour $\theta = 2\pi + \alpha$, α étant de l'ordre de $\frac{m}{p}$. En négligeant les quantités du second ordre, on a immédiatement

$$(75) \quad \alpha = \frac{3m}{p} 2\pi.$$

On voit que la planète fait un peu plus d'un tour avant de repasser au périhélie. C'est ce qu'on exprime en disant que celui-ci avance. *L'avance par révolution est une fraction de circonférence égale à $\frac{3m}{p}$.*

Si a désigne le demi-grand axe de l'orbite, on a $p = a(1 - e^2)$. Donc,

$$(76) \quad \alpha = 2\pi \frac{3m}{a(1 - e^2)}.$$

(1) Pour Mercure, planète la plus rapprochée du Soleil, on a approximativement

$$\frac{m}{p} = \frac{1,47}{0,387 \cdot 15 \cdot 10^1} = 2,5 \cdot 10^{-8}.$$

(2) Il est invariant pour tout changement de variable effectué sur r . Donc, *l'avance du périhélie est indépendante de l'interprétation plus ou moins arbitraire que l'on peut donner au rayon vecteur* (n° 14).

Si v désigne la vitesse de la planète au périhélie, on a, en remarquant que p est le rayon de courbure en ce point,

$$\frac{m(1+e)^2}{p^2} = \frac{v^2}{p}.$$

D'où

$$(77) \quad \alpha = \frac{6\pi v^2}{(1+e)^2}.$$

On voit que l'avance du périhélie est un effet du second ordre par rapport au quotient de la vitesse de la planète par la vitesse de la lumière.

L'avance séculaire est

$$\alpha_s = \frac{36525}{T} \alpha,$$

T désignant la durée de révolution en jours moyens. Si l'on évalue α , en secondes, on a la formule

$$(78) \quad \alpha_s = \frac{142009200000m}{T\alpha(1-e^2)}.$$

D'après la troisième loi de Kepler, on voit que l'avance séculaire d'une planète est inversement proportionnelle à a^2 ou à T^3 . Cette avance est donc maximum pour la planète la plus rapprochée du Soleil, c'est-à-dire pour Mercure.

En remplaçant m par 1,47 (n° 19) et a par sa valeur en kilomètres, on trouve les valeurs suivantes [14] :

Mercure.	Vénus.	Terre.	Mars.
42",9	8",62	3",83	1",35

Le même calcul peut être fait pour les satellites d'une planète, en remplaçant m par la masse de cette planète, ce qui revient à multiplier (78) par le rapport de cette masse à celle du Soleil. On trouve ainsi que les avances séculaires des périjoves des satellites V, I, II, III, IV de Jupiter sont respectivement égales à 37'35", 4'30", 1'25", 26"6".

Parmi tous ces résultats numériques, l'avance du périhélie de Mercure est seule susceptible d'être soumise avec une précision suffisante au contrôle des observations astronomiques. Des travaux de Newcomb, il résulte que l'avance non expliquée par la théorie de

Newton (1) est de 43". Elle concorde donc admirablement avec l'effet Einstein.

Toutefois, il ne faut pas s'exagérer l'importance de cette coïncidence. Le nombre 43" donné par Newcomb est subordonné à la connaissance des diverses constantes du système solaire et, comme tel, est susceptible d'être légèrement modifié par une révision des calculs astronomiques ayant servi à les évaluer.

Ajoutons que, toujours d'après Newcomb, Mars possède une avance de 8", qui est nettement supérieure à l'effet Einstein. De même, le nœud de Vénus comporte une avance de 10", inexpliquée par la théorie de la relativité.

On trouvera une étude critique et détaillée de toutes ces questions dans l'Ouvrage déjà souvent cité de Jean Chazy [14]. Voir aussi Esclangon [27].

Malgré les réserves qui viennent d'être faites, le périhélie de Mercure peut être considéré comme ayant fourni une des meilleures preuves en faveur de la théorie d'Einstein.

22. Durée d'une révolution. — En éliminant $d\theta$ et ds entre (68), (69) et (70), on obtient t en fonction de r par une quadrature :

$$t = \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{1}{A^2 C^2} + \frac{2m}{r A^2 C^2} - \frac{1}{A^2 r^2} + \frac{2m}{A^2 r^3}}}$$

Soient α et β les distances périhélie et aphélie. La durée de *révolution anomalistique* T [14] s'obtient en intégrant entre α et β et multipliant par 2. Si l'on appelle γ la troisième racine du radical, on peut écrire, au second ordre près en $\frac{m}{r}$,

$$T = 2 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\left(1 + \frac{2m}{r}\right) r dr}{\sqrt{\lambda \left(1 - \frac{\gamma}{r}\right) (r - \alpha) (\beta - r)}}$$

(1) L'avance totale effective est d'environ 575". Mais, la plus grande partie, soit environ 532", est due aux perturbations des autres planètes. Ces perturbations peuvent évidemment être calculées par la théorie de Newton, car l'effet Einstein ne les modifierait que de quantités extrêmement petites [9, 10].

en posant

$$\lambda = \frac{1}{A^2 C^2} - 1.$$

D'autre part, on a

$$1 = \frac{2m}{\alpha} + \frac{2m}{\beta} + \frac{2m}{\gamma}$$

et l'on voit que γ est, par rapport à α et β , un infiniment petit équivalent à $2m$. Donc, au second ordre près, on peut écrire

$$T = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\left(1 + \frac{3m}{r}\right) r dr}{\sqrt{(r-\alpha)(\beta-r)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} (a + 3m) = \frac{2\pi a}{\sqrt{\lambda}} \left(1 + \frac{3m}{a}\right),$$

en posant $\alpha + \beta = 2a$.

Il nous reste à calculer λ . On a

$$\alpha + \beta + \gamma = 2m + \frac{2m}{\lambda} = 2a + \gamma.$$

Comme γ équivaut à $2m$, on voit que λ équivaut à $\frac{m}{a}$. Donc, au second ordre près, on a

$$(79) \quad T = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{m}} \left(1 + \frac{3m}{a}\right) = T_1 \left(1 + \frac{3m}{a}\right),$$

en appelant T_1 la durée de révolution de l'orbite képlérienne admettant $2a$ pour grand axe [14, §5].

On peut aussi considérer le temps T' qui s'écoule pendant que θ augmente de 2π . On l'obtient en retranchant de T le temps mis par la planète pour parcourir l'angle α , soit

$$\frac{\alpha T_1 r^2}{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}} = T_1 \frac{3m}{a} \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+e \cos \theta)^2}.$$

D'où [14]

$$(80) \quad T' = T_1 \left\{ 1 + \frac{3m}{a} \left[1 - \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+e \cos \theta)^2} \right] \right\}.$$

Au lieu d'évaluer la durée du parcours de l'angle α au moyen de la vitesse angulaire exacte, on peut l'évaluer par le moyen mouvement $\frac{2\pi}{T}$. On obtient alors la durée de révolution sidérale [14, §5]

$$(81) \quad T'' = T_1 \left(1 - \frac{3m}{a} \frac{e^2}{1-e^2} \right).$$

On peut enfin comparer T et T' à la durée de révolution T_2 de l'orbite keplérienne osculatrice à un instant quelconque. Les formules sont plus compliquées [14]. Si l'on néglige le carré de l'excentricité, elles se simplifient. On a, par exemple [14],

$$(82) \quad T'' = T_2 \left(1 + \frac{3m}{a} 2e \cos u \right),$$

u désignant l'anomalie excentrique à l'instant initial.

En prenant $u = 0$, on trouve que l'effet Einstein au bout d'un siècle a les valeurs suivantes, pour Mercure, Vénus, la Terre et Mars [14] :

$$98^s, 4; \quad 1^s, 8; \quad 3^s, 2; \quad 13^s, 3.$$

On peut dire aussi que $\frac{\Delta T}{T}$ est de l'ordre de $\frac{6me}{a}$. D'après la troisième loi de Kepler, une telle correction équivaut à une correction du demi-grand axe $\Delta a = 4me$, ce qui donne $1200^m, 40^m$ et 100^m pour Mercure, Vénus et la Terre [14].

Si l'on adopte la formule (81), l'effet Einstein est encore plus faible.

On en conclut qu'il est actuellement *inaccessible à l'observation* [14, §6].

23. Explications extra-relativistes de l'avance du périhélie de Mercure. — Depuis longtemps, on a cherché à expliquer l'avance du périhélie de Mercure, en corrigeant la loi de Newton [5, 14].

Hall a proposé une attraction inversement proportionnelle à r^N , l'exposant N étant voisin de 2. L'avance du périhélie est alors approximativement $\pi(N - 2)$. Pour corriger le périhélie de Mercure, il faut prendre $N = 2,0000001574$, ce qui donne, pour Mercure, Vénus, la Terre et Mars, les avances séculaires [14]

$$2'', 34; \quad 16'', 58; \quad 10'', 20; \quad 5'', 42.$$

Eu égard à la faible excentricité des orbites de Vénus et de la Terre, qui rend peu précise la détermination du périhélie de ces planètes, on peut dire que l'accord avec l'observation est suffisant. De même, la loi de Hall explique en partie l'avance du nœud de Vénus. Mais, elle est *en désaccord avec la théorie de la Lune* et doit donc être rejetée, indépendamment de son caractère artificiel [14].

On peut imaginer d'autres lois.

Ajoutons à l'attraction newtonienne $-\frac{m}{r^2}$ les deux forces perturbatrices suivantes [14, 34] :

1° Une force tangentielle

$$F_1 = \frac{am}{r^2} v \frac{dr}{dt};$$

2° Une force centrale

$$F_2 = -\frac{m}{r^2} \left[b v^2 + c \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + g \frac{m}{r} \right],$$

où a, b, c, g désignent des fonctions quelconques de r , de l'ordre de l'unité ⁽¹⁾.

En appliquant le théorème du moment cinétique et posant

$$\int a \, du = h,$$

on trouve d'abord

$$(83) \quad r^2 \frac{d\theta}{dt} = k e^{-mh} \quad (k = \text{const.}).$$

En appliquant le théorème de la force vive, posant $v^2 = \omega$ et tenant compte de (83), on trouve ensuite

$$\frac{d\omega}{du} = 2m \left[1 + (b - a + c)\omega - ck^2 u^2 e^{-2mh} + gmu \right].$$

Or, d'après (83), on peut écrire

$$\omega = k^2 e^{-2mh} (u'^2 + u^2),$$

en désignant par des accents les dérivées par rapport à θ . Portant dans l'équation précédente, il vient, en posant $k^2 = mp$,

$$(84) \quad u'' + u = m(b + c)u'^2 + mbu^2 + e^{2mh} \frac{1 + gmu}{p}.$$

On pourrait intégrer approximativement cette équation comme l'équation (72). Nous allons employer une autre méthode, qui est la méthode de *variation des constantes*, employée en Mécanique céleste.

(1) Elles sont homogènes à des nombres, grâce au choix des unités (n° 19).

Pour $m = 0$, l'intégrale générale est

$$(85) \quad u = \frac{1}{p} + A \cos(\theta - z),$$

A et z désignant des constantes. Supposons maintenant m très petit et considérons A et z comme des fonctions inconnues, en les assujettissant à vérifier l'équation

$$(86) \quad A' \cos(\theta - z) + A z' \sin(\theta - z) = 0,$$

de telle sorte que

$$(87) \quad u' = -A \sin(\theta - z).$$

L'équation (84) devient

$$(88) \quad -A' \sin(\theta - z) + A z' \cos(\theta - z) = f(u, u'),$$

en appelant $f(u, u')$ le second membre de 84 diminué de $\frac{1}{p}$.

De (86) et (88), on tire

$$z' = \frac{f(u, u') \cos(\theta - z)}{A}.$$

Le périhélie est donné, d'après (87), par $\theta - z = 2k\pi$. L'avance par tour est donc

$$\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{f(u, u') \cos(\theta - z)}{A} d\theta$$

ou, au second ordre près,

$$(89) \quad \alpha = \frac{1}{A} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{1}{p} + A \cos \theta, -A \sin \theta\right) \cos \theta d\theta.$$

Si l'on développe f suivant les puissances croissantes de u , en négligeant le second ordre en mu ou gu , il reste [14, 34]

$$(90) \quad \alpha = (2a + g + 2b) \frac{\pi m}{p},$$

où l'on a supposé a, b, g réduits à leurs termes constants.

En comparant à la formule (75), on voit qu'il suffit de prendre.

$$(91) \quad 2a + g + 2b = 6$$

pour retomber exactement sur la même avance du périhélie que par la loi d'Einstein.

D'ailleurs, la loi de gravitation d'Einstein équivaut à prendre

$$(92) \quad a = \frac{2}{1-2mu}, \quad b = 2, \quad c = -2 - \frac{1}{1-2mu}, \quad g = -2.$$

Cela résulte immédiatement de la comparaison des équations (83) et (84) avec l'équation (69) et l'équation (72) où l'on remplace $\frac{1}{C^2}$ par sa valeur tirée de (71) ⁽¹⁾.

En faisant $u = 0$, on voit que la condition (91) est bien vérifiée ⁽²⁾.

Pour $b = 3$, $a = c = g = 0$, on obtient une force correctrice proposée par Gaston Bertrand [3]. Pour $a = b = \frac{3}{2}$, $c = g = 0$, on obtient la correction de Lecornu [40]. Pour $b = 2$, $c = -3$, $a = g = 0$, on obtient la loi de Gauss [14], d'origine électrodynamique, qui ne donne que les $\frac{2}{3}$ de l'avance relativiste. La loi de Weber [14] correspond, au second ordre près en $\frac{m}{r}$, à $a = 0$, $b = 2$, $c = -3$, $g = -2$; elle ne donne que le tiers de l'avance d'Einstein. La loi de Riemann [4, 14] correspond à $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$, $g = -2$; elle donne les $\frac{2}{3}$ de l'effet Einstein.

Chazy [14] a discuté minutieusement les nombreuses explications proposées pour l'avance du périhélie de Mercure et leurs diverses répercussions astronomiques. Il a conclu que la relativité est l'une des meilleures. En outre, elle a le grand avantage, contrairement aux autres explications, d'être une doctrine tout à fait générale et de ne pas avoir été imaginée spécialement pour les besoins de la cause.

⁽¹⁾ Voir aussi une démonstration par les coordonnées cartésiennes dans [14].

⁽²⁾ Si, dans la formule (13), on change, au dénominateur de dr^2 , m en λm , λ désignant une constante, on trouve que les formules (92) subsistent, à condition de multiplier b , c , g par λ , ainsi que m au dénominateur de c . Le premier membre de (91) est alors remplacé par $4 + 2\lambda$. C'est pourquoi l'on dit quelquefois que l'avance du périhélie est due, pour les deux tiers au coefficient de dt^2 et pour le tiers au coefficient de dr^2 [14].

CHAPITRE V.

LA DÉVIATION DE LA LUMIÈRE ET LE DÉPLACEMENT DES RAJES.

24. **Courbure des rayons lumineux.** — Cherchons la trajectoire d'un rayon lumineux dans le champ de Schwarzschild (1). Il suffit, dans les équations du n° 20, de supposer $ds = 0$. D'après (68), cela revient à annuler $\frac{1}{C}$ dans (72), ce qui donne

$$(93) \quad u'' + u = 3mu^2.$$

Soit, d'une manière générale, une équation de la forme

$$(94) \quad u'' + u = f(u),$$

la fonction $f(u)$ étant très petite par rapport à u . En appliquant la méthode de la variation des constantes (n° 23), on obtient

$$(95) \quad u = \frac{\cos(\theta - z)}{R},$$

R et z désignant deux fonctions de θ définies par

$$(96) \quad z' = R \cos \theta f\left(\frac{\cos \theta}{R}\right),$$

$$(97) \quad \frac{R'}{R} = z' \operatorname{tang}(\theta - z).$$

Cherchons l'angle polaire α de la tangente à la courbe. On a

$$-\frac{r'}{r} = \frac{u'}{u} = (z' - 1) \operatorname{tang}(\theta - z) - \frac{R'}{R} = -\operatorname{tang}(\theta - z).$$

L'angle V que fait le rayon vecteur avec la tangente vaut donc

$$\frac{\pi}{2} + z - \theta$$

(1) On peut aussi déterminer cette trajectoire en utilisant la vitesse de la lumière et l'indice de réfraction correspondant [24, 1].

et l'on a

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + z.$$

Autrement dit, l'angle dont a tourné la tangente depuis le point A le plus rapproché de O est donné par la formule

$$(98) \quad z = \int_0^\theta R \cos t f\left(\frac{\cos t}{R}\right) dt.$$

Pour $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, on a les directions asymptotiques et l'angle des asymptotes est

$$(99) \quad \lambda = z \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cos t f\left(\frac{\cos t}{R}\right) dt.$$

Dans le cas particulier actuel, on a

$$(100) \quad z = \frac{3m}{R} \int_0^\theta \cos^3 t dt = \frac{3m}{R} \sin \theta \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{3}\right),$$

$$(101) \quad \lambda = \frac{4m}{R}.$$

Si l'on suppose le rayon lumineux issu d'un astre infiniment éloigné et atteignant un observateur à l'infini sur l'autre branche, on voit que la direction apparente de l'astre, pour ledit observateur, est déviée de l'angle λ par rapport à sa direction réelle. Cet angle constitue ce qu'on appelle la *déviatio*n du rayon lumineux.

Si, au lieu d'être à l'infini, l'observateur a pour angle polaire $-\frac{\pi}{2} + \varphi$, la déviation est inférieure à λ d'un angle

$$(102) \quad \varepsilon = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2} + \varphi} R \cos t f\left(\frac{\cos t}{R}\right) dt,$$

soit, dans le cas actuel,

$$(103) \quad \varepsilon = \frac{3m}{R} \left(\frac{2}{3} - \cos \varphi + \frac{\cos^3 \varphi}{3}\right).$$

Si l'angle φ est très petit, on a asymptotiquement

$$\varepsilon = \frac{3m}{4R} \varphi^3;$$

d'où l'erreur relative (*cf.* 14, p. 245)

$$\frac{\varepsilon}{\lambda} = \frac{3}{16} \varphi^4 = \frac{3}{16} \frac{R^4}{r^4}.$$

Dans le cas d'un rayon tangent au Soleil et d'un observateur terrestre, $\frac{\varepsilon}{\lambda} < 10^{-10}$. Quant à λ , sa valeur est de $1''{,}74$.

25. Einstein avait pensé, en 1911, que les rayons lumineux pouvaient être tout simplement *soumis à l'attraction newtonienne*.

Calculons la déviation dans cette hypothèse. Le rayon lumineux est alors une branche d'hyperbole. Son équation polaire est de la forme

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \theta}{p},$$

avec

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{mp}.$$

En écrivant que la vitesse est égale à un , on trouve

$$e^2 + 2e \cos \theta + 1 = \frac{p}{m} = \frac{R(e+1)}{m},$$

en appelant R la distance périhélie. Comme e est très grand, on a sensiblement

$$e^2 = \frac{eR}{m} \quad \text{ou} \quad e = \frac{R}{m}.$$

D'autre part, avec les notations du n° 24, on a

$$\sin \lambda = \frac{1}{e}.$$

La déviation 2λ est donc égale à $\frac{2m}{R}$, soit *la moitié de la déviation précédemment calculée*.

• 26. **Vérification expérimentale.** — Supposons que l'on photographie une certaine région du ciel, éloignée du Soleil. Les étoiles de cette région présentent une certaine configuration F . Photographions une seconde fois la même région, en supposant que son centre soit

occupé par le Soleil; c'est possible pendant une éclipse. Chaque image subit une déviation dans le sens radial, proportionnelle à la déviation angulaire D subie par le rayon lumineux qui la forme. Il s'ensuit que la nouvelle configuration F' présente, par rapport à F , une sorte de dilatation émanant du centre O de l'image solaire. Si la loi d'Einstein est exacte, cette dilatation doit être *inversement proportionnelle à la distance de l'étoile au point O* .

Deux éclipses de Soleil ont eu lieu depuis la naissance de la théorie d'Einstein : le 29 mai 1919 et le 21 septembre 1922. Toutes deux ont été mises à profit pour tenter la vérification du phénomène.

La première eut un succès mondial [24]. Elle mit nettement en évidence la déviation des étoiles situées dans le voisinage du disque solaire et, en admettant la proportionnalité ci-dessus, on conclut de la moyenne de toutes les déviations mesurées que la déviation d'un rayon tangent au Soleil devait être de $1'',70$. Or, la déviation théorique d'Einstein est $1'',74$.

Ultérieurement, certains astronomes, après avoir pris connaissance du détail des expériences, émirent des réserves [14, 27].

L'éclipse de 1922 fit beaucoup moins parler d'elle, les esprits s'étant calmés dans l'intervalle. Au surplus, elle eut lieu dans de moins bonnes conditions. Ses résultats furent encore plus discutés que les premiers [14, 28] et *l'on ne peut actuellement tirer aucune conclusion précise*. Il y a, à coup sûr, une déviation. Mais elle n'obéit qu'assez vaguement à la loi d'Einstein.

27. Le déplacement des raies. — Considérons un atome d'un corps déterminé. Le principe général de relativité conduit à postuler que *l'intervalle* correspondant à une vibration de cet atome est un *invariant* [57, 24, 1; 14, tome II]. Dès lors, si deux atomes identiques A et A' sont placés, dans le champ de Schwarzschild, aux distances r et r' du centre attractif, les périodes T et T' de ces deux atomes, *évaluées en temps cosmique*, doivent vérifier la relation

$$\frac{T}{T'} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2m}{r'}}}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} = 1 + m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right).$$

Les longueurs d'onde sont dans le même rapport et, par conséquent,

les raies des deux atomes n'occupent pas exactement la même position dans le spectre. Si A est placé sur le Soleil et A' sur la Terre, le rapport $\frac{T}{T'}$ vaut 1,00000212; les raies de A doivent être *déplacées vers le rouge*, par rapport aux raies de A', d'une quantité facile à évaluer.

La vérification expérimentale a été faite par plusieurs physiciens, entre autres par Buisson et Fabry [29, 11]. Elle a été considérée comme excellente par les uns [1], comme tout à fait sujette à caution par les autres [16, §7. 27, 24]. Le phénomène est d'ailleurs extrêmement complexe, parce que de nombreuses causes peuvent y intervenir.

CHAPITRE VI.

LES UNIVERS COURBES.

28. Introduction de la constante cosmique. — Supposons les étoiles réparties uniformément dans l'espace comme les molécules d'un gaz. Si nous envisageons leur ensemble du point de vue *cosmique* ou *ultra-macroscopique*, nous pouvons l'assimiler à un fluide au repos, de densité constante ρ et de pression nulle [1; 14, tome II]. Admettons enfin que cet ensemble possède la symétrie sphérique autour d'un certain point O, que nous appellerons le *pôle*. Nous retombons sur le problème du n° 11 et nous voyons que la nullité de p entraîne celle de ρ .

Cette incompatibilité a conduit Einstein [26] à modifier sa loi fondamentale, en ajoutant $-\varepsilon g_{ik}$ au premier membre de (26), ε désignant une constante positive qu'on a appelée la *constante cosmique*. Il revient au même [33] d'ajouter $\frac{\varepsilon}{8\pi} g_i^i$ à T_i^i , ce qui équivaut, dans le cas du problème intérieur de Schwarzschild, à ajouter $\frac{\varepsilon}{8\pi}$ à ρ et à retrancher $\frac{\varepsilon}{8\pi}$ de p et de q .

29. Les univers d'Einstein et de de Sitter. — Revenons, dès lors, au n° 11, en y transportant cette modification.

La première solution nous donne

$$\rho + \frac{\varepsilon}{8\pi} = \frac{3\varepsilon}{8\pi}$$

ou

$$(104) \quad \varepsilon = 4\pi\rho;$$

puis $\alpha = \varepsilon$.

Nous avons donc le ds^2 (47), où la constante α doit être remplacée par ε . L'univers correspondant porte le nom d'*univers courbe d'Einstein*.

Quant à la deuxième solution, elle nous donne $\rho = 0$ et $\alpha = \frac{\varepsilon}{3}$. D'où le ds^2 (49), en remplaçant α par $\frac{\varepsilon}{3}$. L'univers correspondant est, l'*univers de de Sitter*.

Ces univers ⁽¹⁾ conviennent pour les espaces interstellaires, très éloignés de toute masse gravitationnelle particulière; le repère étant un trièdre de Galilée, d'origine O. Ils remplacent l'univers de Minkowski.

30. L'espace sphérique (cf. 14, tome II). — Posons, comme au n° 16,

$$(105) \quad r = R \sin u, \quad R = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

L'élément linéaire de l'espace prend la forme

$$(106) \quad d\sigma^2 = R^2 [du^2 + \sin^2 u (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)];$$

Cet espace peut être considéré comme une hypersphère de rayon R ⁽²⁾ dans l'espace euclidien à 4 dimensions. Il suffit, en effet, de poser

$$(107) \quad \begin{cases} x_1 = R \cos u, \\ x_2 = R \sin u \cos \theta, \\ x_3 = R \sin u \sin \theta \cos \varphi, \\ x_4 = R \sin u \sin \theta \sin \varphi, \end{cases}$$

⁽¹⁾ Bien entendu, il faut choisir l'un d'eux et nous n'avons pas la prétention de faire ce choix.

⁽²⁾ La constante cosmique étant donnée, le rayon de l'espace de de Sitter est $\sqrt{3}$ fois plus grand que le rayon de l'espace d'Einstein.

pour que $d\sigma^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$ devienne identique à (106).

Le point O, que nous avons appelé pôle et qui est caractérisé par $r = 0$, donc $u = 0$, a pour coordonnées hypercartésiennes $(R, 0, 0, 0)$. C'est un point quelconque de l'hypersphère; il peut donc être choisi arbitrairement dans notre espace sphérique; et cela est fort heureux, car, au début du n° 28, nous aurions été fort embarrassés pour fixer sa position.

Les géodésiques de (106) sont les hyper-grands cercles de l'hypersphère. L'une quelconque d'entre elles peut être définie, grâce à un choix de coordonnées convenable, par les équations $\varphi = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$ Imaginons un mobile M issu du point O et décrivant cette géodésique, c'est-à-dire une ligne droite quelconque Oλ. L'angle u croît depuis zéro et le chemin parcouru est Ru . Lorsque ce chemin atteint la valeur $R\frac{\pi}{2}$, r atteint son maximum R; M se trouve alors sur l'équateur du pôle O. Le mobile continuant à marcher, r diminue. Quand le chemin parcouru atteint la valeur $R\pi$, r est nul et M se trouve au point O' diamétralement opposé à O sur l'hypersphère, point que nous appellerons l'antipôle. Puis, M repasse à l'équateur, et au bout du chemin total $2R\pi$, revient en O. Les mêmes phases se reproduisent ensuite indéfiniment. On dit, pour cette raison, que l'espace sphérique est un *espace fini et fermé*.

Si le point O est le Soleil et le point M une onde lumineuse issue de cet astre, on voit que cette onde, qui se déplace avec la vitesse cosmique $R\frac{du}{dt} = 1$, finit par revenir au Soleil, au bout d'un temps $t = 2R\pi$. Au temps $t = R\pi$, elle est d'ailleurs passée en O', et comme il en est ainsi de tous les rayons lumineux issus de O, un observateur qui reçoit l'un de ces rayons ne peut dire s'il provient directement du Soleil ou de l'antisoileil.

Le volume de l'espace est $2\pi^2 R^3$.

Dans l'hypothèse d'Einstein, sa masse, c'est-à-dire la masse totale de tous les astres, est $2\pi^2 R^3 \rho = \frac{\pi R}{2}$. Si l'on admet, avec Kapteyn, que la masse contenue dans 1000 parsec-cubes (1) est 80 fois celle du Soleil, on trouve que R est de l'ordre de 10^{20} kilomètres ou de 10^8 années de lumière [1].

(1) Le parsec est la distance à laquelle la parallaxe de l'orbite terrestre est de 1", soit environ $3 \cdot 10^{13}$ kilomètres ou 3,2 années de lumière.

31. **Le problème de Schwarzschild avec la constante cosmique.** — Il suffit de reprendre les résultats du Chapitre III, en y faisant les modifications de ρ et de p signalées au n° 28.

Pour le *problème extérieur*, on doit prendre $\rho = -p = \frac{\varepsilon}{8\pi}$. Les formules (35) et (36) donnent $e^{-\mu}$. Puis, (30) donne $\lambda = -\mu$, en choisissant l'unité de temps. D'où [46, 47, 2, 12]

$$(108) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\varepsilon r^2}{3}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r} - \frac{\varepsilon r^2}{3}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Pour $\varepsilon = 0$, on retrouve bien (13).

Supposons, avec G. Darmois [17], que le ds^2 (108) prolonge (47), la sphère limite étant définie par $r = a$. La condition de raccordement nous oblige à prendre $m = \frac{R}{3} \sin^3 \frac{\alpha}{R}$ et à diviser le coefficient de dt^2 par la constante $\cos^2 \frac{\alpha}{R}$.

32. Voyons maintenant les répercussions de la constante cosmique sur les problèmes étudiés aux Chapitres IV et V.

La modification subie par (71) revient à augmenter m de $\frac{\varepsilon}{6u^3}$; donc, le second membre de cette équation est augmenté de $\frac{\varepsilon}{3C^2 u^2} + \frac{\varepsilon}{3}$ et le second membre de (72) est augmenté de $-\frac{\varepsilon}{3C^2 u^3} = -\frac{\varepsilon}{3pmu^3}$. La formule (89) nous apprend maintenant que α est augmenté de

$$\Delta\alpha = -\frac{\varepsilon p^3}{3me} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta d\theta}{(1 + e \cos\theta)^3} = \frac{\varepsilon p^3 \pi (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}}}{m} = \frac{\pi \varepsilon a^3}{m} \sqrt{1 - e^2}$$

ou [13]

$$(109) \quad \Delta\alpha = \frac{\varepsilon T^2 \sqrt{1 - e^2}}{4\pi}.$$

L'avance séculaire est proportionnelle à la durée de révolution et indépendante de la masse centrale.

De la formule (109), on peut déduire une limite supérieure de ε et, par conséquent, une *limite inférieure du rayon de l'espace d'Einstein* ou de de Sitter [13, 2]. Par exemple, si le rayon de de Sitter valait 100 années de lumière, on aurait une avance séculaire de 200" pour Mars, ce qui est inadmissible. S'il valait 1000 années de

lumière, la correction due à ε serait comparable aux avances observées. Si le rayon d'Einstein vaut 10^8 années de lumière (n° 30), cette correction est négligeable.

Quant à la *déviaton de la lumière*, elle n'est pas modifiée [13]. En effet, nous avons vu, au n° 24, qu'il fallait, pour le rayon lumineux, annuler $\frac{1}{C}$ dans (71) et (72). Dès lors, la correction $-\frac{\varepsilon}{3C^2u^3}$ apportée ci-dessus au second membre de (72) est nulle et l'équation (93) n'est pas changée.

33. Passons au *problème intérieur*, en nous bornant au cas de la sphère fluide et homogène [47]. Le coefficient de dr^2 dans la formule (50) doit simplement être modifié par l'addition de $\frac{\varepsilon}{8\pi}$ à ρ , ce qui revient à augmenter de $\frac{\varepsilon}{3}$ le coefficient de r^2 au dénominateur et donne bien le raccordement avec la formule (108) pour $r = a$. Nous avons ensuite, d'après (44) et (45),

$$\Lambda = \frac{\varepsilon - 4\pi\rho}{\rho(\varepsilon + 8\pi\rho)\sqrt{1 - \frac{2m}{a} - \frac{\varepsilon a^2}{3}}},$$

$$\sqrt{B} = \rho\sqrt{1 - \frac{2m}{a} - \frac{\varepsilon a^2}{3}}.$$

Portant dans (46), on obtient $e^{\frac{\lambda}{2}}$. Nous laissons au lecteur le soin d'écrire le ds^2 , ainsi que la pression p , d'après (39) et (44). Les formules obtenues se réduisent bien à (50) et à (51), pour $\varepsilon = 0$.

34. **Univers cylindrique et univers sphérique.** — La formule (47) nous montre que, *dans l'univers d'Einstein, le temps cosmique est un temps absolu.*

Si, aux formules (107), on adjoint $x_5 = it$, on voit que l'expression

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 + dx_5^2$$

se réduit à (47), au signe près. On peut donc dire que l'univers courbe d'Einstein est un *univers cylindrique* [1] plongé dans l'espace euclidien à 5 dimensions.

Reprenons maintenant (49) ou, d'après (105),

$$(110) \quad ds^2 = \cos^2 u dt^2 - R^2 [du^2 + \sin^2 u (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)].$$

En posant

$$\sin u = \sin \nu \sin \omega, \quad it = R \operatorname{arc tang}(\cos \nu \operatorname{tang} \omega),$$

cette formule devient

$$(111) \quad -ds^2 = R^2 (d\omega^2 + \sin^2 \omega d\nu^2 + \sin^2 \omega \sin^2 \nu d\theta^2 + \sin^2 \omega \sin^2 \nu \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

On en conclut que *l'univers de de Sitter est un univers sphérique de rayon R* [1].

Si l'on revient à (110), on voit qu'il n'y a *plus de temps absolu*. Le rapport du temps propre au temps t diminue de 1 à 0 quand u croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire quand l'observateur se déplace de $\frac{R\pi}{2}$ sur une droite issue du pôle O.

La vitesse de la lumière, évaluée au moyen du temps t , décroît de 1 à 0 quand u croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$. L'onde n'atteint jamais l'équateur et il en est de même, *a fortiori*, de tout autre mobile. Pour cette raison, ledit équateur a été appelé la *barrière du temps* [1].

Les raies des spectres des étoiles lointaines sont déviées vers le rouge (*cf.* n° 27). On peut montrer aussi [1] que l'effet Döppler augmente avec la distance. Ces deux dernières conclusions semblent se vérifier à peu près sur les nébuleuses spirales, que les astronomes considèrent comme très éloignées [1].

CHAPITRE VII.

LA SPHÈRE ÉLECTRISÉE.

35. Détermination du champ électrostatique à symétrie sphérique

— Soit $f(r)$ le *potentiel électrostatique*. Le *potentiel électromagnétique* a pour composantes [1, 24]

$$K_1 = K_2 = K_3 = 0, \quad K_4 = f(r).$$

L'intensité du champ électromagnétique est définie par la formule

générale

$$F_{ij} = \frac{\partial K_i}{\partial x_j} - \frac{\partial K_j}{\partial x_i}.$$

Les seules composantes non nulles sont

$$F_{41} = -F_{14} = f' \quad \text{ou} \quad F^{41} = -F^{14} = -e^{-(\lambda+\mu)} f'.$$

Le tenseur électromagnétique est donné par la formule générale

$$(112) \quad E'_i = -F_j{}^\alpha F_{i\alpha} + \frac{1}{4} g'_i{}^j F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}.$$

Ses composantes non nulles sont

$$E_1 = E_4 = -E_3 = -E_2 = \frac{1}{2} e^{-(\lambda+\mu)} f'^2.$$

On sait maintenant que les équations générales (26) subsistent sous la seule condition d'ajouter le tenseur E'_i au tenseur matériel. Dès lors, nous retombons une fois de plus sur le problème intérieur général du Chapitre II. Si nous posons, pour simplifier l'écriture,

$$(113) \quad u = \frac{1}{2} e^{-(\lambda+\mu)} f'^2,$$

tout revient à ajouter $-u$ à p , u à q et à ρ .

36. Problème extérieur. — En tout point de l'espace où il n'y a ni masse matérielle, ni électricité, nous devons faire, dans le Chapitre II,

$$p = -u, \quad q = \rho = u.$$

L'équation (28) devient

$$u' + \frac{4u}{r} = 0;$$

d'où

$$(114) \quad u = \frac{e^2}{32\pi^2 R^4},$$

e désignant une constante d'intégration, que nous interpréterons tout à l'heure.

La formule (36) devient, en ne tenant pas compte de la borne inférieure,

$$m = \frac{-e^2}{8\pi r};$$

moyennant quoi, (35) nous donne

$$(115) \quad e^{-\mu} = 1 - \frac{2n}{r} + \frac{e^2}{4\pi r^2}.$$

On a enfin $\lambda + \mu = 0$, d'après (30) et en choisissant l'unité de temps. Finalement, nous obtenons [cf. 43, 38, 19, 20, 39, 58, 59]

$$(116) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{2n}{r} + \frac{e^2}{4\pi r^2}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2n}{r} + \frac{e^2}{4\pi r^2}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

et, d'après (113) et (114),

$$(117) \quad f = \frac{e}{4\pi r}.$$

37. Problème intérieur. — Appelons σ la *densité propre de quantité d'électricité*. On sait que l'hypervecteur densité de courant est la divergence du tenseur F^{ij} . Sa quatrième composante est seule différente de zéro et donne

$$(118) \quad \sigma \frac{dt}{ds} = \sigma e^{-\frac{\lambda}{2}} = -\frac{e^{-\frac{\lambda+\mu}{2}}}{r^2} \left(r^2 f' e^{-\frac{\lambda+\mu}{2}}\right)'$$

On vérifie d'abord que, pour $\sigma = 0$, on retombe bien sur (114).

On pourrait maintenant supposer que σ est une fonction donnée de r et en déduire le ds^2 , ainsi que ρ . Mais ce problème paraît difficile et ne semble pas avoir été résolu. On peut toutefois intégrer l'équation (118) sous la forme suivante

$$(119) \quad f' e^{-\frac{\lambda+\mu}{2}} = -\frac{E(r)}{4\pi r},$$

en appelant $E(r)$ la quantité d'électricité contenue dans la sphère de rayon r et négligeant une constante d'intégration, ce qui revient à préciser le potentiel f [cf. 20].

A l'extérieur de la sphère, $E(r)$ a une valeur constante e , qui est la *charge totale* de ladite sphère. On voit que (119) redonne (117) et l'on obtient l'interprétation de la constante e du numéro précédent. La formule (117) est identique à la formule classique qui donne le potentiel d'une sphère, en unités de Heaviside.

38. Cas de l'électron. — Supposons l'électricité *répandue à la surface d'une sphère* de rayon a [cf. 20].

A l'intérieur de cette sphère, $E(r)$ est nul, donc aussi f' . Le tenseur électromagnétique disparaît et l'on retombe sur le problème intérieur purement massique traité au Chapitre II, conformément au principe de Faraday. Si m désigne toujours la pseudo-masse du n° 12, on a, par la continuité du coefficient de dr^2 ,

$$(120) \quad n = m + \frac{e^2}{8\pi a}.$$

Le terme $\frac{e^2}{8\pi a}$ est la masse ou énergie électromagnétique de l'électron (cf. 41, Chap. V). La constante n de (116) est la masse totale.

Dans le cas de l'électron pur, on admet que $m = 0$; toute la masse est électromagnétique [19, 38]. A l'intérieur, on a le ds^2 de Minkowski.

39. **Électron de Poincaré.** — L'électron de Poincaré est un électron pur, dont la masse électromagnétique, déduite de la quantité de mouvement, est $\frac{e^2}{6\pi a}$ [41, *loc. cit.*]. Pour expliquer la différence de cette masse avec l'énergie $\frac{e^2}{8\pi a}$, Poincaré fait une hypothèse qui revient à introduire, à l'intérieur de l'électron, un tenseur constant, dont les quatre composantes mixtes sont égales. La deuxième solution du n° 11 nous donne alors, en tenant compte de la continuité [20],

$$ds^2 = \left(1 - \frac{e^2 r^2}{12\pi a^3}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{e^2 r^2}{12\pi a^3}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

La valeur commune des quatre composantes mixtes du tenseur constant est $\frac{e^2}{3\pi^2 a^3}$, conformément à l'hypothèse de Poincaré [41, *loc. cit.*].

40. Mouvement d'une particule électrisée placée dans le champ.

Si e' désigne la charge de cette particule et m' sa masse, les équations différentielles de sa ligne d'univers sont

$$(121) \quad m' \left(\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \left. \begin{matrix} \alpha \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} \right) + e' F_{i\alpha} \frac{dx_\alpha}{ds} = 0.$$

En se reportant au tableau (9) et au début du n° 35, on voit d'abord que, pour $i = 2$ et $i = 3$, on a les mêmes équations qu'au n° 20 et

l'on en déduit les mêmes intégrales premières, c'est-à-dire $\varphi = \text{const.}$, et (68). On a ensuite, pour $i = 4$,

$$m' \left(\frac{d^2 t}{ds^2} + \lambda' \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} \right) - \frac{ee'}{4\pi r^2} \frac{dr}{ds} e^{-\lambda} = 0.$$

Cette équation admet e^λ pour facteur intégrant et donne

$$(122) \quad e^\lambda \frac{dt}{ds} = A - \frac{ee'}{4\pi m' r}, \quad A = \text{const.}$$

La quatrième équation nous est donnée par l'identité

$$(123) \quad e^\lambda \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - e^{-\lambda} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = 1,$$

qui, combinée avec les équations précédentes, entraîne l'équation obtenue en faisant $i = 1$ dans (121).

41. Lois de Newton et de Coulomb. — Formons l'équation différentielle qui relie r à t , en supposant la vitesse nulle. En éliminant $d\theta$ et ds entre (68), (122) et (123), nous avons

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = e^{2\lambda} - \left(1 + \frac{C^2}{r^2} \right) \frac{e^{2\lambda}}{\left(A - \frac{ee'}{4\pi m' r} \right)^2}.$$

En dérivant par rapport à t et en faisant ensuite

$$C = 0 \quad \text{et} \quad e^{\frac{\lambda}{2}} = A - \frac{ee'}{4\pi m' r},$$

il vient

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{1}{2} e^{2\lambda} \lambda' + \frac{ee'}{4\pi m' r^2} e^{\frac{3\lambda}{2}}.$$

ou, en négligeant $\frac{m}{r}$ et $\frac{e}{r}$ vis-à-vis de l'unité,

$$(124) \quad m' \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{mm'}{r^2} + \frac{ee'}{4\pi r^2}.$$

On retrouve, au second membre, la loi de Newton et la loi de Coulomb [44, 31, 38].

42. Étude de la trajectoire de la particule électrisée. — En éliminant ds et dt entre les équations (68), (122) et (123), nous obtie-

nous l'équation différentielle de la trajectoire, soit, avec les notations du n° 23 [44],

$$u'^2 + u^2 = -\frac{1}{C^2} + \left(2m - \frac{e^2}{4\pi} u\right) u \left(u^2 + \frac{1}{C^2}\right) + \frac{1}{C^2} \left(a - \frac{ee'}{4\pi m'} u\right)^2.$$

En dérivant par rapport à θ , on obtient

$$(125) \quad u'' + u = \left(m - \frac{ae e'}{4\pi m'}\right) \frac{1}{C^2} + \frac{e^2}{4\pi C^2} u \left(\frac{e'^2}{4\pi m'^2} - 1\right) + 3mu^2 - \frac{e^2}{2\pi} u^3.$$

Calculons l'avance du périhélie par la formule (89). Si nous appelons ε l'excentricité et p le paramètre, il vient, tous calculs faits,

$$(126) \quad \alpha = \pi \left[\frac{e^2}{4\pi C^2} \left(\frac{e'^2}{4\pi m'^2} - 1\right) + \frac{6m}{p} - \frac{3e^2}{2\pi p^2} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) \right].$$

Dans cette formule, figure la constante C . La valeur de cette constante est donnée par (68) ou, en confondant e^λ avec l'unité et supposant la trajectoire sensiblement circulaire,

$$C = \frac{r^2 \frac{d\theta}{dt}}{\sqrt{1-\nu^2}} = \frac{r\nu}{\sqrt{1-\nu^2}},$$

ν désignant la vitesse de la particule.

Pour $e = 0$, on retrouve la formule (75).

Dans le cas d'un électron soumis au champ d'un noyau atomique, les rapports $\frac{e}{m}$ et $\frac{e'}{m'}$ sont très grands et ν est comparable à l'unité. On voit aisément que le premier terme du crochet de (126) l'emporte de beaucoup sur les autres et l'on a sensiblement [36]

$$\alpha = 2\pi \frac{e^2 e'^2 (1-\nu^2)}{8\pi^2 m'^2 r^2 \nu^2}.$$

43. Déviation de la lumière. — L'équation des rayons lumineux s'obtient [n° 24] en annulant $\frac{1}{C}$ dans (125) :

$$u'' + u = 3mu^2 - \frac{e^2}{2\pi} u^3 \quad (\text{cf. 38}).$$

En appliquant la formule (99), on a la déviation [38]

$$\lambda = \frac{4m}{R} - \frac{3}{16} \frac{e^2}{R^2}.$$

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. BECQUEREL (J.). — *Le principe de relativité et la théorie de la gravitation* (Gauthier-Villars, 1922).
2. BECQUEREL (J.). — *Champ de gravitation d'une sphère matérielle et signification physique de la formule de Schwarzschild* (Hermann, 1923).
3. BERTRAND (G.). — La loi de Newton et la formule d'Einstein pour le périhélie des planètes (*Comptes rendus*, t. 173, p. 438).
4. BERTRAND (G.). — La loi de Riemann, le périhélie de Mercure et la déviation de la lumière (*Comptes rendus*, t. 174, p. 1687).
5. BLOCH (L.). — Sur les théories de la gravitation (*Annales de Physique*, 1918, p. 28).
6. BRILLOUIN (M.). — Champ isotrope. Sphère fluide hétérogène (*Comptes rendus*, t. 174, p. 1585).
7. BRILLOUIN (M.). — Gravitation einsteinienne. Statique. Points singuliers. Le point matériel. Remarques diverses (*Comptes rendus*, t. 175, p. 1009).
8. BRILLOUIN (M.). — Les points singuliers de l'univers d'Einstein (*Journal de Physique*, 6^e série, t. 4, p. 43).
9. BRILLOUIN (M.). — Gravitation einsteinienne et gravitation newtonienne; à propos d'une récente note de M. Le Roux (*Comptes rendus*, t. 175, p. 923).
10. BUHL (A.). — Sur le mouvement séculaire du périhélie de Mercure (*Comptes rendus*, t. 173, p. 1040).
11. BUISSON (A.) et FABRY (Ch.). — Sur le déplacement des raies solaires sous l'action du champ de gravitation (*Comptes rendus*, t. 172, p. 1020).
12. CHAZY (Jean). — Sur les fonctions arbitraires figurant dans le ds^2 de la gravitation einsteinienne (*Comptes rendus*, t. 173, p. 905).
13. CHAZY (Jean). — Sur les vérifications astronomiques de la théorie de la relativité (*Comptes rendus*, t. 174, p. 1157).
14. CHAZY (Jean). — La théorie de la relativité et la Mécanique céleste, tomes I et II (Gauthier-Villars, 1928).
15. COMBRIDGE (J. T.). — The field of a thick spherical shell on Einstein's theory of relativity (*Phil. Mag.*, 7^e série, t. 4, p. 276).
16. CROZE (F.). — Les raies du spectre solaire et la théorie d'Einstein (*Annales de Physique*, 1923, p. 93, 229).
17. DARMOIS (G.). — Sur le problème intérieur dans le cas d'un espace-temps courbe à symétrie sphérique (*Comptes rendus*, t. 177, p. 1276).
18. DARMOIS (G.). — Les équations de la gravitation einsteinienne (*Mém. Sc. math.*, fasc. 23).
19. DE DONDER. — Champ gravifique d'un électron purement électrique (*Bull. Acad. royale de Belg.*, 1922, p. 420).

20. DE DONDER. — La gravifique einsteinienne (Gauthier-Villars, 1921).
21. DE DONDER. — Théorie des champs gravifiques (*Mém. Sc. math.*, fasc. 14).
22. DROSTE (J.). — On the field of a single centra in Einstein's theory of gravitation (*Proc. Ak. Sc. Amsterdam*, t. 17).
23. DROSTE (J.). — Thèse (*Proc. Ak. Sc. Amsterdam*, 1916, p. 203).
24. EDDINGTON. — *Espace, temps, gravitation*.
25. EINSTEIN. — Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie (*Sitzber. Berlin*, 1915, p. 831).
26. EINSTEIN. — Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie (*Sitzber. Berlin*, 1917, p. 142).
27. ESCLANGON. — Les preuves astronomiques de la relativité (*Bull. astron.*, 1922, p. 303).
28. ESCLANGEON. — Sur la déviation einsteinienne des rayons lumineux par le Soleil (*Comptes rendus*, t. 178, p. 196).
29. FABRY (Ch.). — La théorie de la relativité et le déplacement des raies spectrales produit par le champ de gravitation (*Scientia*, t. 34, p. 149).
30. FORSYTH (A. R.). — Note on the central differential equation in the relativity theory of gravitation (*Proc. London*, t. 99, p. 123).
31. GLUNNINGHAM (S. J.). — The field of an electron on Einstein's theory (*Phil. Mag.*, 6^e série, t. 43, p. 276).
32. HAAG (J.). — Sur le problème intérieur de Schwarzschild dans le cas d'une sphère hétérogène (*Comptes rendus*, t. 176, p. 658).
33. HAAG (J.). — Sur le problème de Schwarzschild dans le cas d'un univers courbe (*Comptes rendus*, t. 176, p. 1538).
34. HAAG (J.). — Sur une certaine loi de force comprenant comme cas particulier la loi de gravitation einsteinienne (*Nouv. Ann. Math.*, novembre 1923).
35. HILBERT (D.). — Die Grundlagen der Physik (*Nachr. Gott.*, 1917, p. 53).
36. JAFFÉ (G.). — Bemerkungen über die relativistischen Keplerellipsen (*Annalen der Physik*, t. 67, p. 212).
37. JANS (DE). — Sur le mouvement d'une particule matérielle dans un champ de gravitation à symétrie sphérique (*Acad. r. Belg., Mémoires*, 1923, fasc. 5).
38. JEFFERY (G. B.). — The field of an electron on Einstein's theory of gravitation (*Proc. London*, t. 99, p. 123).
39. LAUE (VON). — *La théorie de la relativité*, t. II.
40. LECORNU. — Quelques remarques sur la relativité (*Comptes rendus*, t. 174, p. 337).
41. LORENTZ. — *The theory of electrons*.
42. MORTON (W. B.). — The forms of planetary orbits on the theory of relativity (*Phil. Mag.*, 6^e série, t. 41, p. 511).
43. NORDSTRÖM. — *Verslag. Ak. Amsterdam*, 1918.
44. NUYENS (M.). — Trajectoire d'un point électrisé dans le champ dû à un électron pur (*Bull. Acad. r. Belg.*, 1922, p. 567).
45. NUYENS (M.). — Trajectoire d'un point matériel dans le champ dû à une sphère matérielle (*Bull. Acad. r. Belg.*, 1922, p. 755).

46. NUYENS (M.). — Sphère massive dans les univers d'Einstein et de de Sitter (*Bull. Acad. r. Belg.*, 1925, p. 113).
47. NUYENS (M.). — Champ gravifique dû à une sphère massive, en tenant compte de la constante cosmique (*Comptes rendus*, t. 176, p. 1376).
48. PAINLEVÉ (Paul). — La Mécanique classique et la théorie de la relativité (*Comptes rendus*, t. 173, p. 677).
49. PAINLEVÉ (Paul). — La gravitation dans la Mécanique de Newton et dans la Mécanique d'Einstein (*Comptes rendus*, t. 173, p. 873).
50. PAINLEVÉ (Paul). — La théorie classique et la théorie einsteinienne de la gravitation (*Comptes rendus*, t. 174, p. 1137).
51. ROUX (LE). — Sur la théorie de la relativité et le mouvement séculaire du périhélie de Mercure (*Comptes rendus*, t. 172, p. 1227).
52. ROUX (LE). — La loi de gravitation et ses conséquences (*Comptes rendus*, t. 172, p. 1467).
53. SCHWARZSCHILD. — Ueber das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie (*Sitzber. Berlin*, 1916, p. 189).
54. SCHWARZSCHILD. — Ueber das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie (*Sitzber. Berlin*, 1916 p. 424).
55. TROUSSET. — Les lois de Kepler et les orbites relativistes (*Comptes rendus*, t. 174, p. 1160).
56. TROUSSET. — L'observation des planètes peut elle fournir des arguments pour ou contre la relativité? (*Comptes rendus*, t. 176, p. 888).
57. VILLEY (Jean). — A propos de nouveaux livres sur la théorie de la relativité (*Bull. Sc. math.*, 1925, p. 33).
58. WEYL (H.). — Zur Gravitationstheorie (*Annalen der Physik*, 4^e série, t. 54, p. 117).
59. WEYL (H.). — *Temps, espace, matière*.



TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
INTRODUCTION	1
Le problème extérieur.....	2
Le problème intérieur.....	10
Propriétés du champ de gravitation.....	18
Le périhélie de Mercure.....	25
La déviation de la lumière et le déplacement des raies.....	35
Les univers courbes.....	39
La sphère électrisée.....	44
INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.....	50

