W. WILKOSZ

Les propriétés topologiques du plan euclidien

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 45 (1931)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1931__45__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE XLV

Les Propriétés topologiques du plan Euclidien

Par M. W. WILKOSZ
Professeur à l'Université de Cracovie.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1931

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

LES

PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES

DU PLAN EUCLIDIEN

Par M. W. WILKOSZ,
Professeur à l'Université de Cracovie.

PREMIÈRE PARTIE.

INTRODUCTION A LA TOPOLOGIE DU PLAN.

I. — Notions d'ordre logique.

1. Classes. — Contrairement à ce que l'on dit souvent dans les Traités ou dans les Cours d'Analyse, la notion de *classe* ou *d'ensemble* n'est nullement claire et primitive. Dans le fascicule du Mémorial consacré à la Logique des Mathématiques, mon Maître et collègue M. Zaremba a montré d'une manière excellente comment la notion de classe est contenue dans une notion plus générale : celle de *catégorie*.

L'idée d'une catégorie correspond à peu près à ce qu'on a appelé auparavant *classe* ou *ensemble*, ce dernier nom doit être conservé aux catégories qui présentent une certaine régularité indiquée par M. Zaremba. Dans l'état actuel de la science, on est amené à admettre à titre de postulats que certaines catégories sont des classes et l'on donne les règles permettant de déduire de classes données des classes nouvelles.

Nous empruntons à la théorie générale des classes les notions suivantes :

Appartenance. — On écrit $a \varepsilon \alpha$ pour exprimer qu'un élément a appartient à la classe (ou catégorie) α.

Inclusion. — On dit qu'une classe (ou catégorie) α est *contenue* dans une classe (ou catégorie) β et l'on écrit

$$\alpha \subset \beta,$$

pour exprimer le fait suivant : tout élément de α est un élément de β.

Identité. — On dit que α est *identique* à α, et l'on écrit

$$\alpha = \beta,$$

si l'on a simultanément

$$\alpha \subset \beta \quad \text{et} \quad \beta \subset \alpha.$$

Si $\alpha \subset \beta$ on dit que α est une *sous-classe* de β.
Si $\alpha \subset \beta$ mais $\alpha \neq \beta$ on dit que α est une *vraie sous-classe* de β.

Classe vide. — L'assertion qu'une classe α est *vide* (ou *nulle*) exprime que la proposition

$$x \varepsilon \alpha,$$

est fausse pour toute signification de x; on exprime cette assertion

$$\alpha = \Lambda,$$

ou simplement

$$\alpha = 0.$$

2. Les opérations du premier ordre sur les classes. — On entend : par *somme* de deux classes α et β la classe que l'on désigne par

$$\alpha \cup \beta$$

ou par

$$\alpha + \beta,$$

et qui est la classe formée par tous les éléments dont chacun appartient à l'une au moins des classes α et β;

par *produit* de deux classes α et β la classe que l'on désigne par

$$\alpha \cap \beta \quad \text{ou} \quad \alpha \times \beta \quad (\text{ou encore } \alpha\beta),$$

et qui est la classe de tous les éléments appartenant à la fois aux classes α et β; lorsque

$$\alpha \times \beta = 0,$$

on dit que α et β sont *disjoints* ou qu'elles *s'excluent mutuellement;*

par *différence* de deux classes α et β la classe que l'on représente par

$$\alpha - \beta,$$

et qui est la classe constituée par ceux des éléments de α dont aucun n'appartient à β.

3. Familles de classes; opérations du deuxième ordre. — On appelle *famille de classes* une *classe* de *classes.*

Une catégorie de classes pouvant n'être pas une classe, il est utile de connaître la proposition suivante :

Les *sous classes d'une même classe* forment *une famille de classes.*

On entend par *somme* (des classes) d'une famille $\mathfrak{A}$ l'ensemble de tous les éléments dont chacun appartient à l'une au moins des classes de la famille $\mathfrak{A}$ et l'on représente cet ensemble soit par

$$s'\mathfrak{A} \quad \text{soit par} \quad \Sigma\mathfrak{A}.$$

On entend par *produit* (des classes) d'une famille $\mathfrak{A}$ l'ensemble de tous les éléments communs à toutes les classes de $\mathfrak{A}$ et l'on représente cet ensemble par

$$p'\mathfrak{A} \quad \text{ou par} \quad \Pi\mathfrak{A}.$$

Les auteurs allemands écrivent souvent :

$$\Sigma\mathfrak{A} = \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$$

et

$$\Pi\mathfrak{A} = \mathfrak{D}(\mathfrak{A}).$$

Remarque. — Dans ce qui précède, j'ai présenté en premier lieu les notations de Whitehead et Russell et en second lieu celles des *Fundamenta Mathematicae.*

4. Maximum et minimum d'une famille. — Une classe α d'une famille $\mathfrak{A}$ est dite *classe maxima* ou « *la plus grande classe* » de $\mathfrak{A}$ lorsqu'elle contient toutes les classes de $\mathfrak{A}$; la classe maxima, quand elle existe, est nécessairement unique.

La classe *minima* d'une famille est *par définition* celle qui est contenue dans toutes les classes de la famille.

[HAUSDORFF.]

MM. Zoretti et Janiszewski ont introduit deux autres notions analogues aux précédentes [41, 128].

Soit $\mathfrak{A}$ une famille de classes, constituée par toutes les classes satisfaisant à une certaine condition φ.

Une classe α *appartenant* à la famille $\mathfrak{A}$ est dite *saturée* par rapport à φ lorsqu'elle n'est une vraie sous-classe d'aucune classe de $\mathfrak{A}$; lorsque, au contraire, aucune vraie sous classe de α n'appartient à la famille $\mathfrak{A}$, la classe α est dite *irréductible* par rapport à φ.

5. Remarques sur la possibilité des opérations sur les classes. — Au point de vue des applications, il suffit de savoir que les opérations sur les classes, définies plus haut, sont toujours possibles dans le cas particulier où l'on ne considère que des classes qui sont des sous-classes d'une même classe.

6. Relations. — Étant données deux classes α et β (non nécessairement différentes), il est souvent possible de définir (et cela de bien des façons) un symbole R de telle sorte que l'expression

$$x \mathrm{R} y,$$

lorsque x est un élément de α et y un élément de β, représente une proposition déterminée (pouvant, bien entendu, être vraie ou fausse selon le cas); dans ces conditions le symbole R est dit celui d'une *relation*. Lorsque par exemple les classes α et β se confondent chacune avec l'ensemble des nombres réels, les signes

$$<, \quad = \quad \text{et} \quad >,$$

servent à représenter des relations bien connues.

La théorie des relations donne lieu à des difficultés analogues à celles qu'on rencontre dans la théorie des classes.

[Russell.]

7. Quelques notions relatives à la théorie des relations. — On appelle *inverse* d'une relation R la relation R^{-1} telle que les propositions

$$x \mathrm{R} y \quad \text{et} \quad y \mathrm{R}^{-1} x \ (^1),$$

soient toujours équivalentes (par exemple $<$ et $>$).

(1) Dans *Principia*, de Whitehead et Russell : $y \breve{\mathrm{R}} x$.

On appelle *domaine* de R la *classe* de tous les x à chacun desquels on peut faire correspondre au moins un y vérifiant la proposition

$$xRy.$$

Le domaine de R^{-1} s'appelle aussi le *co-domaine* de R.

On écrit

$$D'R = \text{domaine de R},$$
$$\text{Ɑ}'R = \text{co domaine de R}.$$

Lorsqu'il correspond à un élément déterminé x un élément z et un seul vérifiant la proposition

$$zRx,$$

on dit que z est *la* R-*image* de x et on le représente par $R(x)$ (1).

L'élément $R^{-1}(x)$ s'appelle R-*image inverse* de x.

La R-*image d'une classe* α ou $R''\alpha$ est la *classe* de tous les x à chacun desquels correspond au moins un élément y de α vérifiant la proposition

$$xRy.$$

La classe $R^{-1}{}''\alpha$ s'appelle *image inverse de* α.

La somme

$$D'R + \text{Ɑ}'R$$

s'appelle *champ* de R ou C(R).

Appelons avec Schröder et Russell *composition* ou *produit relatif* de deux relations R et S une nouvelle relation RS (2) telle que $xRSy$ signifie :

il existe un z tel qu'on ait

$$xRz \quad \text{et} \quad zSy.$$

Une relation R est :

α. *Réflective*, si l'on a xRx pour tous les x appartenant à C(R).

β. *Symétrique*, si xRy implique toujours yRx.

γ. *Transitive*, si xRy et yRz impliquent toujours xRz.

Les R qui possèdent à la fois les propriétés α, β et γ portent le nom d'*équivalences* (logiques).

δ. *Asymétrique*, si xRy exclut toujours yRx.

---

(1) Dans *Principia* · $R'x$

(2) Dans *Principia* : $R \mid S$.

8. Opérateurs. Fonctions. Correspondances. — Une relation R est un *opérateur* (entre les éléments de son domaine et de son co-domaine), si tout élément de son *co domaine* possède son *image* bien déterminée. Dans ce cas on appelle son co-domaine « le champ d'application » de R.

Une relation R est une *correspondance biunivoque* entre les éléments de son domaine et ceux de son co-domaine lorsque R et son inverse R^{-1} sont à la fois des opérateurs. Le terme « fonction » a la même signification que le terme « opérateur ».

9. Questions d'existence. — Les opinions des mathématiciens sur la signification de l'assertion « il existe au moins un objet x qui satisfait à une condition déterminée φ » sont divisées. Sans discuter cette question très délicate, nous nous bornons à dire que l'assertion précédente sera considérée comme équivalente à la suivante : « Il n'est pas vrai qu'aucun objet ne satisfasse à la condition φ ». Ce n'est que dans le sens indiqué ci-dessus que nous énonçons le fameux *axiome de Zermelo :*

Étant donnée une famille $\mathfrak{A}$ de classes non vides et disjointes, il existe au moins une classe qui avec toute classe de $\mathfrak{A}$ possède en commun un élément unique.

Une autre forme (facilement réductible à la précédente) est la suivante :

Soit $\mathfrak{A}$ une famille de classes non vides. Il existe au moins un opérateur f qui fait correspondre à chaque classe de la famille un élément déterminé appartenant à cette classe.

II. — Théories que suppose la topologie.

10. Arithmétique cardinale. — Définissons l'assertion « les classes α et β ont la même puissance » comme équivalente à : « il existe une correspondance biunivoque entre les éléments de α et ceux de β ». La relation « avoir la même puissance » est une *équivalence* (*voir* n° 7). Considérons toutes les opérations qui transforment une classe en une autre de même puissance qu'elle.

Ne nous occupons que des notions et des propriétés *invariantes* par rapport à ces transformations; leur théorie constitue l'*Arithmétique Cardinale*. Voici quelques notions dans cet ordre d'idées :

α. Une classe est dite *infinie*, si elle a la même puissance que l'une de ses *vraies sous classes*. Dans le cas contraire elle s'appelle « *finie* ».

β. La classe α est dite « *moins-nombreuse* » que la classe β, si elle est de même puissance qu'une vraie sous-classe de β sans que la réciproque ait lieu.

γ. Une classe est *dénombrable*, si elle a la même puissance que la classe de tous les nombres entiers non négatifs. [On désigne cette dernière classe, avec M. Peano, par N_0.]

δ. Une classe a la « *puissance du continu* », si elle a la même puissance que l'ensemble de tous les nombres réels.

Remarque. — On peut définir les deux dernières notions sans utiliser la notion de nombre (voir *Principia*, I et II).

11. Arithmétique ordinale. — Introduisons la notion de *système ordinal*. Nous appellerons ainsi un système $\{\alpha, R\}$ formé par une classe α et une relation R, tel que les conditions suivantes soient satisfaites :

1° α est contenu dans C(R) (champ de R).

2° Lorsque x et y appartiennent à α l'une au moins des deux relations

$$x R y \quad \text{et} \quad y R x$$

est vérifiée.

3° Lorsque x et y appartiennent à α, l'ensemble des relations

$$x R y \quad \text{et} \quad y R x$$

entraîne $x = y$.

4° Lorsque x, y et z appartiennent à α et vérifient les relations

$$x R y \quad \text{et} \quad y R z,$$

on a aussi

$$x R z.$$

Lorsqu'une classe α et une relation R constituent un système ordinal, nous dirons que la relation R *ordonne* la classe α; pour exprimer que l'on a à la fois

$$x R y \quad \text{et} \quad x \neq y,$$

nous écrirons que

$$x \underset{R}{\leqq} y,$$

proposition qu'on lit aussi « x précède y par rapport à R » ou plus simplement « x précède y ».

Remarque. — La définition précédente d'un système ordinal équivaut rigoureusement à celles de Combébiac et Hessenberg, mais elle diffère légèrement de celle de G. Cantor. [*h.*]

Soient

$$\{\alpha, R\} \quad \text{et} \quad \{\alpha', R'\}$$

deux systèmes ordinaux. Nous les appellerons *ordinalement équivalents* ou « *ayant le même type ordinal* », lorsqu'il existe une correspondance biunivoque S entre α et α' « conservant l'ordre » c'est-à-dire, telle que si

$$x \underset{R}{\leqq} y,$$

et si x' et y' correspondent grâce à S à x et y respectivement, on a

$$x' \underset{R'}{\leqq} y'.$$

D'après ce qui précède l'équivalence ordinale est une équivalence logique (n° 7). L'objet propre de l'*Arithmétique ordinale*, c'est l'étude des propriétés invariantes d'un système ordinal par rapport aux équivalences ordinales.

Telles sont par exemple :

α. L'existence d'un premier élément d'un système $\{\alpha, R\}$, celle d'un « premier élément d'une classe α' contenue dans α »; l'existence par rapport à un élément donné, d'un élément le précédant ou le suivant immédiatement, etc.

β. La propriété d'un système ordinal $\{\alpha, R\}$ consistant en ce que la classe α y soit *bien ordonnée*, c'est-à-dire ordonnée de telle sorte que toute sous-classe non vide de α contienne un premier élément.

γ. La propriété d'un système ordinal $\{\alpha, R\}$ que l'on exprime en disant que α y est *doublement bien ordonnée*, c'est-à-dire ordonnée de telle façon que toute sous-classe de α non vide possède aussi bien un premier élément qu'un dernier élément.

δ. La propriété d'un système ordinal $\{\alpha, R\}$ d'être du type ω c'est-à-dire d'être ordinalement équivalent au système formé par la classe des entiers non-négatifs et la relation symbolisée par $\leqq$; on dit, dans ce cas, que α est ordonnée selon le type ω.

12. Une relation entre les arithmétiques ordinale et cardinale. — Il existe des notions appartenant à l'arithmétique cardinale dérivant de celles de l'arithmétique ordinale; telles sont en particulier les suivantes :

La propriété d'une classe α de pouvoir être :

1° bien ordonnée;
2° doublement bien ordonnée;
3° de pouvoir être ordonnée selon le type ω.

Pour les partisans de l'axiome de Zermelo, toutes les classes sont susceptibles d'être bien ordonnées; en réalité cette proposition est équivalente à l'axiome de Zermelo. Les classes susceptibles d'être doublement bien ordonnées s'appellent « classes inductives ». Les classes inductives sont *finies* mais on ne sait établir la réciproque qu'en s'appuyant sur l'axiome de Zermelo. Les classes susceptibles d'être ordonnées selon le type ω coïncident avec les classes *dénombrables*.

13. Transportation d'ordre. — Soit $\{\alpha, R\}$ un système ordinal α' une classe ayant la même puissance que α, S une correspondance biunivoque entre α et α'. Il est facile de voir que la classe α' forme avec la relation

$$R' = S^{-1}RS.$$

un système ordinal; nous dirons que $\{\alpha', R'\}$ est le résultat de la *transportation* de l'ordre établi dans α par R sur α'.

Remarques complémentaires. — 1° On désigne la puissance de tous les ensembles *dénombrables* par la lettre hébraïque $\aleph_0$ (*alèphe-zéro*) et celle du continu par c.

2° Les types particulièrement importants de systèmes ordinaux $\{\alpha, R\}$ sont ceux où la classe α est *finie* ou *dénombrable*; ils s'appellent *types* (ou nombres) *ordinaux* respectivement de *première* et de *seconde classe*.

3° On désigne par $\aleph_1$ (*alèphe-un*) la puissance de l'ensemble de tous les nombres ordinaux de première et de seconde classe.

On sait que

$$\aleph_1 \leqq C.$$

Mais on ne sait pas si l'on a l'égalité

$$\aleph_1 = C,$$

égalité qui porte le nom d' « *hypothèse du continu* ».

III. — Systèmes topologiques.

14. Topologie abstraite. — On doit à M. E.-H. Moore [1] une définition tout à fait générale de l'espace topologique; voici cette définition :

Considérons un ensemble E et une règle K qui fait correspondre à tout sous-ensemble A de E un autre sous-ensemble de E déterminé

$$A' = K'A,$$

appelé le *dérivé* de A; tout système tel que (E, K) s'appelle *espace topologique abstrait* dont les *points* sont les éléments de E.

Comme dans la suite nous ne considérerons que des sous-ensembles de E, nous les appellerons simplement « ensembles ». Les éléments (ou « points ») du dérivé de l'ensemble A s'appellent *points d'accumulation* de A.

Equivalence. — Deux systèmes topologiques (E, K) et $(\overline{E}, \overline{K})$ sont dits *équivalents* (topologiquement) ou *homéomorphes* au sens *large* s'il existe une correspondance biunivoque S entre E et $\overline{E}$ qui « conserve la dérivation » c'est-à-dire qui fait correspondre au dérivé de tout sous-ensemble A de E le dérivé du correspondant $\overline{A}$ de A dans $\overline{E}$. On peut exprimer cette condition par la formule

$$\overline{K}'S''A = S''K'A \qquad (\textit{voir } n^o\ 7).$$

La *Topologie* a pour but l'étude de celles des propriétés d'un espace topologique qui sont invariantes par rapport à toute homéomorphie.

---

[1] On a form of general analysis with applications to differenciel and integral equations. Atti Roma Congresso, 2, 1908.

Notions topologiques fondamentales applicables à tous les espaces topologiques :

α. Un ensemble A est dit *fermé*, s'il contient son dérivé A′

$$A' \subset A.$$

β. Il est *dense en soi* lorsque l'inverse

$$A \subset A'$$

a lieu.

γ. Il est *parfait*, si

$$A = A'.$$

δ. Un point P de A est *isolé* par rapport à A, s'il n'appartient pas au dérivé A′ de A.

L'ensemble A est isolé s'il est *disjoint* avec son dérivé

$$A \times A' = 0.$$

ε. Un ensemble A est *clairsemé,* s'il ne contient aucun sous-ensemble dense en soi. [Nous adoptons la terminologie et les définitions fixées par M. Fréchet (31).]

15. **Transformation continue et homéomorphie au sens strict.** — Un opérateur f qui transforme un ensemble A en un autre ensemble B au sein d'un espace topologique (E, K) définit une *transformation continue* de A en B sous les conditions suivantes :

1° Il fait correspondre à chaque point P de A un point déterminé Q de B au moyen de la formule

$$Q = f(P).$$

2° Lorsque P est un point d'accumulation d'un sous-ensemble $\bar{A}$ de A, son correspondant Q est un point d'accumulation de l'ensemble $\bar{B}$ correspondant à $\bar{A}$.

Une correspondance biunivoque et bicontinue c'est-à-dire continue, dont l'inverse est continu aussi, s'appelle *homéomorphie au sens strict.* Deux ensembles A et B sont *homéomorphes au sens strict* ou appartiennent au *même type topologique* s'il existe entre eux une homéomorphie au sens strict. Les invariants de l'homéomorphie au sens strict constituent un chapitre important de la topologie.

16. Transportation de la dérivation. — Soient (E, K) un espace topologique, $\overline{E}$ un ensemble qui est d'ailleurs de même puissance que E, S une correspondance biunivoque entre E et $\overline{E}$. Appelons L la règle qui fait correspondre à tout sous-ensemble B de $\overline{E}$ l'ensemble

$$B' = L'B,$$

par la formule :

$$B' = S''K'S^{-1''}B.$$

Le système $(\overline{E}, L)$ ainsi formé est évidemment un espace topologique, il est créé par une *transportation* de *la dérivation* K de E sur $\overline{E}$ par S.

17. Classes (L) de Fréchet [1]. — Voici la première particularisation de l'idée d'espace topologique, introduite par M. Fréchet dans sa thèse déjà classique [29].

Considérons un système (E, L) où E est une classe et L une règle (opérateur) soumise aux conditions suivantes :

1° Elle fait correspondre à certaines suites infinies

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots,$$

composées exclusivement d'éléments de la classe E, un point déterminé P appelé sa *limite*

$$P = \lim_{n|\infty} \{P_n\}.$$

La suite est, dans ce cas, dite *convergente*.

2° Toute suite composée d'éléments identiques à Q est convergente et converge vers Q.

3° Toute suite partielle tirée d'une suite convergente vers P, converge vers le même point.

Tout système tel que (E, L) s'appelle *classe* (L) de Fréchet.

Points d'accumulation. — Un élément P de E est un *point d'accumulation* d'un ensemble A [par rapport à une classe (L) donnée], s'il existe une suite infinie d'éléments *distincts* de A, qui

[1] Il serait préférable au point de vue logique de les appeler « espaces (L) de M. Fréchet », mais le terme est déjà classique.

converge vers P. Cette manière de définir la dérivation dans une classe (L) {et qui sera dite « normale »} transforme la classe (L) donnée en un espace topologique déterminé.

18. **Espaces de Hausdorff.** — En généralisant la notion, bien connue dans le Calcul, de *voisinage*, M. Hausdorff est arrivé à une catégorie d'espaces topologiques qu'il définit de la manière suivante :

On se donne une classe E et une règle V.

La règle V fait correspondre à chaque point P de E une famille déterminée de sous-classes de E appelée la famille de ses *voisinages* V(P).

On impose quatre conditions aux familles ainsi construites :

I. La famille V(P) n'est pas vide et P appartient à tous ses voisinages.

II. Si U_p et V_p sont deux voisinages de P, il existe un voisinage W_p de P contenu dans leur produit $U_p \times V_p$,

$$W_p \subset U_p \times V_p.$$

III. Si Q est un point de U_P, il existe un U_Q contenu tout entier dans U_P,

$$U_Q \subset U_P.$$

IV. Si $P \neq Q$, il existe un U_P et un U_Q tel que

$$U_P \times U_Q = 0.$$

Les systèmes (E, V) s'appellent *espaces de Hausdorff* [*a*].

Point d'accumulation. — Soit A un ensemble, P un point dans l'espace (E, V) de Hausdorff. P sera dit *point d'accumulation* de A, si dans tout voisinage U_P de P, il existe au moins un point Q de A *distinct* de P.

Grâce à cette définition « normale » de la dérivation, chaque système de Hausdorff est aussi un espace topologique déterminé.

Limite. — On définit la *limite* d'une suite

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots,$$

des points appartenant à E comme un point P tel que pour chaque

U_p on puisse déterminer un nombre entier n_0 tel que l'on ait

$$P_n \varepsilon U_P \quad \text{pour} \quad n > n_0.$$

Grâce à cette dernière définition (normale) tout espace de H, est devenu en même temps une classe (L) de Fréchet déterminée.

Remarque. — Un espace de Hausdorff peut être considéré comme un espace topologique de deux manières différentes, car on peut partir soit de la définition « normale » du *point d'accumulation*, soit de celle de la *limite* qui à son tour nous permet d'introduire la dérivation. Ces deux modes conduisent-ils à un même espace? On ne connaît actuellement aucune démonstration du théorème qu'il en est ainsi qui ne repose sur l'axiome de Zermelo.

Voisinages équivalents. — Supposons qu'on ait défini pour la même classe E deux règles V et $\overline{V}$ pour la construction des voisinages. Nous les appellerons *équivalentes*, lorsqu'elles conduisent à la même *dérivation*. Une condition nécessaire et suffisante est facile à trouver. Chaque U_P donné par V doit contenir à son intérieur un $\overline{U_P}$ donné par $\overline{V}$ et réciproquement.

Transportation. — Soit (E, V) un espace de Hausdorff et $\overline{E}$ une classe de même puissance que E. Soit S une correspondance biunivoque entre E et $\overline{E}$. Appelons *voisinages* d'un point $\overline{P}$ de $\overline{E}$ les ensembles qui correspondent en vertu de S aux divers voisinages du point P, auquel correspond le point $\overline{P}$. Nous définirons par cela même, pour l'ensemble $\overline{E}$, une règle $\overline{V}$ de formation de voisinage et le système $(\overline{E}, \overline{V})$ constituera un nouvel espace de Hausdorff, dit espace obtenu par la transportation de la règle V de E sur $\overline{E}$ au moyen de S.

Équivalence. — Signalons le théorème suivant: Deux espaces de Hausdorff : (E, V) et $(\overline{E}, \overline{V})$ sont *équivalents* (ou homéomorphes), s'il existe une correspondance biunivoque S entre E et $\overline{E}$ telle que la règle $\overline{V}$ soit équivalente à celle que l'on obtiendrait par la transportation de V sur $\overline{E}$ au moyen de S; la réciproque est vraie aussi.

19. Notions et notations introduites par M. Hausdorff. — Nous donnons en abrégé, à cause de son importance et de sa simplicité, l'appareil topologique introduit par M. Hausdorff dans son livre connu [*a*].

1° *Points* α, β *et* γ.

Un point P s'appelle par rapport à un ensemble A son :

point α (ou point *tangent*), si dans tout U_P il existe au moins un point de A;

point β (ou point *limite*), si dans tout U_P il existe une infinité de points appartenant à A;

point γ (ou point de *condensation*), si dans tout U_P il existe une *infinité non dénombrable* de points de A.

On désigne par A_α, A_β, A_γ respectivement les ensembles de tous les points α, β, γ par rapport à A. Dans les *Fundamenta Mathematicae*, on note le plus souvent :

$$A_\alpha = \overline{A} \quad (\textit{fermeture} \text{ de } A),$$
$$A_\beta = A' \quad (\textit{dérivé} \text{ de } A).$$

Remarque. — Les points limites et les points d'accumulation d'un ensemble se confondent-ils ?

Il en est certainement ainsi, si l'expression « ensemble infini » est considérée comme équivalente à « ensemble non inductif » (n° 12); dans le cas contraire, on ne sait le démontrer qu'au moyen de l'axiome de Zermelo. Nous convenons de n'employer le terme « infini » que dans le sens « non inductif » pour éviter toute difficulté liée à la question de l'axiome de Zermelo.

2° *Points* h et j. — Ce sont les points des ensembles suivants :

(Dét.) $A_h = A \times A_\beta$ (points limites appartenant à A);

$A_j = A - A_h$ (points isolés appartenant à A).

3° *Points* i, r, e et g. — On dit que P est un *point* i ou *intérieur* de l'ensemble A, s'il existe un U_P contenu dans A tout entier

$$U_P \subset A,$$

la classe de tous ces points constitue l'ensemble A_i « intérieur de A ». On écrit

$$A_r = A - A_i,$$

ce sont les points appelés par M. Hausdorff « Rand-punkte ».

Désignons par B le *complémentaire* de A c'est-à dire

$$B = E - A \qquad (E = \text{espace}).$$

Les points de B_i s'appellent aussi *extérieurs* par rapport à A et l'on désigne leur ensemble par A_e.

L'ensemble

$$A_g = A_r + B_r$$

constitue la *frontière* [1] de A (et aussi celle de B), les points de A_g sont les *points frontières* de A (ou de B).

Dans *Fundamenta*, on écrit souvent

$$A_g = \mathfrak{F}(A).$$

4° *Points* s et k. — Considérons la famille de tous les ensembles *denses en soi* contenus dans A ; elle admet un *maximum* (n° 4), on le désigne par A_k (noyau, Kern).

On écrit aussi

$$A_s = A - A_k.$$

Les points de A_s et A_k s'appellent respectivement points s et points k de A.

Citons deux définitions :

A est *ouvert*, si

$$A = A_i.$$

A est *ensemble-frontière*, si

$$A = A_r.$$

20. Espaces métriques ou classes (D) de Fréchet. — On introduit les espaces métriques en considérant les systèmes (E, δ), formés par une classe E et une règle δ qui fait correspondre à chaque couple de points (P, Q) un nombre réel non négatif $\delta(P, Q)$ appelé *distance*

---

(1) « Grenze » chez M. Hausdorff

de P et Q et jouissant des propriétés suivantes :

$$\delta(P, Q) = \delta(Q, P), \tag{1}$$

$$\delta(P, Q) = 0 \quad \text{équivaut à} \quad P = Q, \tag{2}$$

$$\delta(P, Q) \leqq \delta(P, R) + \delta(R, Q). \tag{3}$$

[29, *a*].

Voisinages. — Dans l'espace métrique (E, δ) on définit les voisinages (normaux) de la façon suivante :

Soit P_0 un point donné et $\rho < 0$; considérons l'ensemble $\sigma(P_0, \rho)$ de tous les points P tels que

$$\delta(P_0, P) < \rho.$$

Cet ensemble sera appelé « *la sphère de centre* P_0 *et de rayon* ρ ». Appelons voisinages d'un point P_0 les sphères de centre P_0. Nous avons ainsi un système de voisinages « *sphériques centrés* ».

Les voisinages étant définis on construit « normalement » les notions de *limite* et de *point* d'accumulation. Il est clair qu'on peut définir d'autres systèmes de voisinages équivalents au précédent. Dans notre système primitif la limite P d'une suite infinie

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots,$$

est donnée par la condition

$$\lim_{n \mid \infty} \delta(P_n, P) = 0.$$

Transportation et équivalence. — Le lecteur définira lui même la transportation des distances d'un système (E, δ) sur $\overline{E}$. L'assertion que deux définitions, δ et δ_1, de la distance de deux points d'un ensemble E sont équivalentes exprime qu'une suite infinie de points

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots,$$

convergente dans l'un des systèmes (E, δ) ou (E, δ_1) vers un point P converge aussi vers P dans l'autre système.

Une condition nécessaire et suffisante de l'homéomorphie entre (E, δ) et (E_1, δ_1) peut s'énoncer comme il suit :

Il existe une correspondance biunivoque S entre E et E_1 telle que, si l'on transporte les distances δ de E sur E_1 en formant le système $(E_1, \overline{\delta})$, les deux systèmes de distances δ_1 et $\overline{\delta}$ sont équivalents.

21. Remarque. — Le sujet propre du présent fascicule étant constitué par la topologie du plan euclidien, nous n'avons envisagé les autres espaces topologiques que dans la mesure indispensable à faire comprendre la place du plan euclidien dans la théorie générale des espaces topologiques; nous avons donc passé sous silence divers espaces topologiques qui ont été imaginés jusqu'à présent. Consulter {*a*, *e*, 31, 32].

DEUXIÈME PARTIE.

LE PLAN EUCLIDIEN.

CHAPITRE I.

LES ENSEMBLES PLANS EN GÉNÉRAL.

I. — Introduction.

22. Plan euclidien. — On appelle *plan arithmétique* (euclidien) l'espace métrique particulier où l'on a défini les *points* et les *distances* de la façon suivante :

1° On appelle *point* toute couple de nombres réels disposés dans un ordre déterminé.

2° On appelle *distance* de deux points $P(a, b)$ et $Q(c, d)$ le nombre non négatif

$$\delta(P, Q) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}.$$

Tout espace topologique homéomorphe au plan arithmétique s'appelle *plan topologique*. Étant donné un tel espace (E, K) ainsi qu'une homéomorphie S entre le plan arithmétique et l'espace considéré (E, K), on voit aisément comment, par voie de transportation au moyen de S, on peut définir, par rapport à S, des notions telles que celles de « droite », de « triangle », de « cercle », etc. Il suffit évidemment d'étudier les propriétés topologiques du plan arithmétique pour faire, par cela-même, l'étude des propriétés d'un plan topologique quelconque.

23. Géométrie euclidienne et topologie. — Il y a lieu de distinguer parmi les êtres *topologiques* et les êtres *géométriques*. Nous pouvons voir avec facilité que l'homéomorphie ne conserve pas, en général, *les distances*. Les homéomorphies particulières, qui n'altèrent pas les distances, c'est-à-dire les transformations isométriques, constituent une sous-classe particulière dans la classe de l'ensemble de toutes les homéomorphies. Les invariants des transformations isométriques forment l'objet de la *géométrie plane* (euclidienne). Il résulte des remarques précédentes que les êtres *géométriques* ne se conservent pas tous dans toutes les homéomorphies et ne sont par suite pas, en général, des êtres *topologiques*, en revanche tout être topologique est nécessairement un être géométrique.

Les êtres géométriques possèdent aussi des propriétés topologiques. Par exemple, la propriété d'une ligne droite d'être un ensemble fermé est une propriété topologique d'un être géométrique.

24. Voisinages. — Tout en considérant les voisinages sphériques centrés comme normaux, nous employons d'autres systèmes équivalents. Les plus connus parmi eux sont : 1° les voisinages sphériques *non centrés*, c'est-à-dire les sphères entourant le point considéré P sans l'admettre pour centre; les voisinages carrés centrés ou non, dont les côtés sont parallèles aux axes ou non.

Dans tout ce qui suit nous adopterons, pour les notions de *limite* et de *point d'accumulation* les définitions des n^os 20 et 18.

25. *Remarque sur les espaces euclidiens.* — On définit un tel espace en considérant comme ses points, les suites de n nombres réels

$$(x_1, \ldots, x_n),$$

et l'on fixe la notion de la distance par la formule

$$\delta(P, Q) = \sqrt{\Sigma(x_i - y_i)^2}.$$

II. — Généralités sur les ensembles fermés et ouverts dans le plan arithmétique.

26. Ensembles fermés. — Rappelons les propriétés élémentaires de tels ensembles :

1° La somme d'un nombre fini et le produit d'un nombre quelconque de tels ensembles est encore un ensemble fermé. Dans le cas des ensembles parfaits c'est seulement la somme d'un nombre fini qui est encore un ensemble parfait.

Un ensemble fini (même vide) et le plan entier sont fermés.

2° Pour un ensemble A quelconque, les ensembles A_α, A_β, A_γ sont toujours fermés {*voir* n° 19}.

3° La puissance d'un ensemble A parfait et non vide est celle du continu $= c$.

Pour un ensemble A fermé on a toujours

$$A_k = A_\gamma \qquad \text{et } A_\gamma \text{ est } \textit{parfait;}$$

la différence $A - A_\gamma = A_s$ est au plus dénombrable. La puissance d'un ensemble fermé est *finie*, *alèphe-zéro* ou c.

27. Ensembles ouverts. — 1° La somme d'un nombre quelconque et le produit d'un nombre fini d'ensembles ouverts sont encore un ensemble ouvert. Chaque ensemble ouvert est dense en soi.

2° La puissance d'un ensemble ouvert non vide est celle du continu.

3° Pour chaque ensemble A son *intérieur* A_i est ouvert.

Entre les ensembles ouverts et fermés il y a une liaison intime exprimée par le théorème : *Le complémentaire d'un ensemble ouvert est fermé et réciproquement.*

III. — Distances et ensembles limites.

28. Distance de deux ensembles. — On entend par *distance de deux ensembles* A *et* B, la borne inférieure de la distance d'un point de A à un point de B; nous représenterons cette distance par

$$\delta(A, B).$$

Lorsque deux ensembles non vides A et B sont fermés et bornés (*voir* n° 29), il existe au moins un système de deux points, appartenant respectivement aux ensembles A et B tels que leur distance soit précisément égale à

$$\delta(A, B).$$

On entend par *distance d'un point* P *à un ensemble* A la borne inférieure de la distance du point P à un point de l'ensemble A et on la représente par $\delta(P, A)$.

29. Diamètre. — Soit A un ensemble quelconque, la borne supérieure de la distance de deux de ses points s'appelle *diamètre* de l'ensemble A et nous la représenterons par

$$d(A).$$

Lorsque $d(A)$ est *fini* on dit que A est *borné*. Lorsqu'un ensemble A est borné et fermé, il existe deux points dans A dont la distance est égale au diamètre de l'ensemble A.

30. Limites d'une suite infinie d'ensembles. — Nous ne considérerons parmi les diverses figures-limites que l'on peut faire correspondre à une suite infinie d'ensembles, soit

$$(1) \qquad A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots,$$

que les deux suivantes :

1° *L'ensemble d'accumulation* de la suite (1), formé par tous les points P tels que l'on ait

$$\liminf_{n,\infty} \delta(P, A_n) = 0.$$

2° *L'ensemble limite* de la suite 1°, c'est à-dire l'ensemble de tous les points P tels que l'on ait

$$\lim_{n|\infty} \delta(P, A_n) = 0.$$

Remarquons que :

1° Lorsque les ensembles de la suite 1° sont *bornés dans leur ensemble*, l'ensemble d'accumulation de la suite considérée n'est pas *vide*.

2° L'ensemble limite de la suite (1) est contenu dans l'ensemble d'accumulation de cette suite.

3° Les deux ensembles précédents sont *fermés* (*voir* [*a*, *b*, **41**]).

IV. — Connexité.

31. Notion de connexité. — Diverses définitions de la connexité d'un ensemble ont été proposées par C. Jordan, G. Cantor et Weierstrass; celle qui semble le mieux répondre aux besoins de la science a été formulée par M. Hausdorff et, indépendamment de lui, par M. Lennes [*a*, 65]; la voici :

On dit qu'un ensemble N est *connexe* s'il est impossible de le *décomposer* en deux ensembles A et B qui soient : 1° *non vides*; 2° tels que l'on ait

$$(\alpha) \qquad A \times \overline{B} + \overline{A} \times B = 0 \qquad (\textit{voir}\ n^o\ 19).$$

Un ensemble connexe est *connexe au sens strict*, s'il n'est pas vide et ne se réduit pas à un point unique.

Pour mieux comprendre la nature de la condition (α), appelée « *condition Lennes-Hausdorff* », nous en ferons connaître une forme nouvelle. Appelons avec M. Hausdorff un ensemble M, ensemble *fermé par rapport à un autre ensemble* N, au cas où

$$N \times \overline{M} = M \qquad [\textit{voir}\ n^o\ 19(1)],$$

c'est-à-dire au cas où M *contient tous ceux de ses points d'accumulation qui appartiennent à* N.

D'après MM. Knaster et Kuratowski [55] une condition nécessaire et suffisante pour que A et B soient fermés par rapport à leur somme $A + B$ s'exprime par l'égalité

$$A \times \overline{B} + \overline{A} \times B = A \times B,$$

donc la condition (α) équivaut à l'ensemble des deux suivantes : 1° les ensembles A et B sont disjoints; 2° chacun d'eux est fermé par rapport à leur somme.

On nomme $A \times \overline{B} + \overline{A} \times B$ la *jonction* de A et B. Cela posé la condition (α) exprime que la *jonction* est vide; on dit alors que A et B sont *séparés* [M. Mazurkiewicz]. MM. Knaster et Kuratowski ont écrit un Mémoire important sur les ensembles connexes, paru dans les *Fundamenta* II, toutefois, faute de place, nous devons renoncer à en rendre compte et nous nous bornerons à signaler les théorèmes les plus importants dus à M. Hausdorff [*a*]; voici ces théorèmes :

Théorème I. — *Lorsqu'il correspond à tout système de deux points de l'ensemble* A *un sous-ensemble connexe de* A *qui les contient, l'ensemble* A *est lui-même connexe.*

THÉORÈME II. — *La somme d'un nombre quelconque d'ensembles connexes ayant deux à deux des points communs est encore un ensemble connexe.*

THÉORÈME III. — *Lorsque* A *est connexe, l'ensemble* $\overline{A}(=A_\alpha)$ (*voir n°* 19) *l'est aussi.*

THÉORÈME IV. — *Si* M *est connexe et s'il contient des points appartenant à un ensemble* A *ainsi que des points de son complémentaire* E — A, *alors* M *contient aussi des points de la frontière* $\mathfrak{F}(A)$ *de* A.

On appelle *continu* un ensemble *connexe fermé;* si un continu contient plus d'un seul point, nous dirons qu'il est un *continu au sens strict*. Un continu au sens strict est un ensemble parfait.

Un ensemble *ouvert connexe* s'appelle *domaine*.

Remarque. — On se sert parfois au lieu du terme *connexe* d'autres termes comme : *bien enchaîné, d'un seul tenant*, etc.

32. Composants d'un ensemble. — Analysons au point de vue de la connexion un ensemble quelconque A. Soit P un de ses points; fixons notre attention sur les ensembles *connexes contenant* P et *contenus* dans A. Ils admettent un ensemble *maximum* (*voir* n° 7). C'est ce maximum qu'on appelle le composant de A relatif à P.

THÉORÈME I. — *Tout ensemble* A *est décomposable en un nombre fini ou infini d'ensembles disjoints et connexes, constituant une famille soit* $\mathfrak{A}$ *de telle sorte que le composant de* A *relatif à n'importe quel point de l'ensemble* A *soit un ensemble de la famille* $\mathfrak{A}$ *et tout ensemble de cette famille soit le composant de* A *relatif à quelque point de cet ensemble.*

THÉORÈME II. — *Un composant d'un ensemble* fermé *est un continu* (*au sens large*).

THÉORÈME III. — *Les composants d'un ensemble ouvert sont toujours des* domaines.

THÉORÈME IV. — *Un ensemble connexe forme à lui seul son composant unique.*

THÉORÈME V. — *Les composants d'un ensemble A sont tous* fermés par rapport *à* A (*voir* n° 31).

THÉORÈME VI. — *Le nombre de composantes* (*domaines*) *d'un ensemble ouvert est* fini *ou* alèphe-zéro.

33. **Connexité au sens de G. Cantor** [18]. — D'après G. Cantor, un ensemble A est connexe, si : à tout nombre positif ε et à tout couple (P, Q) de deux de ses points, on peut faire correspondre une suite finie

$$P = P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n = Q,$$

de points appartenant à A et tels que

$$\delta(P_i, P_{i+1}) < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

La connexité au sens de la définition précédente n'est pas une notion *topologique*, car l'homéomorphie d'un ensemble connexe au sens de G. Cantor peut n'être pas connexe en ce sens. Il faut cependant ajouter que tout continu est connexe aussi bien au sens de Hausdorff qu'au sens de Cantor et que chaque ensemble fermé, borné et connexe au sens de Cantor est un *continu*.

V. — ENSEMBLES COMPACTS.

34. **Ensembles compacts.** — On dit avec M. Fréchet [29] que A est un ensemble *compact* s'il ne contient aucun sous-ensemble *infini* ne possédant pas au moins un point d'accumulation.

La notion d'ensemble compact est d'une importance fondamentale pour les espaces topologiques généraux; dans le cas du plan elle *coïncide avec la notion d'ensemble borné*, c'est ce qui résulte du théorème bien connu sous le nom de théorème de Bolzano et Weierstrass :

Le dérivé d'un ensemble borné et infini n'est jamais vide.

Bien des théorèmes se rattachent étroitement à la notion de compacité, en voici les plus importants :

THÉORÈME DE CANTOR [19]. — *Soit une suite infinie*

$$A_1 A_2, \ldots, A_n \ldots$$

d'ensembles : 1° *fermés,* 2° *bornés et* 3° *tels que chaque* $A_i (i > 1)$ *soit contenu dans* A_{i-1}. *Dans ce cas le produit :* $\Pi\{A_i\}$ n'est pas vide.

THÉORÈME DE F. RIESZ [101]. — *Soit* $\mathfrak{A}$ *une famille d'ensembles : 1° fermés, 2° bornés et 3° tels que tout nombre fini d'ensembles de la famille possède au moins un point commun, alors le produit* $\Pi(\mathfrak{A})$ *n'est pas vide.*

THÉORÈME DE BOREL-LEBESGUE [6] (chez les Allemands « de Heine-Borel »). — *Si un ensemble* A borné *et* fermé *est contenu dans la somme d'une famille* F *d'ensembles* ouverts, *il existe parmi les ensembles de la famille* F *un* nombre fini *d'ensembles tels que* A *soit encore contenu dans leur somme.*

Remarque. — On obtient une généralisation du théorème précédent due à M. W. H. Young et Lindelöff si l'on remplace dans son énoncé le mot « fermé » par « quelconque » et le mot « fini » par « au plus dénombrable ».

La réciproque du théorème de Borel-Lebesgue est donnée par O. Veblen [*a*].

VI. — DENSITÉ RELATIVE.

35. On dit que A est un ensemble *partout dense dans un ensemble parfait* B, si $A \subset B$ et sa fermeture $\overline{A}$ coïncide avec B

$$\overline{A} = B.$$

A est *non dense* dans le plan E, lorsque l'*intérieur* de son complémentaire E — A est partout dense dans E. En d'autres termes : dans chaque voisinage d'un point quelconque du plan il y a des points de E — A qui y forment des ensembles ouverts.

CHAPITRE II.

COURBES PLANES.

I. — DÉFINITIONS EMPLOYÉES EN ANALYSE CLASSIQUE.

36. Lorsque le besoin de fixer la notion de courbe s'est fait sentir en mathématique, on a commencé par définir une courbe plane comme le lieu des points défini par l'ensemble de deux équations

$$x = \varphi(t), \qquad x = \psi(t),$$

où $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ représentent des fonctions continues de t, définies dans un intervalle fermé $[ab]$; d'après cela une courbe serait tout simplement une image continue d'un segment de droite. L'exemple bien connu de M. Peano [98] a prouvé que la définition précédente était trop large et C. Jordan a introduit dans la science les définitions suivantes (1) :

On appelle *arc simple* une image continue et *biunivoque* d'un segment de droite. On appelle *courbe de Jordan* (fermée) toute image biunivoque et continue d'une circonférence de cercle.

Toutefois les notions d'*arc simple* et de *courbe de Jordan* manquent de généralité et les définitions de ces notions font intervenir un élément étranger à la question, à savoir le paramètre du point de la courbe.

Ainsi, à partir de l'important travail de Janiszewski (Thèse 1911 soutenue à la Sorbonne) de nombreux travaux ont été consacrés à l'étude de la notion de courbe et, bien qu'un résultat définitif n'ait pas encore été atteint, ces travaux ont non seulement grandement élucidé la notion de courbe mais ont encore contribué dans une large mesure au développement général de la topologie.

Dans ce qui va suivre, nous allons présenter une analyse détaillée des travaux en question.

II. — Continus de condensation.

37. C'est S. Janiszewski qui a introduit cette notion indispensable dans l'étude de la structure des continus [41]. En voici la définition :

Un continu au sens strict A contenu dans un autre continu B, est dit un *continu de condensation de* B :

1° Si A est un vrai sous-continu de B

$$A \subset B, \qquad A \neq B;$$

2° si le dérivé du reste B — A est égal à B

$$(B - A)' = B \qquad [\text{ou bien } \overline{B - A} = B \ (\textit{voir } \text{n}^{\text{o}}\ 19)];$$

en d'autres termes lorsque, A étant un vrai sous-continu au sens strict

(1) La terminologie n'est pas celle de Jordan.

de B, se compose exclusivement de points d'accumulation de la différence B — A.

Il est important de connaître quelques théorèmes dus à S. Janiszewski sur les continus de condensation.

1. Lorsque deux continus de condensation d'un même continu A ne sont pas disjoints, leur somme est aussi un continu de condensation de A.

2. Si les continus $A_1, \ldots, A_n$ n'ont pas de continu de condensation, leur somme $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, lorsqu'elle est un continu, n'en a pas non plus.

3. Si l'ensemble d'accumulation d'une suite infinie F de continus disjoints est un continu, tout continu A qui contient la somme $\Sigma(F)$ possède des continus de condensation.

III. — Continu irréductible entre deux points.

38. La notion intuitive d'*arc courbe* ne paraît imposer à l'ensemble de points constituant un arc de courbe que les conditions suivantes :

1° Cet ensemble doit être un continu;
2° Il ne peut avoir de points intérieurs;
3° Il doit posséder *deux* extrémites.

Ayant adopté ces trois conditions, M. Zoretti est arrivé à la notion importante à plus d'un titre, de *continu irréductible entre deux points*.

En voici la définition [128] :

Continu C irréductible entre P et Q c'est un continu contenant P et Q dont on ne peut enlever aucun point, sans qu'il cesse d'être continu *joignant* P et Q, c'est-à-dire contenant ces deux points.

Théorème I fondamental (Janiszewski [41], Mazurkiewicz [67], Zoretti [151]). — *Tout continu* borné *joignant deux points* P *et* Q *contient un continu irréductible entre* P *et* Q.

Théorème II. — *Un continu irréductible entre* P *et* Q *ne contient pas de points intérieurs.*

Pour éviter des longueurs fastidieuses, nous adopterons la convention suivante : pour exprimer qu'un ensemble A est un continu irréductible entre deux points P et Q, nous dirons simplement que A est un (PQ); ayant à considérer différents (PQ) particuliers, nous les représenterons par les symboles tels que $(PQ)_0$, $(PQ)_1$, etc.

Les théorèmes précédents suggèrent l'idée qu'il conviendrait de faire coïncider la notion d'arc ayant deux extrémités P et Q avec celle d'un (PQ). Toutefois M. Brouwer [14] a fait connaître un continu C lequel, comme l'ont reconnu Janiszewski [41] a la propriété d'être à la fois un (PQ), un (QR) et un (RP), les points P, Q, R constituant trois points distincts (*voir* aussi Yoneyama [123]).

En réalité on a seulement le théorème suivant :

Théorème III [41]. — *Sur un* $(PQ)_0$ *donné, on peut trouver au moins un point* M *différent de chacun des points* P *et* Q *et tel que tout* $(PM)_0$ *située sur* $(PQ)_0$ *soit différent de* $(PQ)_0$.

Si, comme il est naturel, on admet qu'un arc doit avoir deux extrémités et deux seulement, on doit tirer des faits signalés en dernier lieu, que la notion de continu irréductible entre deux points $P_0 \neq Q$ doit être considérée comme plus générale que celle d'arc ayant les points P et Q pour extrémités. Pour aller plus loin, considérons un point P appartenant à un continu C, nous dirons avec Janiszewski que le point P est de *première espèce*, s'il n'est pas situé sur aucun continu de condensation de C et qu'il est de *seconde espèce* dans le cas contraire.

Théorème IV [41]. — *Si un continu* A *est à la fois un* (PQ), (QR) *et* (RP) *les points* P, Q, R *étant* distincts, *tout point de* A *est* de seconde espèce.

IV. — Continus indécomposables.

39. Appelons avec MM. Janiszewski et Mazurkiewicz [46, 69] un continu (au sens strict) A *indécomposable* s'il est impossible de trouver deux continus B et C *différents* de A et *non forcément disjoints* tels que l'on ait

$$B + C = A.$$

Un premier exemple d'un tel continu est le continu de M. Brouwer [14] considéré plus haut. MM. Janiszewski, Kuratowski, Knaster et aussi M. Yoneyama ont consacré à l'étude de tels continus des Mémoires spéciaux [46, 53, 13, 124]. Voici leurs résultats les plus importants :

Théorème I. — *Pour qu'un continu* C *soit indécomposable, il faut et il suffit que chacun de ces vrais sous-continus soit un de ses continus de condensation.*

Théorème II. — *Un continu indécomposable n'est jamais la somme d'un nombre fini ou dénombrable de ses vrais sous-continus.*

Remarque. — Pour saisir mieux le sens du théorème précédent, remarquons que d'après M. Sierpinski [109] un continu plan borné, mais d'ailleurs *quelconque*, n'est jamais la somme d'un nombre fini ou dénombrable d'ensembles *fermés disjoints*; ce qui n'est plus vrai pour des continus plans *non bornés*, mais un tel continu n'est jamais, d'après M. Mazurkiewicz [79] la somme d'un nombre fini ou dénombrable de *continus disjoints*.

Théorème III [Yoneyama]. — *Pour qu'un continu* C *soit indécomposable, il faut et il suffit que,* P *étant un point quelconque de* C, *il en existe un autre* $Q (Q \neq P)$ *sur* C *tel que* C *soit un continu irréductible entre* P *et* Q.

Nous arrivons enfin au théorème de M. Mazurkiewicz [69].

Théorème IV. — *Pour qu'un continu* C *soit indécomposable, il faut et il suffit qu'il existe trois points* distincts P, Q *et* R *sur* C tels que C *soit à la fois un* (PQ), *un* (QR) *et un* (RP).

Il résulte de ce qui précède que la singularité offerte par le continu de M. Brouwer (*voir* n° 38) dérive de ce que ce continu est *indécomposable.*

V. — Arc simple.

40. Dans ce qui précède nous avons reconnu qu'un continu irréductible entre deux points ne satisfait pas nécessairement à la troisième des conditions (*voir* n° 38) qu'il a semblé naturel d'imposer à toute définition d'un arc et cela a décidé S. Janiszewski à proposer la définition suivante :

Définition. — On appelle *arc simple* un continu irréductible entre deux points, borné et tel que tout point M appartenant à ce continu le décompose en deux autres continus n'ayant en commun que le seul point M.

THÉORÈME [41]. — La définition précédente équivaut à la suivante : *un arc simple est un continu irréductible entre deux points, borné et ne contenant aucun continu de condensation.*

Enfin Janiszewski a démontré dans sa Thèse que la définition d'arc simple énoncée plus haut coïncide avec la définition classique (*voir* n° 36).

VI. — COURBE DE JORDAN (FERMÉE).

41. Une autre définition de la courbe de Jordan que la définition classique du n° 36, peut s'énoncer comme il suit :

Définition. — On appelle *courbe de Jordan* la somme de deux arcs simples bornés, entre la même couple de points P et Q, ces continus n'ayant en commun que les seuls points P et Q.

Cette nouvelle définition est équivalente à celle du n° 36.

THÉORÈME I [Janiszewski 41]. — *Une courbe de Jordan ne contient aucun continu de condensation.*

THÉORÈME II [Kline 48]. — *Pour qu'un ensemble* C *soit une courbe de Jordan, il faut et il suffit que* C *soit un continu au sens strict, ayant la propriété suivante :* Si l'on retranche de C un sous-ensemble *connexe* quelconque, le reste constituera un sous-ensemble *connexe.*

VII. — COURBES CONTINUES AU SENS CLASSIQUE.

42. La définition classique du n° 36 d'une courbe continue, nous permet de démontrer facilement qu'une telle courbe est toujours un *continu.* Un tel continu peut se réduire à un seul point, il peut être dans quelques cas une portion entière du plan, mais en tout cas il ne peut être un continu *quelconque.* Appelons, conformément à la terminologie des *Fundamenta*, *continu de Jordan* tout continu qui, selon la définition du n° 36, constituerait une courbe.

Quelle est la structure topologique d'un tel continu? M. Schoenflies [c] le premier a donné une réponse à cette question; mais, en nous réservant de faire connaître son théorème plus tard, nous nous occuperons actuellement des résultats obtenus indépendamment l'un de l'autre d'abord par M. Mazurkiewicz [68, 71, 81] et ensuite par M. Hahn [39].

Voici les définitions et théorèmes de M. Mazurkiewicz :

Définition I. — On appelle *oscillation d'un continu* A *en un point* P appartenant à ce continu, le nombre non négatif

$$\sigma_A(P) = \lim_{X\ Y \to P} \sup \rho_A(X, Y),$$

où X et Z sont deux points appartenant à A et où $\rho_A(X, Y)$ désigne $\lim\inf d(A')$, l'A′ étant un sous-continu quelconque de A contenant les points X et Y ayant $d(A')$ pour diamètre [n° 29].

Lorsque $\sigma_A(P) = 0$, nous dirons que P est un point *du premier genre par rapport* à l'ensemble A lorsque $\sigma_A(P) \neq 0$, nous dirons que P est un point *du second genre.*

Théorème I. — *Le genre d'un point par rapport à un continu est un invariant topologique.*

Théorème II. — *Pour qu'un continu* A *soit un continu de Jordan il faut et il suffit qu'il soit* borné *et que tous ses points soient du* premier genre *par rapport à* A.

Voici le résultat de M. Hahn dans le même ordre d'idées :

Définition II. — Un ensemble A est dit *localement connexe en un de ses points*, soit P, [1] si à tout $\varepsilon > 0$, il correspond un $\delta > 0$ tel que tout point Q de A dont la distance à P est $< \delta$ puisse être joint au point P au moyen d'un ensemble connexe B contenu à la fois dans A et dans le cercle de centre P et de rayon ε.

Corollaire. — Lorsque A est un *continu*, il est permis de remplacer dans la définition *précédente le terme* « ensemble connexe B » par « *continu* B ».

Théorème III. — A *étant un continu* borné *les deux proposi-*

---

[1] « Zusammenhangend im Kleinen ».

tions « A *est* localement connexe *ou point* P » *et* « P *est du* premier genre *par rapport à* A » *sont équivalentes.*

THÉORÈME IV (Hahn). — *Pour qu'un continu* borné A *soit un continu de Jordan, il faut et il suffit qu'il soit localement connexe en chacun de ses points.*

Signalons encore un critère de M. Sierpinski [105].

THÉORÈME V. — *Pour qu'un continu* borné *soit un continu de Jordan, il faut et il suffit que pour tout nombre positif* ε, *il soit la somme d'un nombre fini des continus dont les diamètres ne surpassent pas* ε.

D'autres critères ont été donnés par M. Kuratowski [56], M. R.-L. Moore [85, 89] et M. Tietze [*Math. Zeitschr*, t. 5].

Pour terminer, citons encore les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME VI [71]. — *Deux points quelconques d'un continu de Jordan* A *peuvent être joints par un arc simple contenu entièrement dans* A.

THÉORÈME VII. — *L'oscillation d'un continu* indécomposable *est en chacun de ses points égale au diamètre de* A [46].

Nous renvoyons le lecteur qui voudrait approfondir les questions traitées dans ce Chapitre aux Ouvrages et Mémoires cités dans la bibliographie et spécialement aux numéros : 22, 24, 35, 36, 37, 49, 52, 53, 58, 71, 79, 85, 87, 91, 92, 114, 119, 120, 122, 128.

CHAPITRE III.

COUPURES.

I. — DÉFINITIONS ET PROBLÈMES.

43. Commençons par énoncer la définition classique de *coupure* du plan.

Définition I. — On appelle *coupure* du plan E tout *ensemble fermé* A tel que l'ensemble E — A (ouvert) ne soit pas *connexe*.

L'ensemble A étant une coupure du plan E, l'ensemble E — A peut être décomposé, et cela d'une seule manière, en un nombre fini ou en une infinité dénombrable de composants; l'ensemble A étant fermé, ces composants sont tous des *domaines*.

Définition II. — L'ensemble A étant fermé, on dit que les *domaines* qui sont les composants de E — A sont *déterminés* par A.

M. Mazurkiewicz [70] a généralisé la définition classique de coupure de la façon suivante :

Définition III. — Soit M un ensemble *fermé*, A un autre ensemble *fermé* et *contenu* dans M, P et Q deux points appartenant à M. On dit que l'ensemble A constitue une *coupure entre* P *et* Q *dans* M, ou bien qu'il est une S(P, Q; M), lorsque M — A n'est pas *connexe* et P et Q appartiennent à deux composants *différents* de l'ensemble M — A.

Dans le cas où M représente le plan tout entier on écrit plus simplement : S(P, Q).

Un grand nombre d'intéressants problèmes de topologie sont étroitement liés à la notion de coupure. Les trois problèmes suivants nous semblent être les plus importants :

Problème α. — *Étant donné un ensemble fermé, reconnaître s'il constitue une coupure du plan.*

Problème β. — *Quel est le nombre de domaines déterminés par un ensemble fermé donné. Ce nombre est-il fini ou non ?*

Problème γ. — *Considérant l'un des domaines déterminés dans le plan, soit* D, *par un ensemble donné fermé* A, *étudier la relation dans laquelle se trouve la frontière de* D *avec l'ensemble* A.

II. — Problème α.

44. Voici les plus importants des théorèmes relatifs au problème α.

Théorème I [Janiszewski 42]. — *Soient* A *et* B *deux ensembles fermés et bornés dont le produit* $A \times B$ *est connexe*, P *et* Q *deux points donnés. Lorsque ni* A *ni* B *ne sont des* S(P,Q), *leur somme* A + B *ne l'est pas non plus.*

Théorème II [Straszewicz 110]. — *Considérons trois points distincts* P, Q *et* R *ainsi que deux ensembles fermés et bornés* A *et* B; *lorsqu'aucun des ensembles* A *et* B *n'est ni une* S(P, Q), *ni une* S(Q, R), *ni une* S(P, R), *et lorsque l'ensemble* $A \times B$ *possède précisément* deux *composantes, la somme* $A + B$ *n'est pas une coupure du plan entre l'un au moins des systèmes de deux points qu'il est possible de former avec les points* P, Q *et* R.

Théorème III [Janiszewski 42, Miss Anna Mullikin 93]. — *Lorsque le produit* $A \times B$ *de deux* continus *bornés* A *et* B *n'est pas connexe, leur somme* $A + B$ *est une coupure du plan.*

Théorème IV [de Jordan, première partie]. — *Une courbe de Jordan* (*fermée*) *est une coupure du plan.*

Théorème V [Kuratowski 60]. — *Pour qu'un continu de Jordan* (*voir* n° 42) *soit une coupure du plan, il faut et il suffit qu'il soit la somme de deux continus dont le produit n'est pas connexe.*

Comme corollaire :

Théorème VI. — *Un arc simple n'est pas une coupure du plan.*

Théorème VII [Miss Anna Mullikin 93]. — *La somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés disjoints qui ne sont pas des coupures du plan n'en est pas une non plus.*

La plus grande partie de ces théorèmes ont été généralisés pour les ensembles non bornés par MM. Knaster et Kuratowski dans [54].

III. — Problème β.

45. M. Brouwer a trouvé [15] une condition nécessaire et suffisante pour qu'un continu détermine un nombre donné *n* de domaines; l'exposé de la théorie assez compliquée de M. Brouwer nous entraînerait trop loin, aussi nous bornons-nous ici à signaler les résultats suivants :

Théorème I [Straszewicz 111]. — *Soient* A *et* B *deux continus* *bornés, lorsque le produit* $A \times B$ *possède n* ($n \leqq 2$) *composants, la somme* $A + B$ *détermine au moins n domaines.*

Corollaire [Formule de M. Straszewicz 111]. — Désignons par A et B deux ensembles bornés et fermés donnés et supposons que chacun des ensembles

$$C(A) = E - A, \qquad C(B) = E - B, \qquad E = \text{plan},$$

ainsi que chacun des ensembles

$$A, B \quad \text{et} \quad A \times B,$$

comporte un nombre *fini* de composants. Cela posé, si d'une façon générale on convient de désigner par rapport à un ensemble quelconque M, par h_M le nombre supposé fini de ses composants, par $C(M)$ son complémentaire $E - M$, et si l'on définit le symbole I_M par la formule

$$I_M = h_{C(M)} - h_M,$$

on aura

$$I_A + I_B = I_{A+B} + I_{A\times B}.$$

THÉORÈME II [111]. — *Lorsque les continus bornés* **A** *et* **B** *ne sont pas des coupures du plan et lorsque le produit* $A \times B$ *possède n* ($n \geqq 1$) *composants, la somme* $A + B$ *détermine n domaines dans le plan.*

D'où :

THÉORÈME III [de Jordan, deuxième partie]. — *Une courbe de Jordan détermine dans le plan* deux *domaines.*

THÉORÈME IV [111]. — *Lorsque* A *et* B *sont deux continus dont le produit* $A \times B$ *est borné et détermine une infinité de domaines, la somme* $A + B$ *détermine aussi une infinité de domaines.*

IV. — PROBLÈME γ.

46. Il est clair que la frontière d'un domaine déterminé par un ensemble fermé A est aussi un ensemble fermé et que cet ensemble est inclus dans A, pouvant évidemment se confondre avec A.

Désignons par D l'un des domaines déterminés par un ensemble fermé A; pour désigner que la frontière de D se confond avec A, nous dirons (avec M. Rosenthal) que le domaine D est un domaine *principal* par rapport à A.

Voici un théorème remarquable de M. Rosenthal [102] :

THÉORÈME I. — *Soit* A *la somme de deux continus bornés irréductibles entre un même système de deux points* P *et* Q, *continus n'ayant en commun que les deux points. Parmi les domaines déterminés par l'ensemble* A *il y a précisément* deux *domaines* principaux *par rapport à cet ensemble.*

Le théorème précédent entraîne immédiatement le suivant :

THÉORÈME II [de Jordan, troisième partie, due à M. Schoenflies]. — *Une courbe de Jordan ne détermine que des domaines principaux.*

Nous avons encore :

THÉORÈME III. — *Un arc simple détermine dans le plan un domaine principal.*

Il est évident que le nombre de domaines principaux par rapport à un ensemble fermé et borné A, peut être supérieur à l'unité; le cas le plus ordinaire est celui où il correspond à l'ensemble fermé et borné A que l'on considère, *deux* domaines principaux dont l'un n'est pas borné, mais peut il arriver que le nombre de domaines principaux *bornés* relatifs à l'ensemble A soit supérieur à l'unité.

Cette question équivaut évidemment à la suivante : « un domaine borné est-il complètement déterminé par sa frontière ». M. Brouwer en corrigeant les théorèmes erronés qui se sont glissés dans le livre, d'ailleurs très important, de M. Schoenflies [*c*] a trouvé [14] des exemples de continus, qui déterminent un nombre quelconque, même infini, de domaines *tous principaux* par rapport à ce continu. Un nouvel exemple de même genre a été donné par M. Denjoy [21]. Nous allons approfondir au paragraphe suivant l'intéressante question à laquelle se rapportent les exemples dont nous venons de parler.

V. — COUPURES IRRÉDUCTIBLES.

47. Considérons avec M. Kuratowski et M. Mazurkiewicz les coupures S(P, Q) [n°43] *irréductibles* c'est-à-dire telles qu'aucun vrai sous-ensemble d'une coupure du genre considéré ne constitue plus une $S(P, Q)$. Lorsqu'une coupure est une coupure *irréductible* entre tout système de deux points entre lesquels elle est une coupure, elle s'appelle coupure *irréductible complète.*

Voici les principaux théorèmes sur les coupures irréductibles :

Théorème I [Mazurkiewicz 70]. — *Une coupure irréductible entre deux points est un continu.*

Théorème II [Kuratowski 60]. — *Pour qu'une $\gamma(P, Q)$ soit irréductible entre* P *et* Q, *il faut et il suffit que* P *et* Q *appartiennent à deux domaines* principaux différents *déterminés par elle.*

Corollaire. — Pour qu'une coupure irréductible soit *complète* il faut et il suffit qu'elle ne détermine que des domaines *principaux.*

Théorème III [Mazurkiewicz 70]. — *Une coupure quelconque entre* P *et* Q *contient une coupure* irréductible *entre ces points.*

Théorème IV [Kuratowski 60]. — *Lorsqu'une coupure détermine un nombre* fini *de domaines, elle contient une coupure* irréductible complète.

Remarque. — L'hypothèse que n soit fini est *essentielle* (*voir* un exemple de M. Knaster [51]).

Théorème V [Kuratowski 60]. — *Une coupure irréductible et bornée complète est, ou bien un continu* indécomposable (*voir* n° 39), *ou bien la somme de deux* continus irréductibles *entre un même système de deux points* (*voir* n° 38).

Théorème VI [Kuratowski 60]. — *Toute coupure irréductible complète qui détermine* plus de deux *domaines est, ou bien un continu* indécomposable, *ou bien la somme de deux* continus indécomposables.

Ce théorème nous explique la nature des continus singuliers de M. Brouwer et de M. Denjoy : ces continus sont des continus *indécomposables.* Un exemple de M. Knaster [51] réalise la seconde des deux éventualités seules possibles d'après le théorème VI.

CHAPITRE IV.

DOMAINES.

I. — Ordre de connexion d'un domaine.

48. Il est évident que la frontière d'un domaine quelconque tout en étant toujours un ensemble fermé, n'est pas forcément un ensemble *connexe*. En partant de cette remarque M. Hausdorff [*a*] a posé la définition suivante :

Définition I. — On appelle *ordre de connexion* d'un domaine D dont la frontière est bornée le *nombre de composants* de la frontière F(D) de D.

Le nombre de composants de la frontière d'un domaine peut être *fini* ou *infini* : dans le premier cas le domaine sera dit à *connexion finie* et dans le second à *connexion infinie*.

Lorsque D est un domaine dont la connexion est infinie, le nombre des composants de sa frontière est égal à *alèphe-zéro* ou à la *puissance de continu* C.

La définition de M. Hausdorff présente l'inconvénient de faire intervenir les points-frontières du domaine considéré c'est-à-dire des points n'appartenant pas à ce domaine.

Une définition intrinsèque mais ne définissant l'ordre de connexion que comme un nombre fini et cela seulement pour un domaine borné, a été donnée par M. Carathéodory [17]. Voici cette définition :

Définition II. — L'assertion qu'un nombre fini n constitue l'ordre de connexion d'un domaine *borné* D, exprime que n satisfait aux conditions suivantes :

1° Parmi n polygones quelconques situés dans D et extérieurs les uns aux autres, il en existe au moins *un* dont l'intérieur est entièrement contenu dans D.

2° Il existe un système de $n - 1$ polygones extérieurs les uns aux autres, tous contenus dans D, et tels que l'intérieur d'aucun de ces polygones ne soit tout entier contenu dans D.

La définition de M. Carathéodory est équivalente à celle de M. Hausdorff en ce qui concerne les domaines bornés et à connexion finie, elle n'est d'ailleurs qu'une forme perfectionnée de la définition adoptée par C. Jordan dans son *Cours d'Analyse*.

Nous n'emploierons dans la suite de définition de M. Hausdorff que dans le cas seul où le domaine donné serait *borné*, en nous réservant la liberté de définir l'ordre de connexion d'un domaine *non borné* d'une autre manière.

Définition III. — On appelle un domaine D *simplement connexe* lorsque son ordre de connexion est égale à l'*unité*.

49. **Transversales.** — Énonçons la définition suivante :

Définition. — On appelle *transversale* d'un domaine donné D, tout *arc simple* dont les extrémités, soit P et Q, sont des points de la frontière F(D) du domaine D et dont tous les autres points appartiennent à D.

On dira qu'une transversale L d'un domaine D *décompose* le domaine D, lorsque l'ensemble D — L n'est pas connexe. Nous avons le théorème suivant :

Théorème I. — *Une transversale* L *d'un domaine* D *le décompose lorsque les extrémités* P *et* Q *de la transversale appartiennent à une même composante de la frontière du domaine considéré ; dans le cas contraire, la transversale ne décompose pas le domaine* [*b*].

Les théorèmes suivants font connaître la relation qui subsiste entre la notion de transversale et celle d'ordre de connexion d'un domaine.

Théorème II [*b*]. — *Soit* D *un domaine borné dont l'ordre de connexion est égal à un nombre fini* $n+1$. *On peut trouver un système de* n *transversales du domaine* D

$$L_1, L_2, \ldots, L_n,$$

qui ne se rencontrent pas à l'intérieur de D *et qui sont telles que l'ensemble*

$$D - L_1 - L_2 - \ldots - L_n$$

soit un domaine simplement connexe.

Voici un théorème récent dû à P. Urysohn [113] :

Théorème III. — *Soit* D *un domaine borné d'ailleurs quelconque. On peut trouver un système* au plus dénombrable *de* segments rectilignes

$$L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots.$$

1° *Que tous ces segments soient des transversales du domaine* D;

2° *Qu'ils ne se rencontrent pas à l'intérieur de* D;

3° *Que le domaine* D*, *défini par*

$$D^* = D - \sum_{(n)} L_n,$$

représente un domaine simplement connexe.

II. — Propriétés des frontières de domaines.

50. Citons d'abord deux théorèmes d'une grande utilité dans les applications :

Théorème I [Phragmén-Brouwer 14, généralisé par S. Mazurkiewicz 76]. — *La frontière d'un domaine déterminé par un* continu au sens strict *est un* continu au sens strict.

Théorème II. — *Lorsque deux domaines disjoints ont une même frontière et lorsque celle ci est bornée, cette frontière est un* continu *au sens strict* [*voir* Kerékjártó *b*].

51. **Accessibilité.** — Soient D un domaine et P un point de sa frontière F(D).

Posons la définition suivante :

Définition I [Schoenflies *c*]. — Le point P sera dit *accessible* (simplement) par rapport à D lorsqu'il existe un arc simple L dont une extrémité coïncide avec P, les autres points de L étant situés dans D.

Remarque. — On s'assure facilement qu'on obtient une définition équivalente à la précédente en y substituant aux mots « arc simple L dont une extrémité coïncide avec P » les suivants « continu L auquel appartient le point P ».

Pour définir un genre particulier d'accessibilité, convenons d'employer la locution suivante : Lorsqu'une transversale L d'un domaine donné D la décompose en deux domaines D_1 et D_2, nous appellerons chacun des domaines D_1 et D_2 *domaines détachés de* D *par la transversale* L.

Définition II [Schoenflies *c*]. — Appelons un point P de la frontière F(D) d'un domaine D, *parfaitement accessible par rapport à* D lorsque P est accessible (au sens de la définition I) par rapport à tout domaine D^* détaché de D et tel que P appartienne à la frontière de D^*.

Voici un théorème important sur les courbes de Jordan :

Théorème I [Schoenflies *c*]. — *Tous les points d'une courbe de Jordan, soit* C, *sont accessibles (et cela parfaitement) par rapport à chacun des deux domaines déterminés par* C.

Ayant défini la notion d'accessibilité, nous pouvons maintenant énoncer le critère de M. Schoenflies pour qu'un continu borné soit un continu de Jordan [*voir* n° 42], critère dont nous avons signalé l'existence au n° 42 [*c*].

Théorème II. — *Pour qu'un continu* borné A *soit un continu de Jordan, il faut et il suffit que :*

1° *Parmi les domaines déterminés par* A, *il en existe seulement un nombre fini dont le diamètre surpasse un nombre positif* ε *arbitrairement donné à l'avance et que :*

2° *Tout point* P *de* A *soit* parfaitement accessible [1] *par rapport à tout domaine déterminé par* A *à la frontière duquel il appartient.*

52. Courbe fermée de M. Schoenflies. — *Définitions* [Schoenflies *c*] On appelle *courbe fermée de M. Schoenflies* tout ensemble *fermé* et *borné* qui détermine dans le plan *deux* domaines, tous les deux *principaux* (*voir* n° 46).

---

(1) *Allseitig erreichbar.*

En vertu du théorème I, n° 51, toute courbe de Jordan est en même temps une courbe fermée au sens de M. Schoenflies, mais la réciproque n'est pas vraie; il serait donc intéressant de savoir quelle condition on doit imposer à une courbe de M. Schoenflies pour qu'elle soit une courbe de Jordan. Le théorème suivant connu sous le nom de « réciproque du théorème de Jordan », fournit une réponse à la question précédente.

Théorème I [c]. — *Pourqu'une courbe de M. Schoenflies soit en même temps une courbe de Jordan, il faut et il suffit que tout point de la courbe soit accessible par rapport à chaque domaine qu'elle détermine.*

Un autre théorème du même genre dû à M. Schoenflies [c] est le suivant :

Théorème II [c]. — *Pour qu'une courbe de M. Schoenflies se réduise à une courbe de Jordan, il faut et il suffit que tout point de cette courbe soit* parfaitement *accessible par rapport à* un *des domaines qu'elle détermine, le même pour tous les points.*

Pour les autres théorèmes analogues, on pourra se rapporter aux travaux de Mme Pia Nalli [94] et M. R. L. Moore [82].

53. **Non sinuosité** (1). — Adoptons avec M. Schoenflies [c 4] et M. Brouwer [*Math. Ann.*, 71, *Ueber die Jordanschen Mannigfaltigkeiten*] la définition suivante :

Définition. — Soient D un domaine, F(D) sa frontière, P un point de F(D); l'assertion que la frontière F(D) n'est pas *sinueuse en* P *par rapport au domaine* D, exprime qu'il correspond à tout $\varepsilon (\varepsilon > 0)$, si petit qu'il soit, un $\delta (\delta > 0)$ tel que deux points Q et R, situés sur F(D), à l'intérieur d'un cercle $\sigma(P, \delta)$, de centre P et de rayon δ, et accessibles chacun par rapport au domaine D, puissent toujours être joints au moyen d'une transversale de D entièrement située à l'intérieur du cercle $\sigma(P, \varepsilon)$; lorsque F(D) n'est sinueuse en aucun de ses points par rapport à D, on dit simplement qu'elle *n'est pas sinueuse* par rapport au domaine D.

---

(1) *Unbewalltheit*, d'après M. Brouwer et *Gluttheit* d'après M. Kerékjártó.

Voici deux théorèmes sur la non sinuosité dus à M. Schoenflies [c].

THÉORÈME I. — *Une courbe de Jordan n'est sinueuse ni par rapport à son intérieur ni par rapport à son extérieur.*

THÉORÈME II. — *Un arc simple n'est pas sinueux par rapport au domaine (unique) qu'il détermine.*

Il faut remarquer que la *non sinuosité* de F(D) par rapport au domaine D, n'implique pas l'*accessibilité* de chacun de ses points par rapport à ce domaine.

54. **Propriété caractéristique de l'intérieur d'une courbe de Jordan.** — Voici un théorème élégant dû M. R. L. Moore [83] :

THÉORÈME. — *Pour qu'un domaine simplement connexe et borné* D *représente l'intérieur d'une courbe de Jordan, il faut et il suffit que* D *soit localement connexe en chacun de ses points et cela d'une manière* uniforme, *c'est-à-dire qu'il corresponde à tout* ε *positif un nombre positif* δ *tel que deux points* P *et* Q *du domaine* D, *pourvu que leur distance ne surpasse pas le nombre* δ, *puissent être joints par un* continu *contenu dans* D *dont le diamètre ne surpasse pas* ε.

CHAPITRE V.

INVARIANCE TOPOLOGIQUE AU SENS STRICT.

I. — HOMÉOMORPHIES AU SENS STRICT ET LEURS INVARIANTS.

55. Nous avons été amenés (*voir* nos 14 et 15) à distinguer la notion d'homéomorphie au sens strict de la notion d'homéomorphie au sens large et nous sommes convenus de considérer l'assertion que deux ensembles appartiennent à un *même type topologique* comme équivalente à l'assertion que ces deux ensembles sont homéomorphes au sens strict.

Dans les pages précédentes, nous n'avons considéré que l'homéomorphie au sens large; actuellement nous allons approfondir la notion d'homéomorphie au sens strict; voici les problèmes fondamentaux qui s'y rattachent :

Problème A. — *Étant donnée une notion* topologique, *c'est-à-dire une notion invariante par rapport aux homéomorphies au sens* large, *reconnaître si elle reste encore invariante par rapport aux homéomorphies au sens* strict.

Problème B. — *Étant donnés deux ensembles, reconnaître s'ils sont du même type topologique.*

L'étude des problèmes précédents est encore assez peu avancée; dans les numéros suivants nous ferons connaître l'essentiel de ce qui est acquis actuellement dans cet ordre d'idées.

56. **Quelques résultats relatifs au problème A.** — On démontre facilement que les propriétés d'être *connexe* (1) ou *fermé* que peut avoir un ensemble appartiennent aux invariants au sens strict.

En partant de ce résultat, on s'assure aisément que les propriétés d'un ensemble d'être : *continu*, *continu irréductible*, *continu de condensation*, *continu indécomposable*, sont toutes invariantes au sens strict (*voir* Chap. II et V); il en est de même du genre (*voir* n° 42) et de l'espèce (n° 38) d'un point par rapport à un continu.

Parmi les autres invariants au sens strict, citons encore les propriétés d'un ensemble d'être une *courbe continue* (continu de Jordan), une *courbe fermée*, *un arc simple* et comme l'a démontré M. Brouwer [15] une *courbe de Schoenflies* (n° 52).

C'est Jürgens le premier qui a établi l'important théorème selon lequel, dans le plan, le transformé par homéomorphie au sens strict d'un *domaine*, est encore un *domaine* (2); ce théorème ne constitue qu'un cas particulier du théorème général valable pour les hyperespaces à un nombre quelconque de dimensions, théorème exprimant « l'invariance du nombre de dimensions d'un hyperespace euclidien ».

L'*ordre de connexion* d'un domaine est aussi un invariant topolo-

(1) Il s'agit ici de la connexité au sens de M Hausdorff et non au sens de G. Cantor car celle-ci n'est même pas une propriété topologique.

(2) *Allgemeine Satre uber Systeme von zwei eindeutigen und stetigen reellen Funktionen*, Leipzig 1879.

gique au sens strict, il en est de même de la propriété que peut avoir un point frontière d'un domaine d'être parfaitement accessible par rapport au domaine considéré (mais cela n'est plus vrai de l'accessibilité non parfaite).

Remarquons enfin qu'une *coupure*, ou bien une *coupure complète*, ou encore une *coupure irréductible* d'un ensemble fermé conserve ses propriétés d'après une transformation par homéomorphie au sens strict de l'ensemble que l'on considère.

Les travaux de M. Brouwer [15] nous permettent d'attaquer notre problème au cas des ensembles fermés, mais nous avons laissé de côté ces résultats à cause de leur complication.

En ce qui concerne les domaines, nous avons d'abord un critère simple valable dans le cas de deux domaines à *connexion finie* exprimé par le théorème suivant :

Théorème I. — *Deux domaines bornés, à connexion finie sont homéomorphes au sens strict au cas, et seulement au cas où ils possèdent le même* ordre de connexion; *c'est-à-dire lorsque le nombre de composants de la frontière de chacun d'eux est le même* [*b*].

57. Pour traiter le cas général d'un domaine D borné à connexion finie ou non, considérons la famille K(F) de tous les *composants* de la *frontière* F du domaine D. Nous dirons que la suite infinie

$$(1) \qquad A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$$

des composants de F *tend* vers le composant A_0 lorsque

$$\lim_{n \mid \infty} \delta(A_n, A) = 0 \qquad (\textit{voir } n^o\ 28).$$

Ayant défini la notion de la *limite* pour les éléments de la classe K(F) nous avons, par cela même, transformé cette classe en un espace (L) de Fréchet [1] (*voir* n° 17). Cela posé, nous avons le théorème-critère suivant :

Théorème II. — *Pour que deux domaines bornés* D_1 *et* D_2 *soient homéomorphes au sens strict, il faut et il suffit que les frontières*

---

[1] On vérifie facilement les conditions imposées au n° 17.

respectives F_1 *et* F_2 *de ces domaines soient telles que les classes* $K(F_1)$ *et* $K(F_2)$ *considérées comme deux espaces de Fréchet de la façon expliquée plus haut, soient homéomorphes* [*b*].

58. **Ordre de connexion d'un domaine non borné.** — Considérons un domaine D non borné et deux domaines bornés D_1 et D_2 dont chacun soit homéomorphe, au sens strict, au domaine D. L'homéomorphie au sens strict étant une relation transitive, nous avons le droit d'affirmer l'homéomorphie au sens strict entre D_1 et D_2; cela nous permet de poser la définition suivante :

Définition. — Appelons *ordre de connexion d'un domaine non borné* D, l'ordre de connexion d'un domaine quelconque *borné* pourvu qu'il soit homéomorphe au sens strict au domaine D.

II. — Ensembles plans homéomorphes aux ensembles linéaires.

59. On est souvent amené à traiter la question suivante :

Un ensemble donné est-il homéomorphe au sens strict à un ensemble *linéaire*, c'est-à-dire à un ensemble situé sur une droite?

Voici l'essentiel dans cet ordre d'idées.

M. Sierpinski [107] a montré qu'on peut décomposer le plan en *trois*, mais non en *deux* ensembles disjoints non denses, chacun d'eux étant homéomorphe au sens strict à un ensemble linéaire. Il a démontré aussi [104] que tous les ensembles denses en soi et dénombrables sont homéomorphes au sens strict à un certain ensemble linéaire. Nous devons à M. Brouwer [12] le théorème d'après lequel la famille K(A) des composants d'un ensemble fermé et borné A, considérée comme un espace de Fréchet d'une manière analogue à celle du n° 57, est homéomorphe au sens strict à un ensemble linéaire; d'où résulte le remarquable théorème suivant :

Tout domaine est homéomorphe au sens strict au domaine que l'on peut obtenir en retranchant de l'ensemble D *des points intérieurs à une circonférence de cercle* C *un ensemble non dense, fermé par rapport au domaine* D *et situé sur un diamètre du cercle* C.

III. — EXTENSION D'HOMÉOMORPHIE.

60. Désignons par A et B deux ensembles entre lesquels subsiste une homéomorphie déterminée R et soient A_1 et B_1 deux nouveaux ensembles vérifiant les relations

$$A \subset A_1, \qquad B \subset B_1;$$

étendre l'homéomorphie R au système d'ensembles A_1 et B_1 c'est établir entre A_1 et B_1 une homéomorphie R_1 qui fait correspondre aux éléments de la partie A de A_1 les mêmes éléments que l'homéomorphie R; pour exprimer que l'on a à la fois les deux relations

$$A_1 \neq A \quad \text{et} \quad B_1 \neq B,$$

on dit que l'on a réalisé une extension proprement dite de l'homéomorphie R.

THÉORÈME I. [Lavrentieff 62 (1)]. — *Soient* A *et* B *deux ensembles homéomorphes et* R *une homéomorphie déterminée établie entre ces ensembles; il sera toujours possible de faire correspondre aux ensembles* A *et* B *respectivement des ensembles* A_1 *et* B_1 *appartenant à la famille désignée par* G_δ (2) *et tels que l'homéomorphie* R *puisse être étendue aux ensembles* A_1 *et* B_1.

THÉORÈME II [*b*]. — *Lorsqu'on a établi une homéomorphie* R *entre un domaine borné* D_1 *dont l'ordre de connexion est égal à k et un domaine* D_2 *ayant pour frontière* $F(D_2)$ *un système de k cercles sans points communs, et lorsque les composants de la frontière* $F(D_1)$ *de* D_1 *sont des courbes de Jordan, on peut la remplacer par une autre* R' *qui peut être étendue aux ensembles*

$$D_1 + F(D_1), \text{ et } D_2 + F(D_2).$$

THÉORÈME III. [Schoenflies 1]. — C_1 *et* C_2 *étant deux courbes de*

(1) Voir *Comptes rendus*, t. 178, Paris.

(2) On appelle une classe donnée : classe de la famille G_δ lorsqu'elle peut être considérée comme produit d'une suite infinie des classes ouvertes.

Jordan ou deux arcs simples, on peut étendre toute homéomorphie entre C_1 *et* C_2 *au plan entier.*

61. Dans sa belle Thèse de Strasbourg, M. Antoine a pris pour sujet de ses recherches le problème de l'extension d'une homéomorphie entre deux ensembles au *voisinage* de ces ensembles, c'est-à-dire aux ensembles *ouverts* contenant les ensembles donnés. Désignons par A_1 et B_1 deux ensembles ouverts contenant respectivement les ensembles donnés A et B et auxquels on se propose d'étendre une homéomorphie donnée R entre A et B.

En ce qui concerne la possibilité du problème, il convient de remarquer avec M. Antoine que chacun des trois cas suivants peut effectivement se présenter :

1° Le problème est possible lorsque chacun des ensembles A_1 et B_1 se confond avec tout le plan; on dit alors que l'homéomorphie peut s'étendre à la totalité du plan.

2° Le cas précédent ne se présente pas, mais une extension proprement dite de l'homéomorphie donnée aux ensembles ouverts est possible.

3° Aucune extension proprement dite de l'homéomorphie donnée n'est possible.

Nous avons déjà fait remarquer qu'au cas où A et B sont deux courbes de Jordan ou deux arcs simples c'est le premier des cas précédents qui a lieu. M. Antoine a généralisé ces résultats en démontrant en particulier les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Soient* $C_1^{(1)}C_2^{(1)}\ldots C_n^{(1)}$ *et* $C_1^{(2)}C_2^{(2)}\ldots C_n^{(2)}$ *deux suites finies d'arcs simples sans points communs,* R *une homéomorphie entre* $\Sigma C_i^{(1)}$ *et* $\Sigma C_i^{(2)}$. *On pourra étendre* R *à la totalité du plan.*

THÉORÈME II. — *Soient* $C_1^{(1)}\ldots C_n^{(1)}$ *et* $C_1^{(2)}\ldots C_n^{(2)}$ *deux suites finies de courbes de Jordan sans points communs. Supposons que les courbes de ces deux suites soient également disposées, c'est-à-dire lorsque* $C_i^{(1)}$ *se trouve à l'intérieur de* $C_j^{(1)}$, $C_i^{(2)}$ *sera à l'intérieur de* $C_j^{(2)}$ *et inversement. Soit* R *une homéomorphie entre* $\Sigma C_i^{(1)}$ *et* $\Sigma C_i^{(2)}$. *On pourra modifier cette homéomorphie de telle manière que l'homéomorphie obtenue soit susceptible d'être étendue à la totalité du plan.*

CHAPITRE VI.

CHEMINS ET CIRCUITS. QUESTIONS DIVERSES.

62. Chemins. — D'après les définitions du n° **43**, une courbe continue est un ensemble de points donné par une formule de la forme

$$Q = f(t), \qquad a \leqq t \leqq b, \tag{1}$$

où f représente une fonction qui fait correspondre à chaque nombre t appartenant à l'intervalle fermé $[ab]$ un point déterminé Q et cela d'une manière *continue*. Il convient cependant de faire remarquer qu'une formule déterminée de la forme (1) définit non seulement un certain ensemble de points, mais encore une certaine correspondance entre la succession des valeurs de t et celle des positions du point Q. Cette remarque est le point de départ des considérations qui vont suivre.

Envisageons l'ensemble E de toutes les formules de la forme (1) que l'on peut déduire d'une formule particulière de cette forme par le changement de t en une fonction *continue strictement croissante* de t, dont l'ensemble des valeurs se confondrait avec l'intervalle fermé $[ab]$. Nous dirons que les formules de l'ensemble E définissent *un même chemin orienté* et que deux quelconques de ces formules sont *équivalentes au sens strict*; d'après cela toute formule particulière de la forme (1) définit sans ambiguïté un certain chemin orienté.

On obtiendrait évidemment un ensemble E′ plus large que l'ensemble E que nous venons de définir en considérant comme admissible tout changement de t en une fonction non nécessairement croissante, mais seulement *monotone au sens strict* et *continue*. Nous dirons que les formules de l'ensemble E′ déterminent *un même chemin non orienté* et que deux quelconques des formules de cet ensemble sont équivalentes *au sens large*.

Pour exprimer que deux formules de la forme (1) peuvent se déduire l'une de l'autre par le changement de t en une fonction *continue décroissante au sens strict*, nous dirons que les chemins qu'elles définissent *ne se distinguent que par l'orientation*.

63. **Circuits.** — Les notations du numéro précédent étant conservées, envisageons en particulier le cas où l'on aurait

$$(1) \qquad f(a) = f(b),$$

et désignons par $\mathcal{E}$ l'un ou l'autre des ensembles désignés au numéro précédent par E et E'. Adjoignons à l'ensemble E toute formule $Q = \varphi(\tau)$ qui se déduit d'une formule

$$(2) \qquad Q = f(t) \qquad (a \leqq t \leqq b),$$

appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}$ de la façon suivante : ayant désigné par k un nombre quelconque vérifiant les conditions

$$0 \leqq k \leqq b - a,$$

on posera pour $a \leqq t \leqq a + k$,

$$t = a - b + k + \tau,$$

et pour $a + k \leqq t \leqq b$,

$$t = \tau - k.$$

On obtiendra de la sorte une formule de la forme

$$Q = \varphi(\tau) \qquad (a \leqq \tau \leqq b).$$

avec $\varphi(\tau)$ continue dans $[ab]$.

Ce sont toutes les formules obtenues de cette façon que l'on adjoindra à $\mathcal{E}$.

L'ensemble $\mathcal{E}$ donnera lieu de cette façon à un ensemble $\mathcal{E}_1$ et nous dirons que toutes les formules de cet ensemble définissent un même *circuit*; celui-ci sera dit *orienté* ou *non orienté* selon que $\mathcal{E}$ coïncidera avec l'ensemble E ou avec l'ensemble E'.

64. **Distance paramétrique** [Fréchet 30]. — Considérons deux *circuits* C_1 et C_2 et supposons-les donnés par les deux équations

$$(1) \qquad Q = f(t) \qquad \text{et} \qquad R = g(t),$$

avec t variant dans un *même intervalle* $[ab]$, condition qu'il est toujours aisé de réaliser et cela d'une infinité de manières. Pour chaque système de deux équations tel que (1), calculons la *borne supérieure*, soit μ, des distances

$$\delta[f(t), g(t)]$$

en faisant varier t dans l'intervalle $[ab]$ assigné à ce paramètre. La *borne intérieure* de tous les nombres μ ainsi calculés pour divers systèmes des représentations de C_1 et C_2 s'appelle *distance paramétrique* des deux circuits C_1 et C_2.

Il faut remarquer que les divers systèmes de deux équations telles que (1) doivent être équivalents au sens *strict* lorsque les circuits C_1 et C_2 sont *orientés* et au sens *large* dans le cas de circuits *non orientés*.

Une petite modification de la définition précédente nous conduirait à définir la distance paramétrique de deux *chemins* orientés ou non. Nous laissons au lecteur le soin de faire cette modification, d'ailleurs facile.

65. **Ordre d'un point par rapport à un circuit.** — Soit C un circuit *orienté* donné par

$$Q = f(t) \qquad (a \leqq t \leqq b).$$

Divisons l'intervalle $[ab]$ par les nombres

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b,$$

et soit

$$Q_i = f(t_i) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Désignons par O un point n'appartenant pas au circuit C, par φ_i l'angle orienté

$$\varphi_i = \left(\overrightarrow{OQ_{i-1}}, \overrightarrow{OQ_i}\right) \qquad (-\pi < \varphi_i \leqq \pi),$$

et considérons la somme $\Sigma\varphi_i$.

Lorsque le maximum de $|t_i - t_{i-1}|$ tend vers zéro, cette somme tend vers une limite déterminée qui est un multiple de 2π

$$Q = 2\pi n \qquad (n \text{ entier}).$$

On appelle n l'ordre du point O par rapport au circuit C

$$n = \mathrm{Ordre}_C(O).$$

Ce nombre est d'ailleurs indépendant de la représentation particulière du circuit orienté C. Pour les *circuits de Jordan*, c'est-à-dire pour les circuits donnés par la correspondance de la forme

$$Q = f(t) \qquad (a \leqq t \leqq b),$$

biunivoques, à l'exception de $f(a) = f(b)$, on a les faits suivants, Lorsque O est à l'*extérieur* de C, on aura toujours

$$\mathrm{Ordre}_C(O) = 0,$$

mais lorsque O se trouve à son *intérieur*, on a :

1° ou bien toujours

$$\mathrm{Ordre}_C(O) = +1;$$

2° ou bien uniformément

$$\mathrm{Ordre}_C(O) = -1.$$

Dans le premier de ces cas, nous appelons le circuit *positif*; dans l'autre, *négatif*.

Une autre manière de définir l'orientation d'un circuit a été donnée par M. Kline.

66. Remarque sur les transformations topologiques. — On dit qu'une transformation topologique (homéomorphie) d'un ensemble A possède une *indicatrice positive* lorsqu'elle transforme tout circuit orienté situé dans A, en un autre de même *orientation;* on dit au contraire qu'elle possède une indicatrice *négative* lorsqu'elle fait changer l'orientation de *tout* circuit situé dans A.

Il convient de faire remarquer que lorsque l'ensemble A n'est pas un domaine (auquel cas il peut n'être pas connexe) il peut admettre des transformations topologiques n'ayant aucune indicatrice déterminée.

II. — DÉFORMATIONS CONTINUES.

67. Homotopie et isotopie. — Considérons une fonction

$$Q = f(P, t)$$

du point P et du nombre t qui fait correspondre à tout point P appartenant à un ensemble A et à tout nombre t appartenant à un intervalle fermé $[a, b]$ un point déterminé Q. Supposons que $f(P, t)$ est *continue* par rapport à chacun des éléments variables P et t dont elle dépend et qu'on ait

$$f(P, a) \equiv P.$$

D'autre part, désignons par B l'ensemble des valeurs de la fonction $f(P, b)$ lorsqu'on fait varier le point P dans l'ensemble A.

Nous dirons qu'une telle fonction définit une *déformation con-*

tinue ou homotopie entre les ensembles A et B, ou bien que, grâce à elle,

A est *homotope* à B.

Si l'on savait encore que pour chaque valeur t_0 prise dans $[ab]$, la formule

$$Q = f(P, t_0)$$

définit une correspondance *biunivoque*, on dirait que $Q = f(P, t)$ est une *isotopie* et que, grâce à elle,

A est *isotope* à B.

Pour définir une *homotopie* ou une *isotopie* entre deux chemins (orientés ou non), ou bien entre deux circuits (orientés ou non), soient C_1 et C_2, on se donne une fonction

$$Q = f(t, \varepsilon) \qquad (a \leqq t \leqq b, \ \alpha \leqq \varepsilon \leqq \beta)$$

continue par rapport à t, ainsi que par rapport à ε et telle que les équations

$$Q = f(t, \alpha), \qquad Q = f(t, \beta)$$

représentent C_1 et C_2 respectivement selon la définition qui correspond au cas considéré.

Voici quelques théorèmes importants concernant les déformations continues :

THÉORÈME 1 [Tietze 112]. — *Soient* C *une courbe de Jordan,* I(C) *son intérieur et désignons par* A *la somme* C + I(C).

Soit encore $Q = f(P)$ *une homéomorphie transformant* A *en lui-même et ayant une* indicatrice positive. *Il existe une* isotopie

$$Q = f(P, t) \qquad (P \text{ dans } A;\ a \leqq t \leqq b),$$

telle que l'on ait

$$f(P, a) \equiv P, \qquad f(P, b) \equiv f(P).$$

On exprime ce théorème en disant que, l'hypothèse du théorème étant vérifiée, on sait « réduire par continuité la tranformation

$$Q = f(P)$$

à l'identité ».

Dans sa Thèse, M. Antoine a démontré rigoureusement les théorèmes suivants, théorèmes que l'on admettait précédemment sans démonstration :

THÉORÈME II. — *Deux courbes de Jordan ou deux arcs simples* C_1 *et* C_2 *contenus tous deux à l'intérieur d'une courbe de Jordan* C *sont* isotopes, *et l'on peut passer de l'un de ces ensembles à l'autre sans sortir de l'intérieur de la courbe* C.

THÉORÈME III. — *Deux transversales* (n° 49) C_1 *et* C_2 *de l'intérieur d'une courbe de Jordan* C *ayant l'une et l'autre les mêmes extrémités* P *et* Q (*situées sur* C) *peuvent être déformées par* isotopie *sans sortir de l'intérieur* I(C) *de* C *et même en transformant* $C+I(C)$ *en lui-même.*

68. **Opérations arithmétiques sur des chemins.** — Soient γ_1 et γ_2 deux chemins *orientés*, l'un allant d'un point P à un point Q, et l'autre du point Q à un point R.

On désigne par

$$\gamma_1+\gamma_2$$

le chemin qu'on obtient en allant de P à Q le long de γ_1 et de Q à R le long de γ_2.

On désigne par $-\gamma$ le chemin orienté ne différant de γ que par l'orientation.

Lorsque γ a été donné par

$$Q=f(t) \qquad (a \leqq t \leqq b).$$

on obtient $-\gamma$ par la formule

$$Q=f(b+a-t) \qquad (a \leqq t \leqq b).$$

Lorsque $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$ sont des chemins orientés fermés ayant tous pour origine et extrémité communes un même point P, et lorsque $n_1, n_2, \ldots, n_p$ sont des nombres entiers, on saura former le chemin

$$n_1\gamma_1+n_2\gamma_2+\ldots+n_p\gamma_p. \tag{1}$$

On appelle tout chemin de la forme (1) *canonique* par rapport au système

$$(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p).$$

Notons que selon Poincaré, on exprime que γ_1 et γ_2 sont homotopes en écrivant

$$\gamma_1 \sim \gamma.$$

Pour exprimer que l'homotopie des chemins γ_1 et γ_2 peut être réalisée sans sortir d'un ensemble A, on écrit

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \text{ dans A.}$$

Par « $\gamma \sim O$ dans A » nous exprimerons la possibilité de réduire par homotopie le chemin γ à un seul point sans sortir de l'ensemble A.

On a le remarquable théorème suivant :

Un circuit de Jordan orienté γ, ne se réduisant pas à un point unique, n'est jamais isotope au chemin $-\gamma$.

Le théorème précédent équivaut au suivant :

Le plan est une surface bilatérale.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

Livres.

a. F. Hausdorff. — Grundlagen der Mengenlehre (I. Leipzig, 1914; II. 192.).
b. B. v. Kérékjártó. — Vorlesungen uber Topologie (I. Berlin, 1923).
c. A. Schoenflies. — Bericht uber die Entwickelung der Mengenlehre (II, Leipzig, 1908).
d. H. Weyl. — Idee der Riemannschen Flache (Leipzig, 1913).
e. *Enzyclopedie der Mathematischen Wissenschaften*, B. II³ H. 7 (Leipzig-Berlin, 1923) (article de Zoretti-Rosenthal).
f. W. H. Young et G. Chisholm Young. — The Theory of sets of points (Cambridge, 1906).
g Caratheodory. — Vorselungen uber Reelle Funktionen (Leipzig, 1918).
h. W. Wilkosz. — Podstawy ogolneteorji mnogosci (Fondements de la théorie générale d'ensembles) (Varsovie, 1925).
i. S. Zarembà. — La logique des Mathématiques (*Mém. des Sciences Math.*, XV, Paris, 1926).

Mémoires et Notes.

1. P. Aleksandroff. — Sur les ensembles complémentaires aux ensembles (A). (*F. M.*, V.)
2. L. Antoine — Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages. Thèses, Strasbourg, 1921 (*Journ. Math. pures et appl.*, 1921).
3. Sur les voisinages de deux figures homéomorphes (*F. M*, V, 1924).
4. W. L. Ayres. — A new caracterisation of plane continuous curves (*Bul amer Math Soc.*, 1927)
5 R. Baire — Leçons sur les fonctions discontinues, 1905
6. E. Borel. — Leçons sur la théorie des fonctions, II, 1914.
7. Méthodes et problèmes de théorie des fonctions, 1922.
8. L. E. I. Brouwer — Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl (*Math. Ann.*, 70, 1911).
9. — Beweis der Invarianz des *n* dimensionalen Gebietes (*Math Ann.*, 71, 1911).
10. — Zur Invarianz des *n* dimensionalen Gebietes (*Math. Ann.*, 72, 1912).
11. — Ueber Abbildung von Mannigfaltigkeiten (*Math Ann*, 71, 1911).
12. — Over de structur der perfecte punctvesamelingen (*Amsterd. Akad. Versl*, 18, 1910, 19, 1911).
13. — Beweis des Jordanschen Kurvensatzes (*Math Ann.*, 69, 1910).
14. — Zur Analysis Situs (*Math Ann*, 68, 1910).
15. — Beweis der Invarianz der geschlossenen Kurve (*Math. Ann*, 72, 1912).
17 C. Carathéodory — Ueber die Begrenzuneinfach zusammenhangender Gebiete (*Math Ann*, 73, 1913)
18. G. Cantor. — Ueber unendliche lineare Punktmanningfaltigkeiten (*Math. Ann.*, 21, 1883)
19. — Ueber unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten (*Math Ann*, 17, 1880).
20 — Beiträge zur Begrundung der transfiniten Mengenlehre (*Math. Ann.*, 46 et 49).
21. A. Denjoy — Sur l'Analysis Situs du plan (*C. R. Acad. Sc., Paris*, 153, 1911) (deux Notes).
22. — Sur les courbes de M Jordan (*C R Acad. Sc., Paris*, 166, 1918).
23. — Démonstration de la propriété fondamentale des courbes de M. Jordan (*C. R. Acad. Sc., Paris*, 167, 1918).
24. — Continu et discontinu (*C R. Acad. Sc., Paris*, 151, 1910).
25. — Sur les ensembles parfaits discontinus à deux dimensions (*C. R. Acad. Sc., Paris*, 149, 1909).
26. — Sur des ensembles parfaits discontinus (*C. R Acad. Sc., Paris*, 149, 1909).
27. — Sur les ensembles clairsemés (*Amsterd. Akad. Versl*, 25).
28. — Sur une classe d'ensembles discontinus (*Reale Accad. Lincei*, 1920).
29 M. Fréchet. — Sur quelques points du calcul fonctionnel. Thèses (*Rend. Palermo*, 22, 1906).

30. — Relations entre les notions de limite et distance (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 19, 1918).

31. — Sur la terminologie de la théorie des ensembles abstraits (*C. R. du Congrès Strasbourg*, 1924).

32. — L'Analyse générale et les ensembles abstraits (*Revue de Métaphysique et de Morale*, 32, 1925).

33. — Sur l'homéomorphie des ensembles dénombrables (*Bull. Acad. Cracovie, Classe de Math.*, 1921).

34. H. M. Gehman. — On extending a continuous (1-1) correspondence of two plane continuous curves to a correspondence of their planes (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 28, 1926).

35. — Concerning the subsets of a plan continuous curve (Thèses) (*Annals of Math.*, 27, 1925).

36. — Some condition under which a continuum is a continuous curve (*Annals of Math.*, 27, 1925).

37. — Concerning irreductible connected sets and irreductible continuu (*Proc. of Nat. Acad. of. Soc.*, 12, 1926).

38. H. Hahn. — Ueber die allgemeinste ebene Punktmeuge, die stetiges Bild. einer Strecke ist. (*Jahresbevicht d. Deutsch. Math. Ver.*, 23, 1904).

39. — Mengentheoretische Charakterisierung der stetigen Kurve (*Sitzungsbericht d. Math. Nat. Kl. d. k. Akad. d. W. Wien.*, 123, 1914).

40. — Ueber die Komponenten offener Mengen (*F. M.* II, 1921).

41. S. Janiszewski. — Sur les continus irréductibles entre deux points. Thèses, 1911 (*J. de l'Ec. Polyt.*, 16, 1912).

42. — O rozci nanıu ptaszczyzny przez kontinua (Sur les coupures faites par les continus) (*Varsovie, Prace Mat. Fiz.*, 26, 1915).

43. — Démonstration d'une propriété des continus entre deux points (*Bull. Acad. d. Sc., Cracovie*, 1912).

44. — Sur la géométrie des lignes cantoriennes (*C. R. Acad. Sc., Paris*, 151, 1910).

45. — Sur les continus irréductibles entre deux points (*C. R Acad. Sc., Paris*, 152, 1911).

46. S Janiszewski et C. Kuratowski. — Sur les continus indécomposables (*F. M.*, I, 1920).

47. J. R. Kline. — A theorem concerning connected point sets. (*F. M.*, III, 1922).

48. — Closed connected sets which remain connected upon the removal of certain connected subsets (*F M.*, V, 1924).

49. — Concerning the sume of two continua each irreductible between the same pair of points (*F. M.*, VII, 1925).

— *Voir* aussi Moore R. L.

50. B. Knaster. — Sur un problème de M. R. L. Wilder (*F. M.*, VII).

51. — Quelques coupures singulières du plan (*F. M.*, VII).

52. — Sur les ensembles connexes irréductibles entre deux points (*F. M.*, X).

53. — Un continu dont tout sous-continu est indécomposable (Thèse) (*F M.*, II).

54. B. Knaster et C. Kuratowski. — Sur les continus non bornés (*F. M.*, V).

55. — Sur les ensembles connexes (*F. M.*, II).
56. C. KURATOWSKI. — Une définition topologique de la ligne de Jordan (*F. M.*, I, 1920).
57. — Quelques propriétés topologiques de la demi droite (*F. M.*, III).
58. — Théorie des continus irréductibles entre deux points (I, *F. M.*, III; II., *F. M.*, X).
59. — Contribution à l'étude de continus de Jordan (*F. M.*, V).
60. — Sur les coupures irréductibles du plan (*F. M.*, VI)
61. — Sur les continus de Jordan et le théorème de M. Brouwer (*F. M.*, VIII).
— *Voir* aussi S. JANISZEWSKI. — *Voir* aussi B. KNASTER.
62. M. M. LAVRENTIEFF. — Contribution à la théorie des ensembles homéomorphes (*F. M.*, VI)
63. H. LEBESGUE. — Sur les correspondances entre les points de deux espaces (*F. M.*, II).
64. — Sur le théorème de M. Schoenflies (*F. M.*, VII).
65. N. J. LENNES. — Curves in non metrical Analysis Situs with an application in the Calculus of Variations (*Journal of amer. Math. Soc.*, 33, 1911).
66. St(= É). MAZURKIEWICZ. — Nouvelle démonstration du théorème sur l'existence de continus irréductibles (*Bull. Acad. Cracovie*, 1919).
67. — Sur la théorie des ensembles (*C. R. Acad. Sc., Paris*, 151, 1910).
68. — O pewnej klasyfikacji punktow lezacych na kontynuach dowolnych (Une classification des points situés sur les continus) (*C. R. Soc. Sciences, Varsovie*, 1916).
69. — Un théorème sur les continus indécomposables (*F. M.*, I, 1920).
70. — Sur un ensemble G_δ punctiforme qui n'est pas homéomorphe avec aucun ensemble linéaire (*F. M.*, I, 1920).
71. — Sur les lignes de Jordan (*F. M.*, I, 1920).
72. — Sur l'existence d'un ensemble plan ne contenant aucun sous-ensemble connexe borné (*F. M.*, II).
73 — Sur l'invariance de la notion d'ensemble $F_{\sigma\delta}$ (*F. M.*, II).
74 — Un théorème sur la ligne de Jordan (*F. M.*, II)
75. — Sur les ensembles quasi connexes (*F. M.*, II).
76. — Extension du théorème de Phragmén Brouwer aux ensembles non bornés (*F. M*, III).
77. — Sur la décomposition d'un domaine en deux sous ensembles punctiformes (*F. M.*, III).
78. — Sur les continus homogènes (*F. M.*, V).
79. — Sur les continus plans non bornés (*F. M.* V.)
80. — Remarque sur un théorème de M. Mullikin (*F. M.*, VI).
81. — O arytmetyzacji kontinuów (I) et (II) (*C. R., Sc. Varsovie*, 1913).
82. R. L. MOORE. — Concerning connectedness « im kleinen » and a related property (*F. M.*, III).
83. — A characterisation of Jordan regions by properties having no reference to their boundaries (*Proc. of. Nat. Acad. Sc.*, IV, 1918).

84 — Concerning the sum of a countable number of mutually exclusive continua in the plane (*F. M.*, VI).

85. — Concerning contuous curves in the plane (*Math. Zeitschrift*, 15, 1922)

86. — Concerning the commun boundary of two domains (*F. M.*, VI).

87. — Concerning simple continuous curves (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 21, 1920).

88. — On the foundations of plane Analysis Situs (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 17, 1916).

89. — A characterisation of a continous curve (*F. M.*, VII).

90. — Continuous sets that have no continuous sets of condensation (*Bull. Amer. Math. Soc.*, 25, 1918).

91. — Report on continuous curves from the view point of Analysis Situs (*Bull. Amer. Math. Soc.*, 29, 1923).

92. R. L. Moore et J R. Klinf. — On the most general plane closeoll pointset through which it is possible to pass a simple continuous arc (*Annals of Math.*, 20, 1919).

93. A. Mullikin. — Certain theorems relating to plane connected point-sets (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 24, 1922).

94. P. Nalli. — Sopra una definizione di un dominio piano (*Rend. Palermo*, 32, 1911).

95. S. Nikodym. — Sur les coupures du plan faites par les ensembles connexes et les continus (*F. M.*, VII).

96. H. Poincaré. — Analysis Situs (*Journ. de l'Ec. Polyt.*, II, 1; *Rend. Palermo*, 13, 18; *Proc. Lond. Math. Soc.*, 32; *Bull. Soc. Math. de France*, 30; *Journ. Math. pures et appl.*, V, 8).

97. P. Painlevé. — Notice sur les travaux scientifiques, Paris, 1900.

98. G. Peano. — Sur une courbe qui remplit une aire plane (*Math. Ann.*, 36).

99. E. Phragmén. — Uber die Begrenzung von Continua (*Acta Math.*, 7, 1855, 1856).

100. F. Riesz. — Ueber einen Satz der Analysis Situs (*Math. Annal*, 59, 1904).

101. — Atti Roma Congrasso II, 1908.

102 A. Rosenthal. — Teilung der Ebene durch irreduzible Kontinua (*Sitzungsberichte Bayr. Akad.*, 1919).

103. W. Sierpinski. — Sur un ensemble punctiforme connexe (*F. M.*, I, 1920).

104. — Sur une propriété topologique des ensembles dénombrables denses en soi (*F. M.*, I, 1920)

105. — Sur une condition pour qu'un continu soit une courbe Jordanienne (*F. M.*, I, 1920),

106. — Sur quelques invariants d'Analysis Situs (*F. M.*, III).

107. — Sur quelques propriétés topolotiques du plan (*F. M.*, IV).

108. — L'axiome de Zermelo et son rôle dans la théorie des Ensembles et l'Analyse (*Bull. Acad. Cracovie*, 1918).

109. — Un théorème sur les ensembles continus (*Tohoku Math. Journ.*, XIII, 1918).

110. S. Straszewicz. — Ueber eine Verallgemeinerung des Jordanschen Kuvensatzes (*F. M.*, IV).

111. — Ueber die Zerschneidung der Ebene durch abgeschlossene Mengen (*F. M.* VII).
112. H. Tietze. — Uber stetige Abbildungen der Quadratfläche auf sich (*Rend. di Palermo*, XXXVIII, 1914).
113. P. Urysohn. — Ein Beitrag zur Théorie der ebenen Gebiete unendlich hohen Zusammenhanges (*Math. Zeitschrift*, 21, 1924).
114. L. Vietoris. — Stettige Mengen (*Monatstheftete f. Math. u. Physik*, XXXI, Vienne, 1921).
115. T. Wazewski. — Sur un continu singulier (*F. M.*, IV).
116. — Sur les courbes de Jordan ne renfermant aucune courbe simple fermée de Jordan (Thèses) (*Annal. Soc. Pol. Math.*. II, *Cracovie*).
117. R. L. Wilder. — On the dispersion sets of connected point-sets (*F. M.*, VI).
118. — A theorem on continua (*F. M.*, VII).
119 — Concerning continuous curves (*F. M.*,VII).
120. W. A. Wilson. — On the structure of a continuum limited and irreductible between two points (*Amer. Journ. of Math.*, 48, 1926).
121 — On the oscillation of a continuum at a point (*Trans. Amer. Math. Soc.*, XXVII, 1925).
122. — Some properties of limited continua irreductible between two points (*Trans. Amer. Math. Soc.*, XXVIII, 1926).
123. K. Yoneyama. — The condition of a Curve, a surface and a solid (*Mem. of the Coll. of Sciences and Engeneering Kyoto Imp. Unio.* Japan, V, 1913).
124. — Theory of continuous sets of points (*Tohoku Math. Journ. Sendou* [Japan], 1917, 1920).
125. C. Zarankiewicz. — Remarque sur un théorème de M Kline (*F. M.*,V).
126. L. Zoretti. — Sur les ensembles de points (*C. R.*, *Paris*, 151, 1910).
127. — *Encyclopedie des Sciences Mathématiques*, II. 1, *f.* 2 (Paris, 1910).
128. — La notion de ligne (*Ann. École Normale*, XXVI, 1909).
129 — Leçons sur le prolongement analytique (Paris, 1911).
130. — Contribution à l'étude des lignes cantoriennes (*Acta Math.*, XXXVI, 1912).
131. — Sur la représentation analytique d'un continu irréductible (*Bull. soc. Math. de France*, XXXIX, 1911).

Remarque. — F. M. indique : Fundamenta Mathematicæ (Varsovie-Paris); les autres indications sont bien connues aux mathématiciens.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

INTRODUCTION A LA TOPOLOGIE DU PLAN.

DEUXIÈME PARTIE.

LE PLAN EUCLIDIEN.