MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

G. CERF

Transformations de contact et problème de Pfaff

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 37 (1929)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1929__37__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT
Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE XXXVII

Transformations de contact et Problème de Pfaff

PAR M. G. CERF

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1929

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

TRANSFORMATIONS DE CONTACT

ET

PROBLÈME DE PFAFF

Par M. G. CERF.

INTRODUCTION.

Considérons une équation de Pfaff (1) à $2n+1$ variables, réduite à sa forme canonique

$$\omega = dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n = 0; \tag{1}$$

et d'autre part les formules d'un changement de variables :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = \overline{X_1}(x_1, \ldots, z, \ldots, p_n), \quad \ldots, \qquad Z = \overline{Z}(x, z, p), \quad \ldots, \\ \qquad\qquad\qquad P_n = \overline{P_n}(x, z, p). \end{array} \right. \tag{2}$$

Les fonctions $\overline{X}$, $\overline{Z}$, P sont des fonctions continues des arguments qui y figurent dans un domaine (d); elles admettent en chaque point de ce domaine des dérivées partielles premières et le système (2) y est résoluble par rapport aux x, z, p.

Les formules (2) définissent une transformation de contact si elles permettent de déduire de l'équation (1) l'équation (3)

$$\Omega = dZ - P_1\, dX_1 - \ldots - P_n\, dX_n = 0, \tag{3}$$

c'est-à-dire s'il existe une fonction ρ des x, z, p non identiquement nulle, telle que la relation (4)

$$\Omega = \rho\omega \tag{4}$$

soit identiquement vérifiée comme conséquence des relations (2). On dit aussi que les transformations de contact sont définies par la condition de laisser invariante l'équation (1); rappelons-en l'interprétation géométrique.

Considérons un espace euclidien à $n+1$ dimensions rapporté à des coordonnées cartésiennes $x_1, \ldots, x_n, z$. L'ensemble d'un point et d'un hyperplan à n dimensions qui passe par ce point constitue un élément de contact du premier ordre (e) dont les coordonnées sont $2n+1$ nombres, par exemple $x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$, les $n+1$ premiers étant les coordonnées du point et les autres, les coefficients de l'équation de l'hyperplan. La transformation (2) fait correspondre à un élément (e) dont les coordonnées appartiennent au domaine (d), nous dirons pour simplifier à un élément appartenant à (d), un autre élément (E), et lorsque (e) décrit le domaine (d), (E) parcourt un domaine (D). Deux éléments infiniment voisins

$$e(x_1, \ldots p_n) \quad \text{et} \quad e'(x_1 + dx_1, \ldots, p_n + dp_n)$$

sont « unis », si la relation (1) est vérifiée. On appelle « multiplicité d'éléments unis » une infinité d'éléments telle que deux éléments infiniment voisins en soient unis; une multiplicité d'éléments unis est transformée par une transformation de contact en une multiplicité d'éléments unis et deux multiplicités d'éléments unis ayant un élément commun sont transformées en deux multiplicités analogues.

Nous désignerons désormais une transformation de contact par une lettre T. Considérons en outre de la transformation (1) : T_1, une autre transformation T'_1 s'appliquant aux éléments d'un domaine (d'); si (D) et (d') ont une partie commune, le produit de T_1 et de T'_1 définit une nouvelle T qui s'applique à une certaine partie de (d). C'est avec une restriction de cette nature, qu'on peut dire que les transformations de contact forment un groupe G.

L'interprétation géométrique que nous venons de donner de la définition analytique des transformations de contact conduit inversement à généraliser le problème d'analyse initialement posé : au lieu de nous servir des coordonnées cartésiennes pour représenter les éléments de contact, nous pouvons employer bien d'autres procédés; par exemple, dans l'espace ordinaire, nous pouvons considérer les ∞^5 éléments de contact comme portés par les ∞^3 surfaces d'un complexe de surfaces convenablement choisies; la condition qui exprime que deux éléments sont unis est encore une équation de Pfaff à 5 variables, mais qui n'est pas réduite à sa forme canonique; on serait conduit à une généralisation analogue si l'on étudiait les transformations de contact dans un espace quelconque.

D'ailleurs, dès le début, la théorie analytique des transformations de contact a été considérée comme cas particulier du problème de Pfaff, c'est-à-dire de l'étude des propriétés invariantes d'une équation de Pfaff quelconque. Or cette étude a gagné beaucoup en simplicité grâce aux méthodes nouvelles que M. Cartan [7] a réalisées méthodes qui ont reçu un complément important de M. Goursat [24].

Le but de ce fascicule est principalement de résumer ce qui, dans ces méthodes, et en particulier dans la multiplication et la dérivation extérieures (¹), a un rapport direct avec les T, de retrouver les propriétés d'invariance connues du groupe G, d'en indiquer l'extension au groupe des transformations qui conservent une expression ou une équation de Pfaff non canonique. Les résultats obtenus (*voir* en particulier § 16 à 21) peuvent être interpretés immédiatement du point de vue de la théorie de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, ce que nous ne ferons pas, un autre fascicule de cette Collection devant y être consacré.

Nous signalerons d'autre part des tentatives de généralisation des T et comment elles ont conduit à l'étude de transformations de certaines équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque, ce qui rejoint la conclusion du fascicule VI de cette Collection consacré au problème de Backlund. Nous signalerons enfin que la généralisation la plus naturelle et la plus importante est constituée par la théorie des groupes infinis de M. Cartan.

Pour le point de vue auquel nous nous sommes placés, l'historique se résume en quelques noms propres qui jalonnent le siècle dernier : Pfaff [32], Hamilton [27], Jacobi [28], Grassmann [26], Clebsch [13, 14], Darboux [15, 16[, Lie [31], Frœbenius [20].

LES FORMES DIFFÉRENTIELLES EXTERIEURES. APPLICATIONS.

1. Multiplication extérieure [9]. — C'est une opération introduite par Grassmann [26]; nous n'aurons à la considérer que d'un point de

(¹) La dérivation extérieure est liée étroitement à la formule de Stokes qui a été utilisée sous une forme différente par M. M. De Donder (fasc. XIV du *Mémorial*), et Buhl (fasc. XVI).

vue purement formel. Nous indiquons le produit extérieur de deux quantités A et B par la notation [A.B] ou plus simplement [AB].

Soient n quantités $u_1, u_2, \ldots, u_n$ soumises à la multiplication extérieure; nous posons

$$[u_i u_k] = \begin{cases} -[u_k u_i] & \text{si } i \neq k, \\ 0 & \text{si } i = k. \end{cases}$$

Le produit extérieur de deux formes linéaires

$$f(u) = \sum_{i=1}^{i=n} a_i u_i, \qquad f'(u) = \sum_{i=1}^{i=n} a'_i u_i,$$

où les a et a' sont des coefficients soumis aux règles habituelles de calcul, s'obtient suivant les règles ordinaires de l'algèbre, *à condition de respecter l'ordre* dans lequel se présentent les quantités u et d'annuler les produits partiels où la même quantité u se présente deux fois.

Exemples :

$$\begin{aligned} &[(2u_1 + u_2 - u_4)(u_1 - 3u_3 + 2u_4)] \\ &\quad = [u_2 u_1] - [u_4 u_1] - 6[u_1 u_3] - 3[u_2 u_3] + 3[u_4 u_3] + 4[u_1 u_4) + 2[u_2 u_4] \\ &\quad = -[u_1 u_2] - 6[u_1 u_3] + 5[u_1 u_4] - 3[u_2 u_3] + 2[u_2 u_4] - 3[u_3 u_4]. \end{aligned}$$

De proche en proche, on définit des monomes de degré quelconque m, produits extérieurs de m quantités u dont le signe change quand on permute deux facteurs et qui sont nuls s'ils possèdent deux facteurs identiques.

Exemples :

$$[u_1 u_4 u_5 u_1 u_3] = 0,$$
$$[u_1 u_5 u_3 u_4] = -[u_1 u_3 u_5 u_4] = [u_1 u_3 u_4 u_5].$$

Le produit extérieur de deux monomes α et β : $[\alpha\beta]$, est un monome obtenu en écrivant les quantités u dans l'ordre où elles se présentent successivement dans α, puis β :

$$[[u_2 u_5 u_3][u_4 u_1]] = [u_2 u_5 u_3 u_4 u_1] = -[u_2 u_3 u_4 u_1 u_5] = +[u_1 u_2 u_3 u_4 u_5],$$

Si α et β sont de degré impair,

$$[\alpha.\beta] = -[\beta.\alpha].$$

Une forme extérieure de degré p est une expression linéaire par rapport à des monomes extérieurs de degré p et dont les coefficients sont des quantités soumises aux règles habituelles de calcul; elle est nulle si tous les coefficients de son expression réduite sont nuls, et seulement dans ce cas; deux formes de même degré sont égales si les coefficients correspondants de leurs expressions réduites sont égaux.

Le produit extérieur de deux formes extérieures s'obtient par la règle qui donne le produit extérieur de deux formes linéaires; le degré du produit est la somme des degrés des facteurs; le produit est nul si la somme des degrés dépasse m; toute puissance d'une forme de degré impair est nulle.

Le produit extérieur de plus de deux formes extérieures se définit de proche en proche.

Exemples. — Posons

$$F = [u_1 u_2] + [u_3 u_4] + \ldots + [u_{2s-1} u_{2s}],$$

on a

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2!}[F^2] &= [u_1 u_2 u_3 u_4] + [u_1 u_2 u_5 u_6] + \ldots + [u_{2s-3} u_{2s-2} u_{2s-1} u_{2s}], \\ \frac{1}{3!}[F^3] &= [u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6] + \ldots, \\ \frac{1}{s!}[F^s] &= [u_1 u_2 \ldots u_s], \\ \frac{1}{(s+1)!}[F^{s+1}] &= 0. \end{aligned} \right.$$

Pour que le produit extérieur de p formes linéaires soit nul, il faut et il suffit que les p formes ne soient pas linéairement indépendantes. Pour qu'une forme Φ soit divisible par une forme linéaire f, il faut et il suffit que le produit extérieur $[\Phi. f]$ soit nul. On démontre ces propriétés en prenant comme nouvelles variables des formes linéaires considérées.

F ayant la signification précédente, et f étant une forme linéaire, l'égalité

$$[F^{s-1} f] = 0$$

entraîne

$$f \equiv 0,$$

F étant une forme extérieure quelconque et $f_1, f_2, \ldots, f_h$, h formes linéaires indépendantes, la condition nécessaire et suffisante pour que F s'annule lorsqu'on établit entre les variables les relations

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_h = 0$$

est donnée par l'équation

$$(6) \qquad [F f_1 f_2 \ldots f_h] = 0.$$

Il suffit pour le voir de prendre f_1, f_2, ..., f_h comme nouvelles variables.

Les formes multilinéaires alternées, c'est-à-dire les formes linéaires à p séries de variables où l'échange de deux séries de variables reproduit la forme mais changée de signe, peuvent être représentées symboliquement par des formes extérieures. Par exemple, si $p = 3$ et que les trois séries de variables soient

$$u_1, \ u_2, \ \ldots, \ u_n; \quad v_1, \ v_2, \ \ldots, \ v_n; \quad w_1, \ w_2, \ \ldots, \ w_n,$$

la forme multilinéaire alternée est la somme de termes tels que

$$a_{123} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

auquel on fait correspondre le monome extérieur

$$a_{123}[u_1 u_2 u_3],$$

et à la forme multilinéaire alternée, on fait correspondre une forme cubique extérieure Φ. *Cette forme cubique extérieure est covariante absolue à la forme trilinéaire alternée :* si l'on effectue sur les trois séries de variables la même transformation linéaire, on obtient une nouvelle forme trilinéaire alternée à laquelle correspond la forme cubique extérieure obtenue en développant dans Φ chaque produit extérieur partiel en fonction des nouvelles variables. Cette propriété de covariance des deux formes est fondamentale; elle est générale.

La *dérivée partielle* d'un monome $A[u_i u_j u_k \ldots u_l]$ par rapport à u_i est le monome $A[u_j u_k \ldots u_l]$; la dérivée par rapport à u_j du premier monome est $-A[u_i u_k \ldots u_l]$, etc. La dérivée partielle d'une forme extérieure par rapport à u_i est égale à la somme des dérivées partielles de ses termes par rapport à u_i. On définit ensuite les dérivées partielles secondes, etc. qui sont nécessairement prises par rapport à des variables toutes différentes. On a, par exemple,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1 u_2} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_2 \partial u_1}.$$

2. Rang d'une forme extérieure [9]. — C'est le nombre minimum de variables au moyen desquelles, par une substitution linéaire convenable, il est possible d'exprimer cette forme.

Soit une forme F de degré p; le système des équations obtenues en annulant toutes les dérivées partielles de F d'ordre $p-1$ est covariant à la forme F par rapport à toute substitution linéaire effectuée sur les u. *Le nombre des équations indépendantes de ce système est égal au rang de la forme :* le nombre ρ de ces équations indépendantes est au plus égal au rang r, lui-même au plus égal à n; par un changement convenable de variables, on peut supposer que ces équations soient

(7) $\qquad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \ldots, \quad u_\rho = 0 \qquad (\rho \leqq r);$

alors la forme ne dépend pas de $u_{\rho+1}, \ldots, u_n$, car elle ne peut, par exemple, contenir un terme où figurent $u_{\rho+1}$ et $p-1$ autres variables u; par conséquent $r \leqq \rho$, donc $r = \rho$.

Le système (7) est le *système associé* à F.

Remarque. — Le rang d'une forme linéaire non nulle est évidemment égal à 1 et le système associé à la forme s'obtient en l'égalant à zéro.

Considérons par exemple une forme quadratique extérieure :

$$F = \Sigma a_{ij}[u_i u_j].$$

Son rang est nécessairement pair : cela résulte de ce qu'on peut lui donner, par un changement de variables convenablement choisi, la forme réduite

$$F = [U_1 U_2] + [U_3 U_4] + \ldots + [U_{2s-1} U_{2s}] \qquad (2s \leqq n);$$

pour le montrer, on procède par récurrence en s'appuyant sur ce fait que, si $a_{12} \neq 0$, la forme

$$F(u) - \frac{1}{a_{12}}\left[\frac{\partial F}{\partial u_1}\,\frac{\partial F}{\partial u_2}\right]$$

ne contient plus les variables u_1, u_2. Le système associé à F se compose des équations

$$U_1 = 0, \qquad U_2 = 0, \qquad \dots, \qquad U_{2s} = 0.$$

Il résulte alors d'une des relations (5) que le rang de F est le double du plus grand exposant tel que $[F^s]$ ne soit pas nul.

Quand on établit dans F une relation linéaire entre les variables u, son rang s'abaisse de 0 ou de 2 unités suivant que le premier membre de cette relation est indépendant de $U_1, U_2, \dots, U_{2s}$ ou non. Si les variables sont liées par les h relations linéaires distinctes

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad \dots, \qquad f_h = 0,$$

le rang $2s'$ de la forme F_1 déduite ainsi de F est le double du plus grand exposant tel que

$$[F^{s'} f_1 f_2 \dots f_h] \quad \text{ou} \quad [F_1^{s'} f_1 \dots f_h],$$

qui lui est égal, ne soit pas nul.

D'ailleurs $2s' \geqq 2s - 2h$ et l'égalité a lieu sous la condition nécessaire et suffisante que

$$(8) \qquad [F^{s-h+1} f_1 f_2 \dots f_h] = 0.$$

De quelque façon que l'on choisisse $h'(h' < h)$ fonctions parmi $f_1, \dots, f_h$, l'égalité précédente entraîne

$$[F^{s-h'+1} \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_{h'}] = 0;$$

en particulier

$$[F^s f_i] = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, h);$$

l'équation symbolique (9), où f est une forme linéaire

$$(9) \qquad [F^s f] = 0$$

constitue la condition nécessaire et suffisante pour que f s'exprime au moyen de $U_1, \dots, U_{2s}$.

En particulier aussi, l'égalité (8) entraîne

$$[F^{s-1} f_i f_j] = 0.$$

Nous allons montrer que si l'on suppose $n = 2s$ et que h formes linéaires $f_1, \dots, f_h$ satisfont à (8), l'équation symbolique (10), où f

est une forme linéaire inconnue

(10) $$[F^{s-h}f_1 f_2 \ldots f_h f] = 0 \qquad (h + 1 \leqq s),$$

est équivalente au système d'équations

(11) $$[F^{s-1} f_i f] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, h).$$

En effet, l'équation (10) admet, avec les notations précédentes, $2s - h$ solutions distinctes : $f_1, \ldots, f_h$ et les $2(s - h)$ variables de réduction de F_1 ; le système d'équations linéaires par rapport aux coefficients de f, par quoi elle peut être remplacée, comprend par conséquent $2s - (2s - h) = h$ équations distinctes. D'autre part, l'équation (11) admet toutes les solutions de (10), d'après ce qui a été dit quelques lignes plus haut; elle n'admet pas d'autres solutions, car elle est équivalente à h équations linéaires distinctes : on le voit en constatant que, dans le cas contraire, la relation

$$[F^{s-1}(\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_h f_h) f] = 0,$$

où les λ seraient des paramètres à déterminer, devrait être vérifiée quel que soit f; donc qu'on devrait avoir

$$[F^{s-1}(\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_h f_h)] = 0;$$

ce qui exigerait que

$$\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_h f_h = 0$$

et serait en contradiction avec l'indépendance de $f_1, \ldots, f_h$.

3. Les formes différentielles extérieures et la dérivation extérieure. — Les expressions qui figurent sous le signe d'intégrale multiple d'ordre p à n variables peuvent être représentées symboliquement par des formes extérieures de degré p qui leur sont covariantes par rapport à tout changement de variables, et où les différentielles jouent le rôle des quantités u des précédents numéros (§ 1); on obtient ainsi les *formes différentielles extérieures* [9] (1).

L'application du théorème de Stokes généralisé à l'intégrale p-uple

---

(1) On peut aussi interpréter une forme différentielle extérieure comme représentant un champ de tenseurs antisymétriques [10′]; la dérivation extérieure et sa propriété de covariance par rapport à la forme différentielle extérieure résultent de la notion qui généralise celle de rotationnel.

permet en général de déduire de la forme différentielle extérieure ω de degré p une forme différentielle extérieure ω' de degré $p+1$; l'opération ainsi définie a été appelée par M. Cartan *dérivation extérieure*. Posons

$$\omega = \sum A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}(x_1 x_2 \ldots x_n)\,[dx_{\alpha_1}\, dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p}],$$

la sommation étant étendue à toutes les combinaisons d'indices p à p; il vient alors

$$\omega' = \sum [dA_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}\, dx_{\alpha_1}\, dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p}].$$

Nous admettons ainsi, et nous l'admettrons par la suite, que les coefficients A sont des fonctions continues qui admettent des dérivées partielles du premier ordre, mais cela n'est pas nécessaire pour l'existence de la forme dérivée extérieure [9]. La formule définitive a deux formes suivant que p est pair ou impair :

$$\omega' = \sum \mathcal{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p \alpha_{p+1}}[dx_{\alpha_1}\, dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_{p+1}}],$$

la sommation étant étendue à toutes les combinaisons d'indices $p+1$ à $p+1$, et si p est pair

$$\mathcal{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p+1}} = \frac{\partial A_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}}{\partial x_{\alpha_{p+1}}} + \frac{\partial A_{\alpha_2 \ldots \alpha_p \alpha_{p+1}}}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots + \frac{\partial A_{\alpha_{p+1} \alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}};$$

si p est impair,

$$\mathcal{A}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p+1}} = \frac{\partial A_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}}{\partial x_{\alpha_{p+1}}} - \frac{\partial A_{\alpha_2 \ldots \alpha_p \alpha_{p+1}}}{\partial x_{\alpha_1}} \pm \ldots \pm \frac{\partial A_{\alpha_{p+1} \alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}},$$

les signes $+$ et $-$ alternant (*cf.* Buhl [6] et De Donder [17]).

Si m est un coefficient, fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et ω une forme différentielle extérieure,

$$(m\omega)' = [dm\,\omega] + m\omega'.$$

Si ω et ϖ sont deux formes différentielles extérieures quelconques,

$$[\omega\varpi]' = [\omega'\varpi] \pm [\omega\varpi'],$$

le signe $+$ et le signe $-$ se rapportant respectivement aux cas où ω est de degré pair ou impair.

La forme dérivée extérieure est covariante à la forme donnée par rapport à tout changement de variables effectué sur les x; cela tient à la signification invariante de la formule de Stokes généralisée, qui est susceptible de recevoir une expression indépendante du choix des variables.

4. Les formes extérieures différentielles exactes. — La dérivée de la dérivée ω' d'une forme différentielle extérieure quelconque ω est identiquement nulle; réciproquement, si la dérivée d'une forme différentielle extérieure ϖ est nulle, la forme ϖ peut être regardée comme la dérivée d'une forme ω dont le degré est inférieur d'une unité à celui de ϖ.

Pour démontrer la première partie de cette proposition, il suffit de le faire sur un monome $A[dx_1, \ldots, dx_p]$; or si A ne dépend que de $x_1, x_2, \ldots, x_p$, $[dA\, dx_1, \ldots, dx_p]$ est nul, donc sa dérivée aussi; si A ne s'exprime pas avec $x_1, \ldots, x_p$ seuls, par un changement de variables on peut s'arranger pour qu'il soit égal à x_{p+1} et la vérification est immédiate. Pour démontrer la réciproque, le procédé le plus rapide [9] est un procédé de récurrence qui s'appuie sur le lemme suivant :

Si la dérivée d'une forme ω est nulle, et si cette forme ne contient pas la différentielle dx_n, ses coefficients sont tous indépendants de x_n.

On peut donner aussi une démonstration directe analogue à la démonstration classique du cas des intégrales curvilignes [24].

Cas d'une forme de Pfaff. — Pour une forme linéaire de différentielles ou forme de Pfaff

$$\omega = \sum a_i(x_1 \ldots x_n)\, dx_i,$$

la dérivée extérieure est la forme différentielle quadratique extérieure qui correspond à la forme bilinéaire alternée de différentielles qu'on appelle le *covariant bilinéaire* [20] $\Sigma\, da_i dx_i - da_i dx_i$:

$$\omega' = \sum_1^n [da_i\, dx_i] = \sum a_{ij}[dx_i\, dx_j]$$

en posant

$$a_{ij} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j},$$

la sommation étant étendue aux combinaisons des n indices deux à deux.

Pour les formes de Pfaff, M. Cartan [7] a introduit en outre la notion de formes différentielles extérieures dérivées successives de la forme donnée ω; ce sont des formes covariantes à ω, de degré croissant, dont la première est ω' et dont les suivantes : ω'', ω''', ..., $\omega^{(2m-1)}$, $\omega^{(2m)}$, ..., sont définies par les relations

$$\omega'' = [\omega\omega'], \qquad \omega''' = \frac{1}{2}[\omega'^2], \qquad \ldots,$$

$$\omega^{(2m-1)} = \frac{1}{m!}[\omega'^m], \qquad \omega^{(2m)} = \frac{1}{m!}[\omega\omega'^m], \qquad \ldots.$$

Les coefficients de ces formes ne sont autres que les agrégats de Pfaff [28] et l'on a, avec les notations de Jacobi,

$$\omega = \sum (0, i)\, dx_i, \qquad \omega' = \sum (i, j)[dx_i\, dx_j], \qquad \ldots,$$

$$\omega^{(2m-1)} = \sum (i_1, i_2, \ldots, i_{2m}) \qquad [dx_{i_1} \ldots dx_{i_{2m}}],$$

$$\omega^{(2m)} = \sum (0, i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1})[dx_{i_1} \ldots dx_{i_{2m+1}}]$$

avec

$$(0, i) = a_i, \; (i, j) = a_{ij};$$

le signe Σ s'étend à toutes les combinaisons possibles des n indices;

$$(i_1, \ldots, i_{2m}) = \frac{1}{2m!} \sum \pm (i_1, i_2) \ldots (i_{2m-1}\, i_{2m})$$

$$= \sum_{2}^{2m} {}^{\nu} (i_1, i_\nu)(i_{\nu+1} \ldots i_{2m}\, i_2 \ldots i_{\nu-1}),$$

$$(0, i_1, \ldots, i_{2m}) = \sum a_{i_\nu} (i_{\nu+1} \ldots i_{2m+1}\, i_1 \ldots i_{\nu-1}).$$

On pourra comparer Grassmann [26].

Exemples :

1° $$\omega = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + \ldots + p_n\, dx_n,$$

le nombre des variables est ici $2n$:

$$\omega' = [dp_1\,dx_1] + [dp_2\,dx_2] + \ldots + [dp_n\,dx_n],$$

$$\omega^{(2n-2)} = \frac{1}{(n-1)!}[\omega\,\omega'^{n-1}]$$
$$= p_1[dx_1\,dp_2\,dx_2\ldots dp_n\,dx_n] + p_2[dp_1\,dx_1\,dx_2\ldots dp_n\,dx_n] + \ldots,$$

$$\omega^{(2n-1)} = \frac{[\omega'^n]}{n!} = [dp_1\,dx_1\,dp_2\,dx_2\ldots dp_n\,dx_n],$$

$$\omega^{(2n)} = 0.$$

2°
$$\omega = dz - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2 - \ldots - p_n\,dx_n,$$
$$\omega' = [dx_1\,dp_1] + [dx_2\,dp_2] + \ldots + [dx_n\,dp_n],$$
$$\omega^{(2n-1)} = \frac{[\omega'^n]}{n!} = [dx_1\,dp_1\ldots dx_n\,dp_n],$$
$$\omega^{(2n)} = \frac{[\omega\,\omega'^n]}{n!} = [dz\,dx_1\,dp_1\ldots dx_n\,dp_n],$$
$$\omega^{(2n+1)} = 0.$$

5. Classe d'une forme différentielle extérieure [7]. — C'est le nombre minimum de variables au moyen desquelles on peut exprimer cette forme. Désignons la forme par ω, soient c ce nombre et y_1, y_2, ..., y_c un tel système de variables, tandis que nous appelons x_1, x_2, ..., x_n, comme précédemment, les variables qui figurent dans ω. Les y sont c fonctions indépendantes de x_1, x_2, ..., x_n qu'on appelle « variables caractéristiques »; elles sont fournies par l'intégration d'un système d'équations de Pfaff : le système caractéristique [9, 24]. *On forme celui-ci en adjoignant au système associé à ω le système associé à ω' : il est complètement intégrable et la classe en est le nombre des équations indépendantes.* On le démontre ainsi : si ω s'exprime au moyen de y_1, y_2, ..., y_c et de leurs différentielles, il en est de même de ω'; le système associé à ω et ω' doit donc être une conséquence de

$$dy_1 = 0, \quad dy_2 = 0, \quad \ldots, \quad dy_c = 0.$$

Réciproquement, si le système associé est conséquence de $dy_1 = 0$, ..., $dy_{c'} = 0$, ω peut s'exprimer, quant aux différentielles, au moyen de dy_1, dy_2, ..., $dy_{c'}$; d'autre part, ses coefficients ne peuvent contenir des variables indépendantes de y_1, y_2, ..., $y_{c'}$, sans cela ω' ne pourrait s'exprimer au moyen de dy_1, ..., $dy_{c'}$ seulement. Si donc le système associé à ω et ω' comprend n ou $n-1$

équations indépendantes, la forme ω est de classe n ou $n-1$ respectivement; dans le premier cas, $x_1, \ldots, x_n$ sont des variables caractéristiques; dans le deuxième, le système caractéristique est un système de $n-1$ équations différentielles ordinaires.

Si le système associé comprend $n-1-q$ équations indépendantes, adjoignons-lui q équations de Pfaff qui forment avec lui un système de $n-1$ équations indépendantes, dont $\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ sont un système d'intégrales premières; le système associé à ω et ω' est une conséquence de $d\eta_1 = 0, \ldots, d\eta_{n-1} = 0$; ω peut s'exprimer au moyen de $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ seulement en une forme ω_1; et le système associé à ω et ω' leur étant covariant par rapport à tout changement de variables, le système associé à ω_1 et ω'_1 possède encore $n-1-q$ équations indépendantes; on continuera jusqu'à ce qu'on obtienne une forme à $n-q$ variables, qui, d'après ce qu'on a vu plus haut, est de classe $c = n-q-1$.

Lorsque ω est une dérivée exacte, son système caractéristique se confond avec son système associé.

Dans le cas d'une expression de Pfaff, ω, le système caractéristique comprend les équations qui sont indépendantes parmi $\omega = 0$ et les équations du système associé à ω'. Si $2s$ est le rang (toujours pair) de ω', on peut toujours trouver $2s$ formes de Pfaff indépendantes telles que

$$\omega' = [\varpi_1 \varpi_2] + \ldots + [\varpi_{2s-1} \varpi_{2s}];$$

le système associé à ω' est

$$(12) \qquad \varpi_1 = 0, \qquad \varpi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varpi_{2s} = 0.$$

Deux cas sont à distinguer suivant que $\omega = 0$ est distincte des équations (12) ou non; dans le premier la classe de ω est $2s+1$ et dans le deuxième la classe de ω est $2s$. *La classe est toujours l'ordre de la première dérivée qui s'annule* (*cf.* Grassmann [26, n° 511]); puisque

$$\omega^{(2s+1)} = \frac{1}{s!}[\omega'^{s+1}], \qquad \omega^{(2s)} = \frac{1}{s!}[\omega\omega'^{s}]$$

on a

$$\omega^{(c)} = 0.$$

Lorsque $c = 1$, ω est une différentielle totale exacte, au sens habituel.

Dans tous les cas, $\omega^{(c-1)}$ est, à un facteur indépendant des différentielles près, égal au produit extérieur des premiers membres des équations du système caractéristique, c'est-à-dire à $[dy_1 dy_2, \ldots, dy_c]$; l'équation symbolique

$$[\omega^{(c-1)} df] = 0,$$

où f est une fonction inconnue de $x_1, \ldots, x_n$, conduit à un système Σ_1 de $n-c$ équations linéaires homogènes aux dérivées partielles du premier ordre pour f qui exprime que cette fonction ne dépend que de $y_1, y_2, \ldots, y_c$; c'est donc un système complet; il est corrélatif au système caractéristique de ω; Σ_1 est le premier système adjoint à ω : si $x_1 = y_1, \ldots, x_c = y_c$, Σ_1 comprend

$$\frac{\partial f}{\partial x_{c+1}} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

De même

$$[\omega^{(c-2)} df] = 0$$

conduit à un système Σ_2 d'équations linéaires homogènes aux dérivées partielles du premier ordre pour f; il contient toutes les équations de Σ_1 plus une qui correspond à l'annulation du coefficient de $[dy, \ldots, dy_c]$; c'est donc un système complet qui admet $c-1$ intégrales de Σ_1.

Soient η_1 une de ces intégrales et ω_1 ce que devient ω quand on y fait $\eta_1 = \text{const.}$ et $d\eta_1 = 0$; ω_1 est de classe $c-2$ ou $c-1$; or la relation

$$[\omega^{(c-2)} d\eta_1] = 0$$

entraîne

$$[\omega_1^{(c-2)} d\eta_1] = 0,$$

c'est-à-dire, puisque η_1 joue dans ω_1 le rôle de paramètre, $\omega_1^{(c-2)} = 0$; ω_1 est de classe $c-2$; on exprime ce fait en disant que η_1 est de rang deux par rapport à ω ; c'est une propriété commune à toutes les intégrales de Σ_2 qu'on appelle le deuxième système adjoint à ω.

6. **Groupes conjugués et semi-conjugués.** — D'une façon générale nous dirons avec M. Goursat [24] que les q fonctions distinctes $f_1, f_2, \ldots, f_q$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(q < n)$ forment un groupe de rang r par rapport à la forme de Pfaff ω si les relations

$$f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \quad \ldots, \quad f_q = a_q,$$
$$df_1 = 0, \quad df_2 = 0, \quad \ldots, \quad df_q = 0,$$

où les a sont des constantes (¹) quelconques, abaissent la classe de ω de r unités; naturellement $r \leqq 2q$. Soit ω_1 la nouvelle forme; sa classe est $c - r$; la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que le produit extérieur

$$[\omega^{(c-2)}\, df_1 \ldots df_q]$$

soit nul, tandis que

$$[\omega^{(i)}\, df_1 \ldots df_q],$$

où $i < c - r$, est différent de zéro : cela tient à ce que $\omega_1^{(i)} - \omega^{(i)}$ $(i \leqq c - r)$ s'annule avec $df_1, \ldots, df_q$. Le groupe des q fonctions est *conjugué* par rapport à ω s'il est de rang $2q\,(2q \leqq c)$; il est *semi-conjugué* s'il est de rang $2q - 1$.

Lorsque c est égal à $2p$ ou $2p + 1$, il n'existe pas de groupe conjugué de plus de p fonctions; *la connaissance d'un groupe conjugué de p fonctions permet de ramener, par un changement de variables, ω à une forme canonique, sans quadrature si $c = 2p$, avec une quadrature si $c = 2p + 1$.*

Il suffit pour s'en rendre compte de prendre comme nouvelles variables $y_1, y_2, \ldots, y_p$ ces fonctions $f_1, \ldots, f_p$, les autres variables devenant $y_{p+1}, \ldots, y_n$.

Si $c = 2p$, la nouvelle forme ne peut contenir d'autres différentielles que $dy_1, \ldots, dy_p$ et, comme elle est de classe $2p$, on peut l'écrire

$$z_1\, dy_1 \quad \ldots \quad z_p\, dy_p.$$

$z_1, \ldots, z_p;\ y_1, \ldots, y_p$ étant $2p$ variables indépendantes.

Si $c = 2p + 1$, la forme s'écrit

$$(B_1\, dy_1 + \ldots + B_p\, dy_p) + (B_{p+1}\, dy_{p+1} + \ldots + B_n\, dy_n)$$

et le deuxième groupe de termes doit représenter une forme de classe 1, c'est-à-dire une différentielle totale exacte, quand on y considère $f_1, \ldots, f_p$ comme des constantes; au moyen d'une quadrature, on amène donc ω à la forme

$$d\eta_1 + z_1\, dy_1 + \ldots + z_p\, dy_p,$$

$\eta, \eta_1, \ldots, y_p;\ z_1, \ldots, z_p$ étant $2p + 1$ variables indépendantes.

(¹) Il est bien entendu que nous supposons que les f sont définies, continues et différentiables dans un domaine (d) contenu dans celui où les coefficients de ω jouissent de cette propriété, et que d'autre part on ne donne aux a que des valeurs que les fonctions f sont susceptibles de prendre dans (d).

7. Équations de Pfaff et équations différentielles extérieures. — Soit une forme différentielle extérieure ω de degré p à n variables $x_1, \ldots, x_n$; toute multiplicité M_r à r dimensions $(p \leqq r < n)$ telle que l'intégrale p-uple $\int \omega$ étendue à une variété quelconque faisant partie de M_r soit nulle, est dite multiplicité intégrale de l'équation

(13) $$\omega = 0 \quad [24].$$

Cette définition comprend le cas où ω est linéaire, c'est-à-dire le cas d'une équation de Pfaff.

Les définitions de classe, variables caractéristiques, système caractéristique s'étendent sans peine à une équation (13); nous nous limiterons au cas d'une équation de Pfaff.

Le système caractéristique de l'équation de Pfaff (13) *est le système associé aux formes* ω *et* $[\omega\omega']$: on le voit simplement en réduisant ω à une forme canonique.

La classe de l'équation de Pfaff est toujours un nombre impair : si ω est de classe $2p$, l'équation est de classe $2p-1$, si ω est de classe $2p+1$, l'équation est aussi de classe $2p+1$: la classe de l'équation est donc égale au degré de la forme dérivée de ω, non nulle et d'ordre pair le plus élevé.

La connaissance d'un groupe de p fonctions conjuguées par rapport à ω si la classe de ω est $2p$ ou d'un groupe de p fonctions semi-conjuguées, si la classe de ω est $2p-1$ permet de ramener l'équation (13) à une forme canonique. Dans les deux cas nous dirons que les p fonctions forment un groupe conjugué relativement à l'équation (13).

8. Détermination d'un groupe conjugué ou semi-conjugué. — D'après ce qui a été dit plus haut, la condition nécessaire et suffisante pour que q fonctions distinctes $f_1, f_2, \ldots, f_q$ forment un groupe conjugué relativement à la forme de Pfaff ω de classe c est

$$[\omega^{(c-2q)}\, df_1 \ldots df_q] = 0.$$

On désigne sous le nom de « fonction appartenant au groupe » toute fonction des variables $x_1, \ldots, x_n$ qui s'exprime au moyen de $f_1, \ldots, f_q$.

Si q fonctions distinctes $f_1, \ldots, f_q$ forment un groupe conjugué, il est clair que r fonctions distinctes $(r \leqq q)$ appartenant à ce groupe forment un groupe conjugué; en particulier, chaque fonction appartenant au groupe est de rang 2 par rapport à ω, c'est-à-dire est une intégrale de Σ_2; mais la réciproque n'est pas vraie : r fonctions distinctes de rang 2 ne forment pas nécessairement un groupe conjugué.

Une condition nécessaire pour que q fonctions distinctes $f_1, \ldots, f_q$ forment un groupe semi-conjugué est

$$[\omega^{(r-2q+1)}\, df_1 \ldots df_q] = 0,$$

cette condition étant remplie, le groupe est conjugué ou semi-conjugué et r fonctions distinctes du groupe forment un groupe conjugué ou semi-conjugué; en particulier, chaque fonction du groupe est au moins de rang 1, c'est-à-dire est une intégrale de Σ_1.

Il résulte de ce qui précède que si l'on connaît un groupe conjugué de q fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_q$, pour déterminer un groupe de $q+1$ fonctions dont il fasse partie, il est nécessaire et suffisant de trouver une fonction f distincte de $f_1, f_2, \ldots, f_q$, telle que

$$(14) \qquad [\omega^{(c-2q-2)}\, df_1 \ldots df_q\, df] = 0.$$

Cette équation exprime que f est de rang 2 par rapport à ω_1 et que cette fonction satisfait par conséquent au système complet de $q+1$ équations, Σ_2^1, deuxième adjoint à ω_1.

Or *l'équation symbolique* (14) *est équivalente au système* (15) :

$$(15) \quad [\omega^{(c-2)}\, df] = 0, \qquad [\omega^{(c-3)}\, df_1\, df] = 0, \qquad \ldots, \qquad [\omega^{(c-3)}\, df_q\, df] = 0.$$

En effet, d'abord (§ 6) toutes les solutions de (14) sont solutions de (15); comme ce dernier système est équivalent à un système de $q+1$ équations linéaires homogènes aux dérivées partielles pour f il suffit de montrer que ces équations sont distinctes. D'ailleurs, si c est pair l'équivalence de (14) et (15) résulte de l'équivalence de (10) et (11) qui a été démontrée plus haut; en reprenant comme il faut le raisonnement fait à cet endroit, on a une démonstration générale : [24] les q dernières équations (15) sont distinctes, autrement, les λ étant convenablement choisis, on aurait

$$[\omega^{(c-3)}(\lambda_1\, df_1 + \ldots + \lambda_q\, df_q)\, df] = 0,$$

quelle que soit f; donc on aurait

$$[\omega^{(c-3)}(\lambda_1\, df_1 + \ldots + \lambda_q\, df_q)] = 0;$$

si c est pair, on retrouverait

$$\lambda_1\, df_1 + \ldots + \lambda_q\, df_q = 0,$$

qui est impossible par suite de l'indépendance de $f_1, \ldots, f_q$; si c est impair, il faudrait comme on s'en assure en considérant par exemple une forme canonique de ω que

$$(16) \qquad \lambda_1\, df_1 + \ldots + \lambda_q\, df_q = \lambda\omega,$$

et alors ω serait de classe au plus égale à $2q$, ce qui est impossible puisque $c > 2q$.

La première équation (15) est indépendante des suivantes, sans quoi $\omega^{(c-2)}$ serait égal à

$$[\omega^{(c-3)}(\lambda_1\, df_1 + \ldots + \lambda_q\, df_q)],$$

ce qui entraînerait la relation (16) qui est impossible.

Par un procédé tout semblable, on montrerait l'équivalence de l'équation symbolique

$$[\omega^{(c-2q-1)}\, df_1 \ldots f_q\, df] = 0$$

et du système

$$[\omega^{(c-1)}\, df] = 0, \qquad [\omega^{(c-3)}\, df_1\, df] = 0, \qquad \ldots, \qquad [\omega^{(c-3)}\, df_q\, df] = 0$$

lorsque $f_1, \ldots, f_q$ forment un groupe semi-conjugué.

On déduit des considérations précédentes que pour déterminer un groupe

conjugué ou semi conjugué,

on choisit d'abord une fonction f_1 intégrale de Σ_2 ou Σ_1 :

$$(\Sigma_2) \quad [\omega^{(c-2)}\, df] = 0 \qquad \text{ou} \qquad (\Sigma_1) \quad [\omega^{(c-1)}\, df] = 0,$$

puis une intégrale f_2 distincte de f_1 du système

$$[\omega^{(c-2)}\, df] = 0, \qquad [\omega^{(c-3)}\, df_1\, df] = 0$$

ou

$$[\omega^{(c-1)}\, df] = 0, \qquad [\omega^{(c-3)}\, df_1\, df] = 0.$$

puis une intégrale f_3 distincte de f_1 et de f_2 du système

$$[\omega^{(c-2)}\, df] = 0, \qquad [\omega^{(c-3)}\, df_1\, df] = 0, \qquad [\omega^{(c-3)}\, df_2\, df] = 0$$

ou

$$[\omega^{(c-1)}\, df] = 0, \qquad [\omega^{(c-1)}\, df_1\, df] = 0, \qquad [\omega^{(c-3)}\, df_2\, df] = 9$$

et ainsi de suite.

Si le nombre des variables est égal à la classe, on peut supprimer partout, pour la détermination d'un groupe semi-conjugué, l'équation

$$[\omega'^{c-1)}\,df] = 0$$

et prendre pour f_1 une fonction arbitraire des variables.

Comme la réduction d'une expression ou d'une équation de Pfaff à une forme canonique revient à la détermination d'un groupe conjugué ou d'un groupe semi-conjugué par rapport à une expression de Pfaff, il en résulte que le théorème précédent donne une méthode de réduction. Cette méthode est due dans toute sa généralité à M. Cartan [7]. Elle avait été indiquée par Clebsch [13] dans le cas d'une forme où le nombre des variables est égal à la classe, celle-ci étant un nombre pair.

Observons que si l'on appelle opération d'ordre r l'opération qui consiste à trouver une intégrale première d'un système de r équations différentielles à $r+1$ variables, la recherche d'un groupe conjugué de q fonctions relativement à une forme à n variables nécessite q opérations respectivement d'ordre

$$n-1, \quad n-3, \quad \ldots, \quad n-2q+1.$$

La détermination d'un groupe semi-conjugué dans les mêmes conditions nécessite q opérations respectivement d'ordre

$$n, \quad n-2, \quad \ldots, \quad n-2q+2;$$

dans le cas où la classe de la forme est n, la première opération, d'ordre n, peut être supprimée puisqu'on peut choisir arbitrairement la fonction f_1.

On démontre relativement à la détermination d'un groupe conjugué par rapport à l'équation $\omega = 0$ la proposition suivante [24] :

« La forme ω étant de classe $2p$ ou $2p-1$ et ses coefficients étant holomorphes dans le voisinage d'un point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, on peut trouver un groupe conjugué par rapport à $\omega = 0$ comprenant p fonctions qui sont holomorphes dans le voisinage du point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ et qui se réduisent à $x_1, \ldots, x_p$ respectivement lorsqu'on y fait

$$x_{p+1} = x_{p+1}^0, \qquad \ldots, \qquad x_n = x_n^0. \text{ »}$$

9. Nous allons maintenant donner le développement des équations symboliques considérées, en supposant que les fonctions f sont

exprimées au moyen d'un système de variables caractéristiques de ω.

Lorsque c est pair et égal à 2γ, et par conséquent

$$\omega^{(c-2)} = \frac{1}{(\gamma-1)!}[\omega\,\omega'^{\gamma-1}],$$

on pose

$$\gamma[\omega\,\omega'^{\gamma-1}\,df] = \{f\}\,[\omega'^{\gamma}].$$

Lorsque c est impair et que $c = 2\gamma+1$ et par conséquent

$$\omega^{(c-2)} = \frac{1}{\gamma!}[\omega'^{\gamma}],$$

on pose

$$[\omega'^{\gamma}\,df] = \{f\}\,[\omega\,\omega'^{\gamma}].$$

La condition nécessaire et suffisante pour que f soit de rang 2 est donc $\{f\} = 0$ et l'on a respectivement dans les deux cas

$$\{f\} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{1}^{2\gamma} \frac{\alpha i_{2\gamma}}{A}\,\frac{\partial f}{\partial x i_{2\gamma}}, \\ \displaystyle\sum_{1}^{2\gamma+1} \frac{\beta i_{2\gamma+1}}{A_1}\,\frac{\partial f}{\partial x i_{2\gamma+1}}, \end{cases}$$

avec

$$\alpha i_{2\gamma} = \sum(0, i_1, \ldots, i_{2\gamma-1}),$$

$$\beta i_{2\gamma+1} = \sum(i_1, \ldots, i_{2\gamma})$$

et

$$A = (i_1, i_2, \ldots, i_{2\gamma}) \quad (c = 2\gamma) \qquad \text{et} \qquad A_1 = (0, i_1, \ldots, i_{2\gamma+1}) \quad (c = 2\gamma+1) \ (\S\,4).$$

Si a_{ik} sont les coefficients de ω', A est le déterminant total des a_{ik}; A_1 est ce déterminant bordé des coefficients de ω; ces deux déterminants sont différents de 0 dans l'hypothèse où nous nous sommes placés.

Lorsque $c = 2\gamma$, on pose

$$\gamma[\omega'^{\gamma-1}\,df_j\,df] = (f_j, f)\,[\omega'^{\gamma}],$$

et lorsque $c = 2\gamma+1$

$$\gamma[\omega\,\omega'^{\gamma-1}\,df_j\,df] = (f_j, f)\,[\omega\,\omega'^{\gamma}].$$

Dans les deux cas, les parenthèses sont des formes bilinéaires alternées par rapport aux dérivées partielles des fonctions f et f_j.

On a respectivement dans ces deux cas :

$$(f_j, f) = \sum \frac{A_{i_{2\gamma-1}, i_{2\gamma}}}{A} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_{i_{2\gamma-1}}} \frac{\partial f}{\partial x_{i_{2\gamma}}} - \frac{\partial f_j}{\partial x_{i_{2\gamma}}} \frac{\partial f}{\partial x_{i_{2\gamma-1}}} \right),$$

$$(f_j, f) = \sum \frac{B_{i_{2\gamma}\, i_{2\gamma+1}}}{A_1} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_{i_{2\gamma}}} \frac{\partial f}{\partial x_{i_{2\gamma+1}}} - \frac{\partial f_j}{\partial x_{i_{2\gamma+1}}} \frac{\partial f}{\partial x_{i}} \right)$$

avec

$$A_{i_{2\gamma-1}, i_{2\gamma}} = \sum (i_1, i_2, \ldots, i_{2\gamma-2}),$$

$$B_{i_{2\gamma}, i_{2\gamma+1}} = \sum (0, i_1, \ldots, i_{2\gamma-1}).$$

Les $A_{\lambda\mu}$ et $B_{\lambda\mu}$ sont, au signe près, égaux aux mineurs de $\alpha_{\lambda\mu}$ dans A et A_1.

De la définition même des symboles $\{\ \ \}$ et $(\ \ )$, il résulte qu'ils sont covariants de la forme ω et des fonctions qu'ils impliquent par rapport à tout changement de variables.

Cas d'une forme réduite :

1°
$$\omega = z_1\, dy_1 + \ldots + z_\gamma\, dy_\gamma,$$

$$\{f\} = -\left(z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \ldots + z_\gamma \frac{\partial f}{\partial z_\gamma} \right),$$

$$(f_i, f) = \sum_1^\gamma{}_j \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j} \frac{\partial f}{\partial y_j} - \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \frac{\partial f}{\partial z_j} \right).$$

C'est la parenthèse de Poisson. On vérifie sans peine les relations

$$\{(f, g)\} = (f, g) + (\{f\}, g) + (f, \{g\}),$$

$$((f, g), h) + ((g, h), f) + ((h, f), g) = 0,$$

où f, g, h sont trois fonctions de $\eta, \ldots, z_p$; démontrées sur une forme réduite, elles s'appliquent à une forme quelconque de classe paire ;

2°
$$\omega = d\eta - z_1\, dy_1 - \ldots - z_\gamma\, dy_\gamma,$$

$$\{f\} = \frac{\partial f}{\partial \eta}.$$

Le symbole correspondant à la parenthèse du cas général est ici le crochet de Jacobi, au signe près

$$(f_i, f) = -[f_i, f] = +\sum_1^\gamma{}_j \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j} \left(\frac{\partial f}{\partial y_j} + z_j \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial f}{\partial z_j} \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j} + z_j \frac{\partial f_i}{\partial \eta} \right) \right).$$

Il faut remarquer que, pour distinguer du symbole du **produit extérieur**, nous mettons une virgule entre f_i et f.

On démontre sur la forme réduite les formules suivantes, qui sont vraies pour une forme de Pfaff quelconque de classe impaire :

$$\{(f, g)\} = (\{f\}, g) + (f, \{g\}),$$
$$\big((f, g), h\big) + \big((g, h), f\big) + \big((h, f), g\big)$$
$$= (f, g)\{h\} + (g, h)\{f\} + (h, f)\{g\}.$$

Toutes les identités que nous venons de signaler relativement aux accolades et parenthèses relatives à trois fonctions sont connues de longue date pour les formes réduites (Poisson, Jacobi, Mayer).

TRANSFORMATIONS D'UNE EXPRESSION OU D'UNE ÉQUATION DE PFAFF.

Lorsque deux expressions de Pfaff sont de la même classe et sont exprimées chacune au moyen de variables caractéristiques, on peut toujours définir un changement de variables qui permette de passer de l'une à l'autre : il suffit pour cela de passer par une forme canonique commune; il en est de même pour deux équations de Pfaff. Lorsque les deux expressions ou les deux équations ne diffèrent que par le nom des variables, de tels changements de variables définissent une transformation d'une expression ou d'une équation de Pfaff en elle-même; nous retrouvons ainsi le point de vue développé dans l'introduction et l'objet essentiel de cet exposé. Nous commencerons par nous occuper du cas où l'expression ou l'équation de Pfaff sont réduites à une forme canonique, ce qui nous conduit à la théorie classique des transformations de contact.

10. Transformations de contact. Cas général. — Posons

$$\omega = dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n,$$
$$\Omega = dZ - P_1\, dX_1 - \ldots - P_n\, dX_n.$$

Une transformation de contact est définie par un changement des variables x, z, p en X, Z, P tel que, ρ étant une fonction non identiquement nulle de ces variables, on ait

$$\Omega = \rho\omega. \tag{17}$$

Par dérivation extérieure on déduit de (17)

$$\Omega' = \rho\omega' + [d\rho . \omega],$$
$$p!\, \Omega^{(2p-1)} = [\Omega'^{p}] = \rho^{p}[\omega'^{p}] + p\rho^{p-1}[\omega'^{p-1}\, d\rho . \omega]$$
$$= \rho^{p} p!\, \omega^{(2p-1)} - p(p-1)!\, \rho^{p-1}[\omega^{(2p-2)}\, d\rho]$$

ou

$$\Omega^{(2p-1)} = \rho^{p}\, \omega^{(2p-1)} - \rho^{p-1}[\omega^{(2p-2)}\, d\rho].$$

De même

$$\Omega^{(2p)} = \frac{1}{p!}[\Omega'^{p} . \Omega] = \frac{\rho^{p+1}}{p!}[\omega'^{p} . \omega] = \rho^{p+1}\, \omega^{(2p)},$$

quel que soit $p \leqq n$.

Par conséquent,

$$\Omega^{(2n-2)} = \rho^{n} \quad \omega^{(2n-2)},$$
$$\Omega^{(2n)} \quad = \rho^{n+1}\, \omega^{(2n)}.$$

Cette dernière relation est de degré $(n+1)$; elle donne (deuxième exemple du paragraphe 4)

$$[dZ\, dX_1\, dP_1 \ldots dX_n\, dP_n] = \rho^{n+1}[dz\, dx_1\, dp_1 \ldots dx_n\, dp_n]$$

ou

$$\frac{D(Z, X_1, \ldots, P_n)}{D(z, x_1, \ldots, p_n)} = \rho^{n+1} \neq 0.$$

L'existence de la relation (17) entraîne donc l'indépendance des fonctions X, Z, P par rapport à x, z, p.

Soient F et Φ deux fonctions quelconques de X, Z, P, et f et φ ce qu'elles deviennent quand on y remplace les grandes lettres par leurs expressions au moyen des petites; on a

$$[\Omega^{(2n-2)}\, dF\, d\Phi] = \rho^{n}[\omega^{(2n-2)}\, df\, d\varphi]$$

et, d'après les notations précédentes,

$$(18) \qquad \rho[F, \Phi]_X = [f, \varphi]_x.$$

L'indice X rappelle que le premier crochet est pris, F et Φ étant fonctions des grandes lettres.

Considérons maintenant deux formes de Pfaff, Ω_1, Ω_2, aux variables X, Z, P, et ω_1, ω_2 ce qu'elles deviennent quand on y remplace les grandes lettres par leurs expressions au moyen des petites. On définit les parenthèses (Ω_1, Ω_2) et (ω_1, ω_2) par les relations

$$n[\Omega'^{n-1}\, \Omega_1\, \Omega_2] = (\Omega_1 \Omega_2)[\Omega'^{n}], \qquad n[\omega'^{n-1}\, \omega_1\, \omega_2] = (\omega_1, \omega_2)[\omega'^{n}]$$

et l'on a encore

$$\rho(\Omega_1, \Omega_2) = (\omega_1, \omega_2). \tag{18'}$$

Si $[f, \varphi] = 0$, nous dirons que les deux fonctions f et φ sont en involution; si $(\omega_1, \omega_2) = 0$, nous dirons que les deux formes de Pfaff sont conjuguées (*cf.* [19]), ces propriétés se conservent d'après (18) et (18') par une transformation de contact quelconque. Si

$$\omega_1 = \lambda_1^1\, dx_1 + \ldots + \lambda_n^1\, dx_n + \lambda^1\, dz + \mu_1^1\, dp_1 + \ldots + \mu_n^1\, dp_n,$$
$$\omega_2 = \lambda_1^2\, dx_1 + \ldots + \lambda_n^2\, dx_n + \lambda^2\, dz + \mu_1^2\, dp_1 + \ldots + \mu_n^2\, dp_n,$$

on a

$$(\omega_1 \omega_2) = \sum_1^n \left(\mu_i^2(\lambda_i^1 + p_i\lambda^1) - \mu_i^1(\lambda_i^2 + \mu_i\lambda^2)\right).$$

En appliquant la relation (18) aux fonctions X, Z, P on obtient les relations fondamentales des transformations de contact

$$[Z, X_i] = [X_i, X_k] = [X_i, P_k] = [P_i, P_k] = 0 \qquad (i \neq k), \tag{19}$$
$$[Z, P_i] = -\rho P_i, \qquad [P_i, X_i] = \rho, \tag{20}$$

où les grandes lettres sont à considérer comme fonctions des petites, les crochets étant relatifs à ω.

De plus, de la relation

$$\Omega^{(2n-1)} = \rho^n\, \omega^{(2n-1)} - \rho^{n-1}[\omega^{(2n-2)}\, d\rho],$$

on déduit, quelle que soit la fonction F,

$$[\Omega^{(2n-1)}\, dF] = \rho^n[\omega^{(2n-1)}\, df] + \rho^{n-1}[\omega^{(2n-2)}\, df\, d\rho]$$

et, en développant,

$$\rho^2 \frac{\partial F}{\partial Z} = \rho \frac{\partial f}{\partial z} + [\rho, f].$$

En y remplaçant F successivement par Z, X_i, P_i, on a

$$[\rho, Z] + \rho \frac{\partial Z}{\partial z} - \rho^2 = [\rho, X_i] + \rho \frac{\partial X_i}{\partial z} = [\rho, P_i] + \rho \frac{\partial P_i}{\partial z} = 0.$$

On peut énoncer diverses réciproques :

1° Étant données $(n+1)$ fonctions indépendantes $Z, X_1, \ldots, X_n$, des $2n+1$ variables x, z, p, satisfaisant aux relations

$$[Z, X_i] = 0, \qquad [X_i, X_k] = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n), \tag{21}$$

il existe $n+1$ autres fonctions ρ, $P_1, \ldots, P_n$ des mêmes variables, telles que l'on ait identiquement

$$(17) \qquad dZ - P_1\, dX_1 - \ldots - P_n\, dX_n = \rho(dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n).$$

Cela résulte de ce que les relations (21) signalent en général un groupe semi-conjugué relativement à ω;

2° Si les $2n+2$ fonctions $Z, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n, \rho$ des $2n+1$ variables $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, dont aucune n'est identiquement nulle, satisfont aux relations (19) et (20), elles donnent lieu à la relation (17);

3° Si ρ est une fonction arbitrairement choisie, non identiquement nulle, des $2n+1$ variables $z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, on peut toujours déterminer $2n+1$ fonctions $Z_1, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ des mêmes variables qui vérifient la relation (17).

Il résulte également des considérations précédentes que, les fonctions $Z, X_1, \ldots, X_n$ vérifiant la relation (17), le système d'équations aux dérivées partielles linéaires en f (22)

$$(22) \qquad [Z, f] = 0, \qquad [X_1, f] = 0, \qquad \ldots, \qquad [X_m, f] = 0 \qquad (m \leqq n)$$

est un système complet dont $2n - m$ intégrales indépendantes sont

$$Z, \quad X_1, \quad \ldots, \quad X_n, \quad \frac{P_{m+2}}{P_{m+1}}, \quad \frac{P_{m+3}}{P_{m+1}}, \quad \ldots, \quad \frac{P_n}{P_{m+1}}.$$

D'ailleurs, *le système* (22) est un système complet si les fonctions Z, $X_1, \ldots, X_m$ vérifient les relations (19) qui les concernent.

11. Transformations en x, p. — C'est le cas où les $2n$ fonctions $X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ forment à elles seules un groupe conjugué par rapport à ω; cela exige, en outre des relations précédentes,

$$\{X_i\} = 0, \qquad \{P_k\} = 0,$$

c'est-à-dire, d'après un calcul fait plus haut (§ 9),

$$\frac{\partial X_i}{\partial z} = \frac{\partial P_k}{\partial z} = 0,$$

et les $2n$ fonctions X, P sont indépendantes de z.

Des relations (20) on déduit

$$\frac{\partial\rho}{\partial p_i} = \frac{\partial\rho}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial\rho}{\partial z} = 0;$$

par conséquent, ρ est égal à une constante que nous désignons par A et

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = A.$$

Réciproquement, si ρ est une constante (différente de zéro) les X et les P sont indépendants de z : cela résulte des relations fondamentales.

En remplaçant les variables Z, X_i par AZ, AX_i, ce qui constitue une transformation en x, p particulière, le problème de la détermination des transformations en x, p est ramené au suivant :

1° Trouver les T qui conservent ω, c'est-à-dire telle que

$$\Omega = \omega$$

ou encore :

2° Étant donnée l'expression de Pfaff ω_1 à un nombre pair de variables

$$\omega_1 = p_1\, dx_1 + \ldots + p_n\, dx_n,$$

trouver les changements de variables effectués sur les $2n$ quantités x, p qui reproduisent ω_1 à une différentielle exacte près

$$\Omega_1 = \omega_1 + dU, \tag{23}$$

U étant une fonction des x, p, avec $Z = z + U$.

Ce dernier énoncé est équivalent à

3° Trouver les transformations qui laissent invariante la dérivée extérieure ω'_1 de ω_1 :

$$\omega'_1 = [dp_1\, dx_1] + \ldots + [dp_n\, dx_n].$$

La relation

$$\Omega'^{(2n-1)}_1 = \omega'^{(2n-1)}_1$$

donne alors

$$[dX_1 \ldots dP_n] = [dx_1 \ldots dp_n],$$

qui exprime l'indépendance des X, P par rapport aux x, p.

L'équation

$$[\omega'^{(2n-1)}_1\, df] = 0$$

est vérifiée quelle que soit la fonction f des x, p, et l'identité

$$[\Omega_1^{(2n-3)}\, dF\, d\Phi] = [\omega_1^{(2n-3)}\, df\, d\varphi],$$

où f et φ sont ce que deviennent ces fonctions F et Φ des X, P quand on les exprime en x, p, donne

$$(F, \Phi) = (f, \varphi)$$

avec

$$(F, \Phi) = \sum_1^n \left(\frac{\partial F}{\partial P_i} \frac{\partial \Phi}{\partial X_i} - \frac{\partial F}{\partial X_i} \frac{\partial \Phi}{\partial P_i} \right)$$

et l'expression analogue pour (f, φ), ce qui constitue un cas particulier d'un résultat précédemment indiqué. On obtient immédiatement les relations

$$(24) \qquad \begin{cases} (X_i, X_k) = (P_i, P_k) = (X_i, P_k) = 0 & \text{pour } i \neq k; \\ (P_i, X_i) = 1. \end{cases}$$

Les relations de la première ligne ne sont pas modifiées par la transformation particulière que nous avons effectuée, elles sont donc générales. On a de plus les relations

$$(U, X_i) = \sum_1^n j\, p_j \frac{\partial X_i}{\partial p_j}, \qquad (U, P_i) = -P_i + \sum_1^n j\, p_j \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Réciproquement, étant données n fonctions X_i des x, p satisfaisant aux relations $(X_i, X_k) = 0$, on peut toujours trouver $n+1$ fonctions U, P_i des x, p donnant lieu à l'identité (23), car ces relations expriment, en général, que les X forment un groupe semi-conjugué par rapport à ω_1; U est déterminé par une quadrature. On complète la transformation au moyen de $Z - z = U$.

Il résulte de la détermination générale d'un groupe semi-conjugué que si l'on donne arbitrairement la fonction U des x, p, on peut trouver $2n$ fonctions X, P des mêmes variables donnant lieu à l'identité (23).

Les transformations en x, p forment un sous-groupe du groupe G.

12. Transformations de contact homogènes. — Les considérations précédentes supposent que les X ne satisfont pas à l'équation

$$[\omega_1^{(2n-2)}\, df] = 0$$

ou encore

$$\{f\} = \sum_1^n p_i \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0;$$

quand cela a lieu, les X forment un groupe conjugué et non pas seulement semi-conjugué par rapport à ω_1; on est ainsi conduit à rechercher les transformations pour lesquelles

$$(25) \qquad \Omega_1 = \omega_1.$$

Tout d'abord, $2n$ fonctions X, P des x, p donnant lieu à cette identité sont indépendantes, car on en déduit

$$\Omega_1^{(2n-1)} = \omega_1^{(2n-1)},$$

c'est-à-dire

$$[d\mathrm{P}_1\, d\mathrm{X}_1 \ldots d\mathrm{P}_n\, d\mathrm{X}_n] = [dp_1\, dx_1 \ldots dp_n\, dx_n].$$

D'autre part, si F est une fonction quelconque des X, P, et f ce qu'elle était avant la transformation

$$[\Omega_1^{(2n-2)}\, d\mathrm{F}] = [\omega_1^{(2n-2)}\, df]$$

ou

$$\sum_1^n {}_i \mathrm{P}_i \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{P}_i} = \sum_1^n {}_i p_i \frac{\partial f}{\partial p_i};$$

d'où

$$\sum_1^n {}_j p_j \frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial p_j} = 0, \qquad \sum_1^n {}_j p_j \frac{\partial \mathrm{P}_i}{\partial p_j} = 1,$$

ce qui montre que les X sont des fonctions homogènes de degré 0 des p et les P des fonctions homogènes de degré 1 des mêmes quantités.

Les autres relations (24) subsistent.

Réciproquement, si les $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ sont n fonctions distinctes des x, p homogènes de degré 0 par rapport aux p, satisfaisant aux relations $(\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_k) = 0$, il existe n fonctions $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$ des x, p, homogènes et degré 1 par rapport aux p et donnant lieu à l'identité (25).

Cela résulte de ce que les X forment un groupe conjugué par rapport à ω_1. On constate que le système d'équations linéaires aux dérivées partielles pour f

$$(\mathrm{X}_1, f) = 0, \qquad \ldots, \qquad (\mathrm{X}_m, f) = 0$$

est complet et admet le système d'intégrales

$$X_1, \ \ldots, \ X_n; \quad P_{m+1}, \ \ldots, \ P_n,$$

et que de même le système

$$\sum p_j \frac{\partial f}{\partial p_j} = 0, \quad (X_1, f) = 0, \quad \ldots, \quad (X_m, f) = 0$$

est complet, admettant les intégrales

$$X_1, \ \ldots, \ X_n, \ \frac{P_{m+2}}{P_{m+1}}, \ \ldots, \ \frac{P_n}{P_{m+1}}.$$

Les transformations de contact homogènes forment un groupe.

13. **Autre démonstration des résultats précédents.** — M. Goursat [23] a donné de l'établissement des formules fondamentales des T une démonstration qui repose sur un lemme de caractère algébrique; par ailleurs, S. Kantor [29] avait déjà donné des indications sur une démonstration de cette nature. Voici comment on peut rattacher une démonstration analogue à celle de M. Goursat aux méthodes que nous avons employées jusqu'ici.

Occupons-nous d'abord des transformations en x, p; nous venons de voir que leur détermination revient en somme à celles des transformations qui laissent invariantes la forme différentielle extérieure quadratique

$$[dp_1\, dx_1] + \ldots + [dp_n\, dx_n],$$

ou, ce qui revient au même, la forme bilinéaire alternée

$$(dp_1\, \delta x_1 - dx_1\, \delta p_1) + \ldots + (dp_n\, \delta x_n - dx_n\, \delta p_n).$$

La question est ainsi rattachée à celle de la recherche des transformations homographiques qui conservent un complexe linéaire; mais on peut la traiter directement.

On montre d'abord que si les $2n$ expressions de Pfaff : $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_{2n}$ aux $2n$ variables $x_1, \ldots, p_n$ satisfont à la relation

$$[\varpi_1 \varpi_2] + \ldots + [\varpi_{2n-1} \varpi_{2n}] = [dp_1\, dx_1] + \ldots + [dp_n\, dx_n],$$

elles sont linéairement indépendantes.

On pose ensuite :

$$(26)\quad \begin{cases} dX_i = \sum_1^n {}_k \lambda_{ik}\, dx_k + \sum_1^n {}_k \mu_{ik}\, dp_k, \\ dP_i = \sum_1^n {}_k \sigma_{ik}\, dx_k + \sum_1^n {}_k \tau_{ik}\, dp_k. \end{cases}$$

Substituons dans la relation (25) à dX_i et à dP_i les expressions (26) et identifions les deux membres, nous obtenons les relations

$$(27)\quad \begin{cases} \sum \lambda_{ih}\tau_{ik} - \sigma_{ik}\mu_{ik} = \varepsilon_{kh} \\ \sum \lambda_{ik}\sigma_{ih} - \lambda_{ih}\sigma_{ik} = 0 \\ \sum \mu_{ik}\tau_{ih} - \mu_{ih}\tau_{ik} = 0 \end{cases} \qquad \left(\varepsilon_{kh} = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq h \\ 1 & \text{si } k = h \end{cases}\right).$$

Grâce à la remarque préliminaire, on peut procéder à l'inversion des relations (26), et du reste le calcul donne

$$(28)\quad \begin{cases} \sum \tau_{jh}\, dX_j - \sum \mu_{jh}\, dP_j = \sum \varepsilon_{hk}\, dx_k = dx_k, \\ \sum \sigma_{ih}\, dX_i - \sum \lambda_{ik}\, dP_i = \sum - \varepsilon_{hk}\, dp_k = - dp_k, \end{cases}$$

d'où l'on déduit le système (29) équivalent à (27) :

$$(29)\quad \begin{cases} \sum \mu_{ih}\sigma_{jh} - \tau_{ih}\lambda_{jh} = \varepsilon_{ij}, \\ \sum \tau_{jh}\sigma_{ih} - \tau_{ih}\sigma_{jh} = 0, \\ \sum \mu_{jh}\lambda_{ih} - \mu_{ih}\lambda_{jh} = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(30)\qquad (X_i, P_j) = \varepsilon_{ij}, \qquad (X_i, X_j) = (P_i, P_j) = 0.$$

Réciproquement, on constate sans peine, en remontant les calculs, que si les $2n$ fonctions X, P des x, p satisfont aux relations (30), elles vérifient identiquement (25).

On déduit aussi de ces calculs l'expression suivante, qui est utile, de la différentielle d'une fonction φ des x, p :

$$d\varphi = \sum (\varphi, X_\nu)\, dP_\nu - (\varphi, P_\nu)\, dX_\nu.$$

Pour passer au cas d'une transformation de contact quelconque, il suffit d'observer qu'en tenant compte de la relation $\omega = 0$, on doit avoir

$$\sum [dX_i\, dP_i] = \rho \sum [dx_i\, dp_i].$$

Dans les formules (26), on considérera alors les λ_{ik}, σ_{ik} comme les dérivées totales des X_i, P_i par rapport aux dx_k, par exemple

$$\lambda_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial X_i}{\partial z}.$$

Dans les formules (27) et (28). ε_{kh} est à remplacer par $\rho\varepsilon_{kh}$, de sorte que les relations (30) se modifient en remplaçant la parenthèse par le crochet et ε_{ij} par $\rho\varepsilon_{ij}$.

On a ensuite

$$\rho\, d\varphi = \sum [\varphi, X_\nu]\, dP_\nu - [\varphi, P_\nu]\, dX_\nu,$$

qui fournit les formules relatives à Z.

14. Transformations d'une expression ou d'une équation de Pfaff en elle-même. — Les identités symboliques dont nous nous sommes servis pour établir les formules fondamentales des T ne supposent pas que les variables qui figurent dans les différentes formes de Pfaff et fonctions qui interviennent soient des variables canoniques; elles subsistent donc quand nous supposons simplement que les variables sont caractéristiques, sans plus, et que par conséquent les formes ω et Ω ne sont pas réduites à une forme canonique; c'est ce qui aura lieu dans ce paragraphe.

Correspondant aux diverses catégories de T, nous envisagerons successivement les transformations qui conservent l'expression ω', celles qui conservent l'expression ω, celles qui conservent l'équation $\omega' = 0$.

(Comparez Chapitres XII, XIII et XIV de [9].

Transformations conservant ω'. — Le cas le plus intéressant est celui où ω est de classe paire; il a été l'objet d'une étude directe de S. Kantor [29] mise au point par M. Engel [19]. Nous supposerons que le nombre des variables est $2n'$. La propriété fondamentale des transformations envisagées est l'invariance de la parenthèse relative à deux fonctions.

Avec les notations précédemment employées

$$(f, \varphi) = \sum \frac{A_{\lambda\mu}}{A} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial f}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\lambda} \right);$$

on en déduit les conditions nécessaires pour que la transformation

$$X_i = \overline{X_i}(x_1, \ldots, x_{2n'}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n')$$

conserve ω'

$$(X_i, X_k) = \frac{A_{ik}(X_1, \ldots, X_{2n'})}{A(X_1, \ldots, X_{2n'})};$$

ces conditions entraînent l'indépendance des X considérés comme fonctions des x et sont suffisantes pour que la transformation jouisse de la propriété indiquée.

La forme ω diffère de sa transformée Ω par une fonction U des x que l'on obtient par une quadrature; on peut d'ailleurs ajouter à U, par exemple, $-Z + z$ et en adjoignant aux formules de la transformation sur les x la relation $Z = z + U$, on définit une transformation qui conserve $\omega + dz$ à une différentielle exacte près.

Transformations qui conservent ω. — En outre de la parenthèse relative à deux fonctions, nous avons à envisager l'accolade relative à une seule fonction qui nous fournissent des expressions covariantes absolues aux fonctions considérées. Rappelons que (§ 9)

$$\{f\} = \sum_1^{2n'} \frac{\alpha_\lambda}{A} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \qquad \text{ou} \qquad \{f\} = \sum_1^{2n'+1} \frac{\beta_\lambda}{A_1} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda}$$

suivant que ω est de classe pair ou impaire.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une transformation conserve ω sont :

$$\{X_i\} = \frac{\alpha_\lambda(X)}{A(x)}, \qquad (X_i, X_k) = \frac{A_{\lambda,\mu}(X)}{A(X)} \qquad (i, k = 1, \ldots, 2n')$$

ou

$$\{X_i\} = \frac{\beta_\lambda(X)}{A_1(X)}, \qquad (X_i, X_k) = \frac{B_{\lambda,\mu}(X)}{A_1(X)} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 2n' + 1).$$

Transformations qui conservent $\omega = 0$. — Nous conservons des notations analogues à celles dont nous nous sommes servis pour les T et nous supposerons que ρ est différent d'une constante. On a la relation

$$\rho(F, \Phi)_X = (f, \varphi)_x.$$

Les relations entre les $2n+2$ fonctions $X_1, \ldots, X_{2n'+1}, \rho$ sont alors

$$(X_i, X_k) = \rho \frac{B_{ik}(X)}{A_1(X)}.$$

On a de plus l'identité

$$\rho^2 \{F\} = \rho\{f\} + (\rho, f),$$

d'où les relations

$$\rho^2 \frac{\beta_\lambda}{A_1} = \rho\{X_\lambda\} + (\rho, X_\lambda).$$

Remarques. — *a.* Toutes les expressions { }, ( ) que nous avons considérées peuvent être définies en remplaçant df, ou df et $d\varphi$ par des expressions de Pfaff quelconques.

b. La notion de transformation infinitésimale de contact [34] dont nous n'aurons pas à nous servir par la suite, s'étend aux transformations généralisées que nous venons de définir [19].

THÉORIE DES GROUPES DE FONCTIONS.

Un problème fondamental de la théorie des T est de reconnaître l'équivalence de deux systèmes de fonctions ou d'équations relativement au groupe G, c'est-à-dire de reconnaître s'il existe une T qui permette de passer d'un système à l'autre. Nous ne nous occuperons que de cas très particuliers de ce problème qui se rattachent à la théorie des groupes de fonctions, théorie d'un grand intérêt pour l'intégration du système caractéristique d'une équation de Pfaff et par là même pour l'intégration des systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. Le problème général offre encore un très vaste champ de recherches. Nous ferons d'abord une digression d'algèbre extérieure.

15. Formes extérieures adjointes. — Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$ n variables et $f = \mathrm{A}[u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_p}]$ une forme extérieure monome de degré p; nous définissons son monome complémentaire par $\mathrm{A}[u_{\alpha_{p+1}}, \ldots, u_{\alpha_n}]$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n$ constituant une permutation d'ordre pair des indices $1, 2, \ldots, n$. On peut l'obtenir avec d'autres notations de la manière suivante : considérons $n-p$ formes linéaires aux indéterminées $\xi_\gamma^{(i)}$:

$$\xi^{(i)} = \xi_1^{(i)} u_1 + \ldots + \xi_n^{(i)} u_n \qquad (i = p+1, \ldots, n)$$

et formons le produit extérieur $\mathrm{A}[u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_p} \xi^{(p+1)}, \ldots, \xi^{(n)}]$ que nous mettons sous la forme $\mathrm{A}\varphi[u_1, \ldots, u_n]$; on a

$$\varphi = \begin{vmatrix} \xi_{\alpha_{p+1}}^{(p+1)} & \ldots & \xi_{\alpha_n}^{(p+1)} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \xi_{\alpha_{p+1}}^{(n)} & \ldots & \xi_n^{n} \end{vmatrix}.$$

φ est donc une forme multilinéaire alternée à laquelle on peut faire correspondre un monome extérieur et nous appellerons « monome adjoint à f », le monome extérieur $\mathrm{A}[\xi_{\alpha_{p+1}}, \ldots, \xi_{\alpha_n}]$. La propriété est évidemment réciproque.

Si l'on effectue sur les variables u et ξ deux substitutions linéaires contragrédientes, c'est-à-dire telles que $\xi_1 u_1 + \ldots + \xi_n u_n$ demeure invariant, φ se reproduit multipliée par le déterminant de la substitution effectuée sur les u.

On définit ensuite la forme adjointe d'une forme extérieure quelconque F de degré p par la condition d'être la forme extérieure $\Phi(\xi)$ qui correspond à la forme multilinéaire alternée Φ_1 telle que

$$[\mathrm{F}\xi^{(p+1)} \ldots \xi^{(n)}] = \Phi_1[u_1 \ldots u_n].$$

Il résulte de cette définition que Φ est la somme des formes adjointes aux monomes qui constituent F; donc Φ est un covariant relatif de la forme F par rapport à toutes les substitutions linéaires effectuées d'une façon contragrédiente sur les u et les ξ.

Nous aurons à utiliser souvent les résultats suivants relatifs aux formes quadratiques. Soit F une forme quadratique de rang $2s$; on peut la réduire à la forme (§ 2)

$$\mathrm{F} = [\mathrm{U}_1 \mathrm{U}_2] + \ldots + [\mathrm{U}_{2s-1} \mathrm{U}_{2s}],$$

où les $\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_{2s}$ sont indépendants ($2s \leq n$); soit Φ la forme adjointe à un facteur près de $[F^{s-1}]$ et dont la forme multilinéaire correspondante est définie par la relation

$$s[F^{s-1}(\xi_1^1 u_1+\ldots+\xi_n^1 u_n)(\xi_1^2 u_1+\ldots+\xi_n^2 u_n)] = \Phi_1(\xi^1, \xi^2)[F^s].$$

Φ est ici covariante absolue de F par rapport aux substitutions linéaires que nous envisageons; elle est égale avec les variables actuelles à

$$\Phi = [\xi_1 \xi_2]+\ldots+[\xi_{2s-1}\xi_{2s}],$$

Remarque. — On voit immédiatement que la forme adjointe de $[F^{s-p}]$ est, à un facteur numérique près, $[\Phi^p]$.

Théorème [9]. — Considérons les formes linéaires indépendantes de $u_1, \ldots, u_{2s}$: $f_1, \ldots, f_q$; les $\frac{q(q-1)}{2}$ quantités a_{ij} définies par les égalités

$$\left[\frac{F^{s-1}}{(s-1)!} f_i f_j\right] = a_{ij}\left[\frac{F^s}{s!}\right]$$

et la forme quadratique extérieure à q variables

$$\Phi = \sum_{i,j}^{1,\ldots,q} a_{ij}[\xi_i \xi_j].$$

Si cette forme Φ est de rang 2σ, le rang de la forme F se réduit de $2q-2\sigma$ unités quand on y suppose les variables liées par les q relations : $f_1=0, \ldots, f_q=0$. De plus, si l'on effectue sur les q formes linéaires données une substitution linéaire telle que Φ se réduise à la forme canonique

$$\Phi = [\xi_1 \xi_2]+\ldots+[\xi_{2\sigma-1}\xi_{2\sigma}].$$

la forme F se réduit à la forme canonique

$$\begin{aligned} F = {} & [f_1 f_2]+[f_3 f_4]+\ldots+[f_{2\sigma-1}f_{2\sigma}]+[f_{2\sigma+1}f_{q+1}]+\ldots \\ & +[f_q f_{2q-2\sigma}]+[f_{2q-2\sigma+1}f_{2q-2\sigma+2}]+\ldots+[f_{2s-1}f_{2s}]; \end{aligned}$$

en désignant par $f_{q+1}, \ldots, f_{2s}$ de nouvelles formes linéaires convenablement choisies, indépendantes entre elles et indépendantes des formes données (cela suppose, bien entendu, $2q-2\sigma \leqq 2s$).

Pour le démontrer on suppose qu'on a pris comme nouvelles variables $f_1, \ldots, f_q$ et l'on remarque qu'on peut effectuer sur les variables une substitution linéaire quelconque, sous la seule condition que les q premières variables soient échangées entre elles; il en résulte qu'on peut effectuer sur les ξ une substitution linéaire quelconque sous la seule condition que les $2s-q$ dernières variables soient échangées entre elles.

Si tous les a_{ij} sont nuls, on retrouve un théorème précédemment démontré :

$$\sigma = 0 \qquad \text{et} \qquad [f_1 f_2 \ldots f_q F^{s-q+1}] = 0.$$

Corollaire. — Supposons que F, de rang $2s$, dépende de $2s+1$ variables : $v_1, \ldots, v_{2s+1}$; soient $u_1, \ldots, u_{2s}$ des variables de réduction de F; ce sont $2s$ fonctions linéaires des v, indépendantes entre elles; soit u_{2s+1} une fonction linéaire des v indépendante des précédentes. Les f sont des fonctions linéaires des v; désignons par $\overline{f_i}$ ce que devient f_i quand on y fait $u_{2s+1}=0$, ce que nous écrivons

$$f_i \equiv \overline{f_i} \qquad (\operatorname{mod} u_{2s+1}).$$

Définissons α_{ij} par la relation

$$\left[\frac{u_{s+1}F^{s-1}}{(s-1)!}f_i f_j\right] = \alpha_{ij}\left[\frac{u_{2s+1}F^s}{(s)!}\right],$$

il est clair que

$$\left[\frac{F^{s-1}}{(s-1)!}\overline{f_i}\,\overline{f_j}\right] = \alpha_{ij}\left[\frac{F^s}{s!}\right].$$

Posons

$$f_i = \beta_i u_{2s+1} + \overline{f_i},$$

on a

$$[F^s f_i] = \beta_i [u_{2s+1}F^s].$$

En raisonnant comme précédemment, on montre qu'on peut mettre F sous la forme

$$\begin{aligned} F' = {} & [(f_1-\beta_1 u_{s+1})(f_2-\beta_2 u_{s+1})] + \ldots \\ & + [(f_{2\sigma-1}-\beta_{2\sigma-1}u_{s+1})(f_{2\sigma}-\beta_{2\sigma}u_{s+1})] + [(f_{2\sigma+1}-\beta_{2\sigma+1}u_{s+1})f_{q+1}] + \ldots \\ & + [(f_q-\beta_q u_{s+1})f_{2q-2\sigma}] + [f_{2q-2\sigma+1}f_{2q-2\sigma+2}] + \ldots . \end{aligned}$$

Nous allons avoir à appliquer constamment les résultats de ce paragraphe.

16. Systèmes involutifs. — Dans toute T, si f et φ sont ce que deviennent deux fonctions F et Φ des grandes lettres quand on remplace celles-ci au moyen de leur expression en fonction des petites, et si f et φ sont en involution, F et Φ le sont aussi et réciproquement.

Considérons q fonctions distinctes $f_1, \ldots, f_q$ de x, z, p et telles qu'elles soient deux à deux en involution; nous dirons qu'elles constituent un groupe involutif; deux fonctions de x, z, p qui s'expriment au moyen de $f_1, \ldots, f_q$ sont dites appartenir au groupe et sont en involution; les q fonctions données forment une base du groupe, q est l'ordre du groupe. Si $q < n+1$, on peut adjoindre à $f_1, \ldots, f_q$ $n+1-q$ autres fonctions qui forment avec celles-là un groupe involutif d'ordre $n+1$ (§ 10). On peut donc donner à un groupe involutif la forme canonique

$$Z, \quad X_1, \quad \ldots, \quad X_{q-1}$$

et un groupe involutif contient au plus $n+1$ fonctions; deux groupes involutifs de même ordre sont équivalents par rapport au groupe G.

De même deux groupes involutifs de même ordre dont les fonctions ne dépendent pas de z sont équivalents par rapport au groupe des transformations en x, p.

Si les fonctions $f_1, \ldots, f_q$ sont homogènes en p, il peut se présenter deux cas : ou bien toutes les fonctions f sont d'ordre nul, et l'on peut donner au groupe la base canonique $X_1, \ldots, X_q$, ou bien toutes ces fonctions ne sont pas d'ordre nul et l'on peut donner au groupe la base canonique $P_1, P_2, \ldots, P_q$. On a donc deux classes de groupes homogènes; dans chacune d'elles, deux groupes du même ordre sont équivalents par rapport au groupe des transformations homogènes.

17. Propriétés d'invariance des transformations en x, p. — Il nous suffira de considérer le groupe des transformations pour lesquelles $\rho = 1$, les propriétés que nous obtiendrons n'étant pas troublées par une homothétie.

I. Nous allons en premier lieu nous occuper d'un système de fonctions ne dépendant que des x, p. On dit que q fonctions distinctes, $f_1, \ldots, f_q$ des x, p forment un groupe d'ordre q ($q < 2n$) si toutes les parenthèses (f_i, f_k) s'expriment au moyen de $f_1, \ldots, f_q$) seulement :

$$(f_i, f_k) = \alpha_{ik}(f_1, \ldots, f_q).$$

Toute fonction telle que $F(f_1, \ldots, f_q)$ est dite appartenir au groupe et deux fonctions quelconques du groupe jouissent de la propriété précédente.

Toute transformation en x, p conserve la propriété d'un système de fonctions de constituer un groupe. Nous nous proposons de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes d'équivalence de deux groupes par rapport au groupe des transformations en x, p. Nous emploierons pour cela une méthode qui nous servira encore par la suite : en utilisant des covariants aux fonctions considérées relativement au groupe des transformations en x, p, nous déterminerons un système de différentes bases canoniques possibles pour un groupe en x, p; deux groupes sont équivalents si l'on peut leur donner la même base canonique et seulement dans ce cas, les différentes bases canoniques envisagées n'étant pas réductibles entre elles par une transformation en x, p.

Considérons la forme quadratique extérieure

$$\Phi = \sum a_{ik}[\xi_i \xi_k] \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, q);$$

la forme bilinéaire qui lui correspond permet d'écrire la parenthèse de deux fonctions quelconques φ et ψ de $f_1, \ldots, f_q$, en y remplaçant les deux systèmes de variables ξ par les dérivées partielles de φ et ψ par rapport à $f_1, \ldots, f_q$. La forme Φ est covariante absolue de φ et ψ par rapport à toute transformation en x, p pour laquelle $\rho = 1$ et qui échange entre elles les fonctions f, *a fortiori* est-elle covariante par rapport à tout échange des f, les x, p n'étant pas modifiés, étant bien entendu que les ξ subissent une substitution linéaire contragrédiente de celle qui résulte du changement de variables pour $df_1, \ldots, df_q$.

Pour une substitution linéaire sur les ξ à coefficients fonctions de $f_1, \ldots, f_q$, on peut réduire Φ à la forme

$$\Phi = [\xi'_1 \xi'_2] + \ldots + [\xi'_{2\sigma-1} \xi'_{2\sigma}];$$

la transformation contragrédiente sur les df (à coefficients fonctions des f conduit à q formes de Pfaff indépendantes, $\varpi_1, \ldots, \varpi_q$, telles que

$$\xi'_1 \varpi_1 + \ldots + \xi'_q \varpi_q = \xi_1 \, df_1 + \ldots + \xi_q \, df_q.$$

En introduisant $2n - p$ formes linéaires nouvelles $\omega_1, \ldots, \omega_{2n-p}$ indépendantes entre elles et indépendantes des ϖ, on peut donner à la forme ω' l'expression

$$\begin{aligned} \omega' = [\varpi_1 \varpi_2] + \ldots + [\varpi_{2\sigma-1} \varpi_{2\sigma}] + [\varpi_{2\sigma+1} \omega_1] + \ldots \\ + [\varpi_q \omega_{q-2\sigma}] + [\omega_{q-2\sigma+1} \omega_{q-2\sigma+2}] + \ldots + [\omega_{2n-q-1} \omega_{2n-q}]. \end{aligned}$$

Posons

$$\pi = [\varpi_1 \varpi_2] + \ldots + [\varpi_{2\sigma-1} \varpi_{2\sigma}];$$

π est construite uniquement avec $f_1, \ldots, f_q$ et leurs différentielles, de même que chacune des ϖ. Prenons la dérivée extérieure de la relation précédente

$$\pi' + [\varpi'_{2\sigma+1} \omega_1] + \ldots + [\varpi'_q \omega_{q-2\sigma}] + [\varpi_{2\sigma+1} \omega'_1] + \ldots + [\varpi_q \omega'_{q-2\sigma}] \equiv 0$$
$$(\text{mod } \omega_{q-2\sigma+1} \ldots \omega_{2n-q}).$$

Les termes écrits ne peuvent se réduire avec ceux qui ne le sont pas.

Quand on suppose

(31) $$\varpi_{2\sigma+1} = 0, \quad \ldots, \quad \varpi_q = 0,$$

la relation précédente montre que

$$\varpi'_{2\sigma+1} = 0, \quad \ldots, \quad \varpi'_q = 0;$$

il en résulte que le système (31) est complètement intégrable (1); soit $y_{2\sigma+1}, \ldots, y_q$ un système d'intégrales premières de ces équations; ce sont des fonctions des f. Quand on suppose maintenant que $y_{2\sigma+1}, \ldots, y_q$ sont constants, π' est nul; π est donc une différentielle exacte d'une forme de Pfaff; si l'on supposé cette forme ramenée à

$$y_1 \, dy_2 + \ldots + y_{2\sigma-1} \, dy_{2\sigma},$$

on peut écrire

$$\pi = [dy_1 \, dy_2] + \ldots + [dy_{2\sigma-1} \, dy_{2\sigma}]$$

en supposant $y_{2\sigma+1}, \ldots, y_q$ constantes.

Finalement, en remplaçant les f par q autres fonctions distinctes de leur groupe, on peut mettre ω' sous la forme

$$\omega' = [dy_1 \, dy_2] + \ldots + [dy_{2\sigma-1} \, dy_{2\sigma}] + [dy_{2\sigma+1} \bar{\omega}_1] + \ldots + [dy_q \bar{\omega}_{q-2\sigma}] + \ldots,$$

Φ a la forme

$$\Phi = [\xi_1 \xi_2] + \ldots + [\xi_{2\sigma-1} \xi_{2\sigma}].$$

On peut donc trouver 2σ fonctions distinctes du groupe telles que

(32) $$(y_1, y_2) = (y_3, y_4) = \ldots = (y_{2\sigma-1}, y_{2\sigma}) = 1,$$

toutes les autres parenthèses étant nulles.

(1) *Voir* par exemple § 23.

Les fonctions $y_{2\sigma+1}, \ldots, y_q$ sont en involution avec toutes les fonctions du groupe : ce sont les fonctions distinguées du groupe. D'ailleurs, en se rappelant que les fonctions $y_1, y_3, \ldots, y_{2\sigma+1}, y_{2\sigma+2}, \ldots, y_q$ forment un groupe conjugué par rapport à ω, on peut trouver des différentielles exactes pour remplacer les ω_i et par conséquent trouver $2n - q$ fonctions $y_{q+1}, \ldots, y_{2n}$, indépendantes entre elles et de $y_1, \ldots, y_q$, telles que

$$(y_{2\sigma+1}, y_{q+1}) = 1, \qquad \ldots, \qquad (y_q, y_{2q-1}) = 1,$$
$$(y_{2q+1}, y_{2q+2}) = \ldots = (y_{2n-1}, y_{2n}) = 1,$$

outes les autres parenthèses étant nulles.

Par une transformation de contact en x, p on peut donc transformer es fonctions de base du groupe en

$$x_1, \quad \ldots, \quad x_\sigma, \quad x_{2\sigma+1}, \quad \ldots, \quad x_q;$$
$$p_1, \quad \ldots, \quad p_\sigma,$$

on aura un système des différentes bases canoniques que l'on peut donner à un groupe d'ordre q en donnant à σ les différentes valeurs possibles. On voit donc qu'en dehors de l'ordre, un groupe de fonctions en x, p n'a, par rapport aux transformations en x, p, qu'un invariant : le nombre de ses fonctions distinguées.

Mais on peut tirer d'autres conséquences de ce qui précède : les fonctions $y_{2\sigma+1}, \ldots, y_{2n}$ forment elles-mêmes un groupe; c'est le groupe polaire du groupe donné qui comprend toutes les fonctions en involution avec toutes les siennes. Le système

$$(f_i, f) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, q) \tag{33}$$

est complet; la réciproque est immédiate et donne le moyen de reconnaître si q fonctions forment un groupe. Mais ce moyen exige que l'on connaisse ces fonctions; il peut arriver que l'on sache seulement de ces fonctions qu'elles sont les intégrales d'un système complet, ou les intégrales premières d'un système d'équations aux différentielles totales.

Voici comment on reconnaîtra que les fonctions ainsi définies forment un groupe. Soit

$$\pi_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \pi_q = 0$$

le système complètement intégrable qui les détermine; on forme les parenthèses

$$(\pi_i, df) = A_i f$$

et l'on pose

$$df_i = \lambda_1^i \pi_1 + \ldots + \lambda_q^i \pi_q \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

le déterminant des λ étant différent de 0; par conséquent

$$(f_i, f) = \lambda_1^i A_1 f + \ldots + \lambda_q^i A_q f$$

et le système (33) est équivalent au système (34)

$$(34) \qquad A_i f = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, q).$$

Il suffit donc de reconnaître que le système (34) est complet (une autre démonstration est donnée par Kantor et M. Engel [30, 19]). Si l'on pose

$$\pi_k = \sum \alpha_{ki} dx_i + \beta_{ki} dp_i$$

et que l'on suppose ce système complètement intégrable, les fonctions qu'il définit satisfont au système complet

$$\sum \rho_{ji} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sigma_{ji} \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0,$$

elles forment un groupe si le système

$$\sum \beta_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} - \alpha_{ki} \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0$$

est complet, ce qui est équivalent à ce que

$$\sum \sigma_{ji} dx_i - \rho_{ji} dp_i = 0$$

soit complètement intégrable.

En particulier, les fonctions distinguées d'un groupe donné forment un sous-groupe involutif qui est défini par les équations

$$\varpi_{2\sigma+1} = 0, \qquad \ldots, \qquad \varpi_q = 0$$

et auquel s'appliquent les considérations précédentes.

18. II. Occupons-nous maintenant de systèmes de fonctions contenant z. Nous aurons à considérer non plus seulement l'invariance de ω', mais celle de ω et à faire intervenir l'expression $\{f\} = \frac{\partial f}{\partial z}$, qui

dans le cas précédent était toujours nulle; cette expression est un covariant de f par rapport aux transformations en x, p; d'autre part, la parenthèse devient ici le crochet; nous dirons que les q fonctions distinctes $f_1, \ldots, f_q$ de x, z, p définissent un groupe d'ordre q si toutes les expressions $\{f_i\}$, $[f_i, f_j]$ s'expriment au moyen de $f_1, \ldots, f_q$ seulement. Posons

$$\{f_i\} = a_i, \qquad [f_i, f_j] = a_{ij},$$

les a_i et a_{ij} étant certaines fonctions des f. Considérons les deux formes

$$\varphi = a_1 \xi_1 + \ldots + a_q \xi_q,$$
$$\Phi = \sum a_{ij} [\xi_i \xi_j].$$

A toute substitution linéaire, à coefficients des f seulement, effectuée sur les ξ, nous faisons correspondre la substitution contragrédiente effectuée sur les df. On peut ramener Φ à la forme réduite

$$\Phi = [\xi'_1 \xi'_2] + \ldots + [\xi'_{2\sigma-1} \xi''_{2\sigma}] \qquad (2\sigma \leqq q);$$

introduire des fonctions ϖ comme précédemment et distinguer trois cas suivant que φ peut s'écrire

$$a. \quad \varphi = 0; \qquad b. \quad \varphi = \xi'_1; \qquad c. \quad \varphi = \xi'_{2\sigma+1}.$$

a. C'est le cas précédemment étudié, toutes les accolades étant nulles.

b. On a

$$[\omega'^n (\varpi_1 - \omega)] = [\omega'^n \varpi_2] = \ldots = [\omega'^n \varpi_q] = 0$$

toutes les parenthèses (ϖ_i, ω_j) sont nulles, sauf

$$(\varpi_1, \varpi_2) = \ldots = (\varpi_{2\sigma-1} \varpi_{2\sigma}) = 1$$

et ω' est réductible à la forme

$$\begin{aligned}\omega' = {} & [(\varpi_1 - \omega)\varpi_2] + [\varpi_3 \varpi_4] + \ldots \\ & + [\varpi_{2\sigma-1} \varpi_{2\sigma}] + [\varpi_{2\sigma+1} \omega_1] + \ldots + [\varpi_q \omega_{q-2\sigma}] \\ & + [\omega_{q-2\sigma+1} \omega_{q-2\sigma+2}] + \ldots + [\omega_{2n-q-1} \omega_{2n-q}]\end{aligned}$$

Posons

$$\pi = [\varpi_1 \varpi_2] + \ldots + [\varpi_{2\sigma-1} \varpi_{2\sigma}]$$

et prenons la dérivée extérieure de ω''

$$\pi' - [\pi \varpi_2] + \omega \varpi'_2 + \ldots = 0.$$

On peut poser

$$\varpi_2 = \frac{dy_2}{y_2}, \qquad \varpi_{2\sigma+1} = dy_{2\sigma+1}, \qquad \ldots, \qquad \varpi_q = dy_q;$$

on constate que la dérivée de $\frac{\pi}{y_2}$ est nulle quand on suppose $y_{2\sigma+1}, \ldots, y_q$ constants, et l'on peut écrire

$$\pi = y_2\big([dy_1\, dy_2] + [dy_3\, dy_4] + \ldots + [dy_{2\sigma-1}\, dy_{2\sigma}]\big)$$

et

$$\begin{aligned}\omega' = \left[\frac{dy_2}{y_2}\omega\right] + \frac{1}{y_2}[dy_1\, dy_2] + y_2\big([dy_3\, dy_4] + \ldots + [dy_{2\sigma-1}\, dy_{2\sigma}]\big)\\ + [dy_{2\sigma-1}\overline{\omega}_1] + \ldots + [dy_q\overline{\omega}_{q-2\sigma}] + \ldots + [\overline{\omega}_{2n-q-1}\overline{\omega}_{2n-q}],\end{aligned}$$

et les fonctions $y_1, \ldots, y_q$ du groupe sont telles que

$$(35) \quad \{y_1\} = 1, \qquad [y_1, y_2] = -\frac{1}{y_2}, \qquad [y_3, y_4] = \ldots = [y_{2\sigma-1}, y_{2\sigma}] = -y_2,$$

en se souvenant que

$$[y_3, y_4] = -(y_3, y_4);$$

tous les autres crochets et accolades sont nuls.

Comme base canonique, on peut prendre

$$\begin{gathered} Z, \quad X_1, \quad \ldots, \quad X_{\sigma-1}; \\ P_1, \quad \ldots, \quad P_{\sigma-1}, \quad P_\sigma, \quad \ldots, \quad P_{q-\sigma}. \end{gathered}$$

Il y a $q - 2\sigma$ fonctions distinguées qui sont, par exemple, les rapports mutuels des $P_\sigma, \ldots, P_{q-\sigma}$.

On en déduit immédiatement que le système

$$[f_i, f] = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

est complet.

c. Dans ce cas, toutes les accolades et parenthèses de ϖ sont nulles, sauf $\{\varpi_{2\sigma+1}\}$ et $(\varpi_1, \varpi_2), \ldots, (\varpi_{2\sigma-1}, \varpi_{2\sigma})$. La forme ω' est réductible à

$$\begin{aligned}\omega' = [\varpi_1\varpi_2] + \ldots + [\varpi_{2\sigma-1}\varpi_{2\sigma}] + [(\varpi_{2\sigma+1} - \omega)\omega_1] + [\varpi_{2\sigma+2}\omega_2] + \ldots\\ + [\varpi_q\omega_{q-2\sigma}] + [\omega_{q-2\sigma+1}\omega_{q-2\sigma+2}] + \ldots + [\omega_{2n-q-1}\omega_{2n-q}]\end{aligned}$$

ou encore à

$$\begin{aligned}\omega' = [dy_1\, dy_2] + \ldots + [dy_{2\sigma-1}\, dy_{2\sigma}]\\ + [(dy_{2\sigma+1} + y_1\, dy_2 + \ldots + y_{2\sigma-1}\, dy_{2\sigma} - \omega)\omega_1]\\ + [dy_{2\sigma+2}\omega_2] + \ldots + [dy_q\omega_{q-2\sigma}] + \ldots.\end{aligned}$$

Les fonctions $y_1, \ldots, y_q$ du groupe satisfont aux relations

$$(36)\quad \left\{ \begin{array}{lll} \{y_{2\sigma+1}\} = 1, & [y_1, y_2] = \ldots = [y_{2\sigma-1}, y_{2\sigma}] = 1, \\ [y_1, y_{2\sigma+1}] = -y_1, & \ldots, \quad [y_{2\sigma-1}, y_{2\sigma+1}] = -y_{2\sigma-1}, \end{array} \right.$$

tous les autres $\{y_i\}$ et $[y_i, y_j]$ étant nuls. Par une transformation de contact en x, p, on peut donner au groupe la base canonique

$$\begin{array}{l} \mathrm{Z},\ \mathrm{X}_1,\ \mathrm{X}_2,\ \ldots,\ \mathrm{X}_\sigma,\ \mathrm{X}_{\sigma+1},\ \ldots,\ \mathrm{X}_{q-\sigma-1}, \\ \qquad \mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \ldots,\ \mathrm{P}_\sigma; \end{array}$$

il y a $q - 2\sigma - 1$ fonctions distinguées.

En résumé, un groupe de fonctions en x, z, p d'ordre q a relativement au groupe des transformations en x, p en dehors de son ordre, un seul invariant : le nombre de ses fonctions distinguées; il est susceptible de recevoir une base canonique d'un type ou d'un autre, suivant qu'on obtient le nombre de ses fonctions distinguées en retranchant de q un nombre pair ou un nombre impair.

19. Transformations homogènes. — Nous supposerons z invariant et ne considérerons que des fonctions en x, p. Nous considérerons les covariants qu'on forme au moyen des symboles

$$\{f\} = \sum p_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \qquad \text{et} \qquad (\ \ ).$$

Pour ne pas compliquer les notations, nous désignerons encore par ω la forme invariante qui est ici

$$p_1\, dx_1 + \ldots + p_n\, dx_n.$$

Nous dirons que q fonctions en $x, p: f_1, \ldots, f_q$, forment un groupe si toutes les expressions $\{f_i\}$ et (f_i, f_j) s'expriment au moyen de $f_1, \ldots, f_q$ seulement; nous introduirons encore les formes φ et Φ et nous aurons encore trois cas à considérer :

a. $\varphi = 0$; toutes les fonctions sont homogènes et de degré 0; le groupe est nécessairement involutif.

b. ω' est réductible à

$$\begin{aligned} \omega' = {} & [dy_1\, dy_2] + \ldots + [dy_{2\sigma-1}\, dy_{2\sigma}] \\ & + [(\omega + dy_2)\omega_1] + [dy_{2\sigma+1}\, \omega_2] + \ldots + [dy_q\, \omega_{q-2\sigma+1}] + \ldots. \end{aligned}$$

On peut donc choisir dans le groupe q fonctions distinctes $y_1, \ldots, y_q$, telles que

$$(27)\quad \begin{cases} \{y_1\} = -y_1 \ldots \{y_{2\sigma-1}\} = -y_{2\sigma-1}, \\ (y_1, y_2) = (y_3, y_4) = \ldots = (y_{2\sigma-1}, y_{2\sigma}) = 1, \end{cases}$$

toutes les autres accolades et parenthèses étant nulles.

Par une transformation de contact homogène, on peut donner au groupe la base canonique

$$\begin{array}{l} P_1, \ \ldots, \ P_\sigma; \\ X_1, \ \ldots, \ X_\sigma, \ X_{2\sigma+1}, \ \ldots, \ X_{q-\sigma}; \end{array}$$

il y a $q - 2\sigma$ fonctions distinguées.

c. ω' **est réductible à**

$$\begin{aligned} \omega' = {} & [dy_1\, dy_2] + \ldots + [dy_{2\sigma-1}\, dy_{2\sigma}] \\ & + [\omega\, dy_{2\sigma+1}] + [dy_{2\sigma+2}\, \omega_1] + \ldots + [dy_q\, \omega_{q-2\sigma+1}] + \ldots. \end{aligned}$$

On peut donc choisir dans le groupe q fonctions distinctes $y_1, \ldots, y_q$, telles que

$$(38)\quad \begin{cases} \{y_{2\sigma+1}\} = y_{2\sigma+1}, \\ (y_1, y_2) = \ldots = (y_{2\sigma-1}, y_{2\sigma}) = y_{2\sigma+1}, \end{cases}$$

toutes les autres accolades et parenthèses étant nulles. Par une transformation homogène, on donne au groupe la base canonique

$$\begin{array}{l} x_1, \ \ldots, \ x_\sigma; \quad x_{\sigma+2} \ldots x_q, \\ p_1, \ \ldots, \ p_\sigma, \ p_{\sigma+1}, \ \ldots, \ p_{q-\sigma}; \end{array}$$

il y a $q - 2\sigma$ fonctions distinguées.

Dans les trois cas, on peut choisir au groupe une base où toutes les fonctions sont homogènes et de degré 0 ou 1.

Ce qui distingue les cas *b* et *c*, c'est que, dans le premier, toutes les fonctions distinguées sont d'ordre nul et que cela n'a pas lieu dans le deuxième. Un groupe de fonctions x, p a donc vis-à-vis du groupe des transformations homogènes, en dehors de son ordre, deux invariants : le nombre de ses fonctions distinguées est celui de ses fonctions distinguées d'ordre nul. Deux groupes sont équivalents s'ils ont les mêmes invariants.

20. La théorie des groupes de fonctions et les transformations qui conservent une forme de Pfaff. — Adoptons vis-à-vis d'une expression de Pfaff non réduite à sa forme canonique et que nous supposerons d'abord exprimée au moyen de variables caractéristiques, les définitions qui nous ont servi pour les groupes relatifs aux formes canoniques. Il résulte, sans plus, des calculs que nous avons exposés, que :

I. Si l'on considère une forme de classe paire ω, de $x_1, \ldots, x_{2n'}$ et un groupe de fonctions $f_1, \ldots, f_q$, d'ordre q, relatif aux transformations, qui reproduisent ω, à une différentielle exacte près, on peut choisir parmi les fonctions du groupe q fonctions indépendantes $y_1, \ldots, y_q$ qui satisfont aux relations (32); ou bien le système (39),

$$(39) \qquad f_1 = c_1, \quad \ldots, \quad f_q = c_q,$$

où $c_1, \ldots, c_q$ sont des constantes arbitraires, est en involution (relativement à ω').

II. Si l'on considère une forme ω, de classe impaire, des variables $x_1, \ldots, x_{2n'+1}$, un groupe d'ordre q, relatif aux transformations qui conservent ω, possède une base dont les éléments satisfont soit aux relations (35), soit aux relations (36); ou bien le système (39) est en involution.

III. Si l'on considère une forme ω de classe paire des variables $x_1, \ldots, x_{2n'}$, un groupe de fonctions de $x_1, \ldots, x_{2n'}$, d'ordre q, relatif aux transformations qui conservent ω, possède une base dont les éléments satisfont aux relations (37) ou (38); ou bien le système (39) est en involution.

Il est possible, comme précédemment, d'associer au groupe un système complet; la considération des fonctions distinguées, qui sont données par un système complètement intégrable, permet, grâce aux résultats que nous avons acquis sur les T, d'énoncer les conditions d'équivalence de deux groupes de fonctions vis-à-vis du groupe de transformations auquel ils sont tous deux relatifs.

On voit qu'au fond la théorie précédente a pour but de déterminer dans un groupe de fonctions, relatif à une forme ω, le plus grand groupe conjugué ou semi-conjugué relativement à cette forme qui y est contenu; cette détermination a une grande importance pour les problèmes d'intégration.

On peut, du reste, donner à tout ce qui vient d'être dit une plus grande portée, en ne supposant plus que ω soit exprimée au moyen de variables caractéristiques et en supposant que $f_1, \ldots, f_q$ sont des intégrales premières connues du système caractéristique de ω. Tous les calculs faits subsistent et s'appliquent, par conséquent, au problème général de l'utilisation d'intégrales premières connues pour l'intégration du système caractéristique d'une expression de Pfaff [1].

21. Groupes de fonctions vis-à-vis du groupe des transformations de contact générales. — Cherchons d'abord la définition à donner du groupe. Soient $f_1, \ldots, f_q$, q fonctions distinctes de x, z, p. Une transformation de contact est définie par la relation

$$\Omega = \rho\omega \qquad (\rho \neq 0). \tag{17}$$

Supposons que f_1 et f_2 soient deux fonctions du groupe qui ne soient pas en involution (si toutes les fonctions f étaient en involution, le groupe serait involutif et c'est un cas traité), et soient F_1 et F_2 leurs transformées; on sait que

$$\rho[F_1, F_2]_X = [f_1, f_2]_x;$$

on peut donc écrire

$$[F_1, F_2]_X \Omega = [f_1, f_2]_x \omega;$$

autrement dit, la forme $[f_1, f_2]_x\omega$ est invariante. Calculons pour cette forme les expressions $\{\ \}$ et $(\ )$; posons

$$[f_1, f_2] = \frac{1}{w};$$

$$\{f\} = [w, f] - w\frac{\partial f}{\partial z};$$

$$(f, g) = w[f, g].$$

Nous dirons que les fonctions $f_1, \ldots, f_q$ forment un groupe si toutes les expressions

$$\{f_i\} = [w, f_i] - w\frac{\partial f_i}{\partial z} \qquad \text{et} \qquad w[f_i, f_j]$$

s'expriment au moyen de $f_1, \ldots, f_q$ seulement; la dernière condition exprime simplement que les rapports des crochets des fonctions du groupe prises deux à deux s'expriment au moyen des $f_1, \ldots, f_q$.

[1] *Voir* le fascicule à paraître sur ce sujet dans le *Mémorial des Sciences mathématiques*.

Remarque. — Ce que nous venons de dire prouve que si $f_1, \ldots, f_q$ sont q intégrales premières du système caractéristique d'un système d'équations du premier ordre en involution, si les expressions $\{\ \}$ et $(\ )$ ne s'expriment pas en $f_1, \ldots, f_q$, elles fournissent de nouvelles intégrales premières (33).

D'autre part, par une T, on peut s'arranger pour que $w = 1$; il suffit de choisir cette T pour que $\rho = [f_1, f_2]$, alors $[F_1, F_2] = 1$, et l'on est ramené au cas précédemment étudié. Par conséquent, par une transformation de contact, on peut toujours amener un groupe en x, z, p, non involutif à l'un des deux types suivants :

$$\begin{matrix} Z, & X_1, & \ldots, & X_{\sigma-1}, & X_\sigma, & \ldots, & X_{q-\sigma}; \\ & P_1, & \ldots, & P_{\sigma-1} & & & \end{matrix}$$

ou

$$\begin{matrix} Z, & X_1, & \ldots, & X_{\sigma-1}; & & & \\ & P_1, & \ldots, & P_{\sigma-1}, & P_\sigma, & \ldots, & P_{q-\sigma}. \end{matrix}$$

On peut se proposer de reconnaître si les intégrales du système complètement intégrable

$$\varpi_1 = 0, \quad \ldots, \quad \varpi_q = 0$$

forment un groupe. On s'appuie pour cela sur la propriété suivante : le système

$$(40) \qquad [f_1, f] = 0, \quad \ldots, \quad [f_q, f] = 0, \quad [w, f] - \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

est complet si $f_1, \ldots, f_q$ forment un groupe et réciproquement. Or, on obtient un système équivalent à (40) dans le suivant :

$$(\varpi_1, df) = 0, \quad \ldots, \quad (\varpi_q, df) = 0, \quad [v, f] - \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

où $v = (\varpi_1, \varpi_2)$, par exemple, et, comme toujours, (ϖ_i, df) est défini par

$$[\omega\omega'^{n-1}\varpi_i\, df] = (\varpi_i, df)[\omega\omega'^n].$$

Si les fonctions $f_1, \ldots, f_q$ étaient données comme intégrales d'un système complet, on formerait le système complètement intégrable correspondant. D'ailleurs, tous ces calculs sont bien simplifiés si l'on élimine dz au moyen de la relation

$$dz = \omega + p_1\, dx_1 + \ldots + p_n\, dx_n.$$

Remarque. — Nous avons étudié les propriétés d'invariance, par rapport au groupe G, de systèmes tout à fait spéciaux de fonctions, systèmes auxquels on est conduit par la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. On peut signaler des systèmes un peu plus généraux qui se présentent dans la théorie des transformations des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre à un nombre quelconque de variables indépendantes. Il s'agit de systèmes de q fonctions $f_1, \ldots, f_q$ de x, z, p, tels que les rapports des crochets de ces fonctions prises deux à deux s'expriment au moyen de $f_1, \ldots, f_q$ seulement sans que la première condition qui sert à caractériser les groupes soit remplie. Cette propriété du système de q fonctions est évidemment invariante par rapport au groupe G [12].

GÉNÉRALISATIONS DIVERSES.

22. Transformations de contact prolongées. — Soient

$$(2)\qquad \begin{cases} X_i = \overline{X_i}(x_1, \ldots, z, p_n), \qquad Z = \overline{Z}(x, z, p), \\ P_i = \overline{P_i}(x, z, p) \qquad (i = 1, \ldots, p) \end{cases}$$

les formules qui définissent une transformation de contact. Supposons que z y représente une fonction de $x_1, \ldots, x_n$; $p_1, \ldots, p_n$ ses dérivées partielles du premier ordre; on en déduit alors pour Z, en général, une fonction de $X_1, \ldots, X_n$ dont les dérivées partielles du premier ordre se calculent au moyen des expressions des P_i. Un calcul classique permet de trouver les dérivées secondes P_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ de Z par rapport à X_i et X_j en fonction des x, de z et de ses dérivées premières et secondes. Les formules obtenues ne sont pas valables pour les fonctions z solutions d'une certaine équation de Monge-Ampère (ε); inversement, elles permettent d'exprimer les x, z, p_i, p_{ij} au moyen des X, z, P_i, P_{ij}, sauf lorsque z est solution d'une certaine autre équation de Monge-Ampère ($\mathcal{E}$).

On a ainsi prolongé la transformation de contact jusqu'au second ordre : deux surfaces ayant, en un point, un contact du deuxième ordre sont transformées en deux surfaces jouissant de la même propriété.

On peut prolonger la transformation jusqu'à un ordre quelconque q et la transformation prolongée est encore reversible et jouit de la propriété de conserver le contact d'ordre q entre deux surfaces en général.

Lie posa le problème de trouver les transformations réversibles d'éléments d'ordre q, qui, à une surface, fassent correspondre en général une autre surface; il pensait que les T prolongées jouissaient seules de cette propriété; Bäcklund prouva que cette vue était juste [1]. Pour nous limiter au second ordre, ce fait peut se formuler de la façon suivante : le système de Pfaff

$$(41)\qquad \begin{cases} dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ dp - r\,dx - s\,dy = 0, \\ dq - s\,dx - t\,dy = 0 \end{cases}$$

n'est transformé en lui-même que par des transformations qui conservent sa première équation.

L'insuccès de cette tentative de généralisation tient essentiellement à la différence profonde qui existe entre les propriétés d'une équation de Pfaff et celles d'un système d'équations de Pfaff. Toutefois, le système (41), ainsi que les systèmes analogues correspondant à un ordre quelconque, et quel que soit le nombre des variables indépendantes, sont des systèmes de Pfaff qui jouissent de propriétés particulières. Pour les mettre en évidence, nous nous appuierons sur quelques considérations générales relatives aux systèmes de Pfaff que nous allons rapidement esquisser; nous aurons acquis en même temps le moyen d'indiquer une voie où l'on s'est engagé en tentant de généraliser les T.

23. Classe et système caractéristique d'un système de Pfaff. — Soit un système de h équations de Pfaff en $x_1, \ldots, x_n$:

$$(42)\qquad \begin{cases} \omega_1 = a_{11}\,dx_1 + a_{12}\,dx_2 + \ldots + a_{1n}\,dx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega_h = a_{h1}\,dx_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{hn}\,dx_n = 0. \end{cases}$$

La classe de ce système est égale au nombre minimum de variables au moyen desquelles il peut être exprimé, soit c.

Le système caractéristique de (42) est le système associé des formes

$$\omega_1, \ \ldots, \ \omega_h; \qquad [\omega_1, \ldots, \omega_h, \omega'_1]; \qquad \ldots; \qquad [\omega_1, \ldots, \omega_h, \omega'_h].$$

On le démontre par une méthode analogue à celle qui nous a servi pour le théorème correspondant relatif à une expression de Pfaff (§ 5).

On retrouve comme application les conditions de complète intégrabilité de (42), dont nous nous sommes servis (§ 17) :

$$\omega'_1 = 0, \quad \ldots, \quad \omega'_h = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \omega_1, \ldots, \omega_n).$$

Système dérivé. — Nous disons qu'une équation de Pfaff Ω appartient au système (42) si

$$\Omega = \lambda_1 \omega_1 + \ldots + \lambda_h \omega_h,$$

et qu'elle appartient au système dérivé de (42) si, en plus,

$$\Omega' \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ \omega_1, \ldots, \omega_h).$$

Le système dérivé est donc défini par toutes les équations de (42) indépendantes entre elles qui jouissent de cette propriété. Par exemple, le système (41) admet un système dérivé composé de sa première équation.

Le système dérivé d'un système est covariant de ce système par rapport à tout changement de variable.

On définit les dérivés successifs qui jouissent de la même propriété de covariance.

24. Impossibilité de transformations de contact du deuxième ordre. — Toute transformation qui laisse (41) invariant doit laisser invariant son système dérivé, c'est-à-dire $dz - p\,dx - q\,dy = 0$, c'est donc une T prolongée.

Supposons que nous établissions une relation entre x, y, z, p, q, r, s, t; le système (41) devient de classe 7, mais admet encore comme système dérivé sa première équation seulement. On démontre aisément que, réciproquement, tout système de trois équations de Pfaff à sept variables et de classe 7, admettant un système dérivé composé d'une équation de classe 5, peut être associé à une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes [24]. On en déduit que les seules transformations réversibles entre surfaces intégrales de deux équations du second ordre qui conservent le contact du second ordre sont les T prolongées.

Ces résultats s'étendent sans difficulté aux transformations d'ordre quelconque quel que soit le nombre des variables.

25. Transformations de surfaces par abaissement de l'ordre du contact [1, 2, 10]. — Pour préciser, proposons-nous de trouver des fonctions X, Y, Z, P, Q de x, y, z, p, q, r, s, t, telles que

$$\begin{aligned} &dZ - P\,dX - Q\,dY \\ &\quad = \rho(dz - p\,dx - q\,dy) + \lambda(dp - r\,dx - s\,dy) + \mu(dq - s\,dx - t\,dy); \end{aligned}$$

nous sommes conduits à des transformations qui changent en général deux surfaces ayant un contact du deuxième ordre en deux surfaces ayant un contact du premier ordre; mais ces transformations ne se font que dans un sens; elles se prolongent en permettant d'exprimer les dérivées d'ordre n de z au moyen des coordonnées d'élément d'ordre $n+1$ de z. Elles ont des applications à la théorie des transformations des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre, mais surtout l'étude de leurs singularités est intéressante. Cela s'applique, quel que soit le nombre des variables dont dépend z et aussi quel que soit l'ordre de ses dérivées qu'on fait intervenir. L'étude des transformations que nous envisageons met en évidence certaines catégories d'équations aux dérivées partielles qui jouissent de propriétés particulières quant à la structure de leurs intégrales et quant à la possibilité de les transformer en une autre équation. D'ailleurs, ce ne sont pas seulement des équations uniques qui sont mises en relief, mais aussi des systèmes d'équations en involution de types particuliers et qui se présentent ainsi tout naturellement comme sujet d'étude.

26. Problème de Bäcklund généralisé [*voir* fascicule VI du *Mémorial* (1)]. — On est donc conduit à des transformations qui concernent, non plus toutes les multiplicités de l'espace, mais seulement les multiplicités intégrales de certaines équations ou certains systèmes d'équations aux dérivées partielles. Bäcklund, le premier, s'est posé un problème de cette nature [3], en se donnant *a priori* quatre relations entre les coordonnées de deux éléments du premier ordre de l'espace ordinaire; on peut remplacer ce système de quatre relations par d'autres systèmes plus compliqués [10], mais il faudra bien toujours être guidé par quelque idée pour leur choix, et c'est, en général, des considérations géométriques qui dictent la façon de choisir. A de tels systèmes, on peut faire correspondre des systèmes d'équations de Pfaff, et c'est en somme, à l'étude de ces derniers systèmes qu'on se

(1) Nous signalons que page 50 de ce fascicule, ligne 12, il faut lire entre parenthèses 12 au lieu de 11.

trouve ramené, mais là encore, ces systèmes ne sont pas pris au hasard : ce sont des systèmes de Pfaff qui se présentent dans la théorie des équations aux dérivées partielles qui interviennent.

Par exemple, à toute équation du second ordre, on fait correspondre un système particulier de trois équations de Pfaff, de classe 7 et réciproquement; mais si l'équation admet des caractéristiques du premier ordre, ce système comprend deux équations qui forment un système de classe 6. De même, à toute équation du troisième ordre, on peut faire correspondre un système particulier de six équations de classe 11 ; pour des équations particulières, ce système comprend un système particulier de trois équations de classe 8 ou de quatre équations de classe 9 [11, 12, 22].

On peut aussi considérer, selon les idées de M. Vessiot, les systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles corrélatifs des systèmes Pfaff [34].

27. Tandis que l'étude des transformations de contact se confond avec celle des transformations d'une équation ou d'une expression de Pfaff quelconque, celle des transformations auxquelles nous sommes conduits ont rapport à des systèmes de Pfaff, de structure particulière.

Mais il y a une manière plus catégorique de concevoir la généralisation des T : c'est d'envisager les transformations qui laissent invariant un système d'équations ou d'expressions de Pfaff; on est amené ainsi à un problème difficile que, grâce à ses méthodes, M. Cartan a pu traiter, édifiant ainsi la théorie de la structure des groupes infinis de transformations [7′]; ce point de vue englobe, en un certain sens, le précédent comme cas singulier.

Enfin, il convient de signaler que Kantor [30] avait conçu l'idée d'étudier les transformations qui laissent invariante une forme bilinéaire alternée de différentielles, c'est-à-dire, en somme, une forme différentielle extérieure quadratique, en établissant un parallèle entre ce problème et celui de la recherche des propriétés invariantes d'une forme quadratique ordinaire de différentielles, c'est-à-dire un ds^2; il s'est d'ailleurs borné au cas d'une forme différentielle extérieure quadratique dérivée exacte, qui est de beaucoup plus simple que le cas général traité ici.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. Bäcklund (A. V.). — Ueber Flächentransformationen (*Math. Annalen*, t. 9, 1876, p. 292).

2. Bäcklund (A. V.). — Partielle Differentialgleichungen-mit Interm. Integralen. (*Ibid*, t. 9, 1877, p. 199).

3. Bäcklund (A. V.). — Zur Theorie der Flachentransformationen (*Ibid.*, t. 17, 1880, p. 285).

4. Bäcklund (A. V.). — Zur Theorie der Flächentransformationen (*Ibid.*, t. 19, 1882, p. 387).

5. Bouligand (G.). — Leçons de géométrie vectorielle (Paris, 1924, p. 16).

6. Buhl (A.). — Formules stokiennes (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. XVI; Gauthier-Villars, Paris, 1926).

7. Cartan (E.). — Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. 16, 1899, p. 239 332).

7'. Cartan (E.). — Sur la structure des groupes infinis de transformation (*Ibid.*, t. 21, 1904, p. 153, et t. 22, 1905, p. 219).

8. Cartan (E.). — Les systèmes de Pfaff à 5 variables et les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre (*Ibid.*, t. 27, 1910, p. 109-192).

9. Cartan (E.). — Leçons sur les invariants intégraux (Paris, 1922).

10. Cerf (G.). — Sur les équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque à deux variables indépendantes (*Journal de Math.*, 8e série, t. 1, 1918, p. 301).

10'. Cerf (G.). — L'analyse des ten eurs antisymétriques et les formes sym boliques de différentielles (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 170, 1920. p. 1104.

11. Cerf (G.). — Sur certains systèmes de Pfaff et les transformations des équations aux dérivées partielles (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 172, 1921, p. 518).

12. Cerf (G.). — Sur certains systèmes de Pfaff et les transformations des équations aux dérivées partielles (*Ibid.*, t. 173, 1921, p. 1053).

12'. Cerf (G.). — Sur une propriété d'invariance du groupe des transformations de contact et les transformations de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre à *n* variables indépendantes (*Ibid.*, t. 184, 1927, p. 1229).

13. Clebsch (A.). — Ueber das Pfaff'sche Problem (*Journal für mathem.*, vol. 60, 1862, p. 193-251).

14. Clebsch (A.). — Ueber das Pfaff'sche Problem (*Ibid.*, vol. 61, 1863, p. 146-179).

15. Darboux (G.). — Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre (*Mémoires présentés par divers savants étrangers à l'Académie des Sciences*, vol. 27, 1883).

16. DARBOUX (G.). — Sur le problème de Pfaff (*Bull. des Sc. math. et astr.*, 2e série, vol. 6, 1882, p. 14-36 et 49-68).

17. DE DONDER (Th.). — Théorie des champs gravifiques (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. XIV; Gauthier-Villars, Paris, 1926).

18. ENGEL (F.). — Note à l'*Ausdehnungslehre* de 1862 dans les Œuvres complètes (volume cité plus loin [26], p. 482-495).

19. ENGEL (F.). — Lies invarientheorie der Bhrtransformationen und ihre Erweitung (*Jahresbericht der D. Math. Verein. der erg. Bände*, Bd V, 1914, p. 14).

20. FRŒBENINS (G). — Ueber das Pfaff'sche Problem (*Journal für Mathem.*, t. 82, 1877, p. 209.

21. GAU (E.). — Sur les transformations les plus générales des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 156, 1913, p. 116).

22. GOURSAT (E.). — Sur quelques transformations des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 170, 1920, p. 1217).

23. GOURSAT (E.). — Leçons sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre (2e édition, Paris, 1921).

24. GOURSAT (E.). — Leçons sur le problème de Pfaff (Paris, 1922).

25. GOURSAT (E.). — Le problème de Backlund (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. VI; Gauthier Villars, Paris, 1925).

26. GRASSMANN (H.). — Die Ausdehnungslehre (Berlin, 1862); Œuvres complètes, Bd 1, Teil 2.

27. HAMILTON (W. R.). — On a general method in Dynamics (*Phil. Trans.*, London, 1834, p. 24; 1835, p. 95).

28. JACOBI (C. G. S.). — Œuvres complètes, Bd 4 et 5 (Berlin, 1886 et 1890).

29. KANTOR (S.). — Ueber einen Gesichtspunkt in der Theorie des Pfaff'schen Problems (*Sitzungsberichte der math. naturwiss. Klasse der Kaiserl. Ak. der Wiss. Wien*, Bd 110, Abt. II *a*, 1901, p. 1147).

30. KANTOR (S.). — Neue Grundlagen für die Theorie und Weiterentwiklung der Lie'schen Trunktionengruppen (*Ibid.*, Bd 112, 1903, p. 755). [Ce Mémoire, publié après la mort de l'auteur, se trouve mélangé avec le Mémoire qui le précède dans le volume et qui est aussi de Kantor.]

31. LIE (S.). — Œuvres complètes, vol. III (Kristiania, 1922).

32. PFAFF (J. F.). — Methodus generalis, æquationes... (*Abh. der Kgl. Akad. d. Wiss. zu Berlin*, 1814-1815, p. 76 136).

33. SALTYKOW (N. N.). — Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue (Paris-Bruxelles, 1925).

34. VESSIOT (E.) — Sur une théorie nouvelle des problèmes généraux d'intégration (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. LII, 1924, p. 336).

35. v. WEBER (E.). — Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem (Leipzig, 1900).

TABLE DES MATIÈRES.

GÉNÉRALISATIONS DIVERSES.

83859. — Imprimerie Gauthier-Villars, 55, Quai des Grands-Augustins, Paris 6e.