GEORGES DARMOIS

Les équations de la gravitation einsteinienne

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 25 (1927)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1927__25__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), ETC., DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT
Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,
Professeur à la Sorbonne.

FASCICULE XXV

Les équations de la gravitation einsteinienne

Par M. Georges DARMOIS
Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET C^ie^, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1927

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

LES ÉQUATIONS

DE

LA GRAVITATION EINSTEINIENNE

Par M. Georges DARMOIS.

INTRODUCTION.

Une des parties qui ont excité le plus vif et le plus profond intérêt dans la Synthèse que nous devons à Einstein est la théorie nouvelle qu'elle donne des phénomènes de gravitation. Ce fait expérimental de l'interdépendance des mouvements des masses matérielles a été décrit par Newton et ses successeurs, de façon extraordinairement simple et précise, à l'aide des notions de la mécanique, en y ajoutant le concept des forces attractives de gravitation.

La théorie de la relativité propose d'écarter les difficultés qui s'attachent à la conception de ces forces attractives et, changeant complètement le caractère de l'explication, tente de la relier aux théories générales de la propagation. Les grandeurs du champ sont alors astreintes à vérifier un système d'équations aux dérivées partielles, résolu d'abord approximativement par Einstein [1, *Sitzb. Berlin*, 1916]. La découverte, due à Droste [8, p. 998-1011] et Schwarzschild [9, p. 188-196] d'une solution rigoureuse des équations du champ fut un des événements les plus marquants de la vie de cette théorie. C'est par l'intermédiaire de cette forme quadratique particulière, de ce ds^2 de Schwarzschild, que la comparaison put se faire avec l'expérience. Et peut-être l'astronomie pourrait-elle se contenter de demander à cette seule solution les résultats pratiques de la relativité généralisée.

Mais on n'obtient ainsi, en ajoutant un corps d'épreuve, que le mouvement d'une masse nulle dans le champ d'une masse finie. Il serait évidemment désirable d'aller plus loin, et les problèmes les plus voisins sont la construction du champ de deux masses, et le mouvement relatif que prennent deux masses finies libres.

Ces problèmes sont difficiles, mais de la plus grande importance, et l'intérêt qui s'attache à l'intégration des équations d'Einstein est non seulement mathématique, mais physique.

Ce fascicule est consacré à l'étude des propriétés générales les plus essentielles de ce système d'équations aux dérivées partielles, puis à l'exposition des résultats nouveaux qui nous ont paru les plus intéressants pour notre objet.

Le cas du champ à symétrie sphérique, ou champ de Schwarzschild, devant être traité dans le *Mémorial* par M. J. Haag, nous avons rassemblé et comparé quelques résultats importants relatifs aux champs à symétrie axiale.

La méthode que nous employons est géométrique; la méthode variationnelle est exposée dans toute son ampleur, au fascicule XIV de ce *Mémorial*, par M. Th. De Donder.

Au Chapitre I, nous rappelons les notions géométriques indispensables, renvoyant fréquemment au fascicule IX du *Mémorial* sur la Géométrie des espaces de Riemann, de M. E. Cartan [6].

Au Chapitre II, nous étudions les conditions générales d'existence des solutions, faisant paraître ainsi directement quel rôle jouent les surfaces d'onde et rayons gravifiques de M. Th. De Donder. Un exemple simple, où l'examen peut être poussé jusqu'au bout, se relie formellement aux recherches sur les ds^2 à symétrie axiale.

Au Chapitre III, nous obtenons des résultats analogues par l'introduction de coordonnées normées ou intrinsèques. Les conditions supplémentaires qui définissent ces coordonnées sont analogues aux conditions de Maxwell [De Donder, **12**, p. 39]. L'emploi de ces coordonnées paraît devoir s'imposer en beaucoup de questions physiques.

Le Chapitre IV étudie les potentiels à l'intérieur des masses, les propriétés géométriques des lignes de courant d'où résulte le rôle des géodésiques dans la théorie.

Le Chapitre V traite des importantes conditions, aperçues d'abord par Schwarzschild, sur la compatibilité dans un même champ, de deux solutions, l'une extérieure, l'autre intérieure, des équations d'Einstein.

Le Chapitre VI étudie et compare les diverses solutions du problème statique des deux corps, dans le cas de la symétrie axiale, recherches si élégamment raccordées à la physique mathématique classique et aux théories du potentiel.

Dans mon esprit, ce fascicule pourra diminuer un peu le travail des nombreux chercheurs, physiciens ou mathématiciens, qui s'intéressent à ces questions.

Je voudrais, sans oser l'espérer, n'avoir pas trop oublié d'idées essentielles à la poursuite de ces problèmes difficiles.

Mais j'ai, certainement cette fois, omis de citer de nombreux travaux qui pourraient utilement s'y rattacher. Je m'en excuse auprès de leurs auteurs.

Ce fascicule reproduit, à peu de choses près, un cours de quatre leçons que j'ai eu l'honneur de faire comme professeur d'échange, en février-mars 1926, à l'Université libre de Bruxelles.

CHAPITRE I.

QUELQUES CONCEPTS HYPERGÉOMÉTRIQUES IMPORTANTS POUR LA THÉORIE.

1. On sait que la variété numérique à quatre dimensions espace temps, grâce à laquelle nous donnons une image des phénomènes de la mécanique, est devenue, dans les conceptions d'Einstein, un espace de Riemann [CARTAN, **6**, p. 14-15] par l'adjonction d'une forme quadratique invariante de différentielles, donnant l'intervalle élémentaire :

$$(i)\quad ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

[pour la signification physique, *voir* EINSTEIN, **2**, p. 56-57; DE DONDER, **12**, p. 12].

Les phénomènes élémentaires de gravitation, c'est à dire le mouvement d'une masse nulle dans un champ donné, étant conçus en liaison invariante avec cette forme (i), on dit que ds^2 détermine le champ de gravitation. Les coefficients g_{ik}, variables avec les coordonnées adoptées, sont les dix potentiels du champ, relatifs à ce choix de coordonnées.

Le but de la théorie est de limiter la généralité de ces potentiels par des équations indéfinies aux dérivées partielles, de décrire convenablement la matière et son mouvement, de raccorder par des conditions aux limites la matière au champ extérieur qu'elle produit, et de retrouver au bout de cet effort des conclusions vérifiées ou vérifiables par l'expérience.

Pour obtenir les équations indéfinies, Einstein a employé deux méthodes, l'une d'hypergéométrie, l'autre rattachée au calcul des variations. C'est la première que nous adoptons.

2. **Conditions générales.** — La forme (i) est indéfinie, à trois carrés négatifs, un positif, c'est-à-dire du type hyperbolique normal [Hadamard, 4, p. 39].

Si l'on considère deux points infiniment voisins de l'espace temps, M, M $+ d$M, notre forme (i) est un invariant, forme quadratique du vecteur dM, capable de s'annuler le long d'un hypercône élémentaire C de sommet M, positive à l'intérieur de C, négative à l'extérieur.

Nous supposerons qu'il existe un système de coordonnées dans lequel les g_{ik} et leurs dérivées premières sont des fonctions continues du point M, dans les domaines que nous considérons. Cette condition est conservée par des changements de variables à dérivées secondes continues. La continuité des g_{ik} assure que le type hyperbolique normal, une fois obtenu en un point, se conserve dans un domaine où le discriminant ne s'annule pas.

Considérons l'hypercône C d'un point M. Il part de ce point trois familles de géodésiques, G $+$, ou géodésiques dans le temps, famille à trois paramètres intérieure à C au point M; G — ou géodésiques dans l'espace, famille à trois paramètres extérieure à C au point M, et G_0, géodésiques de longueur nulle, ou d'intervalle nul, famille à deux paramètres, qui engendrent une hypersurface à point singulier, le conoïde caractéristique de sommet M.

3. Considérons le paramètre différentiel du deuxième ordre $\Delta_2(\theta)$ et l'équation

$$(a)\quad \Delta_2(\theta) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{-g}\,.\,g^{ik}\,\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\right] = g^{ik}\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i\,\partial x_k} - \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\} \frac{\partial \Phi}{\partial x_l}\right] = 0.$$

Les variétés à trois dimensions qui annulent $\Delta_2(\theta)$ généralisent les lignes ou surfaces isothermes, ou les surfaces équipotentielles solutions de l'équation des ondes. Les caractéristiques de cette équation vérifient

$$(b) \qquad \Delta_1(\theta) = g^{ik}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\frac{\partial\theta}{\partial x_k} = 0.$$

Les caractéristiques de cette équation du premier ordre, ou bicaractéristiques de l'équation (a), sont les géodésiques de longueur nulle. Nous appelons S_0 les hypersurfaces vérifiant (b). Elles sont partout tangentes au conoïde caractéristique, se raccordant avec lui le long d'une G_0. Par chaque point M d'une S_0 part une G_0 et une seule, si S_0 n'est pas le conoïde caractéristique de sommet M.

4. **Variables normales de Riemann-Lipschitz** [Hadamard, 4, p. 87; Cartan, 6, p. 26]. — On peut adopter, en chaque point M_0, des variables normales qui simplifient considérablement le ds^2; nous appellerons coordonnées normales [Birkhoff, 14, p. 224] celles qui donnent

$$(1) \qquad \begin{aligned} ds^2 = &-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2+(dx^4)^2 \\ &+ P_{ik,rs}[x^i\,dx^k - x^k\,dx^i][x^r\,dx^s - x^s\,dx^r], \end{aligned}$$

l'espace euclidien osculateur est un espace de Minkowski rapporté à des coordonnées rectangulaires.

La normalisation complète d'un tel ds^2 se fait en imposant aux $P_{ik,rs}$ des conditions restrictives [Vermeil, *Math. Annalen*, t. 79, 1919, p. 289-312]. Nous n'utiliserons que celle-ci :

$$(2) \qquad P_{ik,rs} + P_{ir,sk} + P_{is,kr} = 0.$$

5 Nous désignerons la dérivée covariante d'un tenseur A_{ik} par la notation $(A_{ik})_e$.

6. **Tenseur de Riemann-Christoffel.** — Nous rappelons seulement les formules [Cartan, 6, p. 22-23]

$$(3) \qquad R^i_{k,rs} = \frac{\partial\Gamma^i_{kr}}{\partial x^s} - \frac{\partial\Gamma^i_{ks}}{\partial x^r} + \Gamma^h_{kr}\Gamma^i_{hs} - \Gamma^h_{ks}\Gamma^i_{hr},$$

$$(3') \qquad \begin{aligned} R_{hk,sr} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{hr}}{\partial x^k\,\partial x^s} - \frac{\partial^2 g_{hs}}{\partial x^k\,\partial x^r} - \frac{\partial^2 g_{kr}}{\partial x^h\,\partial x^s} + \frac{\partial^2 g_{ks}}{\partial x^h\,\partial x^r}\right] \\ + g^{ij}[\Gamma_{hir}\Gamma_{kjs} - \Gamma_{his}\Gamma_{kjr}]. \end{aligned}$$

7. **Identités de Bianchi** [De Donder, 12, p. 6; Cartan, 6, p. 38]. —

Ces identités fondamentales ont la forme

$$(4)\qquad (R^i_{k,rs})_t + (R^i_{k,st})_r + (R^i_{k,tr})_s = 0.$$

Leur démonstration est immédiate et sans calcul quand on emploie les coordonnées normales, en utilisant les expressions (3). On voit de suite qu'il ne subsiste, dans les dérivées covariantes des $R^i_{k,rs}$ que les dérivées secondes des Γ, entre lesquelles apparaît évidemment l'identité cherchée.

8. **Le tenseur conservatif.** — Une double contraction, à partir de l'identité de Bianchi, montre que la divergence de

$$(5)\qquad R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R$$

est identiquement nulle.

(5) est le tenseur conservatif.

9. **Directions principales en un point d'un espace de Riemann** [Cartan, 6, p. 31]. — Le tenseur covariant g_{ik} définit la forme invariante fondamentale $g_{ik}\xi^i\xi^k$.

Le tenseur R_{ik} peut définir de la même manière une forme quadratique invariante $R_{ik}\xi^i\xi^k$.

Le $n^{\text{èdre}}$ conjugué commun à ces deux formes quadratiques fournit ce qu'on appelle, d'après Ricci, les directions principales de l'espace de Riemann. Ces directions, généralement réelles et distinctes quand ds^2 est une forme définie, peuvent d'ailleurs être réelles ou imaginaires quand les deux formes sont indéfinies.

Les notions hypergéométriques que nous venons de rappeler sont d'une généralité complète. Elles vont nous fournir les éléments de la construction d'Einstein.

CHAPITRE II.

LES ESPACES D'EINSTEIN. CAS EXTÉRIEUR.

1. Considérons notre espace de Riemann représentatif, et prenons une région à quatre dimensions qui ne soit traversée par aucune forme d'énergie. Einstein impose aux potentiels de cette région vide

de satisfaire aux dix conditions invariantes suivantes :

$$(6) \qquad R_{ik} - \lambda g_{ik} = 0,$$

λ étant un scalaire. La signification géométrique est très simple. Le repère privilégié formé en chaque point par les quatre directions principales (Chap. I, 9) est indéterminé.

Il résulte des conditions identiques de conservation que λ doit être une constante absolue. Nous appellerons variétés U_n [Struik, 7, p. 166] les variétés à n dimensions satisfaisant à cette condition géométrique. Les U_4 seront appelés espaces extérieurs d'Einstein, ou espaces du type E.

Dans tout ce qui va suivre, et bien que ce ne soit pas indispensable, nous considérons les équations plus restreintes, à constante nulle,

$$(7) \qquad R_{ik} = 0.$$

2. Nous avons déjà fait sur les g_{ik} l'hypothèse qu'ils sont continus ainsi que leurs dérivées premières. Nous supposons l'existence des dérivées secondes (et même des dérivées troisièmes qui figurent dans les conditions de conservation). Nous n'excluons pas les discontinuités des dérivées secondes. Si cette discontinuité se produit sur une hypersurface S, à chaque point de S correspondront deux valeurs bien déterminées, qu'on obtiendra en s'approchant de S, soit d'un côté, soit de l'autre [Hadamard, 3, p. 82-83 et suiv.].

3. Supposons tracée dans la variété à quatre dimensions une hypersurface S, nous la supposerons donnée par l'équation

$$x_4 = 0.$$

Dans ces conditions, et d'après nos hypothèses, les seules dérivées qui puissent être discontinues sont en $\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}$ [Hadamard, *loc. cit.*]. Nous dirons qu'elles sont d'indice 2 par rapport à S. Considérons d'abord les dérivées des quatre potentiels $g_{\alpha 4}$ ($\alpha = 1,2,3,4$). Si elles ne sont pas continues, on peut, sans rien changer d'essentiel, effectuer un changement de variables qui conserve les points de S, les valeurs de $g_{\alpha\beta}$ et $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_4}$. On voit aisément qu'on peut annuler les discontinuités de $\frac{\partial^2 g_{\alpha 4}}{\partial x_4^2}$ ou les faire naître. Elles peuvent être considérées comme nulles. Il suffit donc de considérer les six dérivées

$$\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x_4^2} \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Les équations (7) nous donnent alors :

$$(8) \qquad g^{44}\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x_4^2} = \mathrm{F}_{ik}\left(g_{\alpha\beta}, \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}, \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_4\, \partial x_\delta}\right),$$

$$(9) \qquad g^{k4}\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x_4^2} = \mathrm{G}_i\left(g_{\alpha\beta}, \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}, \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_4\, \partial x_\delta}\right),$$

$$(10) \qquad g^{ik}\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x_4^2} = \mathrm{H}\left(g_{\alpha\beta}, \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}, \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_4\, \partial x_\delta}\right).$$

On voit que si g^{44} n'est pas nul on obtient les six dérivées secondes d'indice 2. Les quatre dernières équations ne contiennent que des dérivées qui peuvent être d'ordre deux, mais d'indice un.

Pour toute hypersurface S telle que $g^{44} \neq 0$, les dérivées secondes des potentiels sont nécessairement continues [Vessiot, **13**].

4. En se reportant à (*b*), Chapitre I, pour la signification de la condition $g^{44} \neq 0$, on voit que S ne doit être en aucun point tangente au cône C. Les discontinuités des dérivées secondes, si elles se produisent, ne le peuvent que le long d'une hypersurface S_0. Nous dirons que ces variétés sont caractéristiques. Elles sont évidemment engendrées par des G_0.

5. Nous pouvons préciser un peu la généralité des solutions du système (7), en supposant les données analytiques. Pour plus de netteté, nous n'introduirons que des éléments invariants. En chaque point de S, supposons donné le cône C, et sur la direction normale à S (non tangente puisque $S \neq S_0$) marquons le point sur lequel ds^2 a la valeur infiniment petite ε^2. Ces points constituent l'hypersurface S_ε, parallèle à S. Elle résulte de la donnée des $g_{\alpha\beta}$. Appelons x_4 la distance géodésique normale à S. Donner les dérivées $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_4}$ revient à donner le ds^2 de S_ε. Avec ces nouvelles coordonnées, que nous appelons coordonnées de Gauss :

$$g_{44} = \pm 1, \qquad g_{i4} = 0, \qquad ds^2 = \pm\, dx_4^2 + g_{ik}\, dx^i\, dx^k.$$

Les équations (8) ont alors une solution unique déterminée par les données de Cauchy sur S.

Satisfait-elle aux équations (9) et (10)? Les équations de conservation interviennent et nous montrent que les quatre quantités $R_{\alpha 4}$ satisfont à un système de quatre équations homogènes aux dérivées partielles du premier ordre, résolubles par rapport à $\frac{\partial R_{\alpha 4}}{\partial x_4}$ ($g^{44} \neq 0$).

Par conséquent, il suffit que les données initiales annulent les $R_{\alpha 4}$ pour qu'ils soient identiquement nuls [*cf.* Birkhoff, **14**, p. 219]. Il suffit, pour exprimer ces conditions en fonction des données, de faire disparaître de R_{44} les dérivées d'indice 2. *Les conditions sont nécessaires et suffisantes.*

6. Dans le cas des espaces U_3, annuler R_{ik} revient à exprimer que l'espace est euclidien. Les données de Cauchy en coordonnées de Gauss reviennent à donner les deux formes quadratiques fondamentales. Les trois conditions nécessaires et suffisantes sont alors celles qui sont classiques en théorie des surfaces [Darboux, **5**, 3e Partie; Struik, **7**, p. 124].

7. Indiquons la forme analytique des résultats. Posons

$$\Omega_{ik} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_4}, \qquad g^{44} = g_{44} = +1.$$

Désignons par r_{ik} le tenseur analogue à R_{ik} de la variété S, par $[A_{ik}]e$ (crochet) la dérivation covariante dans S. On a

$$R_{ik} = \frac{\partial \Omega_{ik}}{\partial x_4} + 2 g^{mn}\Omega_{in}\Omega_{kn} - \Omega_{ik}(g^{uv}\Omega_{uv}) + r_{ik} = 0, \tag{8'}$$

$$R_{i4} = g^{hk}[\Omega_{ik}]_h - g^{uv}[\Omega_{uv}]_i = 0. \tag{9'}$$

$$R_{44} = g^{uv}\left(\frac{\partial \Omega_{uv}}{\partial x_4} + g^{ik}\Omega_{iv}\Omega_{ku}\right) = 0. \tag{10'}$$

Des quatre conditions à vérifier, trois sont formées par (9'). La dernière résulte de la subtitution des valeurs (8'). Si l'on forme $R - 2R_{44}$, on a

$$R - 2R_{44} = r - g^{ik,mn}\Omega_{ik,mn} = 0, \tag{11}$$

r est la courbure scalaire de S.

$$g^{ik,mn} = g^{im}g^{kn} - g^{in}g^{km},$$
$$\Omega_{ik,mn} = \Omega_{im}\Omega_{kn} - \Omega_{in}\Omega_{km}.$$

C'est cette forme (11) qui fournit pour $n = 3$ la relation classique exprimant le célèbre théorème de Gauss,

$$r = \frac{DD'' - D'^2}{H^4},$$

8. Les conclusions précédentes sont complètement modifiées lorsque la variété S est une S_0. On peut, dans le cas le plus général, ramener les équations du problème à une forme simplifiée. Associons d'abord à l'hypersurface particulière (S_0) une famille d'intégrales de l'équation (b). Ce seront les variétés $x_4 = \text{const.}$, et notre variété pourra être $x_4 = 0$. Chacune d'elles porte une famille réelle à un paramètre de géodésiques G_0. Le long de ces géodésiques x_1, x_2, x_4 resteront constants, x_3 sera la variable, d'ailleurs quelconque, de sorte que $x_3 = 0$ représentera une hypersurface quelconque T sécante aux G_0. Dans ces conditions g_{33} est nul, je dis que g_{13}, g_{23} le sont aussi. En effet, le ds^2 étant du type hyperbolique normal se réduit sur les variétés S_0 à la forme

$$ds^2 = - P^2 - Q^2.$$

Les lignes de longueur nulle devant être $dx_1 = dx_2 = 0$, P et Q ne contiennent pas dx_3.

Au contraire, g_{34} est essentiellement différent de zéro.

On peut poursuivre la simplification, tout en restant dans le cas genéral, en subtituant à x_3 une variable nouvelle.

Il est facile de voir alors qu'on peut réduire g_{34} à la valeur 1.

Les six inconnues restantes satisfont à un système de dix équations aux dérivées partielles, dont il suffit de résoudre six convenablement choisies, en vérifiant les quatre dernières sur la variété (S_0) seulement.

On peut aussi, par un changement de variable, toujours permis, annuler g_{44}, et l'on retombe sur un problème tout à fait analogue.

9. Mais nous conserverons la généralité de la variété T, et par conséquent, nous aurons sept g_{ik} non nuls :

$$(12) \qquad g_{11}, \quad g_{12}, \quad g_{22}, \quad g_{14}, \quad g_{24}, \quad g_{34}, \quad g_{44}.$$

Il est facile de calculer les g^{ik} contravariants

$$g = - g_{34}^2 \gamma, \qquad g^{14} = g^{34} = g^{44} = 0, \qquad g^{34} = \frac{1}{g_{34}};$$

γ est le discriminant de la forme à deux différentielles dx_1, dx_2. Appelons Σ la variété à deux dimensions intersection de (S_0) et de T.

Considérons les six premiers potentiels et les équations d'Einstein aux mêmes indices. On peut les résoudre par rapport aux dérivées $\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x_3\, \partial x_4}$. Il n'y figure aucune dérivée d'indice 2.

Imaginons d'abord que le ds^2 soit donné, construisons le système de coordonnées dont nous parlons, traçons notre surface (S_0) particulière, et sur cette surface (S_0) notons les valeurs de tous les potentiels et de leurs dérivées premières. Ces valeurs ne sont pas arbitraires, car les dérivées d'indice 2 ne figurent que dans l'équation

$$R_{44} = 0.$$

Il y a donc là neuf identités nécessaires. Elles sont satisfaites par hypothèse. Mais voyons comment on pourrait retrouver les valeurs des dérivées $\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x_4^2}$.

Dérivons par rapport à x_4 les six équations considérées, nous obtiendrons les dérivées $\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x_4^2}\right)$. Ainsi, nous connaîtrons sur (S_0), non pas les dérivées secondes d'indice 2 que nous cherchons, mais leurs dérivées par rapport à x_3. Pour retrouver les valeurs effectivement prises par ces grandeurs sur (S_0), il faudrait connaître les valeurs qu'elles prennent pour $x_3 = 0$, c'est-à-dire sur la multiplicité Σ, intersection de T et de (S_0).

Il en sera de même pour les dérivées d'ordre quelconque $\frac{\partial^n g_{ik}}{\partial x_4^n}$. Ces quantités ne seront connues sur (S_0) que si on les connaît sur Σ. Connaître l'ensemble de ces grandeurs sur Σ, c'est connaître les g_{ik}, non seulement sur Σ, mais sur la multiplicité T où x_4 varie.

Ainsi, la connaissance sur (S_0) des g_{ik} et d'un nombre fixé quelconque de dérivées en x_4 ne suffit nullement au calcul des g_{ik} dans tout l'espace, et laisse subsister la possibilité d'une solution ayant avec celle que nous considérons un contact d'ordre quelconque le long de (S_0), mais qui en diffère dans le reste de l'espace.

Si maintenant ne supposant plus connu le ds^2, mais le prenant sous la forme définie par les sept potentiels (12) nous voulons déterminer les g_{ik} par des données le long de (S_0), nous retombons, comme les considérations précédentes le montrent nettement, sur des questions classiques de la théorie des caractéristiques (Hadamard, 4, p. 76 et suiv.)

On peut dire, en se bornant aux six équations aux dérivées partielles déjà considérées, que la solution de ce système, aux inconnues autres que g_{44}, est entièrement déterminée par la connaissance de ces inconnues le long des hypersurfaces (S_0) et T. Or, les données sur (S_0) restant les mêmes, les données le long de T peuvent, si on le désire, assurer la permanence des dérivées en x_4 jusqu'à un ordre fini quelconque, et laisser un large arbitraire pour les dérivées ultérieures.

A la vérité, nous n'avons considéré que six équations sur dix et par conséquent, pour appliquer ces considérations à notre problème, il nous faut chercher à satisfaire les quatre équations restantes.

C'est ici que, par un mécanisme analogue à celui du paragraphe 5, vont jouer les équations identiques de conservation. Nous y regarderons les quantités R_{13}, R_{23}, R_{33}, R_{44} (qui doivent être nulles) comme des inconnues.

Considérons d'abord R_{13}, R_{23}, R_{33}; écrivons les équations de conservation aux indices 1, 2, 3, elles ne contiennent pas R_{44}, elles sont résolubles par rapport aux dérivées $\frac{\partial}{\partial x_4}$ des trois premières quantités. Par conséquent, si nous supposons ces équations vérifiées sur (S_0), elles le seront partout.

Reste maintenant l'équation en R_{44}. Si nous utilisons la dernière équation de conservation, nous trouvons

$$(R_{44})_3 = 0. \tag{13}$$

Il est donc nécessaire et suffisant que R_{44} soit nul sur la variété T pour l'être partout.

C'est cette condition qui diminue l'arbitraire (jusqu'ici absolu sous les restrictions de convergence) des données des potentiels g_{11}, g_{12}, g_{22} le long de T. En effet, l'équation en R_{44} s'écrit :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \log \sqrt{\gamma} = A, \tag{14}$$

où A ne contient aucune dérivée d'indice 2.

Dans le problème local que nous étudions, remplaçons la condition pour R_{44} d'être nul sur T par la condition d'être nul sur Σ [intersection de (S_0), T] ainsi que toutes les dérivées successives par rapport à x_4. Cette condition peut être remplie en laissant à chaque fois deux fonctions arbitraires au lieu de trois pour les dérivées de g_{11}, g_{12}, g_{22}.

10. En rassemblant ces résultats, on voit que si deux solutions des équations d'Einstein ont un contact du premier ordre tout le long d'une hypersurface S non caractéristique, toutes les dérivées ont nécessairement la même valeur, et les solutions coïncident (du moins dans le cas analytique) [Hadamard, 6, p. 348]. Si, au contraire, l'hypersurface S est caractéristique S_0, il existe une infinité de solutions pouvant avoir le conctact du premier ordre. Une solution est entièrement déterminée par la donnée des potentiels tout le long de S_0 et tout le long d'une hypersurface T coupant une famille de géodésiques de longueur nulle.

On voit que ces propriétés permettent bien d'appeler caractéristiques, pour les espaces d'Einstein, les hypersurfaces solutions de l'équation (b) et bicaractéristiques les géodésiques de longueur nulle.

Ces éléments ont par conséquent un rôle important à jouer en physique [Hadamard, 6, p. 345] et dans l'intégration des équations.

11. On peut d'ailleurs obtenir des énoncés plus nets dans un cas particulier intéressant. En toute rigueur, en effet, nos résultats ne sont acquis que dans le cas analytique. Or, cette restriction paraît spécialement peu indiquée dans un problème où un changement quelconque de variables est autorisé. Quoi qu'il en soit, supposons dans les notations de 9 que g_{44} soit nul, ce qui est toujours permis, mais qu'en outre, g_{14}, g_{24}, g_{12} le soient aussi, que d'autre part les fonctions inconnnes ne dépendent que des variables x_3, x_4, qui deviennent alors deux variables caractéristiques, comme on le voit immédiatement. On doit escompter des simplifications importantes. Nous ne ferons aucun calcul, les résultats dans leur forme étant identiques à d'autres que nous obtiendrons plus tard, après Levi-Civita et Chazy (p. 35-36). Posons :

$$g_{11} = e^{2\alpha}, \qquad g_{22} = e^{2\beta}, \qquad 2g_{34} = -e^{2\gamma}.$$

La solution complète se présente ainsi :

$$(15)\qquad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_3\,\partial x_4}-\frac{1}{2(x_3-x_4)}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_3}-\frac{\partial\alpha}{\partial x_4}\right)=0,$$

$$(16)\qquad \beta=-\alpha+\log(x_3-x_4)+\text{const.},$$

$$(17)\qquad \gamma=-\alpha+\int(x_3-x_4)\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_3}\right)^2 dx_3-\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_4}\right)^2 dx_4\right]+\text{const.}.$$

α est solution d'une équation bien connue du type hyperbolique. C'est l'équation $E\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ [Darboux, 3, 2^e Partie, Chap. III et IV] dont, l'intégration peut être obtenue de la manière la plus complète par la méthode de Riemann [d'ailleurs créée pour l'équation $E(\beta,\beta)$]. Si α est une solution de (15), γ est donné par une quadrature de différentielle totale exacte, et le ds^2 est obtenu.

Or, on sait bien qu'une solution de (15), dès qu'elle est connue le long de deux morceaux de caractéristiques partis d'un point, est connue dans un rectangle du plan x_3, x_4, mais qu'elle est prolongeable d'une façon très arbitraire.

En particulier, $\alpha=$ const. donne un espace euclidien. On pourra donc, si l'on veut, raccorder à cet espace le long d'hypersurfaces caractéristiques un espace non euclidien, etc.

CHAPITRE III.

FORME DES ÉQUATIONS DANS DES SYSTÈMES SPÉCIAUX DE COORDONNÉES.

1. Dès l'année 1916, Einstein avait tenté d'intégrer approximativement ses équations aux dérivées partielles dans le cas des champs peu intenses [*Sitzungsb. Berlin*, 1916, p. 688-696]. Il reprit la question en 1918 [*Sitzungsb. Berlin*, p. 155-167] et en fournit une solution extrêmement remarquable, avec ce résultat (qui était son but) qu'on retrouve des conclusions très voisines de la théorie de Newton, mais avec le caractère de propagation particulier à la théorie de la relativité. La simplification des équations qui permet leur intégration approchée résulte du choix d'un système particulier de coordonnées, assujetti à vérifier quatre équations supplémentaires [Einstein, 2, p. 77 et 90].

C'est par cette méthode que se sont introduites pour la première fois les ondes gravifiques; Weyl [20, p. 218], Eddington [23, p. 128] la reproduisent. Elle est valable pour les systèmes quasi galiléens, c'est-à-dire où les potentiels diffèrent peu des valeurs galiléennes, moyennant le choix d'un système spécial de coordonnées dont la signification n'est pas parfaitement claire, et dont la recherche est ramenée par Weyl [*loc. cit*, p. 218] à une question classique.

« Autant qu'on peut en juger, dit Eddington [*loc. cit.*, p. 131], c'est dans le but de retrouver une propagation avec la vitesse de la lumière que ces coordonnées ont été choisies. Il y aurait donc un cercle vicieux. »

Les résultats du Chapitre précédent nous permettent d'écarter cette crainte. Nous avons vu que les intégrales des équations d'Einstein présentent vraiment le caractère général commun aux théories des phénomènes de propagation. Nous avons donc affaire, non pas à une apparence due à un choix de coordonnées, mais à une réalité objective de la théorie, que ce choix permet seulement de présenter sous une forme simple et familière.

Mais il n'en est que plus important d'approfondir cette question. Nous devons pouvoir retrouver les résultats d'Einstein par des méthodes absolument générales, où seul intervienne le caractère hyperbolique normal du ds^2.

Naturellement, pour les champs peu intenses et les faibles vitesses de la matière, il nous faudra retomber sur les équations mêmes d'Einstein.

Nous devrons ensuite expliquer dans une certaine mesure pourquoi les coordonnées employées réussissent, et pour cela nous donnerons leur signification hypergéométrique ou physique.

La première partie a été tentée et réussie de plusieurs côtés. De Donder a obtenu le premier, sous une forme définitive, la généralisation des quatre conditions supplémentaires d'Einstein [*La gravifique einsteinienne*, Gauthier-Villars, 1921, p. 40, équation (117)]. Les équations sont

$$g^{rs}\begin{bmatrix} rs \\ i \end{bmatrix} = 0. \tag{20}$$

Elles redeviennent, dans le cas quasi galiléen, les équations d'Einstein.

De Donder montre que la composante R_{ik} du tenseur de gravitation prend une forme extrêmement simple. Parmi les dérivées secondes des potentiels, on ne trouve plus que celles du seul potentiel g_{ik} :

$$R_{ik} = \frac{1}{2} g^{rs} \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x_r \partial x_s} + H_{ik}. \tag{21}$$

Le groupe H_{ik} ne contient plus que des dérivées premières. Cet important résultat, que nous allons démontrer tout à l'heure, permet à De Donder, rappelant les résultats de J. Hadamard et Vessiot [**13**], d'esquisser la théorie des ondes et rayons gravifiques. D'autres applications sont données dans la Théorie des Champs gravifiques [**12**, p. 25, 26]. La signification des équations (20) n'est pas donnée.

Une généralisation des résultats d'Einstein a été fournie également, mais plus tard, par K. Lanczos, dans un travail intéressant [**15**, 1922, p. 537].

La forme des équations de condition rappelle de façon frappante les conditions supplémentaires de Maxwell [De Donder, **12**, p. 39]. Elles sont équivalentes aux conditions (20) comme nous le montrerons. Les coordonnées employées par Lanczos sont donc identiques aux coordonnées normées de De Donder [*loc. cit.*, p. 25]. Birkhoff, qui les utilise dans le cas particulier quasi galiléen, les appelle coordonnées intrinsèques [**14**, p. 225].

2. Considérons le paramètre différentiel du second ordre $\Delta_2(\theta)$, et les hypersurfaces intégrales de l'équation

$$\Delta_2(\theta) = 0.$$

Comme nous l'avons dit, ce sont des variétés analogues aux surfaces isothermes des espaces euclidiens ordinaires, ou aux hypersurfaces équipotentielles de la propagation des ondes. Le dalembertien

$$\square\theta = -\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$$

est en effet le $\Delta_2(\theta)$ du ds^2 de Minkowski.

Soit alors un espace temps donné, rapporté à des coordonnées quelconques. Soient quatre familles distinctes

$$\theta_i = \text{const}.$$

d'hypersurfaces intégrales. On peut obtenir ces solutions d'une infinité de manières, et nous serions d'ailleurs ramenés à considérer les caractéristiques et bicaractéristiques. Prenons maintenant comme variables nouvelles les θ_i. On aura évidemment

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_k}(\sqrt{-g}\,g^{hk}) = 0. \tag{20'}$$

Ce seront pour nous les conditions généralisées de normalisation. Montrons d'abord qu'elles sont équivalentes aux conditions (20). Il suffit d'utiliser la forme

$$\Delta_2(\theta) = g^{rs}\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial x^r\,\partial x^s} - \begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\right].$$

On trouve alors

$$g^{rs}\begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix} = 0. \tag{20''}$$

Il est clair que les premiers membres de (20″) (sont combinaisons linéaires des premiers membres de (20) et inversement.

Les formes (20′), (20″) sont dues à Lanczos. Elles suggéraient immédiatement l'interprétation géométrique que nous en avons donnée. Il est facile maintenant d'évaluer R_{ik} dans le nouveau système de coordonnées. On a

$$\begin{aligned} R_{ik} = {} & \frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k}\operatorname{Log}\sqrt{-g} - \begin{Bmatrix} i\;\;k \\ r \end{Bmatrix}\frac{\partial \operatorname{Log}\sqrt{-g}}{\partial x_r} \\ & - \frac{\partial}{\partial x_r}\begin{Bmatrix} i\;\;k \\ r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} i\;\;p \\ q \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k\;\;q \\ p \end{Bmatrix}. \end{aligned} \tag{22}$$

Or, d'après (20),

$$\frac{\partial \operatorname{Log}\sqrt{-g}}{\partial x_i} = g^{rs}\frac{\partial g_{ri}}{\partial x_s},$$

$$\frac{\partial^2 \operatorname{Log}\sqrt{-g}}{\partial x_i\,\partial x_k} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(g^{rs}\frac{\partial g_{ri}}{\partial x_s}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^{rs}\frac{\partial g_{rk}}{\partial x_s}\right)\right]. \tag{23}$$

On voit alors immédiatement que seules subsistent les dérivées secondes de g_{ik} et l'on retombe sur la forme (21) obtenue par De Donder.

On peut, par les mêmes méthodes, trouver une expression analogue pour la composante contravariante R^{ik} :

$$R^{ik} = -\frac{1}{2}g^{rs}\frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^r\,\partial x^s} + L_{ik}. \tag{24}$$

(K. Lanczos, *loc. cit.*). L'expression de L^{ik} est d'ailleurs assez simple. Bien évidemment, les équations (21) ou (24) prennent la forme obtenue par Einstein dans le cas quasi galiléen.

3. Nous avons donc la solution complète du problème posé, et nous voyons bien que ce n'est pas hasard si notre système de coordonnées présente sous une forme simple la propagation des potentiels. C'est parce qu'il est lié, de la manière la plus nette, à cette propagation elle-même.

Du point de vue analytique on réalise, moyennant ce choix précis des coordonnées, une séparation des potentiels, du moins dans les dérivées secondes.

Si l'on tient compte pour les applications physiques, de l'ordre de grandeur des potentiels par rapport aux valeurs galiléennes, cette séparation est effective.

Il est intéressant d'avoir une méthode régulière pour réaliser cette séparation. Par exemple, nous revenons au cas d'Einstein, où pour un certain système de coordonnées

$$g_{ik} = \delta_{ik} + \gamma_{ik},$$

les δ_{ik} étant les valeurs galiléennes, γ_{ik} les écarts très petits. Le système n'étant pas normé, les quantités

$$-g^{rs}\left\{ \begin{matrix} rs \\ i \end{matrix} \right\}$$

ne seront pas nulles, mais petites, η^i. Ce sont les valeurs de $\Delta_2(x^i)$. Dans ces conditions, on aura sensiblement

$$\Delta_2(\theta) = -\frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x_4^2} + \eta^i\frac{\partial\theta}{\partial x_i}.$$

Cherchons des coordonnées normées de la forme $x^i + \varepsilon^i$. On aura

$$\Box\varepsilon^i + \eta^i = 0,$$

$\Box$ étant le symbole du dalembertien. Ce sont les équations que Weyl [20, p. 218] intègre à l'aide de potentiels retardés.

4. Revenons au cas général. Le groupe des équations (21) permet d'étudier aisément les discontinuités possibles pour les dérivées

secondes. Supposons que la surface de discontinuité ait pour équation

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

On sait que si les dérivées premières sont continues, le saut brusque de la dérivée seconde $\frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^r \partial x^s}$ est proportionnel à $\frac{\partial f}{\partial x^r}\frac{\partial f}{\partial x^s}$ [Hadamard, 3, p. 86-87].

Si l'on désigne par $[u]$ le saut brusque de la fonction u,

$$\left[\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^r \partial x^s}\right] = l_{ik}\frac{\partial f}{\partial x^r}\frac{\partial f}{\partial x^s}.$$

Par conséquent, si les potentiels n'ont pas toutes leurs dérivées secondes continues, l'une au moins des équations (21) aura pour conséquence

(25) $$\left[g^{rs}\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^r \partial x^s}\right] = l_{ik}\left[g^{rs}\frac{\partial f}{\partial x^r}\frac{\partial f}{\partial x^s}\right] = 0.$$

Il en résulte que, tout le long de la surface $f = 0$, on aura

$$\Delta_1(f) = g^{rs}\frac{\partial f}{\partial x^r}\frac{\partial f}{\partial x^s} = 0.$$

La discontinuité ne peut avoir lieu que suivant une variété caractéristique.

L'introduction des surfaces d'ondes et des rayons gravifiques se fait ainsi de la manière la plus satisfaisante. Mais il reste intéressant d'avoir pu établir avec précision la possibilité réelle des discontinuités, comme nous l'avons fait au Chapitre II.

5. La signification des coordonnées normées, les simplifications qu'elles apportent paraissent en imposer l'emploi dans beaucoup de questions physiques [*voir* Birkhoff, 14, p. 238-239]. Les coordonnées normales, dont l'utilité est si grande en géométrie, donnent des résultats de forme analogue, mais non équivalents. Nous les signalons rapidement. Si l'on considère les fonctions $P_{ik,rs}$, que l'on supposera liées par la relation (2) (Chap. I), la valeur de ces fonctions à l'origine des coordonnées est proportionnelle à celles des composantes $R_{ik,rs}$ du tenseur de Riemann-Christoffel. On a

(26) $$[R_{ik,rs}]_0 = -3(P_{ik,rs})_0.$$

D'une façon générale, toute limitation imposée à la généralité du ds^2 et traduite par des relations entre les R peut aussi se traduire par des limitations imposées aux P. Si les R sont nuls, les P le sont et l'espace est euclidien [Birkhoff, 14, p. 210].

Si les R sont liés par les équations d'Einstein, les fonctions P dépendent de paramètres et l'on peut, par une méthode de récurrence, déterminer les groupes homogènes successifs des fonctions P, c'est-à-dire les groupes homogènes successifs des g_{ik}. En particulier, le termes constants des $P_{ik,\,rs}$ fournissent la partie quadratique des potentiels.

Appliquons l'opérateur $\square$ à ces différents groupes homogènes et représentons le résultat par le symbole $(\square g_{ik})_0$.

On trouve alors que les dix équations d'Einstein prennent la forme

$$(\square g_{ik})_0 = 0. \tag{27}$$

D'une façon générale d'ailleurs, et quel que soit le ds^2, on déduira des formules (26)

$$(\square g_{ik})_0 = \frac{2}{3}(R_{ik})_0 \qquad \text{[Birkhoff, 14, p. 229]}. \tag{28}$$

Il paraît naturel de rapprocher les équations (27) et (21). Pourtant les résultats sont très différents.

La forme simple des équation (27), évoquant des phénomènes de propagation, n'est acquise qu'à l'origine d'un système de coordonnées normales.

Au contraire, les équations (21) sont valables dans tout l'espace.

6. Revenant aux coordonnées normées, nous remarquons que la signification géométrique des conditions (20′) nous permet de choisir des systèmes partiellement nommés. Il n'est pas nécessaire que les quatre familles de variétés coordonnées satisfassent à l'équation (a).

Si une seule y satisfaisait, on séparerait dans les équations d'Einstein un seul potentiel, g_{11} par exemple. Si deux ou trois y satisfont, on séparera trois ou six potentiels.

Cette méthode peut être utile pour étudier la propagation d'un potentiel jouant un rôle spécial.

CHAPITRE IV.

LES ESPACES D'EINSTEIN. CAS INTÉRIEUR.

1. Les équations des espaces extérieurs d'Einstein peuvent s'écrire à l'aide du tenseur conservati

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = S_{ik} = 0. \tag{29}$$

L'idée de généraliser l'équation de Poisson a conduit Einstein à égaler le tenseur S_{ik}, descriptif de certaines propriétés de l'espace temps, à un tenseur d'énergie de la matière, descriptif de la matière et de son mouvement. Nous écrirons, $\varkappa$ étant constant,

$$S_{ik} = -\varkappa T_{ik}. \tag{30}$$

2. **Choix du tenseur** T_{ik}. — Les grandeurs qui figurent dans ce tenseur seront les éléments du modèle plus ou moins simplifié, du concept approprié au problème traité, par lequel nous remplaçons la matière réelle.

Les traits reconnus expérimentalement comme les plus importants doivent évidemment être introduits et placés par ordre d'importance dans notre mode de description. Il est de plus indispensable que ces grandeurs puissent être raccordées à l'expérience directe dans tous les cas concrets, de manière à permettre un jugement sur la théorie.

Ceci posé, nous sommes d'abord forcés [Einstein, 2, p. 46] d'adopter un matériel de description assez grossier, mais approprié au but poursuivi. Les éléments sont ceux que la mécanique applique aux théories de l'hydrodynamique et de l'élasticité, la densité de la matière, les forces de pression, les éléments du champ électromagnétique.

Dans le problème qui nous occupe la matière est toujours présente. Or, l'énergie d'un gramme de matière est extrêmement grande par rapport à l'énergie du champ électromagnétique. Celle ci ne jouera aucun rôle. Pour les pressions, elles sont également très petites par rapport à la densité de la matière, de sorte qu'il est indiqué de faire figurer dans T_{ik} :

a. Un terme principal, de beaucoup le plus important, qui sera le tenseur d'énergie de la matière pondérable;

b. Les pressions.

3. Soit ρ un scalaire qui représentera la densité de la matière mesurée par un observateur au repos à cet instant par rapport à la matière [De Donder, **11**, p. 40; **12**, p. 22].

Soient u^i les composantes du vecteur unitaire, vitesse généralisée, évalué dans le système de coordonnées choisi. La partie principale sera

$$T^{ik} = \rho u^i u^k \quad \text{avec la condition} \quad u_k u^k = 1. \tag{31}$$

Si l'on se borne à ce terme, on peut faire correspondre physiquement à ce concept [Einstein, **2**, p. 46] un nuage de poussière fine à grains indépendants, mais pour nous ce sera le terme important de la réalité, nous dirons que nous traitons le cas intérieur schématisé.

4. Les propriétés de conservation. — T^{ik} doit être conservatif :

$$(\rho u^i u^k)_i = 0;$$
$$u^k(\rho u^i)_i + \rho u^i (u^k)_i = 0, \tag{32}$$

en multipliant par u_k et contractant, puis dérivant la condition (31) :

$$(\rho u^i)_i + \rho u^i u_k (u^k)_i = 0, \tag{33}$$
$$u_k(u^k)_i + (u_k)_i u^k = 0 = 2 u_k (u^k)_i.$$

On obtient donc immédiatement les conditions

$$(\rho u^i)_i = 0, \tag{34}$$
$$u^i (u^k)_i = 0. \tag{35}$$

La première exprime que la divergence du vecteur ρu^i, vitesse matérielle généralisée, est nulle. C'est l'équation de continuité généralisée.

Les équations (35) dont le premier membre n'est autre que $\frac{\xi^k}{R}$, ξ^k étant un cosinus directeur de la normale principale, R le rayon de courbure de la ligne de courant, expriment que ces lignes de courant sont des géodésiques du ds^2.

Ainsi, la masse se conserve, ainsi que la direction des lignes de courant [De Donder, **12**, p. 14].

Si nous avions exprimé les conditions de conservation en prenant comme paramètres x_1, x_2, x_3 ceux des lignes de courant, nous aurions trouvé que, x_4 étant le temps propre, $\rho\sqrt{-g}$, g_{14}, g_{24}, g_{34} ne sont fonctions que de $x_1\ x_2\ x_3$.

5. Fluide parfait. — On convient de désigner ainsi un état de la matière représentable de la manière suivante. Il y figure deux grandeurs scalaires ρ et p que nous supposons liées par la relation fonctionnelle :

$$\rho = f(p). \tag{36}$$

La description d'un tel fluide se fait d'une manière complète à l'aide des grandeurs u^i, ρ, p. Le tenseur matériel est par définition :

$$T^{ik} = \rho u^i u^k - p g^{ik}. \tag{37}$$

La forme à laquelle se réduit T^{ik} pour un système d'inertie attaché à la matière à l'instant t amène à considérer [Einstein, **2**, p. 48; De Donder, **12**, p. 22 à 25] que $\rho - p$ représente la densité de la matière au repos. Dans ces conditions, nous prendrons l'équation d'état (36) sur la forme

$$\rho - p = \varphi(p). \tag{38}$$

6. Les conditions de conservation. — Un calcul analogue à celui du paragraphe 4 donne, en appelant δ la divergence $(\rho u^i)_i$,

$$\delta = u^i(p)_i, \tag{39}$$

$$\delta u^k + \rho\frac{\xi^k}{R} = (p)^k. \tag{40}$$

La divergence de la vitesse matérielle n'est pas nulle, mais égale à la dérivée (très petite) de la pression le long de la ligne de courant.

La signification géométrique de (40) est remarquable :

Le gradient de pression est la résultante de la divergence δ portée par la vitesse et du scalaire $\frac{\rho}{R}$ porté par la normale principale à la ligne de courant, ce qui entraîne d'ailleurs la relation

$$\Delta_1(p) = \delta^2 - \frac{\rho^2}{R^2}.$$

Pratiquement, dans cette équation, $\frac{1}{\rho}(p)^k$ et $\frac{\delta}{\rho}$ sont extrêmement petits, $\frac{\xi^k}{R}$ est par conséquent très petit aussi.

On peut également écrire (40) sous la forme

$$\frac{\xi^k}{R} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}(g^{ik} - u^i u^k). \tag{41}$$

7. Si l'on fait entrer dans la description de la matière un tenseur symétrique généralisant celui de la mécanique, on a

$$T^{ik} = \rho u^i u^k - p^{ik}, \tag{42}$$

et les équations de conservation expriment que :

$$\delta = (\rho u^i)_i = (p^i_k)_i u^k, \tag{43}$$

$$\delta u^k + \rho\frac{\xi^k}{R} = (p^{ik})_i, \tag{44}$$

ces équations admettant une interprétation géométrique tout à fait analogue à la précédente.

Elles sont d'ailleurs simples et remplacent avantageusement les conditions primitives.

8. Ce que nous avons dit de l'ordre de grandeur des pressions amène à penser que les lignes de courant, géodésiques dans le cas schématisé (31), sont peu différentes de géodésiques dans le cas général. On peut, dans le cas du fluide parfait, préciser par un élégant théorème dû à Eisenhart [16, p. 206]. Définissons une fonction φ

$$\varphi = \int \frac{dp}{\rho}$$

et une nouvelle forme quadratique, conforme au ds^2 primitif,

$$ds'^2 = e^{2\varphi}\, ds^2.$$

Les ligne de courant sont alors des géodésiques de ds'^2.

Il suffit, pour le démontrer, de voir comment se transforme $\frac{\xi^k}{R}$ quand on passe de ds^2 à $e^{2\sigma} ds^2$. On trouve, en mettant des accents et de grandes lettres pour le nouveau ds^2,

$$\frac{\xi^k}{R} = e^{2\sigma}\left[\left(\frac{\xi^k}{R}\right)' + (G^{ik} - U^i U^k)\frac{\partial \sigma}{\partial x_k}\right]. \tag{45}$$

En utilisant (41), et faisant $\sigma = \varphi$, on a le théorème ; en particulier : les lignes de courant sont géodésiques des variétés $p = \text{const}$.

9. Pour un fluide parfait incompressible

$$\rho - p = a, \qquad e^{\varphi} = \frac{1}{1 + \frac{p}{a}};$$

en se reportant au paragraphe 4, dernier alinéa :

$$ds^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{p}{a}\right)^2} [dx_4^2 + 2 g_{i4}\, dx^i\, dx^4 + g_{ik}\, dx^i\, dx^k].$$

Les g_{i4} étant indépendants de x_4.

10. Le théorème d'Eisenhart s'étend au cas plus général où l'on pourrait poser

$$\frac{1}{\rho}(p_k^i)_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}.$$

11. **Structure géométrique des espaces d'Einstein à l'intérieur des masses.** — L'interprétation géométrique (Chap. II, 1) des équations (6) ou (7) peut être étendue aux équations (30), en une certaine mesure, même quand le tenseur du second membre n'est pas nul. Considérons d'abord le cas schématique. Les directions principales de la forme quadratique $R_{ik}\xi^i\xi^k$ sont les mêmes que celles de

$$u_i u_k \xi^i \xi^k = (u_i \xi^i)^2.$$

Il existe donc une direction principale, celle des lignes de courant. Elle correspond à une racine simple de l'équation en λ [Eisenhart, *loc. cit.*]. Les trois autres directions principales sont indéterminées dans l'hyperplan perpendiculaire à la ligne de courant. Cette propriété s'étend évidemment au cas du fluide parfait. La structure géométrique de ces espaces de la relativité est donc très particulière. Il est remarquable que la physique ait conduit à ces types spéciaux d'espaces de Riemann, espaces à directions principales indéterminées, espaces à une seule direction privilégiée.

12. Il résulte des remarques générales du Chapitre IV, 3, que, malgré la généralité en apparence très grande du tenseur capable de

représenter la matière, nos types d'espaces seront dans la réalité très voisins de ceux que nous venons de considérer. Sans doute, et en toute rigueur, à côté de la direction principale orientée dans le temps et qui est en gros la direction du courant, nous trouverons trois directions principales dans l'espace, mais en fait nous serons dans un cas analogue à celui d'une surface (de l'espace à trois dimensions), qui serait à très peu près de révolution.

13. **Forme des équations du cas intérieur schématisé.** — Considérons une hypersurface de base orientée partout dans l'espace ou le temps. Pour fixer les idées, orientons-la dans l'espace, et constituons au voisinage un système de coordonnées de Gauss avec les géodésiques normales dirigées dans le temps. Nous aurons donc six potentiels, quatre composantes u^i, le scalaire ρ : les équations sont (Chap. II, 5)

$$R_{ik} = -\varkappa\rho\left[u_i u_k - \frac{1}{2} g_{ik}\right], \tag{45}$$

$$R_{i4} = -\varkappa\rho\, u_i u_4, \tag{46}$$

$$R_{44} - \frac{R}{2} = -\varkappa\rho\, u_4^2. \tag{47}$$

$$R = \varkappa\rho. \tag{48}$$

Les lignes de courant sont géodésiques, par conséquent :

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x_i} u^i + \begin{Bmatrix} \lambda & \mu \\ & \alpha \end{Bmatrix} u^\lambda u^\mu = 0, \tag{49}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho\sqrt{-g}\, u^i\right) = 0, \tag{50}$$

$$g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = g^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = 1. \tag{51}$$

Examinons (46) et (47). Si l'on connaît sur l'hypersurface de base S, g_{ik}, $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_4}$ on connaît les premiers membres, on en tire

$$\varkappa\rho\, u_4^2 = L_{44}, \tag{47'}$$

puis, si $L_{44} \neq 0$, on obtient les u_1, u_2, u_3 au signe près. D'où la condition (51), qui détermine ρ :

$$\frac{g^{\alpha\beta} R_{\alpha 4} R_{\beta 4} + L_{44}^2}{L_{44}} = \varkappa\rho. \tag{51'}$$

Nous avons donc ρ, (49) et (50) donnent $\frac{\partial u^\alpha}{\partial x_4}$, $\frac{\partial \rho}{\partial x_4}$, (45) donne $\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x_4^2}$.

En résumé, supposons :

1° S nulle part tangente au cône C;

2° L_{44} partout positif et non nul ($L_{44}=0$ voudrait dire que S est tangente à une ligne de courant, ou engendrée par ces lignes).

Si ces deux hypothèses sont vérifiées, il ne peut y avoir de discontinuités pour ρ, u^{α}, $\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x_4^2}$.

On peut ajouter, en conservant le sens du Chapitre II, 5 :

La solution du problème est déterminée;

Car la solution est unique, de plus, elle vérifie partout les équations (46) (47) (51) à cause des équations de conservation et des propriétés bien connues des équations (49) : en somme, il suffit que ces équations soient vérifiées sur S pour l'être partout.

14. Cas du fluide parfait. — Nous aurons

$$R_{ik}=-\varkappa\left[\rho\left(u_i u_k-\frac{1}{2}g_{ik}\right)+p g_{ik}\right], \tag{52}$$

$$R_{i4}=-\varkappa\rho\, u_i u_4, \tag{53}$$

$$R_{44}-\frac{R}{2}=-\varkappa\rho\, u_4^2. \tag{54}$$

De plus, en utilisant (39) et (40),

$$\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x_i}u^i+\left\{\begin{matrix}\lambda & \mu\\ & \alpha\end{matrix}\right\}u^{\lambda}u^{\mu}+\frac{u^{\alpha}}{\rho}\delta=\frac{1}{\rho}g^{\alpha\beta}\frac{\partial p}{\partial x_{\beta}} \tag{55}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_k}u^k=\delta=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{-g}\,u^i\right), \tag{56}$$

$$g^{\alpha\beta}u_{\alpha}u_{\beta}=1, \tag{57}$$

$$\rho-p=\varphi(p). \tag{58}$$

On tire aisément l'équation

$$\varkappa\rho=\frac{(L_{44}+\varkappa p)^2+g^{\alpha\beta}R_{\alpha 4}R_{\beta 4}}{L_{44}+\varkappa p} \tag{59}$$

qui détermine successivement sur S, ρ, p, u^1, u^2, u^3, u^4.

Mais le calcul des dérivées premières de ρ, p... introduit un élément nouveau.

Ce calcul peut se ramener à celui de la dérivée $\frac{\partial p}{\partial x_4}$, par exemple, mais n'est possible que si la quantité

$$u_4^2 - 1 - u_4^2 \varphi'(p)$$

n'est pas nulle, or $u_4^2 - 1$ est essentiellement positif ou nul, mais $\varphi'(p)$ étant lui aussi essentiellement positif [Hadamard, 3, p. 136] cette quantité peut s'annuler.

On voit aisément, qu'en général, la variété S, d'équation $f = 0$, ne doit pas annuler la quantité

$$(60) \qquad [g^{ih} - (1 - \varphi')u^i u^h]\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_h} \equiv \Omega(f).$$

Cette condition définit de nouvelles variétés exceptionnelles S_2.

$u_4^2 - 1$ est le carré de la composante d'espace de la vitesse généralisée; si dl est la composante d'espace du déplaeement, on trouve donc pour S_2 l'équation

$$\frac{dl}{dx_4} = \sqrt{\varphi'(p)}.$$

Ces variétés nouvelles, où peuvent naître des discontinuites, sont donc [Hadamard, 3, p. 277] les fronts d'ordre de la théorie classique.

Si S n'est pas S_0, c'est-à-dire n'est pas engendrée par des G_0; si S n'est pas S_1, c'est-à-dire n'est pas engendrée par des lignes de courant; si S n'est pas S_2 ($\Omega(f) \neq 0$), les conclusions du paragraphe 19 s'étendent au cas du fluide parfait.

15. Le problème intérieur peut évidemment ètre traité en coordonnées normées. C'est d'ailleurs pour le traiter qu'Einstein a introduit pour la première fois ces coordonnées [Einstein, 2, p. 77].

On pourra, s'aidant des résultats du Chapitre III, se reporter aux applications données par De Donder [12, p. 25] sur les approximations dans le champ massique [Nuyens, *Bull. Ac. Roy. Belg.*, Cl. des Sc., mars 1925].

CHAPITRE V.

LA MATIÈRE DANS LE CHAMP. RACCORDEMENT. CONDITIONS.

1. Si nous considérons un ensemble de masses en mouvement, et la variété à quatre dimensions qui leur correspond dans une représentation adoptée, à chacune des masses correspond un tube d'univers

limité par une certaine frontière à trois dimensions. Entre ces tubes d'univers s'étend la représentation des régions vides de matière. A un système comportant n masses, au système solaire par exemple correspond un schéma à n tubes d'univers. Cette figuration à quatre dimensions peut être considérée comme un moyen, indépendant de toute idée théorique, de représenter les observations. Mais, du point de vue de la relativité générale, cette variété devient par hypothèse un espace de Riemann, et la forme quadratique fondamentale doit vérifier, à l'extérieur des tubes, les équations (7), à l'intérieur, des équations de la forme (30).

Nous avons fait sur les g_{ik} les hypothèses du Chapitre I, paragraphe 2, et nous avons vu que les dérivées secondes ne pouvaient avoir de sauts brusques qu'au passage des variétés caractéristiques. Ces conclusions s'étendent naturellement à des équations de la forme (30) à seconds membres réguliers.

2. Mais nous avons à nous demander ce qui se passe quand nous nous trouvons au voisinage, de part ou d'autre, de la variété S, frontière du tube d'univers d'une masse déterminée. Les conditions que nous allons rencontrer, et dont l'importance est très grande si l'on veut bien comprendre l'interdépendance des masses et du champ, ont été introduites par Schwarzschild [9, 10].

Nous poserons comme conditions qu'il existe un système de coordonnées dans lequel les g_{ik} et leurs dérivées premières sont des fonctions continues, même à la traversée de la frontière des masses. Cette condition ne serait pas conservée par un changement arbitraire de variables et dans la réalité, quelques difficultés peuvent se présenter. Il n'est pas toujours évident si les variables employées pour la résolution des deux problèmes, intérieur et extérieur, permettent oui ou non d'appliquer ces conditions. En fait, les résultats obtenus par Schwarzschild lui-même tiennent à l'emploi d'un système de coordonnées spécial, à signification physique ou géométrique peu claire, et qui simplifiait beaucoup la formulation du problème, sans en simplifier autant la solution.

Mais ces conditions une fois posées, il existe une infinité de changements de variables qui les conservent. On peut en profiter pour obtenir une forme invariante, capable dès lors de servir dans tous les cas.

Il suffit de mener les géodésiques normales à la frontière. Cette construction, toujours possible, nous amène aux variables de Gauss, et les conditions de Schwarzschild supposées remplies dans le système primitif, le sont encore après cette transformation. On aura donc, x_4 étant la distance géodésique,

$$ds^2 = -dx_4^2 + g_{ik}\,dx^i\,dx^k.$$

Les variables x_1, x_2, x_3 qui comportent une variable de temps sont celles qui fixent un événement de la frontière. La forme $g_{ik}\,dx^i\,dx^k$ représente quand on y fait $x_4 = 0$, la première forme fondamentale de la frontière.

La forme $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_4}\,dx^i\,dx^k$ représente, dans les mêmes conditions, à un facteur près, la deuxième forme fondamentale [Cartan, 6, p. 84]. Les dérivées $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_4}$ seront appelées les dérivées normales, les autres seront les dérivées tangentielles, les dérivées secondes seront soit d'indice 0, soit d'indice 1, soit d'indice 2. Ceci posé, d'après les conditions de Schwarzschild, les première et deuxième formes fondamentales de la frontière représentent la limite commune vers laquelle tendent les première et deuxième formes de deux hypersurfaces parallèles voisines à l'intérieur ou à l'extérieur de cette frontière.

Cette condition, devenue invariante, peut être exprimée maintenant, *sans d'ailleurs effectuer le changement de coordonnées*, dans un système quelconque. Elle ne porte au fond, comme on le voit, que sur six combinaisons des dix potentiels. On peut d'ailleurs donner des exemples simples où les conditions invariantes sont remplies sans que soient remplies les conditions, énoncées sans précaution, où *tous les potentiels* devraient être continus.

3. Il résulte maintenant de considérations classiques [Hadamard, 3] que les dérivées d'ordre quelconque, mais d'indice 0 ou 1, sont nécessairement continues aussi.

Seules sont capables de discontinuités les dérivées dont l'indice est 2 ou supérieur à 2.

Il est d'ailleurs impossible que toutes les dérivées d'indice 2 soient continues, car cela impliquerait que le tenseur matériel varie d'une manière continue au passage de la frontière, ce que nous n'admettrons pas.

Les sauts brusques des quantités R_{ik}, provenant de $\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x_4^2}$, représentent la variation du tenseur matériel, les trois quantités R_{14}, R_{24}, R_{34} ne dépendent que des dérivées d'indice 1, et sont continues. Quant à la quantité

$$R_{44} - \frac{1}{2} g^{44} R = R_{44} + \frac{R}{2},$$

nous avons vu (Chap. II, § 7), qu'elle ne dépend plus des dérivées d'indice 2. Elle est aussi continue. Donc : ces quatre quantités, R_{i4}, L_{44}, doivent être nulles, prises à la frontière du ds^2 intérieur.

4. Nous dirons qu'un ds^2 intérieur et un ds^2 extérieur satisfaisant aux conditions de Schwarzschild se prolongent, et que les conditions

$$(61) \qquad R_{i4} = 0, \qquad L_{44} = 0$$

sont les conditions nécessaires du prolongement.

Nous allons voir que l'interprétation physique de ces conditions est très simple. Prenons d'abord le cas schématique

$$T^{ik} = \rho u^i u^k \qquad [\text{Chap. IV, éq. } (47')].$$

Le saut brusque de $R_{44} + \frac{R}{2}$ représente en effet la valeur à la frontière de $\varkappa \rho u_4^2$. Il est donc nécessaire que u_4 s'annule identiquement sur la frontière, ce qui exprime que : la frontière est engendrée par des lignes de courant. Cette condition suffit à annuler R_{i4}.

Dans ce cas particulier, les lignes de courant qui engendrent la frontière sont des géodésiques, aussi bien du ds^2 intérieur que du ds^2 extérieur.

5. Cas du fluide parfait. — La pression p doit être identiquement nulle à la frontière. La condition $u_4 = 0$ est de nouveau nécessaire et suffisante pour les conditions (61) de prolongement. Il résulte du théorème d'Eisenhart (Chap. IV, § 8) que les lignes de courant sont des géodésiques du ds^2 frontière.

On voit immédiatement que dans le cas général, le tenseur p^{ik}

ayant ses composantes nulles à la frontière, la condition que celle-ci soit engendrée par des lignes de courant suffit à assurer les conditions (61).

6. Les conditions nécessaires (61) sont-elles suffisantes. Autrement dit, un problème intérieur étant résolu, si les conditions (61) sont vérifiées sur une variété frontière, peut-on résoudre un problème extérieur avec les données de Cauchy. La chose n'est pas douteuse, avec les restrictions d'analyticité, *pour le problème local*. En effet, les conditions trouvées sont les mêmes que celles du Chapitre II, 7. Le problème extérieur est localement possible, et de solution unique.

7. Ce n'est pas sous la forme du prolongement de l'intérieur vers l'extérieur que les problèmes se sont posés jusqu'ici. On a généralement commencé par le problème le plus facile. Le champ extérieur étant trouvé, il faut meubler une partie du continuum à quatre dimensions par une matière qui explique ce champ. On ne doit pas évidemment limiter cette portion au hasard. Par exemple, dans le cas schématique, il faut une frontière engendrée par des géodésiques, mais cette condition ne suffirait pas. Le tube que l'on veut meubler en masse doit contenir des singularités du ds^2 extérieur, comme il apparaît très clairement pour le problème intérieur de Schwarzschild. D'autre part, pour la solution de ce problème, nous nous trouvons dans un cas exceptionnel, ou u_i est partout nul sur la variété portant les données.

Ce fait ne doit pas nous surprendre. Un champ extérieur donné peut ne pas correspondre à une distribution réelle de masses, mais s'il correspond à une distribution, il doit en exister une infinité d'autres produisant le même champ extérieur.

Ce deuxième pas vers la solution (qui peut être impossible ou indéterminée) du problème intérieur sera généralement assez difficile. Il nous paraît pourtant tout à fait nécessaire. Schwarzschild qui s'était posé immédiatement la question a donné la solution intérieure du problème du corps unique très peu de temps après la solution du problème extérieur.

Tant qu'on n'a pas construit une distribution matérielle capable, si l'on peut dire, de projeter le champ extérieur, ou qu'on n'a pas démontré l'existence de cette distribution, la solution reste physiquement imparfaite. Elle peut ne correspondre, étant donnée la difficulté de l'intuition en pareille matière, à aucune réalité physique.

CHAPITRE VI.

LES SOLUTIONS OBTENUES DEPUIS DROSTE ET SCHWARZSCHILD.

1. Dans la théorie de la gravitation newtonienne, les grandeurs du champ extérieur se déduisent de la distribution supposée connue des masses. Dans la théorie d'Einstein, la chose peut également se faire d'une façon approchée, comme Einstein lui-même l'a montré. Peut-être pourrait-on y arriver, de façon plus complète, à l'aide d'approximations successives.

Mais le traitement direct et rigoureux des équations non simplifiées étant très difficile n'a été fait d'abord que dans les cas les plus simples, en commençant toujours, nous l'avons vu, par le champ extérieur.

2. **Cas d'une seule masse.** — La solution rigoureuse, supposée stationnaire et à symétrie sphérique, a été obtenue par Droste [8] et Schwarzschild [9]. Le problème intérieur, traité par Schwarzschild, a provoqué ensuite de nombreux travaux.

C'est jusqu'ici la seule question traitée à fond. Disons que c'est le problème du corps unique.

Le problème des deux corps reste, dit Eddington, comme un défi aux mathématiciens. Mais des progrès qui nous paraissent substantiels, et dont l'intérêt mathématique est vif, ont pourtant été réalisés.

3. Dans des recherches d'une extrême importance pour la géométrie et la physique, T. Levi-Civita [18 et 19] a étudié la structure et l'intégration des équations d'Einstein, plus spécialement dans le cas stationnaire, où le champ ne dépend pas du temps.

La méthode générale a été en effet de chercher à circonscrire, parmi les solutions *a priori* possibles, une famille jouissant de propriétés géométriques suggérées par des réalités simples.

Les ds^2 stationnaires comprennent la solution de Schwarzschild. Levi-Civita a obtenu des résultats extrêmement importants sur la classification des solutions [18, *ds^2 einsteniani in ciampi newtoniani*].

De son côté, Weyl avait considéré *a priori* une généralisation possible du champ de Schwarzschild, celui du champ statique à symétrie axiale.

Les résultats de Weyl sont brièvement exposés dans les *Annalen der Physik* [21, p. 117-145], puis dans son ouvrage [20].

Ils furent complétés, dans le cas extérieur, que Weyl n'avait pas isolé du cas intérieur, par Levi-Civita. Le cas envisagé par Weyl n'est en effet qu'un cas particulier des recherches de Levi-Civita, mais d'une remarquable élégance et d'une importance exceptionnelle. Weyl lui-même ajouta quelque chose à ses résultats [22].

De nombreux et importants travaux ont suivi, soit en Italie, soit en Allemagne, soit en France.

4. **La symétrie axiale.** — Considérons un axe, les plans passant par cet axe sont repérés par un angle φ, un point du plan est repéré par deux coordonnées x_3, x_4. Nous poserons

$$\varphi = x_2, \qquad t = x_1.$$

Nous chercherons un champ admettant cet axe comme axe de révolution, c'est-à-dire que les g_{ik} ne dépendront pas de φ, et qui soit d'autre part stationnaire. On aura, en adoptant des notations convenables [Chazy, 26],

$$ds^2 = a^2 dt^2 + b^2 d\varphi^2 + c^2[dx^2 + dy^2]; \tag{62}$$

par une transformation toujours possible on a donné au ds^2 d'un méridien la forme isotherme $c^2(dx^2 + dy^2)$. Nous écrirons seulement les équations les plus importantes :

$$R_{11} = \frac{a}{c^2}\left[\Delta_2(a) - \frac{1}{b}\Delta(a, b)\right], \tag{63}$$

$$R_{22} = \frac{b}{c^2}\left[\Delta_2(b) + \frac{1}{a}\Delta(a, b)\right], \tag{64}$$

$$\Delta_2(a) = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2}, \qquad \Delta(a, b) = \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial y}.$$

On en tire

$$g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} = \frac{1}{abc^2}\Delta_2(ab). \tag{64'}$$

Par conséquent, *dans tout champ extérieur à symétrie axiale*, *le produit ab est une fonction harmonique* des variables x et y. Adoptons comme nouvelles variables isothermes conjuguées

$$r = \frac{ab}{i} \qquad \text{et} \qquad z$$

et posant

$$a^2 = e^{2\psi}, \qquad b^2 = -r^2 e^{-2\psi}, \qquad c^2 = -e^{-2\psi} e^{2\gamma},$$

les équations (63) et (64) se réduisent à une seule équation en ψ; en ajoutant les équations qui restent, on a

$$ds^2 = e^{2\psi} dt^2 - e^{-2\psi}[r^2 d\varphi^2 + e^{2\gamma}[dr^2 + dz^2]], \tag{65}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \tag{66}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial r} = r\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2\right], \tag{67}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} = 2r \frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial z}, \tag{68}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 = 0. \tag{69}$$

La forme (65) est dite la forme canonique du ds^2 extérieur à symétrie axiale.

Si l'on forme la différentielle $d\gamma$, on constate que (66) est sa condition d'intégrabilité.

D'autre part, (69) est une identité en vertu des précédentes équations. Tout dépend donc de (66) dont l'interprétation physique est importante :

Considérons l'espace euclidien auxiliaire (sans rapport nécessaire avec l'espace physique du problème) aux coordonnées cylindriques r, φ, z. (66) est l'équation de Laplace pour un potentiel ψ indépendant de φ.

C'est ce que Levi-Civita appelle un potentiel symétrique et l'on a la proposition élégante :

A tout potentiel symétrique, on fait correspondre par une quadrature de différentielle totale un ds^2 extérieur d'Einstein à symétrie axiale.

5. Si l'on change de variables, en prenant avec Chazy

$$x_3 = r + iz \qquad \text{et} \qquad x_4 = r - iz,$$

on constate que l'équation (66) devient

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3 \partial x_4} - \frac{1}{2(x_3 - x_4)}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi}{\partial x_4}\right) = 0$$

et les résultats du Chapitre II (§ 11) sont obtenus.

6. Revenons à la symétrie axiale. H. Weyl [21, p. 140] a montré quelle solution ψ on devait choisir pour retrouver le ds^2 de Schwarzschild. La signification physique de ψ est très importante. Considérons, dans le plan des rz, une distribution homogène sur une barre rectiligne s'étendant entre $-a$ et a sur l'axe Oz. A l'aide de cette distribution fictive, conçue dans l'espace auxiliaire, construisons un potentiel symétrique ψ. Nous adopterons pour cela les coordonnées elliptiques spéciales définies par la transformation conforme

$$r + iz = a\,\mathrm{sh}(\alpha + i\beta). \tag{70}$$

Pour éviter toute confusion, et permettre une comparaison immédiate avec le travail de Chazy, adoptons ici

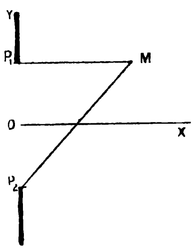
$$X + iY \text{ au lieu de } r + iz$$

et

$$x + iy \text{ au lieu de } \alpha + i\beta.$$

Dans ces conditions, nous avons

$$r_1 = \mathrm{MP}_1 = a(\mathrm{ch}\,x - \sin y),$$
$$r_2 = \mathrm{MP}_2 = a(\mathrm{ch}\,x + \sin y).$$



Le potentiel est de la forme

$$\psi = \frac{k}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{r_1 + r_2 - 2a}{r_1 + r_2 + 2a} = k\,\mathrm{Log\,th}\,\frac{x}{2}, \tag{71}$$

la constante k étant proportionnelle à la densité.

On trouve, par l'intégration de la différentielle $d\gamma$,

$$(72)\quad \gamma = \frac{k^2}{2}\operatorname{Log}\frac{(r_1+r_2-2a)(r_1+r_2+2a)}{4r_1r_2} = \frac{k^2}{2}\operatorname{Log}\frac{\operatorname{sh}^2x}{\operatorname{ch}^2x-\sin^2y} = \frac{k^2}{2}\operatorname{Log}\frac{\operatorname{sh}^2x}{\operatorname{sh}^2x+\cos^2y},$$

$$(73)\quad ds^2 = \operatorname{th}^{2k}\frac{x}{2}\,dt^2 - a^2\,\frac{\operatorname{sh}^2x+\cos^2y}{\operatorname{th}^{2k}\frac{x}{2}}\left(\frac{\operatorname{sh}^2x}{\operatorname{sh}^2x+\cos^2y}\right)^{k^2}(dx^2+dy^2) - \frac{a^2\operatorname{sh}^2x}{\operatorname{th}^{2k}\frac{x}{2}}\cos^2y\,d\varphi^2.$$

Un tel ds^2 est singulier pour $x=0$. Pour la valeur $k=1$, seul le coefficient de dt^2 s'annule, ce qui correspond à la singularité du discriminant nul. On trouve pour cette valeur

$$(74)\qquad ds^2 = \operatorname{th}^2\frac{x}{2}\,dt^2 - 4a^2\operatorname{ch}^4\frac{x}{2}\,[\,dx^2+dy^2+\cos^2y\,d\varphi^2\,].$$

Si l'on pose enfin

$$\rho = 2a\operatorname{ch}^2\frac{x}{2},$$

on obtient

$$(75)\qquad ds^2 = \left(1-\frac{2a}{\rho}\right)dt^2 - \frac{d\rho^2}{1-\frac{2a}{\rho}} - \rho^2[\,dy^2+\cos^2y\,d\varphi^2\,].$$

C'est la forme classique du ds^2 de Schwarzschild. La quantité a, rayon gravitationnel de la masse qui produit le champ, est donc en relation directe avec la masse fictive de l'espace euclidien auxiliaire.

7. Il est évident que, cette solution une fois obtenue, on peut, dans l'espace $r\varphi z$, construire d'une infinité de manières une distribution de masses donnant à distance le même potentiel extérieur ψ. Cette distribution fictive redonnera la solution de Schwarzschild.

8. **Le problème statique des deux corps.** — Le problème statique du corps unique se trouvant résolu par cette méthode, il était naturel de chercher dans la même voie la solution du problème statique des deux corps. Mais on peut faire à l'avance une objection, valable d'ailleurs pour tous les champs stationnaires à plusieurs masses. Une distribution de masses ne peut, sans l'intervention de forces exté-

rieures, demeurer en équilibre au cours du temps. Il semble donc que ces recherches ne doivent donner aucune lumière sur le véritable problème de la gravitation. Des objections analogues, en mécanique classique, ont été présentées par Lagrange [Chazy, 26] qui disait déjà, à propos du problème du mouvement du point matériel dans le champ newtonien de deux masses fixes : « Quoique ce problème ne puisse avoir aucune application au système du monde, où tous les centres d'attraction sont en mouvement, il est néanmoins assez intéressant du côté analytique pour mériter d'être traité en particulier avec quelque détail. »

Ces raisons conservent leur force dans le présent problème, et comme le dit Chazy, il est permis de le considérer comme un exercice d'analyse sur l'intégration des équations différentielles d'Einstein.

Mais il nous semble que ce problème a plus d'intérêt physique dans la théorie de la relativité que dans la théorie classique.

En effet, puisqu'il n'y a pas de sens physique à considérer deux masses immobiles l'une par rapport à l'autre, puisque d'autre part la théorie de la relativité vise à faire naître, si l'on peut dire, les forces de gravitation du champ lui-même, il est intéressant de voir comment ces forces de gravitation sont équilibrées par certaines liaisons à découvrir, pour permettre aux deux masses de ne pas graviter. Pris par cette autre face, le problème statique des deux corps reconquiert sa place comme problème de physique réelle. Nous verrons l'intérêt des résultats obtenus par Weyl dans cette voie.

Les recherches relatives au problème statique des deux corps sont nombreuses. Malgré leur apparente diversité, la méthode est tout à fait la même, et cette unité un peu cachée de la méthode permet de comparer aisément les résultats. Nous nous aiderons ici d'intéressantes remarques de P. Straneo [27].

9. Considérons dans le même plan des XY, non plus une mais deux barres rectilignes homogènes, dirigées suivant OY. Les coefficients de densité seront k et k_1.

Soient 12 et 34 les extrémités des barres, $2a$, $2a_1$ leurs longueurs, d la distance des points 2 et 3.

On a pour le potentiel total

$$\psi = \frac{k}{2}\log\psi_{12} + \frac{k'}{2}\log\psi_3 \tag{76}$$

Les valeurs de ψ_{12}, ψ_{34} sont connues. L'intégration de la différentielle totale exacte $d\gamma$ s'obtient de la manière suivante. On trouve d'abord deux termes :

$$\gamma_1 = \frac{k^2}{2} \log \frac{(r_1 + r_2)^2 - 4a^2}{4 r_1 r_2}, \tag{77}$$

$$\gamma_2 = \frac{k_1^2}{2} \log \frac{(r_3 + r_4)^2 - 4a_1^2}{4 r_3 r_4}. \tag{78}$$

Le terme mixte en kk_1 résulte d'un calcul direct. On trouve

$$\gamma_{12} = kk_1 \log \left[\frac{a r_4 - (a_1 + d) r_1 - (a + a_1 + d) r^2}{a r_3 - d r_1 - (a + d) r_2} \, \frac{d}{a_1 + d} \right]. \tag{79}$$

Les constantes sont déterminées de manière qu'à l'infini $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_{12}$ s'annulent, le ds^2 (65) prenant alors la forme de Minkowski.

La fonction

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_{12}$$

s'annule sur les parties de l'axe OY qui vont des points 1 et 4 à l'infini, elle augmente indéfiniment si l'on s'approche, soit du segment 12, soit du segment 34.

Enfin, pour le segment libre 23 de OY, γ_1 et γ_2 s'annulent, γ_{12} ne s'annulant pas, on a

$$\gamma = kk_1 \log \frac{d(a + a_1 + d)}{(a + d)(a_1 + d)}. \tag{80}$$

10. Cette solution a été obtenue d'abord, et sous cette forme, par Bach [24]. Elle contient de nombreuses constantes, alors qu'on doit normalement espérer trouver une solution à trois constantes, les valeurs des masses et l'écartement.

Nous avons vu que, pour obtenir la solution de Schwarzschild, on doit faire $k = 1$.

Supposons que nous rapprochions l'une de l'autre les deux barres jusqu'au contact. Il est naturel de penser, bien que ce ne soit pas absolument nécessaire, que nous juxtaposons les deux masses, produisant ainsi une masse unique. Si cette masse unique doit produire un champ de Schwarzschild, il faut que la barre unique soit à coefficient de densité constant, égal à l'unité. On doit donc avoir

$$k = k_1 = 1.$$

Si l'on admet cette manière de raisonner, les quantités a, a_1 sont les rayons gravitationnels des deux masses, et leur juxtaposition donne la masse unique $a+a_1$. Ce résultat est satisfaisant. D'autre part, il est évident que si une des masses est éloignée, le champ devient voisin d'un champ de Schwarzschild. Si l'une des masses tend vers zéro, le champ tend vers le champ de Schwarzschild de l'autre. Cette solution paraît pouvoir convenir. Elle contient trois paramètres a, a_1, d. Elle a été retrouvée sous la forme donnée par Bach, dans les recherches intéressantes à divers titres de P. Straneo [27].

11. **La solution de Palatini** [25]. — Les recherches de Palatini, directement inspirées par les travaux de Levi-Civita, conduisent aux mêmes résultats sous une forme analytique différente. Pour construire le potentiel symétrique, Palatini se sert de couches ellipsoïdales de révolution [équivalentes d'ailleurs aux distributions rectilignes]. Il opère en coordonnées elliptiques ordinaires. Les résultats se développent parallèlement à ceux que nous venons de signaler. On remarquera qu'il introduit, au lieu de la quantité d, la distance $2a$ milieux des segments [centres des ellipsoïdes].

12. **La solution de Chazy** [26]. — Développée par des moyens purement analytiques, conduisant d'ailleurs aux calculs les plus simples et les plus élégants, la méthode de Chazy est tout à fait équivalente à celles que nous venons de considérer. Appelons c (dans notre plan XY) la distance des centres des segments. Nous sommes amenés à considérer simultanément les coordonnées elliptiques xy, x_1y_1 relatives aux deux segments. Nous poserons donc

$$\left\{\begin{aligned} X + iY &= a\,\mathrm{sh}(x + iy), \\ X + i(Y + c) &= a_1\,\mathrm{sh}(x_1 + iy_1); \end{aligned}\right. \tag{81}$$

$$\psi = k \log \mathrm{th}\frac{x}{2} + k_1 \log \mathrm{th}\frac{x_1}{2}. \tag{82}$$

Si nous faisons $a = a_1$, nous trouvons les formules mêmes de Chazy. Sa méthode consiste donc au fond à utiliser deux segments de densité inégale, mais de même longueur et à prendre le potentiel total. Chazy pose avec raison comme condition essentielle que le ds^2 qu'il obtient ainsi tende vers le ds^2 de Schwarzschild quand les deux masses viennent se confondre. Il trouve ainsi la condition

$$k + k_1 = 1 \tag{83}$$

dont la signification est évidente et que nous obtiendrons sans calcul [STRANEO, 27].

Si l'on admet que les masses se confondent quand le paramètre c tend vers zéro, les deux segments de longueur égale se superposent en un seul segment de longueur a, de densité $k + k_1$. Il faut donc, pour retrouver le ds^2 à symétrie sphérique, la condition (83).

13. On voit que le ds^2 de Bach-Palatini et celui de Chazy n'ont une forme différente que par la différence d'interprétation donnée à la superposition des deux masses. On trouvera, dans le mémoire de Chazy, le ds^2 général :

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & \mathrm{th}^{2k}\frac{x}{2}\,\mathrm{th}^{2k_1}\frac{x_1}{2}\,dt^2 - a^2\,\frac{\mathrm{sh}^2 x\cos^2 y}{\mathrm{th}^{2k}\frac{x}{2}\,\mathrm{th}^{2k_1}\frac{x_1}{2}}\,dx^2 \\ & - a^2(dx^2 + dy^2)\,\frac{\mathrm{sh}^2 x + \cos^2 y}{\mathrm{th}^{2k}\frac{x}{2}\,\mathrm{th}^{2k_1}\frac{x_1}{2}} \\ & \times\left(\frac{\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x - \cos^2 y}\right)^{k^2}\left(\frac{\mathrm{sh}^2 x_1}{\mathrm{sh}^2 x_1 + \cos^2 y}\right)^{k_1^2}\left(\frac{2}{1+\mathrm{L}}\right)^{2kk_1}; \end{aligned} \tag{84}$$

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{L} &= \frac{2aa_1(\mathrm{M} - \mathrm{N})}{[(a+a_1)^2 - c^2]\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,x_1}, \\ \mathrm{M} &= \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,x_1\cos y\cos y_1 + \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,x_1\sin y\sin y_1, \\ \mathrm{N} &= \cos y\cos y_1 - \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,x_1, \end{aligned}\right. \tag{85}$$

qui résulte de l'introduction des notations (81) dans les formules (76), (77), (78), (79).

Si l'on fait $k = k_1 = 1$, on trouve ls ds^2 de Bach-Palatini.

Si l'on fait $a = a_1$ $k + k_1 = 1$, on trouve le ds^2 de Chazy.

On voit bien que si, au lieu de faire tendre c vers zéro, on faisait tendre vers zéro $a + a_1 - c$, on trouverait, la chose est évidente géométriquement, le ds^2 à symétrie sphérique.

14. Le mémoire de Bach [24] est accompagné de développements extrêmement intéressants dus à Weyl et qui se rattachent aux remarques du paragraphe 8 de ce Chapitre.

Revenons donc au problème complet. Ne supposons plus nul le tenseur d'énergie. Remarquons alors que la condition (64') n'a été obtenue que pour un ds^2 extérieur. Ainsi, la forme canonique (65) ne sera pas valable en général. Bornons-nous au cas spécial où elle est conservée. On voit immédiatement que la combinaison nulle

$$g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22}$$

donne pour le tenseur matériel la condition invariante

$$T_{33} + T_{44} = 0 \qquad [t = x_1, \ \varphi = x_2, \ z = x_3, \ r = x_4]. \tag{86}$$

La forme du ds^2 entraîne en somme pour le tableau des composantes de T_{ik} la forme

$$\begin{vmatrix} T_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} & T_{34} \\ 0 & 0 & T_{43} & T_{44} \end{vmatrix},$$

avec la condition (86). Nous avons repris les notations finales du paragraphe 4.

Posons alors, avec Weyl,

$$\mathfrak{T}_i^k = \sqrt{-g}\, T_i^k.$$

$$\mathfrak{T}_1^1 = r(\rho + \rho'), \qquad \mathfrak{T}_2^2 = r\rho', \qquad \mathfrak{T} = r(\rho + 2\rho').$$

Les équations du problème intérieur deviennent

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\rho}{2}, \tag{87}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial^2 z} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 = -\rho', \tag{88}$$

$$\mathfrak{T}_3^3 = -\mathfrak{T}_4^4 = \frac{\partial \gamma}{\partial r} - r\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2\right], \tag{89}$$

$$-\mathfrak{T}_3^4 = -\mathfrak{T}_4^3 = \frac{\partial \gamma}{\partial z} - 2r\frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial z}. \tag{90}$$

Dans l'espace physique, nous devons concevoir deux masses isolées à symétrie axiale, maintenues au repos par un système convenable de tensions réparties dans un domaine qui les entoure toutes deux.

Dans l'espace auxiliaire, nous obtenons donc deux régions correspondant aux masses, où ρ, ρ', ... sont différents de zéro; une région entourant ces deux là où ρ, ρ' seraient nuls sans que les T aux indices 3 et 4 le soient nécessairement.

Soit alors D le domaine entourant les deux masses. En dehors de ce domaine, ρ, ρ', $\mathfrak{T}_i^k$ sont nuls. ψ est harmonique. γ a une valeur γ' bien déterminée, et que nous avons calculée.

A l'intérieur de D, mais en dehors des masses, nous pouvons conserver ψ, mais non γ. Celle-ci sera prolongée d'une façon très largement arbitraire, en respectant la continuité nécessaire et annulant γ sur l'axe Oz. Soit γ cette fonction, on aura

$$(91)\qquad \begin{cases} \mathfrak{T}_3^3 = -\mathfrak{T}_4^4 = \dfrac{\partial}{\partial r}(\gamma-\gamma'), \\ \mathfrak{T}_3^4 = \mathfrak{T}_4^3 = -\dfrac{\partial}{\partial z}(\gamma-\gamma'). \end{cases}$$

Considérons une surface fermée entourant une seule masse, coupant l'axe Oz entre les masses au point B, en dehors des masses au point A.

Nous définirons la force agissante entre les deux corps et suivant l'axe Oz, comme le flux des tensions :

$$2\pi\int_C \mathfrak{T}_3^4\,dz - \mathfrak{T}_3^3\,dr,$$

C étant la section de la surface par le demi-plan des rz. On voit que cette quantité n'est autre que

$$2\pi(\gamma'-\gamma)_A^B,$$

γ est nul sur l'axe. γ' nul en A n'est pas nul en B. De sorte que la valeur de la force est proportionnelle à

$$\log\frac{d(a+a_1+d)}{(a+d)(a_1+d)} = \log\left(1-\frac{aa_1}{(a+d)(a_1+d)}\right).$$

Supposons que les masses gravitationnelles soient petites devant d. Cette expression est très voisine de

$$\frac{aa_1}{d^2}.$$

15. Ce dernier résultat (on en trouvera d'autres dans le mémoire cité) est d'un très grand intérêt.

En effet, la loi de Newton est employée constamment en théorie de la relativité, comme première approximation. Cet emploi ne pouvait être considéré comme justifié (il l'était d'ailleurs dans un champ quelconque) que pour le mouvement d'un point matériel mais non pour une masse attirée d'un ordre de grandeur analogue à celui de la masse attirante.

Il est démontré maintenant que :

Il est possible, dans la théorie de la relativité générale, de balancer les forces de gravitation et de maintenir en présence deux corps immobiles, à symétrie axiale, par un système de tensions dont l'effet global, sur l'un quelconque des corps, soit une attraction donnée approximativement par la loi de Newton.

16. Toutefois, cette solution [*voir* WEYL, 24], si élégante et satisfaisante qu'elle soit, ne peut être considérée que comme une contribution encourageante au problème réel des deux corps.

La théorie se montre capable de comprendre plus qu'elle ne l'avait fait les résultats de l'expérience.

Mais le véritable problème du mouvement libre de deux masses, exigeant par conséquent un ds^2 à deux tubes massiques, n'est nullement résolu. Même pour le problème de deux masses égales, tournant circulairement autour du centre de gravité, on ne sait encore rien.

Résumé et conclusion. — Le problème de la gravitation est de décrire et d'expliquer ce fait expérimental :

Il existe une interdépendance des mouvements libres des masses matérielles.

La conception qu'Einstein propose de substituer à celle de Newton, au lieu de lier les masses entre elles par des forces, les relie par la communauté du champ dans lequel elles sont toutes deux intégrées.

Les tubes d'univers qui décrivent le mouvement des masses matérielles baignent, si l'on peut dire, dans le même champ, et c'est lui qui crée leur interdépendance.

Mais pour y parvenir, il faut d'abord préciser la façon dont le tube d'univers se raccorde à l'extérieur, la dépendance de la masse et du champ. Le raccord nécessaire est fait par les conditions de Schwarzschild.

C'est là qu'on trouve la justification la meilleure du principe des géodésiques, qui décrit la manière dont une masse infiniment petite se comporte dans un champ.

En effet, nous avons vu [Chap. V, § 4] que, si l'on tient compte seulement de l'énergie pondérable, ce qui s'impose pour un très petit grain de matière, le petit tube d'univers de la particule doit nécessairement être engendré par des géodésiques.

Ce n'est pas autre chose que le célèbre énoncé d'Einstein. La démonstration que nous en donnons n'est d'ailleurs, au fond, pas différente de celle des traités classiques [20 ou 23].

Mais, ainsi présentée, cette loi élémentaire de la gravitation est bien la conséquence du fait que la masse fait partie du champ. C'est en somme pour engrener son champ propre sur le champ extérieur que la petite masse doit en décrire une géodésique. C'est parce que ce raccord se fait, pour une masse infiniment petite, avec un champ infiniment peu différent du champ primitif, que l'énoncé est satisfaisant.

On voit bien, par la loi élémentaire de la gravitation, de quelle nature est cette interdépendance des tubes d'univers qui constitue la loi générale de la gravitation, dans le système de concepts de la relativité généralisée.

Mais cette vue si intéressante n'a pu jusqu'ici être confrontée avec l'expérience que sous sa forme élémentaire, où elle a d'ailleurs donné de beaux résultats [CROZE, *Revue générale des Sciences*, juillet 1926].

Quant au problème des deux corps, dont les considérations de ce fascicule ont peut-être un peu précisé la position, il reste à peu près inattaqué.

Note. — On comparera les idées développées dans ce fascicule aux considérations dues à Einstein et Grommer [28] et publiées après la composition de ce Mémoire. Dans ce court et très important travail, la loi du mouvement de la matière apparait liee de la manière la plus étroite aux singularités du ds^2 extérieur.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. A. EINSTEIN. — Die Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie (*Ann. Physik*, t. 49, 1916; réimpression Lorentz-Einstein-Minkowski; Teubner, 1920).

2. A. Einstein. — Quatre conférences sur la théorie de la relativité faites à l'Université de Princeton (trad. M. Solovine; Gauthier-Villars, 1925).
3. J. Hadamard. — Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique (Hermann, 1903).
4. J. Hadamard. — Lectures on Cauchy's problems in linear partial differential equations (Yale University Press, 1923).
5 G. Darboux. — Leçons sur la théorie générale des surfaces (2e Partie, 2e édition, Gauthier-Villars, 1915; 3e Partie, Gauthier-Villars, 1894).
6. E. Cartan. — La géométrie des espaces de Riemann (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. IX; Gauthier-Villars, 1925).
7. D. J. Struik. — Grundzüge der Mehrdimensionalen Differentialgeometrie in direkter Darstellung (J. Springer, 1922).
8. J. Droste. — On the field of a single centra in Einstein's theory of gravitation (*Proc. Ak. Sc. Amsterdam*, t. 17, 1915).
9. K. Schwarzschild. — Ueber das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie (*Sitzungs. Ak. Berlin*, 1916, p. 189-196).
10. K. Schwarzschild. — Ueber das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie (*Sitzungsb. Ak. Berlin,* 1916, p. 424-434).
11. De Donder. — Introduction à la Gravifique einsteinienne (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. VIII; Gauthier-Villars, 1925).
12. De Donder. — Théorie des champs gravifiques (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. XIV; Gauthier-Villars, 1925).
13. Vessiot. — Sur la propagation par ondes et la théorie de la relativité générale (*C. R. Acad. Sc. Paris*, 1918, p. 349-351).
14. G. D. Birkhoff et R. E. Langer. — Relativity and Modern Physics (Cambridge, Harvard University Press, 1923).
15. K. Lanczos. — Ein vereinfachendes Koordinatensystem für die Einsteinschen Gravitationsgleichungen (*Phys. Zeitschrift*, 1922, p. 537)
16. L. P. Eisenhart. — Transactions of the American Mathematical Society, 1924, p. 206.
17. T. Levi-Civita. — Statica einsteiniana (*Rendiconti Ac. Lincei*, 1917).
18. T. Levi-Civita. — ds^2 einsteiniani in Campi Newtoniani (*Ibid.*, 1917-1918).
19. T. Levi-Civita. — Soluzioni banarie di Weyl (*Ibid.*, 1919, p. 3-13); — L'analogo del potenziale logaritmico (*Ibid.*, 1919, p. 101-109).
20. H. Weyl. — Temps, espace, matière (trad Juvet-Leroy; A. Blanchard. 1923).
21. H. Weyl. — Zur Gravitationstheorie (*Ann. Physik*, 1917, p. 117-145).
22. H. Weyl. — Bemerkung über die axialsymmerischen Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen (*Ann. Physik*, 1919, p. 185-188).
23. Eddington. — The mathematical theory of relativity (Cambridge, University Press, 1923).
24. Bach. — Explizite Aufstellung statischer axialsymmetrischen Felder. Mit einem Zusatz über das Statische Zweikörperproblem von H. Weyl (*Mathematische Zeitschrift*, 1922, p. 134-145).

25. A. PALATINI. — Sopra i potenziali simmetrici che conducono alle soluzioni longitudinale delle equazioni gravitazionale di Einstein (*Rend. Ac. Lincei*, 1923, fasc. 6, p. 263-267).

26. J. CHAZY. — Sur le champ de gravitation de deux masses fixes dans la théorie de la relativité (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1924, p. 17-38).

27. P. STRANEO. — *Rendic. Ac. Lincei*, fasc. 10, 11. 12; 2e semestre 1924.

28. A. EINSTEIN et J. GROMMER. — Allgemeine Relativitätstheorie und Bewegungsgesetz (*Sitzungs. Ak. Berlin*, 1927, p. 2 à 13).

TABLE DES MATIÈRES.