THÉOPHILE DE DONDER

Théorie des champs gravifiques

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 14 (1926)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1926__14__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), ETC.
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT
Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,
Professeur à l'Université de Strasbourg.

FASCICULE XIV.

Théorie des Champs gravifiques

PAR M. TH. DE DONDER
Professeur à l'Université libre de Bruxelles,
Membre de l'Académie royale de Belgique.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET C^ie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1926

THÉORIE

DES

CHAMPS GRAVIFIQUES

Par M. Th. De DONDER,

Professeur à l'Université libre de Bruxelles,
Membre de l'Académie royale de Belgique.

PRÉFACE.

Dans cette seconde partie de notre nouvel exposé synthétique de la Relativité einsteinienne, nous étudions d'abord les champs gravifiques dans toute leur généralité. Nous en déduisons ensuite les cas particuliers les plus importants : les champs massiques, les champs électromagnétiques, les champs massiques et électromagnétiques. Ces champs permettent de trouver, d'une manière systématique, les propriétés fondamentales du champ newtonien, du champ de Maxwell-Lorentz et de l'électrodynamique des corps en mouvement.

La marche suivie est toujours la même : la dérivation variationnelle fournit les dix équations aux dérivées partielles du champ gravifique considéré. Puis les quatre identités fondamentales de la Gravifique, combinées à ces dix équations, nous donnent le théorème du tenseur phénoménal; celui-ci s'exprime par des équations qui généralisent les équations de la dynamique et de la conservation de l'énergie; en sommant convenablement ces équations, on obtient la généralisation de l'équation de continuité.

Pour plus de brièveté, nous n'avons pas reproduit ici certains calculs fort longs, mais élémentaires; nous avons eu soin d'indiquer les recueils où on pourra les trouver. Nous engageons vivement le lecteur à ne s'arrêter à ces calculs qu'après une première vue d'ensemble sur la vaste et puissante conception einsteinienne.

CHAPITRE I.

LES ÉQUATIONS FONDAMENTALES DU CHAMP GRAVIFIQUE.

1. La dérivée variationnelle. — Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots$ des fonctions *quelconques* de $x_1, \ldots, x_4$. Représentons les dérivées d'une de ces fonctions ξ_a, par rapport à x_k, par le symbole $\xi_{a,k}$. De même $\xi_{a,kl}$ sera la dérivée seconde de ξ_a par rapport à x_k et à x_l.

Considérons une fonction *quelconque* $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{1,1}, \ldots)$ de ces fonctions ξ_a et de leurs dérivées successives $\xi_{a,k}$, etc. Pour simplifier, nous désignerons la fonction $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{1,1}, \ldots)$ par le symbole $F(\xi_a, \xi_{a,k}, \ldots)$ ou, encore plus simplement, par F.

Prenons la différentielle de F, c'est-à-dire écrivons

$$(1)\qquad dF \equiv \sum_a \left[\frac{\partial F}{\partial \xi_a} d\xi_a + \sum_k \frac{\partial F}{\partial \xi_{a,k}} d\xi_{a,k} + \sum_k \sum_l \frac{\partial F}{\partial \xi_{a,kl}} d\xi_{a,kl} + \ldots \right],$$

ou, en permutant les opérations d et $\frac{\partial}{\partial x_k}$,

$$dF \equiv \sum_a \left[\frac{\partial F}{\partial \xi_a} d\xi_a + \sum_k \frac{\partial F}{\partial \xi_{a,k}} \frac{\partial (d\xi_a)}{\partial x_k} + \sum_k \sum_l \frac{\partial F}{\partial \xi_{a,kl}} \frac{\partial (d\xi_{a,l})}{\partial x_k} + \ldots \right].$$

En intégrant par partie, cette expression peut se mettre sous la forme

$$dF \equiv \sum_a \Bigg\{ \frac{\partial F}{\partial \xi_a} d\xi_a + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_{a,k}} d\xi_a \right) - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_{a,k}} \right) d\xi_a$$
$$+ \sum_k \sum_l \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_{a,kl}} d\xi_{a,l} \right) + \sum_k \sum_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_{a,kl}} \right) d\xi_a$$
$$- \sum_k \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_{a,kl}} \right) d\xi_a \right] + \ldots \Bigg\},$$

ou encore

$$(2)\qquad dF \equiv \sum_a \left[\frac{\partial F}{\partial \xi_a} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_{a,k}} \right) + \sum_k \sum_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_{a,kl}} \right) - \ldots \right] d\xi_a$$
$$+ \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial \xi_{a,k}} - \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_{a,kl}} \right) \right\} d\xi_a + \sum_l \frac{\partial F}{\partial \xi_{a,kl}} d\xi_{a,l} - \ldots \right].$$

Posons

$$(3)\qquad \boxed{\frac{\delta F}{\delta \xi_c} = \frac{\partial F}{\partial \xi_c} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_{c,j}} \right) + \sum_j \sum_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_{c,jk}} \right) - \ldots .}$$

Cette opération est désignée sous le nom de *dérivée variationnelle* de F par rapport à ξ_c. Elle jouit de propriétés remarquables.

THÉORÈME. — *La dérivée variationnelle par rapport à ξ_c, de la dérivée partielle*

$$(4)\qquad \frac{\partial F}{\partial x_i} \equiv \sum_a \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_a} \xi_{a,i} + \sum_k \frac{\partial F}{\partial \xi_{a,k}} \xi_{a,ik} + \ldots \right),$$

est identiquement nulle.

Démonstration. — On a, en effet,

$$\frac{\delta}{\delta \xi_c}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) \equiv \sum_a \sum_k \sum_j \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_a \, \partial \xi_c} \xi_{a,i} + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_{a,k} \, \partial \xi_c} \xi_{a,ki} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi_c} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_a \, \partial \xi_{c,j}} \xi_{a,i} + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_{a,k} \, \partial \xi_{c,j}} \xi_{a,ki} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_j \, \partial x_k}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi_{c,k}} \varepsilon_{ij} \right) + \ldots \right].$$

Rappelons que $\varepsilon_{ij} \equiv 0$ si $i \neq j$ et $\varepsilon_{ii} \equiv 1$ si $i = j$.

En effectuant les calculs, on verra que les termes s'entre-détruisent; d'où les identités

$$(5)\qquad \boxed{\frac{\delta}{\delta \xi_c}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) \equiv 0.}$$

2. Les équations fondamentales du champ gravifique. — Considérons maintenant une fonction ne dépendant que des $g^{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta,i}$, ... Sa variance par rapport à un changement quelconque de variables x_1, x_2, x_3, x_4 est celle d'un multiplicateur [1] ou facteur de densité. Nous appellons $\mathfrak{M}^g$ la *fonction caractéristique gravifique*.

Considérons, en outre, une fonction $\mathfrak{M}$, de même variance, mais qui peut dépendre, indépendamment des $g^{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta,i}$, ..., d'autres fonctions telles u^α, $\left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \gamma \end{matrix} \right\}$, A_α, etc. définies précédemment. Cette fonction sera explicitée dans les deux Chapitres suivants; elle sera désignée sous le nom de *fonction caractéristique phénoménale*.

---

[1] Explicitement, on aura

$$\mathfrak{M}^g = \mathfrak{M}^g(g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,i}, g_{\alpha\beta,ij}, \ldots) \equiv \mathfrak{M}^g(g'_{\alpha\beta}, g'_{\alpha\beta,i}, g'_{\alpha\beta,ij}, \ldots) \frac{\partial(x')}{\partial(x)} \equiv \mathfrak{M}'^g \frac{\partial(x')}{\partial(x)}$$

$$\alpha, \beta, i, j, \ldots = 1, 2, 3, 4.$$

Prenons, par rapport à $g^{\alpha\beta}$, la dérivée variationnelle de la somme

$$\mathfrak{M}^g + \mathfrak{M}. \tag{6}$$

On aura donc

$$\frac{\delta(\mathfrak{M}^g+\mathfrak{M})}{\delta g^{\alpha\beta}} \equiv \frac{\partial(\mathfrak{M}^g+\mathfrak{M})}{\partial g^{\alpha\beta}} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial(\mathfrak{M}^g+\mathfrak{M})}{\partial g^{\alpha\beta,j}}\right) + \sum_j\sum_k \frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k}\left(\frac{\partial(\mathfrak{M}^g+\mathfrak{M})}{\partial g^{\alpha\beta,jk}}\right) - \ldots. \tag{7}$$

Le principe variationnel fondamental de la Gravifique consiste à égaler à zéro les dix dérivées variationnelles par rapport aux $g^{\alpha\beta}$. On obtient ainsi les dix *équations fondamentales* de la gravifique; à savoir

$$\boxed{\frac{\delta(\mathfrak{M}^g+\mathfrak{M})}{\delta g^{\alpha\beta}} = 0.} \tag{8}$$

Posons aussi [1]

$$\mathfrak{T}^g_{\alpha\beta} \equiv \frac{\delta\mathfrak{M}^g}{\delta g^{\alpha\beta}}, \tag{9}$$

$$\mathfrak{T}_{\alpha\beta} \equiv -\frac{\delta\mathfrak{M}}{\delta g^{\alpha\beta}}. \tag{10}$$

Nous appellerons $\mathfrak{T}^g_{\alpha\beta}$ le *tenseur gravifique covariant symétrique* [2], $\mathfrak{T}_{\alpha\beta}$ le *tenseur phénoménal covariant symétrique* ou simplement *le tenseur symétrique*.

---

[1] Les $\mathfrak{T}^g_{\alpha\beta}$ et $\mathfrak{T}_{\alpha\beta}$ seront donc des tenseurs covariants du second degré, multipliés par un facteur de densité; il en résulte que les dix équations (8) sont *invariantes* par rapport à un changement *quelconque* des variables ou paramètres x_1, x_2, x_3, x_4.

[2] Dans le présent texte les notations ont été modifiées comme suit. Au lieu de considérer les dérivées *totales* par rapport à $g^{\alpha\beta}$, nous utilisons ici les dérivées *partielles* par rapport à $g^{\alpha\beta}$; les dérivées totales étaient désignées par le symbole $\frac{d}{dg^{\alpha\beta}}$; les dérivées partielles seront désignées par le symbole $\frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta}}$; on passe des unes aux autres par les relations

$$\frac{d}{dg^{\alpha\beta}} = (2-\varepsilon_{\alpha\beta})\frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta}}, \qquad \frac{d}{dg^{\alpha\beta,ij}} = (2-\varepsilon_{\alpha\beta})(2-\varepsilon_{ij})\frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta,ij}}, \qquad \ldots.$$

Pour utiliser les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial g_{\alpha\beta}}$ d'une fonction des g_{11}, g_{12}, g_{13}, ..., on

On a, en vertu de (8),

$$\boxed{\mathfrak{T}^g_{\alpha\beta} = \mathfrak{T}_{\alpha\beta}.} \tag{11}$$

Désignons par C l'invariant de courbure, et par a et b deux constantes universelles. On voit que C est donné par

$$C = \sum_\alpha \sum_\beta g^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{\alpha\beta}, \tag{12}$$

où l'on a posé

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} = \sum_\sigma \sum_\tau \left[\frac{\partial \left\{ \begin{matrix} \alpha\sigma \\ \sigma \end{matrix} \right\}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\}}{\partial x_\sigma} + \left\{ \begin{matrix} \beta\tau \\ \sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha\sigma \\ \tau \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \sigma\tau \\ \sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \tau \end{matrix} \right\} \right]. \tag{13}$$

Rappelons que ces accolades ont été définies dans l'*Introduction*.
Si l'on prend pour $\mathfrak{M}^g$ *la valeur* (¹) :

$$\mathfrak{M}^g = (a + bC)\sqrt{-g}, \tag{14}$$

on obtient, en effectuant les opérations indiquées en (8) (²) :

$$\boxed{-\frac{1}{2}(a + bC)\, g_{\alpha\beta} + b\mathcal{G}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}} \tag{15}$$

---

aura soin de remplacer tout d'abord, dans cette fonction, g_{12} par $\frac{1}{2}(g_{12} + g_{21})$, g_{13} par $\frac{1}{2}(g_{13} + g_{31})$; etc. Rappelons que dans notre *Gravifique einsteinienne* (Gauthier-Villars, Paris, 1921, ou *Annales de l'Observatoire R. de Belgique*, 1921), le tenseur $\mathfrak{T}_{\alpha\beta}$ était défini par

$$\mathfrak{T}_{\alpha\beta} \equiv -(1 + \varepsilon_{\alpha\beta}) \Diamond^{\alpha\beta} (\Lambda\sqrt{-g}),$$

avec

$$\Lambda\sqrt{-g} \equiv \mathfrak{M},$$

et

$$^{\alpha\beta} = \frac{d}{dg^{\alpha\beta}} - \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{d}{dg^{\alpha\beta,\mu}}\right) + \sum_{(\mu\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\left(\frac{d}{dg^{\alpha\beta,\mu\nu}}\right) - \ldots \equiv (2 - \varepsilon_{\alpha\beta}) \frac{\delta}{\delta g^{\alpha\beta}}.$$

Il en résulte donc que le tenseur employé dans la *Gravifique einsteinienne* vaut *le double* de celui utilisé dans le présent Mémoire.

(¹) *Gravifique einsteinienne*, équation (12).

(²) *Gravifique einsteinienne*, Note 4. Dans le cas où $a = 0$, *voir* A. EINSTEIN, *Berliner Berichte*, novembre et décembre 1915, et D. HILBERT, *Göttinger Nachrichten*, novembre 1915).

où l'on a posé

$$T_{\alpha\beta} \equiv \frac{\mathfrak{T}_{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}}. \tag{16}$$

Multiplions les deux membres de (15) par $g^{\alpha\beta}$ et sommons par rapport à α et β ; d'où, en vertu de (12),

$$\boxed{bC = -T - 2a} \tag{17}$$

en posant

$$T_\alpha^\beta \equiv \sum_i g^{\beta i} T_{\alpha i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{18}$$

et

$$T \equiv \sum_i T_i^i \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{19}$$

Substituons (17) dans (15); *les dix équations fondamentales de la Gravifique einsteinienne* prennent la forme

$$\boxed{\frac{a}{2} g_{\alpha\beta} + b\mathcal{G}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4). \tag{20}$$

Remarque. — Le principe variationnel tel que nous venons de l'exposer revient évidemment à généraliser *le principe de Hamilton* (¹), c'est-à-dire à annuler la variation

$$\delta \int_\Omega (\mathfrak{M}g + \mathfrak{M})\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 = 0, \tag{21}$$

Ω étant une portion d'espace-temps sur les frontières de laquelle les variations doivent s'annuler. C'est encore pour éviter l'usage d'un espace quadridimensionnel que nous avons préféré l'exposé ci-dessus.

3. **Les identités fondamentales de la Gravifique.** — En appliquant à la fonction $\mathfrak{M}g$ des théorèmes démontrés antérieurement (²), nous

(¹) H. A. Lorentz, *Verslag Amsterdam*, 12 février 1915. — D. Hilbert, *Göttinger Nachrichten*, novembre 1915. — Th. De Donder, *Verslag Amsterdam*, 27 mai 1916.

(²) Th. De Donder. *La synthèse de la Gravifique* (*C. R. Ac. Sc.*, 11 juin 1923, p. 1701); *Les identités fondamentales de la Gravifique* (*Bull. Ac. Roy. de Belgique*, avril 1924). Voir aussi notre exposé de *la Gravifique de Weyl-Eddington-Einstein* (Gauthier-Villars, 1924), dans lequel on trouvera la théorie complète de ces identités.

aurons, à cause du caractère de facteur de densité de cette fonction, les *quatre identités* suivantes :

$$(22)\qquad \sum_i \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j g^{ij} \frac{\delta \mathfrak{M}_g}{\delta g^{\alpha j}} + \frac{1}{2} \sum_j g^{ij,\alpha} \frac{\delta \mathfrak{M}_g}{\delta g^{ij}} \right] \equiv 0,$$

ou encore, en vertu de (9) :

$$(23)\qquad \sum_i \left[\frac{\partial \mathfrak{T}_\alpha^{gi}}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_j g^{ij,\alpha} \mathfrak{T}_{ij}^g \right] \equiv 0 \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4).$$

Nous avons posé

$$(24)\qquad \mathfrak{T}_\alpha^{gi} = \sum_j g^{ij} \mathfrak{T}_{\alpha j}^g.$$

4. Théorème du tenseur phénoménal. — En vertu des dix équations fondamentales (8), les quatre identités (23) nous fournissent immédiatement les *quatre équations* suivantes :

$$(25)\qquad \sum_i \left[\frac{\partial \mathfrak{T}_\alpha^i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_j g^{ij,\alpha} \mathfrak{T}_{ij} \right] = 0,$$

où nous avons posé, comme en (24) :

$$(26)\qquad \mathfrak{T}_\alpha^i = \sum_j g^{ij} \mathfrak{T}_{\alpha j}.$$

Nous dirons que les quatre équations (25) exprime le *théorème du tenseur phénoménal*.

Remarquons que ces équations peuvent aussi se mettre sous la forme

$$(27)\qquad \boxed{\sum_i \left[\frac{\partial \mathfrak{T}_\alpha^i}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \sum_j g_{ij,\alpha} \mathfrak{T}^{ij} \right] = 0} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4).$$

On vérifie aisément (*Grav.*, [9], p. 149) que ces quatre équations peuvent aussi s'écrire

$$(28)\qquad \sum_i \left[\frac{\partial \mathfrak{T}_\alpha^i}{\partial x_i} - \sum_j \left\{ \begin{matrix} \alpha i \\ j \end{matrix} \right\} \mathfrak{T}_j^i \right] = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4).$$

Nous poserons

$$\mathfrak{F}_\alpha \equiv \sum_i \left[\frac{\partial \mathfrak{T}^i_\alpha}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \sum_j g_{ij,\alpha} \mathfrak{T}^{ij} \right], \tag{29}$$

et nous dirons que $\mathfrak{F}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) sont les composantes de la *force totale généralisée*. Les quatre équations (27) peuvent alors s'écrire

$$\mathfrak{F}_\alpha = 0. \tag{30}$$

Le théorème du tenseur phénoménal exprime donc que *les quatre composantes de la force totale généralisée sont nulles.*

5. **Théorème du pseudo-tenseur gravifique** $\binom{\beta}{\alpha}$. — *Un pseudo-tenseur* (asymétrique) *gravifique* (¹) est, par définition, un ensemble de seize fonctions $\binom{\beta}{\alpha}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$) satisfaisant aux quatre équations

$$\sum_i \left[\frac{\partial \binom{i}{\alpha}}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \sum g^{ij,\alpha} \mathfrak{T}^g_{ij} \right] = 0. \tag{31}$$

Rappelons que les $\mathfrak{T}^g_{ij}$ ne dépendent que des $g^{\alpha\beta}$, et de leurs dérivées successives par rapport à $x_1, \ldots, x_4$.

Rapprochons (31) des identités fondamentales (23), d'où

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\binom{i}{\alpha} + \mathfrak{T}^{gi}_{\alpha} \right] = 0. \tag{32}$$

Utilisons les équations (11) et les notations (26); d'où les quatre équations

$$\sum_i \frac{\partial \left[\binom{i}{\alpha} + \mathfrak{T}^i_\alpha \right]}{\partial x_i} = 0, \tag{33}$$

qui expriment *le théorème du pseudo-tenseur gravifique* $\binom{i}{\alpha}$.

(¹) Le lecteur trouvera dans la Note 6 de la *Gravifique einsteinienne* l'expression *explicite* de quelques pseudo-tenseurs gravifiques. Nous avons, en mai 1916 (*Verslag Amsterdam*), donné le premier exemple d'un tel tenseur. *Voir* aussi le Mémoire de T. Okaya, *Japanese Journ. of Physics*, vol. III, nos 4-6, Tokyo, 1924, p. 95-115.

Les équations (33) sont identiquement satisfaites si l'on prend

$$\binom{i}{\alpha} \equiv - \mathfrak{T}^i_\alpha;$$

mais alors ce théorème ne sert à rien; il se réduit immédiatement à des identités. On peut trouver d'*autres solutions* pour $\binom{i}{\alpha}$ satisfaisant aux équations (33) ou aux équations (31); mais alors les expressions $\binom{i}{\alpha}$ *ne* sont *pas* covariantes à un tenseur asymétrique; c'est pour cette raison que nous désignons $\binom{i}{\alpha}$ sous le nom de *pseudo-tenseur* gravifique.

Ondes et rayons gravifiques. — Cette théorie a été développée dans notre *Gravifique einsteinienne* (§ 29 et 45) en nous inspirant des travaux de J. Hadamard et E. Vessiot.

Variances. — Nous ne ferons pas ici un exposé de la théorie des variances : covariance, contravariance, invariance, etc. Nous nous contenterons d'expliquer nos notations. Les lettres droites, sans indice (α. β, γ, i, ...), telles que C, T, a, b sont des invariants par rapport à tout changement des variables x_1, x_2, x_3, x_4. Les lettres de ronde, sans indice, telles que $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_g$ ou $g\mathcal{M}$, $\mathfrak{T}$ représentant un multiplicateur (ou facteur de densité ou facteur tensoriel). Les indices inférieurs indiquent des covariances. Ainsi, F_α est un covariant et $\mathfrak{F}_\alpha$ est un covariant multiplié par un facteur de densité (covariant tensoriel). De même, $g_{\alpha\beta}$, $T_{\alpha\beta}$ sont des covariants du second degré; les $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$, $\mathfrak{T}_{\alpha\beta}$ sont des covariants du second degré multipliés par un facteur de densité (covariant tensoriel du second degré). Les indices supérieurs indiquent les contravariances. Ainsi $g^{\alpha\beta}$, $T^{\alpha\beta}$ sont des contravariants du second degré; les $\mathfrak{T}^{\alpha\beta}$ sont des contravariants du second degré multipliés par un facteur de densité (contravariants tensoriels du second degré). Un symbole peut être affecté à la fois d'indices inférieurs et d'indices supérieurs : les indices inférieurs indiqueront la covariance par rapport à ces indices, tandis que les indices supérieurs indiqueront la contravariance par rapport à ces indices. Il en résulte une variance mixte. Ainsi, T^β_α a une variance mixte, et $\mathfrak{T}^\beta_\alpha$ a la même variance, multipliée par un facteur de densité

Dimensions. — En poursuivant l'étude des dimensions commencée à la fin du Chapitre III, on trouvera aisément que l'invariant de courbure C a pour dimensions L^{-2}. Si nous admettons que les dimensions de la constante universelle a sont celles de l'énergie[1] par unité de volume, c'est-à-dire $L^{-1}T^{-2}M$,

---

[1] Par définition, les dimensions de l'énergie sont celles de la masse (ou M) multipliée par une vitesse au carré (ou L^2T^{-2}).

on en déduira que la constante universelle b a pour dimensions $LT^{-2}M$. Les dimensions de $\mathfrak{M}g$ et de $\mathfrak{M}$ sont donc $T^{-3}M$. On en déduit immédiatement que T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{12}, T_{13}, T_{23} ont pour dimensions $L^{-1}T^{-2}M$, que T_{14}, T_{24}, T_{34} ont pour dimensions $T^{-3}M$, et que T_{44} a pour dimensions LMT^{-4}. De là résulte que les T_α^β ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) ont pour dimensions $L^{-1}T^{-2}M$ (énergie par unité de volume), que T_1^4, T_2^4, T_3^4 ont pour dimensions $L^{-2}T^{-1}M$ (quantité de mouvement par unité de volume), que T_4^1, T_4^2, T_4^3 ont pour dimensions $T^{-3}M$ (flux d'énergie par unité de surface et par unité de temps), et que T_4^4 a pour dimensions $L^{-1}T^{-2}M$ (énergie par unité de volume) (1).

CHAPITRE II.

CHAMP GRAVIFIQUE MASSIQUE.

6. Définition du champ gravifique massique. — Considérons un champ gravifique dû à des masses. Pour décrire le mouvement de ces masses, nous utiliserons, avec le spectateur S, les coordonnées euclidiennes (2) x_1, x_2, x_3 et le temps x_4 ainsi que la vitesse généralisée, dont

$$u^\alpha \equiv \frac{dx_\alpha}{ds} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4). \tag{34}$$

sont les quatre composantes contravariantes et dont les composantes covariantes sont

$$u_\alpha \equiv \sum_i g_{i\alpha} u^i \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4) \tag{35}$$

Les u^α et les u_α sont des fonctions de $x_1, \ldots, x_4$.

Rappelons qu'on a

$$W^2 \equiv \sum_\alpha \sum_\beta g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 1. \tag{36}$$

Le spectateur S utilisera, en outre, *le facteur de densité massique* $\mathfrak{M}$; ce multiplicateur est fonction de $x_1, \ldots, x_4$. Ce spectateur utilisera enfin un *tenseur massique* dont les dix composantes symétriques sont désignées par $\mathfrak{T}_{\alpha\beta}$; ce sont aussi des fonctions de x_1, x_2, x_3, x_4.

---

(1) Pour plus de détails on pourra consulter notre *Gravifique einsteinienne*, Note 23.

(2) *Voir* la première Partie de cette synthèse : *Introduction à la Gravifique einsteinienne*, août 1925, sp. Chap. II, équations (169) et (172).

7. La fonction caractéristique du champ gravifique massique. — Nous poserons (¹), dans le cas du champ gravifique massique,

$$\mathfrak{M} = -\sum_\alpha \sum_\beta g^{\alpha\beta}(\mathfrak{N} u_\alpha u_\beta + \mathfrak{P}_{\alpha\beta}). \tag{37}$$

Les symboles qui y figurent ont été définis dans le paragraphe précédent.

8. Équations fondamentales du champ gravifique massique. — Grâce à la fonction caractéristique (37), nous pourrons calculer le tenseur phénoménal ou massique $\mathfrak{T}_{\alpha\beta}$ défini par (10). Nous aurons ici

$$\boxed{\mathfrak{T}_{\alpha\beta} = \mathfrak{N} u_\alpha u_\beta + \mathfrak{P}_{\alpha\beta}.} \tag{38}$$

Posons comme d'habitude :

$$N = \frac{\mathfrak{N}}{\sqrt{-g}} \tag{39}$$

et

$$P_{\alpha\beta} = \frac{\mathfrak{P}_{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}}. \tag{40}$$

Alors, les relations (38) deviennent

$$T_{\alpha\beta} = N u_\alpha u_\beta + P_{\alpha\beta}. \tag{41}$$

Introduisons aussi le tenseur mixte

$$P_\alpha^\beta = \sum_i g^{\beta i} P_{\alpha i}, \tag{42}$$

ainsi que

$$P = \sum_i P_i^i. \tag{43}$$

Il en résulte que

$$\boxed{T = N + P.} \tag{44}$$

(¹) En généralisant les résultats de H. A. Lorentz (*Verslag Amsterdam*, 1915, p. 1076), nous avons été amené à donner à la fonction $\mathfrak{M}$ une première forme en 1919 (*Bull. Ac. R. Belg.*, p. 317-325) et la forme présente, plus générale, en février 1924 (*Bull. Ac. R. Belg.*, p. 77-82).

Grâce à ces préliminaires, on trouvera immédiatement que les dix équations (20) du champ gravifique provoqué par les masses pourront s'écrire

$$\boxed{\frac{a}{2} g_{\alpha\beta} + b \mathcal{G}_{\alpha\beta} = \mathrm{N}\left(u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\right) + \mathrm{P}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \mathrm{P}.} \tag{45}$$

Ce sont les équations fondamentales du champ gravifique massique.

9. **Théorème du tenseur massique.** — Reportons-nous aux quatre équations (25) qui expriment le théorème du tenseur phénoménal. Substituons-y les valeurs de $\mathfrak{T}_\alpha^\beta$ déduites de (38), c'est-à-dire

$$\mathfrak{T}_\alpha^\beta \equiv \mathfrak{N} u_\alpha u^\beta + \mathfrak{P}_\alpha^\beta, \tag{46}$$

d'où

$$\sum_i \left[\frac{\partial(\mathfrak{N} u_\alpha u^i + \mathfrak{P}_\alpha^i)}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \sum_j \sum_k g^{ij} g_{kj,\alpha} (\mathfrak{N} u_i u^k + \mathfrak{P}_i^k)\right] = 0. \tag{47}$$

Posons

$$\sum_i \frac{\partial(\mathfrak{N} u_\alpha u^i)}{\partial x_i} - \frac{\mathfrak{N}}{2} \sum_j \sum_k g_{kj,\alpha} u^j u^k \equiv \mathfrak{N}_\alpha \tag{48}$$

et

$$\sum_i \left[\frac{\partial \mathfrak{P}_\alpha^i}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \sum_j \sum_k g^{ij} g_{kj,\alpha} \mathfrak{P}_i^k\right] \equiv \mathfrak{P}_\alpha. \tag{49}$$

Alors, les quatre équations (47) s'écriront, en abrégé (¹),

$$\mathfrak{F}_\alpha \equiv \mathfrak{N}_\alpha + \mathfrak{P}_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4). \tag{50}$$

Elles expriment *le théorème de la force totale généralisée.*

Remarquons que (48) peut s'écrire immédiatement, en vertu de la définition de l'accélération covariante A_α :

$$\mathfrak{N}_\alpha \equiv \mathfrak{N} \mathrm{A}_\alpha + u_\alpha \sum_i \frac{\partial(\mathfrak{N} u^i)}{\partial x_i}. \tag{51}$$

En multipliant les deux membres de cette identité par u^α et en

---

(¹) A comparer avec A. EINSTEIN (*Ann. de Phys.*, 49, 1916, p. 769, et *Berliner Berichte*, 8 février 1917, p. 142.

sommant, on obtient

$$\sum_{\alpha} \mathfrak{M}_\alpha u^\alpha = \sum_{\alpha} \frac{\partial(\mathfrak{M} u^\alpha)}{\partial x_\alpha}, \tag{52}$$

ou encore

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial(\mathfrak{M} u^\alpha)}{\partial x_\alpha} + \sum_{\alpha} \mathfrak{L}_\alpha u^\alpha = 0. \tag{53}$$

C'est l'équation de continuité.

Le théorème du tenseur massique (50) peut aussi se mettre sous la forme suivante grâce aux identités (51) et à la relation (52):

$$\boxed{\mathfrak{F}_\alpha \equiv \mathfrak{M} A_\alpha - u_\alpha \sum_i \mathfrak{L}_i u^i + \mathfrak{L}_\alpha = 0.} \tag{54}$$

Multiplions par $g^{\alpha\beta}$ et sommons par rapport à α; d'où

$$\boxed{\mathfrak{F}^\alpha \equiv \mathfrak{M} A^\alpha - u^\alpha \sum_i \mathfrak{L}_i u^i + \mathfrak{L}^\alpha = 0,} \tag{55}$$

où nous avons posé

$$\mathfrak{L}^\alpha \equiv \sum_\beta g^{\alpha\beta} \mathfrak{L}_\beta \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{F}^\alpha = \sum_\beta g^{\alpha\beta} \mathfrak{F}_\beta. \tag{56}$$

10. Cas particuliers importants. — 1° *Fluide massique incohérent.* — C'est, par définition, le cas où les $\mathfrak{P}_{\alpha\beta} = 0$. Les particules massiques ne subissent que l'action du champ gravifique défini, comme on sait, par les dix potentiels einsteiniens $g_{\alpha\beta}$.

Les équations fondamentales gravifiques (45) deviennent

$$\boxed{\frac{a}{2} g_{\alpha\beta} + b \mathcal{G}_{\alpha\beta} = N\left(u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\right).} \tag{57}$$

Alors *le théorème du tenseur asymétrique* devient, en vertu de (47) à (49),

$$\mathfrak{M}_\alpha \equiv \sum_i \left[\frac{\partial(\mathfrak{M} u_\alpha u^i)}{\partial x_i} - \frac{\mathfrak{M}}{2} \sum_j g_{ij,\alpha} u^i u^j\right] = 0. \tag{58}$$

L'équation (53) prend la forme très simple

$$\boxed{\sum_i \frac{\partial(\mathfrak{N} u^i)}{\partial x_i} = 0.} \tag{59}$$

C'est l'*équation de continuité* du fluide massique incohérent.

En tout point où $\mathfrak{N} \neq 0$, on aura, en vertu de (54),

$$A_\alpha \equiv \frac{du_\alpha}{ds} - \frac{1}{2}\sum_i\sum_j g_{ij,\alpha} u^i u^j = 0, \tag{60}$$

ou, en vertu de (55), on aura

$$\boxed{A^\alpha \equiv \frac{d^2 x_\alpha}{ds^2} + \sum_i\sum_j \left\{ \begin{matrix} ij \\ \alpha \end{matrix} \right\} u^i u^j = 0} \qquad (\alpha = 1, \ldots, 4). \tag{61}$$

Ces dernières équations sont susceptibles d'une interprétation très belle, à savoir : *Les trajectoires de tout point massique, ainsi que leur mode de parcours, s'obtiennent en extrémant* (¹)

$$\delta \int \sqrt{\sum_\alpha\sum_\beta g_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta} = 0, \tag{62}$$

ce qui peut s'écrire plus simplement

$$\delta \int ds = 0. \tag{63}$$

On varie par rapport à x_1, x_2, x_3, x_4 en supposant fixes les extrémités de la ligne le long de laquelle se fait l'intégration. Si l'on pose

$$W \equiv \sqrt{\sum_\alpha\sum_\beta g_{\alpha\beta}\, u^\alpha u^\beta} = 1. \tag{64}$$

Les équations des extrémales de (62) et (63) peuvent s'écrire

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{dx_\alpha}{ds} = u^\alpha, \\ &\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial W}{\partial u^\alpha}\right) - \left(\frac{\partial W}{\partial x_\alpha}\right) = 0. \end{aligned} \right. \tag{65}$$

(¹) A. Einstein (*Berliner Berichte*, 1914, p. 1105) admet la relation (62) comme hypothèse. — Th. De Donder, *Bull. Ac. R. de Belg., Cl. des Sciences*, 1919, p. 320.

On a vu dans le Chapitre III que ces équations sont identiques aux équations (61).

2° *Fluide massique parfait*. — Le fluide massique est dit *parfait* si le tenseur P_α^β est de la forme particulière

$$P_\alpha^\beta \equiv -\varepsilon_\alpha^\beta p. \tag{66}$$

Rappelons que

$$P_\alpha^\beta \equiv \frac{\mathfrak{T}_\alpha^\beta}{\sqrt{-g}}. \tag{67}$$

On sait que, puisque les P_α^β sont des composantes de tenseur, ε_α^β sont de même variance que P_α^β.

Théorème. — *Si un fluide massique est parfait dans un système de coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4, il est parfait dans tout autre système x'_1, x'_2, x'_3, x'_4.*

En effet,

$$P'^\beta_\alpha \equiv \sum_i \sum_j P_i^j \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_j} = -\sum_i \sum_j \varepsilon_i^j p \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_j} = -p \frac{\partial x'_\beta}{\partial x'_\alpha} = -p' \varepsilon_\alpha^\beta; \tag{68}$$

d'où

$$p' = p. \qquad \text{C. Q. F. D.} \tag{70}$$

Corollaire I. — L'égalité (70) exprime que p est un *invariant* pour tout changement des variables $x_1 \ldots x_4$.

Corollaire II. — On a de plus, en retournant à (66),

$$P_{\alpha\beta} = \sum_i g_{\beta i} P_\alpha^i = -p \sum_i \varepsilon_\alpha^i g_{i\beta} = -p g_{\alpha\beta} \tag{71}$$

et

$$P \equiv \sum_\alpha P_\alpha^\alpha = -4p. \tag{72}$$

Les équations fondamentales du champ gravifique provoqué par un fluide massique *parfait* deviennent (45) :

$$\boxed{\frac{a}{2} g_{\alpha\beta} + b \mathcal{G}_{\alpha\beta} = N\left(u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\right) + p g_{\alpha\beta}.} \tag{73}$$

Le théorème (50) du tenseur phénoménal devient

(74) $$\mathfrak{M}_\alpha + \mathfrak{T}_\alpha = 0,$$

où $\mathfrak{T}_\alpha$ est donné par (49) :

(75) $$\mathfrak{T}_\alpha = -\sqrt{-g}\,\frac{\partial p}{\partial x_\alpha}.$$

On aura donc explicitement

(76) $$\sum_i \frac{\partial(\mathfrak{M}\, u_\alpha u^i)}{\partial x_i} - \frac{\mathfrak{M}}{2}\sum_i\sum_j g_{ij,\alpha} u^i u^j - \sqrt{-g}\,\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4).$$

Ces équations peuvent aussi s'écrire, en vertu de (54),

(77) $$\mathfrak{M}\,A_\alpha - u_\alpha \sum_i \mathfrak{T}_i u^i + \mathfrak{T}_\alpha = 0;$$

d'où, grâce à (75),

(78) $$\mathfrak{M}\,A_\alpha + \sqrt{-g}\left(u_\alpha \frac{dp}{ds} - \frac{\partial p}{\partial x_\alpha}\right) = 0.$$

De même, en retournant à (55), on aura, en utilisant (56),

(79) $$\boxed{\mathfrak{M}\,A^\alpha + \sqrt{-g}\left(u^\alpha \frac{dp}{ds} - \sum_\beta \frac{\partial p}{\partial x_\beta} g^{\alpha\beta}\right) = 0.}$$

11. Dynamique dans l'espace et le temps. — Nous avons établi dans le Chapitre III les relations permettant de passer à l'espace *et* au temps; à savoir :

(80) $$u^\alpha = v^\alpha V^{-1},$$

(81) $$u_\alpha = \sum g_{\alpha j} v^j V^{-1},$$

où l'on a posé

(82) $$V = \frac{ds}{dt}.$$

En substituant les valeurs de u^α et u_α dans l'équation (47) du tenseur massique, on obtient

(83) $$\mathfrak{M}\,V^{-1}\left[\sum_i \frac{\partial\left(\sum_j g_{\alpha j} v^j V^{-1}\right)}{\partial x_i} v^i - \frac{1}{2} V^{-1} \sum_i\sum_j g_{ij,\alpha} v^i v^j\right] - V^{-2}\sum_i \mathfrak{T}_i v^i \sum_j g_{\alpha j} v^j + \mathfrak{T}_\alpha = 0.$$

On aurait pu mettre aussi cette équation sous la forme [*Introduction*, (221) à (223)] :

$$(84)\qquad \mathfrak{M}\mathrm{V}^{-1}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial v^\alpha}\right)-\left(\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial x_\alpha}\right)\right]-\mathrm{V}^{-1}\left(\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial v^\alpha}\right)\sum_i \mathfrak{T}_i v^i+\mathfrak{T}_\alpha=0.$$

L'équation de continuité (53) devient ici, après substitution,

$$(85)\qquad \boxed{\sum_i \frac{\partial(\mathfrak{M}\mathrm{V}^{-1}v^i)}{\partial x_i}+\mathrm{V}^{-1}\sum_i \mathfrak{T}_i v^i=0.}$$

Utilisons maintenant les équations (55). En vertu de (219) et (221), de l'*Introduction*, on aura

$$(86)\qquad \boxed{\mathrm{V}^{-1}\mathfrak{M}\left(\frac{d(\mathrm{V}^{-1}v^\alpha)}{dt}+\mathrm{V}^{-1}\sum_i\sum_k\left\{\begin{matrix}ik\\ \alpha\end{matrix}\right\}v^iv^k\right)-\mathrm{V}^{-2}v^\alpha\sum_i\mathfrak{T}_iv^i+\mathfrak{T}^\alpha=0}$$

$$(\alpha=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Multiplions les deux membres de cette équation par $g_{\alpha\beta}$ et sommons par rapport à α; d'où

$$(87)\qquad \begin{aligned}\mathrm{V}^{-1}\mathfrak{M}\left[\sum_\beta g_{\alpha\beta}\frac{d(\mathrm{V}^{-1}v^\beta)}{dt}+\mathrm{V}^{-1}\sum_i\sum_k\left[\begin{matrix}ik\\ \alpha\end{matrix}\right]v^iv^k\right]&\\ -\mathrm{V}^{-2}\sum_\beta v^\beta g_{\alpha\beta}\sum_i\mathfrak{T}_iv^i+\mathfrak{T}_\alpha&=0.\end{aligned}$$

Retournons un instant à l'équation (86); elle peut s'écrire

$$(88)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{M}\mathrm{V}^{-2}\left[\frac{d^2x_\alpha}{dt^2}-\frac{d\log\mathrm{V}}{dt}v^\alpha+\sum_i\sum_j\left\{\begin{matrix}ij\\ \alpha\end{matrix}\right\}v^iv^j\right]&\\ -\mathrm{V}^{-2}v^\alpha\sum_i\mathfrak{T}_iv^i+\mathfrak{T}^\alpha&=0,\end{aligned}$$

où $\frac{d}{dt}$ et $\frac{d^2}{dt^2}$ désignent des dérivées totales par rapport à t.

Dans le cas où $\alpha=4$, cette dernière équation se réduit

$$(89)\qquad \mathfrak{M}\mathrm{V}^{-2}\left[-\frac{d\log\mathrm{V}}{dt}+\sum_i\sum_j\left\{\begin{matrix}ij\\ 4\end{matrix}\right\}v^iv^j\right]-\mathrm{V}^{-2}\sum_i\mathfrak{T}_iv^i+\mathfrak{T}^4=0.$$

Multiplions cette équation par $-v^\alpha$ et additionnons le résultat aux équations (88) qui correspondent à $\alpha=1,\ 2,\ 3$; nous obtenons *les équations de la dynamique des fluides massiques :*

$$(90)\qquad \boxed{\mathfrak{M}\,V^{-2}\left[\frac{d^2x_\alpha}{dt^2}+\sum_i\sum_j\left(\begin{Bmatrix} ij \\ \alpha \end{Bmatrix}-v^\alpha \begin{Bmatrix} ij \\ 4 \end{Bmatrix}\right)v^i v^j\right]+\mathfrak{T}^\alpha-v^\alpha\mathfrak{T}^4=0}$$

$$(\alpha=1,2,3;\ i,j=1,2,3,4).$$

Si dans cette dernière équation on faisait $\alpha=4$, on obtiendrait une identité.

12. Cas particuliers importants. — 1° *Champ stationnaire.* — Un champ massique est dit *stationnaire* si les $g_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées, ainsi que les v^α sont indépendants de $x_4\equiv t$. Alors, en *tout point où la vitesse du fluide est nulle* ($v^1=v^2=v^3=0$), les équations (83) se réduisent à

$$(91)\qquad \begin{aligned} -\frac{1}{2}\mathfrak{M}\,V^{-2}g_{44,\alpha}-V^{-2}g_{4\alpha}\mathfrak{T}_4+\mathfrak{T}_\alpha=0 \qquad (\alpha=1,2,3),\\ \mathfrak{T}_4(1-V^{-2}g_{44})=0.\end{aligned}$$

A cause de l'Introduction, $V^2=g_{44}$; ainsi la dernière relation est identiquement satisfaite; il ne reste donc que les seules équations (91), qui deviennent

$$(92)\qquad \frac{1}{2}\mathfrak{M}\,g_{44,\alpha}+g_{4\alpha}\mathfrak{T}_4-g_{44}\mathfrak{T}_\alpha=0 \qquad (\alpha=1,2,3).$$

Si le fluide est incohérent et au repos, dans un champ massique stationnaire, *le potentiel g_{44} se réduit à une constante.* Ce théorème résulte immédiatement de (92) et de ce que le champ est stationnaire.

2° *Fluide massique incohérent.* — Dans le cas du fluide massique incohérent, on aura toujours en vertu de (61), en tout point où $\mathfrak{M}$ est différent de zéro,

$$(93)\qquad \frac{d(V^{-1}v^\alpha)}{dt}+V^{-1}\sum_i\sum_k\begin{Bmatrix} ik \\ \alpha \end{Bmatrix}v^i v^k=0 \qquad (\alpha=1,\ldots,4),$$

où

$$(94)\qquad \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+v^1\frac{\partial}{\partial x}+v^2\frac{\partial}{\partial y}+v^3\frac{\partial}{\partial z}.$$

L'équation de continuité (59) se réduit à

$$\sum_i \frac{\partial(\mathfrak{M} V^{-1} v^i)}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots. 4). \tag{95}$$

Il en résulte que

$$\frac{d}{dt} \int \mathfrak{M} V^{-1} \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 = 0, \tag{96}$$

où $\frac{d}{dt}$ indique une dérivée totale par rapport à t *en suivant le mouvement de la masse contenue dans le volume* $\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$, l'intuition se faisant dans la carte Γ. Rappelons que le point (x_1, x_2, x_3) est animé de la vitesse (v^1, v^2, v^3) dans cette carte Γ.

Posons (¹), avec S, dans le cas du fluide *incohérent*,

$$\boxed{c^2 \delta m^* \equiv \mathfrak{M} V^{-1} \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3.} \tag{97}$$

D'où, le spectateur S écrira, dans la carte Γ, que

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int \delta m^* = 0.} \tag{98}$$

Multiplions les deux membres de (93) par δm^*; d'où, en vertu de (98), on aura (²)

$$\boxed{\frac{d}{dt}(v^\alpha . V^{-1} \delta m^*) + V^{-1} \delta m^* \sum_i \sum_j \left\{ {ij \atop \alpha} \right\} v^i v^j = 0} \tag{99}$$

$$(i, j = 1, 2, 3, 4), \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

L'analogie de ces équations écrites par S, et celles qu'on emploie dans *la dynamique classique* du point matériel, apparaît immédiatement. L'analogie du premier terme de (99) se trouve dans l'expression galiléenne de la force en fonction de la masse et de l'accélération; l'analogue du second terme de (99) pris en signe contraire se trouve dans la force appliquée à la masse.

(¹) Th. De Donder, *Bull. Ac. R. Belg., Cl. des Sc.*, février 1921, p. 101, et *Grav. einstein.*, 1921, éq. (185) et (186).

(²) C'est grâce à l'équation (99) et à son interprétation par S dans l'image Γ que l'on pourra saisir la portée exacte de l'équation (116) de l'exposé d'Einstein : *The Meaning of Relativity* (Methuen, London, 1922).

Si le spectateur S pose

$$\boxed{V\,\delta m = c\,\delta m^*,} \tag{100}$$

on pourra écrire (99) sous la forme

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\delta m . v^\alpha) + \delta m \sum_i \sum_j \left\{ \begin{matrix} ij \\ \alpha \end{matrix} \right\} v^i v^j = 0} \qquad (\alpha, i, j = 1, 2, 3, 4). \tag{101}$$

La parenthèse $(v^\alpha \delta m)$ est particulièrement intéressante.

Dans le champ gravifique défini par *la forme de Minkowski*

$$(\delta \bar{s})^2 = -(\delta x)^2 - (\delta y)^2 - (\delta z)^2 + c^2(\delta t)^2,$$

plongeons un point de masse δm, considéré comme simple *corps d'épreuve* (c'est-à-dire que son action gravifique est complètement négligée). Alors, (101) nous donne, *en faisant* $\alpha = 4$,

$$\frac{d}{dt}(\delta m) = 0; \tag{102}$$

d'où, en introduisant ce résultat dans la même formule (101), et en prenant, cette fois, $\alpha = 1, 2, 3$, on trouve

$$\frac{dv^1}{dt} = \frac{dv^2}{dt} = \frac{dv^3}{dt} = 0. \tag{103}$$

Ces dernières équations définissent un mouvement *rectiligne* et *uniforme*. Nous sommes en présence d'un système ou champ dit *inertial*. Rappelons (Chap. I de l'*Introduction à la Gravifique einsteinienne*) que $S \equiv \bar{S}$ dans le champ de Minkowski, et que l'on peut poser alors

$$x \equiv \bar{x}, \qquad y \equiv \bar{y}, \qquad z = \bar{z}, \qquad t = \bar{t}, \qquad \delta m \equiv \delta \bar{m}.$$

Si la masse δm (ou $\delta \bar{m}$) est au repos par rapport à $\bar{S}$, on voit, d'après (100), que $(\delta \bar{m})_{\text{repos } \bar{S}} \equiv \delta m^*$.

Revenons aux équations (84); on aura, dans le cas d'un fluide massique incohérent :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial v^\alpha}\right) - \frac{\partial V}{\partial x_\alpha} = 0} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4). \tag{104}$$

Ces relations peuvent être résumées en la suivante [1] :

$$\delta \int V\,dt = 0, \tag{105}$$

la variation étant prise par rapport à $x_1, \ldots, x_4$, et s'annulant aux limites de l'intégrale. Les trajectoires du fluide massique incohérent sont les extrémales définies par (105).

3° *Fluide massique parfait.* — Les équations (78) deviennent ici, en remplaçant les u^α en fonction des v^α :

$$\begin{aligned}V^{-1}\mathfrak{M}\left[\frac{d(V^{-1}v^\alpha)}{dt} + V^{-1}\sum_i\sum_k \left\{ {ik \atop \alpha} \right\} v^i v^k\right] \\ + \sqrt{-g}\left(V^{-2}v^\alpha \frac{dp}{dt} - \sum_\beta \frac{\partial p}{\partial x_\beta} g^{\alpha\beta}\right) = 0.\end{aligned} \tag{106}$$

L'équation de continuité (85) devient

$$\sum_i \frac{\partial(\mathfrak{M}V^{-1}.v^i)}{\partial x_i} - V^{-1}\sum_i \sqrt{-g}\,\frac{\partial p}{\partial x_i}\,v^i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

ou

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{M}V^{-1}) + \mathfrak{M}V^{-1}\sum_i \frac{\partial v^i}{\partial x_i} - V^{-1}\sqrt{-g}\,\frac{dp}{dt} = 0. \tag{108}$$

L'équation (107) exprime qu'on a

$$\frac{d}{dt}\int \mathfrak{M}V^{-1}\,\delta x_1\,\delta x_2\,\delta x_3 = \int V^{-1}\sqrt{-g}\sum_i \frac{\partial p}{\partial x_i}\,v^i\,\delta x_1\,\delta x_2\,\delta x_3 \tag{109}$$

$$(i = 1, 2, 3, 4).$$

C'est la généralisation de l'équation (96).

Par analogie avec (97), posons, pour *le fluide parfait*,

$$c^2\,\delta m^{**} \equiv \mathfrak{M}V^{-1}\,\delta x_1\,\delta x_2\,\delta x_3. \tag{110}$$

L'équation (98) se généralise alors de la manière suivante, en vertu de (75) :

$$\frac{d}{dt}\int c^2\,\delta m^{**} = -\int V^{-1}\left(\sum_i \mathfrak{P}_i v^i\right)\delta v. \tag{111}$$

---

[1] *Gravifique einsteinienne*, 1921, éq. (173).

En multipliant les deux membres de l'équation (106) par δm^{**}, on obtiendrait la généralisation de (99).

13. **Des mesures physiques.** — Nous allons montrer, d'après Einstein, comment on peut passer des nombres ou paramètres x_1, x_2, x_3, x_4 ; u^1, u^2, u^3, u^4 ; $\mathfrak{M}$, etc. inscrits par le spectateur S dans la carte ou l'image Γ, aux *mesures* effectuées par un expérimentateur $\overline{S'}$.

On *attachera* [1] à chacune des particules massiques un spectateur $\overline{S'}$. Tous ces spectateurs $\overline{S'}$ ont emporté des étalons de longueur, de temps et de masse tels que, immobiles dans le vide non perturbé, ils soient identiques entre eux.

On a vu dans le Chapitre II [(116) de l'*Introduction*] qu'il est toujours possible de trouver une transformation de manière que le tableau des $\overline{g'_{\alpha\beta}}$ se réduise, en première approximation, à

$$(112) \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{c'^2} \end{vmatrix}$$

On aura soin, dans ces transformations du Chapitre II, de remplacer les $x'_1 \ldots x'_4$ par $\overline{x'_1} \ldots \overline{x'_4}$, étant donné que tous ces nombres représentent ici le résultat des mesures de longueur et de temps effectuées par le physicien $\overline{S'}$.

Il en résulte qu'on aura

$$(113) \qquad \overline{g'} = -\overline{c'^2}$$

avec cette même approximation.

De ce que $\mathfrak{M}$ et $\sqrt{-g}$ sont des multiplicateurs ou des facteurs de densité, on aura

$$(114) \qquad \frac{\mathfrak{M}}{\overline{\mathfrak{M}'}} = \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-\overline{g'}}} = \frac{\partial(\overline{x'})}{\partial(x)},$$

où $\dfrac{\partial(\overline{x'})}{\partial(x)}$ représente le jacobien des $\overline{x'}$ par rapport aux x.

---

(1) Th. De Donder, *Bull. Ac. R. Belg., Cl. des Sc.,* mars 1923, p. 91 : *Interprétation physique de la Relativité* (troisième Communication). Voir aussi A. S. Eddington, *The mathematical Theory of Relativity*, seconde édition Cambridge 1924, p. 109 et 121.

On aura donc (113) :

$$(115)\qquad \frac{\mathfrak{M}}{\sqrt{-g}} = \frac{\overline{\mathfrak{M}'}}{\overline{c'}}.$$

Remarquons qu'en vertu de l'invariance de la forme intégrale

$$\mathfrak{M}\,\delta x_1\,\delta x_2\,\delta x_3\,\delta x_4$$

par rapport à tout changement des variables $x_1, \ldots, x_4$, on aura ici

$$(116)\qquad \mathfrak{M}\,\delta x_1\,\delta x_2\,\delta x_3\,\delta x_4 = \overline{\mathfrak{M}'}\,\overline{\delta v'}\,\overline{\delta t'}.$$

Pour trouver la signification physique des composantes T_α^β, voyons ce qu'elles deviennent pour le spectateur $\overline{S'}$ entraîné avec le volume $\overline{\delta v'}$ en mouvement. Nous supposerons donc que les vitesses $\overline{u'^1}$, $\overline{u'^2}$, $\overline{u'^3}$ soient nulles et que le tableau des $\overline{g'_{\alpha\beta}}$ se réduise à (112). Nous aurons alors pour valeurs des $\overline{T'^\beta_\alpha}$ (42, 46, 47)

$$(117)\qquad \overline{T'^\beta_\alpha} = \begin{vmatrix} \overline{P'^1_1} & \overline{P'^2_1} & \overline{P'^3_1} & \overline{P'^4_1} \\ \overline{P'^1_2} & \overline{P'^2_2} & \overline{P'^3_2} & \overline{P'^4_2} \\ \overline{P'^1_3} & \overline{P'^2_3} & \overline{P'^3_3} & \overline{P'^4_3} \\ \overline{P'^1_4} & \overline{P'^2_4} & \overline{P'^3_4} & \overline{P'^4_4} + \overline{N'} \end{vmatrix}$$

En vertu des dimensions trouvées à la fin du Chapitre I, nous voyons que dans ce tableau les $\overline{P'^\beta_\alpha}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ forment le *tenseur ordinaire de Cauchy* de l'élasticité. Nous avons vu, en outre que $\overline{P'^4_1}$, $\overline{P'^4_2}$, $\overline{P'^4_3}$ et $\overline{P'^1_4}$, $\overline{P'^2_4}$, $\overline{P'^3_4}$ ont respectivement les dimensions de *quantité de mouvement par unité de volume* et de *flux d'énergie par unité de surface et par unité de temps*. Enfin, $\overline{T'^4_4}$ a les dimensions de *l'énergie par unité de volume;* posons donc

$$(118)\qquad \overline{T'^4_4} = \frac{\overline{\delta\varepsilon'}}{\overline{\delta v'}},$$

$\overline{\delta\varepsilon'}$ étant la quantité d'énergie mesurée par $\overline{S'}$ et contenue dans l'élément de volume $\overline{\delta v'}$. Définissons la masse $\overline{\delta m'}$ mesurée par $\overline{S'}$ au moyen de

$$(119)\qquad \boxed{\overline{\delta\varepsilon'} = c^2\,\overline{\delta m'}.}$$

La densité massique $\overline{D'}$ mesurée par $\overline{S'}$ et définie par

$$\overline{D} \equiv \frac{\delta \overline{m'}}{\delta \overline{v'}} \tag{120}$$

aura donc pour valeur

$$\boxed{\overline{D'} = \frac{\overline{T'^4_4}}{c^2} = \frac{\overline{N'} + \overline{P'^4_4}}{c^2}.} \tag{121}$$

Il résulte de ce qui précède (fin Chap. I) que $\overline{D'}$ a pour dimensions $L^{-3}M$.

Fluide incohérent. — Alors les P^β_α étant nuls, par hypothèse, il en sera de même des $\overline{P'^\beta_\alpha}$, en vertu de leur variance. Donc le tableau (117) se réduit à

$$\overline{T'^\beta_\alpha} \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{N'} \end{vmatrix} \tag{122}$$

et la formule (121) devient

$$\boxed{\overline{D'} \equiv \frac{\overline{N'}}{c'^2}.} \tag{123}$$

En vertu de l'invariance de N utilisé par S, on aura $\overline{N'} = N$; d'où

$$\boxed{\overline{D'} \equiv \frac{N}{c^2}.} \tag{124}$$

On obtient ainsi le sens physique de N ou $\mathfrak{N}(-g)^{-\frac{1}{2}}$.

Fluide parfait. — Dans le cas du fluide massique parfait, les P^β_α sont donnés par (66). En vertu de l'invariance des p, on aura $p = \overline{p'}$, en représentant par $\overline{p'}$ la pression massique mesurée par $\overline{S'}$. Alors, le tableau (117) se réduit à

$$T'^\beta_\alpha \equiv \begin{vmatrix} -\overline{p'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\overline{p'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\overline{p'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\overline{p'} + \overline{N'} \end{vmatrix}. \tag{125}$$

La formule (121) devient

$$\overline{D'} = \frac{\overline{N'} - \overline{p'}}{c^2}. \tag{126}$$

En vertu de l'invariance de N et de p utilisés par S, on aura ici

$$\overline{D'} = \frac{N - p}{c^2}. \tag{126}$$

14. Approximations dans le champ gravifique massique. — Nous allons supposer, avec Einstein ([1]), que le champ gravifique dû à des masses en mouvement est peu différent du champ de Minkowski. Pour cela, posons

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \tag{127}$$

où $\delta_{\mu\nu}$ est le tenseur de Minkowski [$\delta_{\mu\nu} = 0\,(\mu \gtrless \nu)$; $\delta_{\mu\mu} = 1, 1, 1, -c^2$].

L'hypothèse d'Einstein conduit à admettre que les produits de $\gamma_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3$), $\frac{1}{c}\gamma_{\mu 4}$ ($\mu = 1, 2, 3$), $\frac{1}{c^2}\gamma_{44}$, pris deux à deux, sont négligeables devant 1.

Supposons, en outre, qu'on ait pris de *nouvelles* variables x_1, x_2, x_3, x_4, telles qu'on ait, avec l'approximation indiquée ci-dessus, les *quatre relations* ([2])

$$\boxed{\sum_\sigma \sum_\tau g^{\sigma\tau}(g_{\sigma\tau,\alpha\beta} - g_{\alpha\sigma,\tau\beta} - g_{\beta\sigma,\alpha\tau}) = 0.} \tag{128}$$

Donc, *dans tout ce paragraphe* 14, *les variables sont soumises à ces quatre conditions;* nous disons que x_1, x_2, x_3, x_4 sont des variables *normées* ([3]).

Les composantes $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ du tenseur de Riemann se réduisent ainsi,

---

([1]) A. Einstein, *Sitzgsb. Ak. Wiss. Berlin*, 1916, p. 688-696.

([2]) A comparer avec *Grav. einst.*, 1921, éq. $(117)_1$ et $(117)_2$, ainsi que le traité cité ci-dessus d'Eddington, éq. (57-32).

([3]) D. Hilbert, *Gött. Naricht.* 1917, p. 53. Remarquons, avec Hilbert, que ces *nouvelles* variables $x_1, \dots, x_4$ normées sont *approximativement* les mêmes que nos *anciennes* variables.

à un facteur près, à des dalembertiens, à savoir

$$(129)\qquad \mathcal{G}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\square\,\gamma_{\alpha\beta}.$$

Reportons-nous maintenant au second membre (¹) des équations (45). Outre l'approximation qui vient d'être développée, introduisons l'hypothèse suivante : Supposons que les vitesses des masses soient suffisamment petites pour que $\frac{v^\alpha}{c}$ soit négligeable devant 1. On obtient ainsi

$$(130)\qquad \square\gamma_{\alpha\beta} = -\frac{2}{b}\,\mathrm{T}^*_{\alpha\beta},$$

où l'on a posé

$$(131)\qquad \mathrm{T}^*_{\alpha\beta} \equiv \delta_{\beta\beta}\left[\delta_{\alpha\alpha}\mathrm{N}\frac{v^\alpha}{c}\frac{v^\beta}{c} - \mathrm{P}^\beta_\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon^\beta_\alpha(\mathrm{N}+\mathrm{P}+a)\right]$$

et où $\varepsilon^\alpha_\alpha \equiv 1$, et $\varepsilon^\beta_\alpha \equiv 0$ si $\alpha \neq \beta$.

On obtient, en intégrant par la méthode des potentiels retardés,

$$(132)\qquad \gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2b\pi}\int\frac{\left\|\mathrm{T}^*_{\alpha\beta}\left(x, y, z, t-\frac{r}{c}\right)\right\|}{r}\,\delta v,$$

où r est la distance du point x, y, z à l'élément de volume δv. Le symbole $\|\mathrm{T}^*_{\alpha\beta}\|$ sert à rappeler qu'il faut prendre $\mathrm{T}^*_{\alpha\beta}$ à l'instant $\left(t-\frac{r}{c}\right)$.

Dans le cas d'un fluide incohérent, le premier membre des équations du théorème du tenseur phénoménal peut se mettre sous forme vectorielle, à savoir (généralisation du champ de Newton) :

$$(133)\qquad \frac{d}{dt}\left[\left(1+\frac{\sigma}{c^2}\right)\frac{v}{c}\delta m^*\right] - \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}\operatorname{grad}\sigma + \frac{1}{c}[\operatorname{rot}\mathrm{A}.v]\right)\delta m^* = 0,$$

où l'on a posé, avec Einstein,

$$(134)\qquad \sigma = -\frac{\gamma_{44}}{2}$$

et où l'on a désigné par A un vecteur ayant pour composantes

$$(135)\qquad \mathrm{A}_1 = \gamma_{14},\qquad \mathrm{A}_2 = \gamma_{24},\qquad \mathrm{A}_3 = \gamma_{34}.$$

(¹) Einstein a développé ces considérations dans l'hypothèse d'un fluide incohérent. Pour le cas d'un fluide à pressions internes, *voir* la Note de Maurice NUYENS, *Bull. Ac. Roy. Belg., Cl. des Sc.*, mars 1925.

L'élément de masse δm^* a été défini précédemment par (97). L'équation (133) est celle qui a été obtenue par Einstein ([1]) dans le cas d'une masse unitaire. La méthode suivie ici permet de préciser la signification de l'élément δm^*.

CHAPITRE III.

CHAMP GRAVIFIQUE ÉLECTROMAGNÉTIQUE.

15. **Définition du champ gravifique électromagnétique.** — Considérons le cas où le champ gravifique est produit par des charges électriques. Pour cela, introduisons la *fonction caractéristique* ([2])

$$\boxed{\mathfrak{M} = -\sum_{\alpha}\sum_{\beta} g^{\alpha\beta}\left(\mathfrak{N} u_\alpha u_\beta - \frac{\sqrt{-g}}{2}\sum_i\sum_j g^{ij}\mathrm{H}_{\alpha i}\mathrm{H}_{\beta j}\right)} \tag{136}$$

où $\mathfrak{N}$ est une densité généralisée de masse *due au champ électromagnétique* au point et à l'instant (x_1, x_2, x_3, x_4) considérés;

où u_α sont les quatre composantes covariantes de la vitesse de l'électricité ; ce sont aussi des fonctions de $x_1, \ldots, x_4$;

où $\mathrm{H}_{\alpha i}$ représentent les six composantes covariantes de la force électromagnétique; ce sont encore des fonctions de $x_1, \ldots, x_4$.

Remarquons que, par hypothèse, on a

$$\mathrm{H}_{\alpha i} \equiv -\mathrm{H}_{i\alpha}, \tag{137}$$

$$\mathrm{H}_{\alpha\alpha} \equiv 0. \tag{138}$$

16. **Équations fondamentales du champ gravifique électromagnétique.** — Grâce à la fonction caractéristique (136), nous pourrons calculer le tenseur phénoménal $\mathfrak{T}_{\alpha\beta}$ défini par (10). Nous aurons ici

$$\mathfrak{T}_{\alpha\beta} \equiv \mathfrak{N} u_\alpha u_\beta + \frac{\sqrt{-g}}{4} g_{\alpha\beta}\sum_i\sum_j \mathrm{H}^{ij}\mathrm{H}_{ij} - \sqrt{-g}\sum_i \mathrm{H}^i_\alpha \mathrm{H}_{\beta i}. \tag{139}$$

([1]) A. EINSTEIN, *The meaning of Relativity* (Methuen, London, 1922); voir éq. (116).

([2]) A. EINSTEIN, *Berlin. Ber.*, novembre 1914, p. 1030. — Th. DE DONDER, *Archives Musée Teyler*, 2e série, III. (La première partie, jusque éq. (300), de ce Mémoire a été terminée en octobre 1914, et a été envoyée à M. H. A. Lorentz, le 7 avril 1915.) *Voir* aussi éq. (307), datée du 5 octobre 1915. La troisième partie de ce Mémoire a été terminée le 21 avril 1916; elle a paru aussi dans les *Verslag* d'Amsterdam (1917). — H. A. LORENTZ, *Verslag Amsterdam*, janvier 1915, p. 1082, formule (35). — La théorie développée dans le présent Mémoire a été exposée la première fois dans notre Note du *Bull. de l'Ac. R. Belg.*, *Cl. Sc.*, 2 février 1924, p. 77-82. *Voir* spéc. éq. (23 où nous avons posé

(140) $$H_\alpha^\beta \equiv \sum_i g^{\beta i} H_{\alpha i}$$

et

(141) $$H^{\alpha\beta} \equiv \sum_i g^{\alpha i} H_i^\beta \equiv \sum_i \sum_j g^{\alpha i} g^{\beta j} H_{ij}; \qquad \text{d'où} \qquad H_\alpha^\beta \equiv \sum_i g_{i\alpha} H^{i\beta}.$$

En vertu de la définition (16) et (18), il résulte de (139) que

(142) $$\boxed{T_\alpha^\beta \equiv N u_\alpha u^\beta + \frac{1}{4}\varepsilon_\alpha^\beta \sum_i \sum_j H_{ij} H^{ij} + \sum_i H_\alpha^i H_i^\beta.}$$

Remarquons, pour ce qui concerne le dernier terme de (142), qu'on a

(142') $$\sum_i H_\alpha^i H_i^\beta \equiv -\sum_i H_{\alpha i} H^{\beta i}.$$

Nous avons encore posé

(143) $$N \equiv \frac{\mathfrak{M}}{\sqrt{-g}}.$$

De (142) on déduit immédiatement

(144) $$\boxed{T = N.}$$

D'une manière explicite, *les dix équations fondamentales de la Gravifique* deviennent ici

(145) $$\boxed{\frac{a}{2} g_{\alpha\beta} + b \mathcal{G}_{\alpha\beta} = N\left(u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} \sum_i \sum_j H_{ij} H^{ij} - \sum_i H_\alpha^i H_{\beta i}.}$$

L'analogie de ces équations (145) avec les équations (45) se rapportant au champ gravifique massique est digne de remarque. Le facteur N est ici d'*origine électromagnétique*, tandis que dans (37) il était d'*origine massique*.

Le tenseur électromagnétique (142) peut aussi s'écrire [1]

(147) $$T_\alpha^\beta \equiv N u_\alpha u^\beta + \frac{1}{2} \sum_i \left(H_{\overline{\beta} i} H^{\overline{\alpha} i} - H_{\alpha i} H^{\beta i}\right),$$

---

[1] TH. DE DONDER, *Archives du Musée Teyler*, loc. cit.; *Bull. de la Cl. des Sc.*

où $H^{\overline{\alpha i}}$ représente le symbole H surmonté *des deux indices qui avec α et i* forment une permutation paire $\alpha i \overline{\alpha i}$ des nombres 1, 2, 3, 4. Ainsi

$$
(148)\qquad \left\{\begin{array}{lll}
H^{\overline{12}} \equiv H^{34}, & H^{\overline{13}} \equiv -H^{24}, & H^{\overline{14}} \equiv H^{23},\\
H^{\overline{23}} \equiv H^{14}, & H^{\overline{24}} \equiv -H^{13}, & H^{\overline{34}} \equiv H^{12}.
\end{array}\right.
$$

De même, $H_{\overline{\alpha i}}$ représente H affecté des deux indices inférieurs qui avec α et i forment une permutation paire. Ainsi

$$
(149)\qquad \left\{\begin{array}{lll}
H_{\overline{12}} \equiv H_{34}, & H_{\overline{13}} \equiv -H_{24}, & H_{\overline{14}} \equiv H_{23},\\
H_{\overline{23}} \equiv H_{14}, & H_{\overline{24}} \equiv -H_{13}, & H_{\overline{34}} \equiv H_{12}.
\end{array}\right.
$$

En explicitant les composantes du tenseur mixte (147) on obtient le tableau complet suivant :

$$
(150)\qquad \left\{\begin{array}{l}
T_1^1 \equiv N u_1 u^1 - \frac{1}{2}(H_{12}H^{12} - H_{34}H^{34} + H_{13}H^{13} - H_{42}H^{42} + H_{14}H^{14} - H_{23}H^{23}),\\
T_1^2 \equiv N u_1 u^2 - (H_{13}H^{23} + H_{14}H^{24}),\\
T_1^3 \equiv N u_1 u^3 - (H_{14}H^{34} + H_{12}H^{32}),\\
T_1^4 \equiv N u_1 u^4 - (H_{12}H^{42} + H_{13}H^{43});
\end{array}\right.
$$

$$
(151)\qquad \left\{\begin{array}{l}
T_2^1 \equiv N u_2 u^1 - (H_{23}H^{13} + H_{24}H^{14}),\\
T_2^2 \equiv N u_2 u^2 - \frac{1}{2}(H_{23}H^{23} - H_{41}H^{41} + H_{24}H^{24} - H_{13}H^{13} + H_{21}H^{21} - H_{34}H^{34}),\\
T_2^3 \equiv N u_2 u^3 - (H_{24}H^{34} + H_{21}H^{31}),\\
T_2^4 \equiv N u_2 u^4 - (H_{21}H^{41} + H_{23}H^{43});
\end{array}\right.
$$

$$
(152)\qquad \left\{\begin{array}{l}
T_3^1 \equiv N u_3 u^1 - (H_{32}H^{12} + H_{34}H^{14}),\\
T_3^2 \equiv N u_3 u^2 - (H_{34}H^{24} + H_{31}H^{21}),\\
T_3^3 \equiv N u_3 u^3 - \frac{1}{2}(H_{34}H^{34} - H_{12}H^{12} + H_{31}H^{31} - H_{24}H^{24} + H_{32}H^{32} - H_{41}H^{41}),\\
T_3^4 \equiv N u_3 u^4 - (H_{31}H^{41} + H_{32}H^{42});
\end{array}\right.
$$

$$
(153)\qquad \left\{\begin{array}{l}
T_4^1 \equiv N u_4 u^1 - (H_{42}H^{12} + H_{43}H^{13}),\\
T_4^2 \equiv N u_4 u^2 - (H_{43}H^{23} + H_{41}H^{21}),\\
T_4^3 \equiv N u_4 u^3 - (H_{41}H^{31} + H_{42}H^{32}),\\
T_4^4 \equiv N u_4 u^4 - \frac{1}{2}(H_{41}H^{41} - H_{23}H^{23} + H_{42}H^{42} - H_{31}H^{31} + H_{43}H^{43} - H_{12}H^{12}).
\end{array}\right.
$$

---

de l'Ac. Roy. de Belg., mars 1919 (ou *Grav. einst.*, p. 61). Nos calculs ont été repris par W. Van den Berg, qui a adopté une méthode plus rapide; voir *Bull. Ac. R. Belg.*, juin 1925, p. 232 à 241.

Le tenseur symétrique $\mathfrak{T}_{\alpha\beta}$ peut aussi s'écrire

$$(154)\quad \mathfrak{T}_{\alpha\beta} \equiv \mathfrak{N}\, u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2}\sqrt{-g}\sum_i\sum_j g^{ij}\left[\left(\sqrt{-g}\,\mathrm{H}^{\overline{\alpha i}}\right)\left(\sqrt{-g}\,\mathrm{H}^{\overline{\beta j}}\right) + \mathrm{H}_{\alpha i}\mathrm{H}_{\beta j}\right].$$

En effet, par la théorie des déterminants, on établira l'identité

$$(155)\qquad \mathrm{H}_{\overline{\beta i}} \equiv -\left(\sqrt{-g}\right)^2 \sum_\mu\sum_\nu g^{\beta\mu} g^{i\nu}\,\mathrm{H}^{\overline{\mu\nu}};$$

d'autre part nous avons posé

$$(156)\qquad \mathrm{H}^{\beta i} \equiv \sum_\mu\sum_\nu g^{\beta\mu} g^{i\nu}\,\mathrm{H}_{\mu\nu}.$$

Grâce à ces identités, et en retournant à la formule (147), on obtient immédiatement

$$(157)\quad \mathrm{T}_\alpha^\beta \equiv \mathrm{N}\, u_\alpha u^\beta - \frac{1}{2}\sum_i\sum_\mu\sum_\nu g^{\beta\mu} g^{i\nu}\left[\left(\sqrt{-g}\,\mathrm{H}^{\overline{\mu\nu}}\right)\left(\sqrt{-g}\,\mathrm{H}^{\overline{\alpha i}}\right) + \mathrm{H}_{\alpha i}\mathrm{H}_{\mu\nu}\right].$$

Multiplions par $g_{\lambda\beta}$ et sommons par rapport à β; d'où

$$\mathrm{T}_{\alpha\lambda} \equiv \mathrm{N}\, u_\alpha u_\lambda - \frac{1}{2}\sum_i\sum_\mu\sum_\nu\sum_\beta g_{\lambda\beta} g^{\beta\mu} g^{i\nu}\left[\left(\sqrt{-g}\,\mathrm{H}^{\overline{\mu\nu}}\right)\left(\sqrt{-g}\,\mathrm{H}^{\overline{\alpha i}}\right) + \mathrm{H}_{\alpha i}\mathrm{H}_{\mu\nu}\right],$$

et cette formule se réduit sur-le-champ à l'équation (154).

17. Théorème du tenseur électromagnétique. — Reportons-nous aux quatre équations (25) qui expriment le théorème du tenseur phénoménal. Substituons-y les valeurs de $\mathfrak{T}_\alpha^\beta$ déduites de (47); rappelons que

$$\mathfrak{T}_\alpha^i \equiv \sqrt{-g}\,\mathrm{T}_\alpha^i.$$

Grâce à (48) et (51), en effectuant les calculs rappelés ci-dessus, nous obtenons le théorème du tenseur électromagnétique sous la forme [1]

$$(158)\quad \mathcal{F}_\alpha \equiv \mathfrak{N}\,\mathrm{A}_\alpha + u_\alpha \sum_i \frac{\partial(\mathfrak{N}\, u^i)}{\partial x_i}$$
$$+ \sum_i\sum_j\left[\sqrt{-g}\,\mathrm{H}^{\overline{\alpha j}}\frac{\partial \mathrm{H}_{\overline{ij}}}{\partial x_i} - \mathrm{H}_{\alpha j}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,\mathrm{H}^{ij}\right)}{\partial x_i}\right] = 0,$$

où A_α est donné par (205) de l'*Introduction*.

---

(1) *Grav. einst.*, éq. (246); *voir* aussi l'équation (135) de ce même Mémoire.

Posons aussi, dans (158),

$$\mathcal{F}_\alpha^{(e)} = \sum_i \sum_j \left[\sqrt{-g}\, \mathrm{H}^{\alpha j} \frac{\partial \mathrm{H}_{ij}}{\partial x_i} - \mathrm{H}_{\alpha j} \frac{\partial (\sqrt{-g}\, \mathrm{H}^{ij})}{\partial x_i} \right]; \tag{159}$$

alors le théorème du tenseur électromagnétique s'écrira

$$\mathcal{F}_\alpha \equiv \mathfrak{N} \mathrm{A}_\alpha + u_\alpha \sum_i \frac{\partial (\mathfrak{N} u^i)}{\partial x^i} + \mathcal{F}_\alpha^{(e)} = 0. \tag{160}$$

Ces équations peuvent être considérées comme définissant le facteur de densité $\mathfrak{N}$ d'origine électromagnétique.

Multiplions les équations (160) par u^α et sommons par rapport à α; d'où

$$\sum_\alpha \mathcal{F}_\alpha u^\alpha \equiv \mathfrak{N} \sum_\alpha \mathrm{A}_\alpha u^\alpha + \sum_\alpha u^\alpha u_\alpha \sum_i \frac{\partial (\mathfrak{N} u^i)}{\partial x_i} + \sum_\alpha \mathcal{F}_\alpha^{(e)} u^\alpha = 0. \tag{161}$$

En vertu de (211), (176) et (177) de l'*Introduction*, cette relation s'écrira

$$\boxed{\sum_\alpha \mathcal{F}_\alpha u^\alpha \equiv \sum_\alpha \left[\frac{\partial (\mathfrak{N} u^\alpha)}{\partial x_\alpha} + \mathcal{F}_\alpha^{(e)} u^\alpha \right] = 0.} \tag{162}$$

Grâce à cette dernière relation, le théorème du tenseur électromagnétique prendra la forme

$$\boxed{\mathcal{F}_\alpha \equiv \mathfrak{N} \mathrm{A}_\alpha - u_\alpha \sum_i \mathcal{F}_i^{(e)} u^i + \mathcal{F}_\alpha^{(e)} = 0.} \tag{163}$$

Multiplions par $g^{\alpha\beta}$, et sommons par rapport à β; d'où

$$\boxed{\mathcal{F}^\alpha \equiv \mathfrak{N} \mathrm{A}^\alpha - u^\alpha \sum_i \mathcal{F}_i^{(e)} u^i + \mathcal{F}^\alpha_{(e)} = 0,} \tag{164}$$

où nous avons posé

$$\mathcal{F}^\alpha_{(e)} = \sum_\beta g^{\alpha\beta} \mathcal{F}_\alpha^{(e)}. \tag{165}$$

Calcul de $\mathfrak{N}$. — Posons

$$(166) \qquad \sum_\alpha \sum_\beta g_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta \quad \text{ou} \quad \sum_\alpha A_\alpha A^\alpha \equiv B.$$

Multiplions (163) par A^α et sommons par rapport à α; nous obtenons en vertu de (166)

$$(167) \qquad \mathfrak{N} = \frac{1}{B}\left[\sum_\alpha A^\alpha u_\alpha \sum_i \mathfrak{F}_i^{(e)} u^i - \sum_\alpha A^\alpha \mathfrak{F}_\alpha^{(e)}\right]$$

ou, en vertu de (211) de l'*Introduction*,

$$(168) \qquad \boxed{\mathfrak{N} = -\frac{1}{B}\sum_\alpha A^\alpha \mathfrak{F}_\alpha^{(e)}.}$$

Rappelons que $\mathfrak{F}_\alpha^{(e)}$ et A^α sont respectivement donnés par (159) de ce Mémoire et par (199) de l'*Introduction*.

CHAPITRE IV.

CHAMP GRAVIFIQUE ÉLECTROMAGNÉTIQUE (*suite*). ÉQUATIONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES MAXWELLIENNES.

18. Équations électromagnétiques maxwelliennes. — Admettons que les composantes covariantes $H_{\alpha\beta}$ de l'intensité de champ électromagnétique, introduites au début du Chapitre précédent, dérivent des quatre composantes covariantes Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4, d'un *potentiel électromagnétique*

$$(169) \qquad \boxed{H_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x_\alpha}.}$$

La dérivée partielle de Φ_α par rapport à x_β sera souvent désignée, dans ce qui suit, par $\Phi_{\alpha,\beta}$.

Introduisons maintenant la *fonction fondamentale électroma-*

gnétique (¹)

$$(170)\qquad \boxed{\mathcal{D}^{(e)} = \sum_\alpha \left[\sigma u^\alpha \Phi_\alpha + \frac{\sqrt{-g}}{4} \sum_\beta \sum_i \sum_j g^{\alpha\beta} g^{ij} H_{\alpha i} H_{\beta j} \right].}$$

Cette fonction présente un terme commun (à un facteur $\frac{1}{2}$ près, non essentiel) avec la fonction caractéristique gravifique $\mathfrak{M}$ définie au début du Chapitre précédent. La fonction σ représente le facteur de densité *électrique*. Rappelons que les u^α sont les composantes contravariantes de la vitesse de l'électricité.

On peut écrire $\mathcal{D}^{(e)}$ d'une manière plus condensée [Chap. préc. (140)] :

$$(171)\qquad \mathcal{D}^{(e)} = \sum_\alpha \left[\sigma u^\alpha \Phi_\alpha - \frac{\sqrt{-g}}{4} \sum_\beta H_\alpha^\beta H_\beta^\alpha \right].$$

Annulons chacune des dérivées variationnelles de cette fonction par rapport à Φ_α $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$:

$$(172)\qquad \boxed{\frac{\delta \mathcal{D}^{(e)}}{\delta \Phi_\alpha} = 0.}$$

Pour effectuer le calcul, remarquons d'abord que (170) peut s'écrire, plus explicitement,

$$(173)\qquad \mathcal{D}^{(e)} = \sum_\alpha \left[\sigma u^\alpha \Phi_\alpha + \frac{\sqrt{-g}}{4} \sum_\beta \sum_i \sum_j g^{\alpha\beta} g^{ij} (\Phi_{\alpha,i} - \Phi_{i,\alpha})(\Phi_{\beta,j} - \Phi_{j,\beta}) \right],$$

et que, d'autre part, on a

$$(174)\qquad \frac{\delta \mathcal{D}^{(e)}}{\delta \Phi_\alpha} = \frac{\partial \mathcal{D}^{(e)}}{\partial \Phi_\alpha} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathcal{D}^{(e)}}{\partial \Phi_{\alpha,i}} \right).$$

(¹) Th. De Donder, *Bull. Ac. R. Belg., Cl. des Sciences*, 2 février 1924, p. 81.

Remarquons que tout ce Chapitre peut être rattaché d'une manière élégante aux *invariants intégraux* (Bateman, *London math. Soc. Proc.*, 1910, p. 227 à 250; Th. De Donder, *Archives Musée de Teyler*, 1915-1917) et aux *déterminants symboliques de* Buhl (*C. R. Ac. Sc.*, Paris, 9 août, 20 septembre et 26 octobre 1920, et *Annales de la Faculté de Toulouse*, 1921); *voir* aussi *Formules stokiennes* (*Mémorial des Sciences mathématiques*, n° 16) du même auteur.

On obtient immédiatement

$$\sum_i \frac{\partial(\sqrt{-g}\,\mathrm{H}^{\alpha i})}{\partial x_i} = \sigma u^\alpha, \tag{175}$$

ou bien

$$\boxed{\sum_i \frac{\partial \mathcal{H}^{\alpha i}}{\partial x_i} = \sigma u^\alpha} \tag{176}$$

en posant

$$\mathcal{H}^{\alpha i} \equiv \sqrt{-g}\,\mathrm{H}^{\alpha i}. \tag{177}$$

De l'hypothèse (169), il résulte, tout de suite, que

$$\sum_i \frac{\partial \mathrm{H}_{\overline{\alpha i}}}{\partial x_i} = 0; \tag{178}$$

la signification du tiret a été donnée au Chapitre précédent. En posant

$$\mathrm{H}_{\overline{\alpha i}} \equiv \mathcal{H}_*^{\alpha i}, \tag{179}$$

(178) prend la forme

$$\boxed{\sum_i \frac{\partial \mathcal{H}_*^{\alpha i}}{\partial x_i} = 0.} \tag{180}$$

Nous disons que les huit équations (175) et (178), — ou (176) et (180), — sont les *équations électromagnétiques maxwelliennes.*

Les fonctions $\mathcal{H}^{\alpha i}$ et $\mathcal{H}_*^{\alpha i}$ *sont de même variance.*

Posons aussi

$$\mathfrak{O}^{(\mu)} \equiv \sum_\alpha \sum_\beta \mathrm{H}_{\alpha\beta}\,\mathrm{H}_{\overline{\alpha\beta}} \quad \text{ou} \quad \sum_\alpha \sum_\beta \mathrm{H}_{\alpha\beta}\,\mathrm{H}_*^{\beta\alpha}, \tag{181}$$

et annulons les dérivées variationnelles de cette fonction par rapport aux Φ^α. Nous avons

$$\frac{\delta \mathfrak{O}^{(\mu)}}{\delta \Phi_\alpha} \equiv -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \mathfrak{O}^{(\mu)}}{\partial \Phi_{\alpha,i}}\right). \tag{182}$$

Le calcul conduit immédiatement aux quatre équations (178) ou (180).

19. Conséquences des équations électromagnétiques maxwelliennes. — Des équations (175), il suit immédiatement que

(183)
$$\boxed{\sum_\alpha \frac{\partial(\sigma u^\alpha)}{\partial x_\alpha} = 0.}$$

Cette équation exprime la conservation de l'électricité dans le mouvement de cette dernière.

Posons

(184)
$$\delta\tau^e = \sigma\,\delta x_1\,\delta x_2\,\delta x_3\,\delta x_4;$$

d'où

(184')
$$\frac{d}{ds}\int \delta\tau^e = 0.$$

20. Conséquences des équations einsteiniennes et maxwelliennes. — Reportons-nous à (159); nous aurons ici, en vertu de (175) et de (178),

(185)
$$\boxed{\mathcal{F}_\alpha^e = +\sigma\sum_i u^i \mathrm{H}_{\alpha i}.}$$

Il en résulte, en tenant compte de (169),

(186)
$$\boxed{\sum_\alpha \mathcal{F}_\alpha^e\, u^\alpha = 0.}$$

Par conséquent l'*équation* (162) *devient*

(187)
$$\boxed{\sum_\alpha \frac{\partial(\mathfrak{M}u^\alpha)}{\partial x_\alpha} = 0.}$$

Posons

(188)
$$\delta\tau^{(m)} = \mathfrak{M}\,\delta x_1\,\delta x_2\,\delta x_3\,\delta x_4 = 0,$$

d'où

(188')
$$\frac{d}{ds}\int \delta\tau^{(m)} = 0.$$

Ces relations sont à rapprocher de (183), (184) et (184'). L'équation (187) ou (188') exprime *la conservation de la masse d'ori-*

gine électromagnétique, dans le mouvement de celle-ci et de l'électricité. Ce mouvement sera défini par les vitesses généralisées u^1, u^2, u^3, u^4, lesquelles sont soumises, rappelons-le, à l'identité (177) de l'*Introduction*.

De (183) et de (187), il résulte qu'on a

$$(189) \qquad \frac{d\left(\frac{\mathfrak{M}}{\sigma}\right)}{ds} = 0;$$

donc le rapport $\frac{\mathfrak{M}}{\sigma}$ demeure constant pendant le mouvement de l'électricité.

Les quatre équations (163) du *théorème du tenseur électromagnétique* T_α^β deviennent (¹), en vertu de (186) et de (185),

$$(190) \qquad \boxed{\mathfrak{F}_\alpha \equiv \mathfrak{M} A_\alpha + \sigma \sum_\beta u^\beta H_{\alpha\beta} = 0.}$$

On en déduit immédiatement

$$(190') \qquad \mathfrak{F}^\alpha \equiv \mathfrak{M} A^\alpha - \sigma \sum_\beta u^\beta H_\beta^\alpha = 0.$$

De ces quatre équations (190), trois seulement sont distinctes, à cause de la relation (161),

$$(191) \qquad \sum_\alpha \mathfrak{F}_\alpha u^\alpha = 0.$$

On a, de même,

$$(56') \qquad \sum_\alpha \mathfrak{F}^\alpha u_\alpha = 0.$$

En vertu de (185) la valeur (168) de $\mathfrak{M}$ devient

$$(192) \qquad \boxed{\mathfrak{M} = -\frac{\sigma}{B} \sum_\alpha \sum_\beta A^\alpha u^\beta H_{\alpha\beta}.}$$

Remplaçons, dans (190), $\mathfrak{M}$ par sa valeur (192); on aura, en

(¹) *Grav. einst.*, éq. (350').

vertu de (166).

$$\sigma \sum_j u^j \sum_i A^i [- A_\alpha H_{ij} + A_i H_{\alpha j}] = 0, \tag{193}$$

ou encore, si $\sigma \neq 0$,

$$\boxed{\sum_i \sum_j A^i u^j [- A_\alpha H_{ij} + A_i H_{\alpha j}] = 0.} \tag{194}$$

On ne peut pas annuler, *dans* (190), *le facteur de densité massique* $\mathfrak{M}$ *d'origine électromagnétique* (¹) car alors les équations (190) se réduiraient, pour $\sigma \neq 0$, c'est-à-dire aux points électrisés, à un système de quatre équations linéaires et homogènes en u^1, u^2, u^3, u^4. Le déterminant des $H_{\alpha\beta}$ étant, en général, différent de zéro, ces équations n'admettraient que la solution $u^\alpha \equiv 0$, ce qui est absurde en vertu de la condition (177) de l'*Introduction*.

Forme lagrangienne. — Les coefficients de σ dans les équations (190) peuvent être mis sous la forme lagrangienne. En effet, on a

$$\sum_\beta u^\beta H_{\alpha\beta} = \sum u^\beta (\Phi_{\alpha,\beta} - \Phi_{\beta,\alpha}) \equiv \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial u^\alpha}\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\right), \tag{195}$$

où nous avons posé

$$U \equiv \sum_\alpha u^\alpha \Phi_\alpha; \tag{196}$$

on a bien, en vertu de cette notation,

$$\frac{\partial U}{\partial u^\alpha} = \Phi_\alpha, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial u^\alpha}\right) \equiv \frac{d\Phi_\alpha}{ds}; \tag{197}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\right) \equiv \sum_\beta u^\beta \Phi_{\beta.\alpha}, \tag{198}$$

ce qui démontre la validité de (195). On aura remarqué que, conformément au calcul des variations, les variables x_α, u^α sont traitées ici comme des variables *distinctes*.

(¹) *Grav. einst.*, § 43. *Voir* aussi, pour une autre hypothèse, les *Premiers Compléments de la Gravifique einsteinienne* [Compl. I, éq. (21)].

Le théorème (190) du tenseur asymétrique électromagnétique T_α^β peut donc s'écrire [1], grâce à (195) et à (212) de l'*Introduction*,

$$(199)\qquad \mathcal{F}_\alpha \equiv \mathfrak{N}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial W}{\partial u^\alpha}\right) - \left(\frac{\partial W}{\partial x_\alpha}\right)\right] + \sigma\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial u^\alpha}\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\right)\right] = 0.$$

Rappelons que ces quatre équations se réduisent à trois équations distinctes. Multiplions les deux membres de (199) par $\delta x_1\,\delta x_2\,\delta x_3\,\delta x_4$ et utilisons (184′) et (188′), d'où

$$(200)\qquad \int \delta\tau^m\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial W}{\partial u^\alpha}\right) - \left(\frac{\partial W}{\partial x_\alpha}\right)\right] + \int \delta\tau^e \int \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial u^\alpha}\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\right)\Big] = 0.$$

Forme importante de la fonction caractéristique $\mathfrak{M}$ (136). — En tenant compte de la relation

$$(201)\qquad \sum_\alpha \sum_\beta g^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta \equiv 1,$$

la fonction caractéristique $\mathfrak{M}$ peut s'écrire, (141),

$$(202)\qquad \mathfrak{M} = -\mathfrak{N} + \frac{\sqrt{-g}}{2}\sum_\alpha\sum_\beta H_{\alpha\beta}H^{\alpha\beta};$$

d'où, en introduisant la valeur (192) de $\mathfrak{N}$,

$$(203)\qquad \boxed{\mathfrak{M} = \sum_\alpha\sum_\beta\left[\frac{\sigma}{B}A^\alpha u^\beta + \frac{\sqrt{-g}}{2}H^{\alpha\beta}\right]H_{\alpha\beta}.}$$

On aurait pu écrire aussi, en vertu de (176),

$$(204)\qquad \mathfrak{M} = \sum_\alpha\sum_\beta\left[\frac{A^\alpha}{B}\sum_\gamma \frac{\partial \mathcal{H}^{\beta\gamma}}{\partial x_\gamma} + \frac{1}{2}\mathcal{H}^{\alpha\beta}\right]H_{\alpha\beta}.$$

Remarque I. — Si l'on voulait identifier $\mathfrak{M}$ donné par (203), *avec* $2\,\mathcal{O}^{(e)}$ donné par (170), on aurait la *condition restrictive*

$$(205)\qquad \sum_\alpha u^\alpha\left[\frac{1}{B}\sum_\beta A^\beta H_{\alpha\beta} + 2\Phi_\alpha\right] = 0.$$

---

[1] Comparer aux équations (351′) de la *Gravifique einsteinienne*; *voir* aussi *Premiers Compléments* [Compl. II, éq. (45)] dans le cas où l'on pose $\mathfrak{F} = L\tau$.

En vertu de (192) et de (189), on devrait donc avoir

$$(206)\qquad \frac{d}{ds}\sum_{\alpha}\Phi_{\alpha}u^{\alpha}=0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dU}{ds}=0.$$

Remarque II. — On peut reprendre l'étude [1] des équations (200) en utilisant les variables *canoniques*, la variable indépendante étant s.

20 *bis*. **Équation supplémentaire généralisée de Maxwell.** — L'équation supplémentaire de Maxwell sera, par définition [2],

$$(224)\qquad \boxed{\psi=\frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_{\alpha}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\Phi^{\alpha})}{\partial x_{\alpha}}=0}$$

où l'on a posé $\Phi^{\alpha}=\sum_{\beta}g^{\alpha\beta}\Phi_{\beta}$.

Elle permet de simplifier les équations électromagnétiques maxwelliennes (176) et (180), de manière qu'elles ne contiennent chacune que les dérivées secondes d'un seul potentiel électromagnétique Φ_{α}; après quelques calculs, on obtient, en effet,

$$(225)\qquad \boxed{\frac{\sigma u_{\alpha}}{\sqrt{-g}}=K_{\alpha}+\sum_{i}\sum_{j}g^{ij}\frac{\partial^2\Phi_{\alpha}}{\partial x_i\,\partial x_j},}$$

où K_{α} ne renferme pas de dérivées secondes de Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4.

21. **Le champ gravifique électromagnétique considéré dans l'espace et le temps.** — Rappelons les formules (182), (185) et (186) de l'*Introduction* :

$$(229)\qquad u^{\alpha}=\frac{v^{\alpha}}{V}\quad(\alpha=1,2,3,4),\qquad v^4=1,\qquad V=\frac{ds}{dt}=\sqrt{\sum_{\alpha}\sum_{\beta}g_{\alpha\beta}v^{\alpha}v^{\beta}}.$$

Posons, (170),

$$(230)\qquad \rho=\frac{\sigma}{V}.$$

---

[1] M. Nuyens, *Bull. Ac. R. Belg.*, novembre 1925.

[2] Th. De Donder, *Archives Musée Teyler* (1915-1917), éq. (125). *Voir* aussi *Grav. einst.*, éq. (282) à (290). — A. S. Eddington, *The math. Theory of Relativity*, 2e édition, 1924, p. 175 à 179.

Les équations maxwelliennes (176) et (180) deviennent

$$(231)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{H}^{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathcal{H}^{31}}{\partial x_3} = \frac{\partial \mathcal{H}^{41}}{\partial t} + \rho v^1, \\ &\frac{\partial \mathcal{H}^{23}}{\partial x_3} - \frac{\partial \mathcal{H}^{12}}{\partial x_1} = \frac{\partial \mathcal{H}^{42}}{\partial t} + \rho v^2, \\ &\frac{\partial \mathcal{H}^{31}}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathcal{H}^{23}}{\partial x_2} = \frac{\partial \mathcal{H}^{43}}{\partial t} + \rho v^3, \\ &\frac{\partial \mathcal{H}^{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathcal{H}^{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{H}^{43}}{\partial x_3} = \rho ; \end{aligned}\right.$$

$$(232)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{H}_*^{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathcal{H}_*^{31}}{\partial x_3} = \frac{\partial \mathcal{H}_*^{41}}{\partial t}, \\ &\frac{\partial \mathcal{H}_*^{23}}{\partial x_3} - \frac{\partial \mathcal{H}_*^{12}}{\partial x_1} = \frac{\partial \mathcal{H}_*^{42}}{\partial t}, \\ &\frac{\partial \mathcal{H}_*^{31}}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathcal{H}_*^{23}}{\partial x_2} = \frac{\partial \mathcal{H}_*^{43}}{\partial t}, \\ &\frac{\partial \mathcal{H}_*^{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathcal{H}_*^{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{H}_*^{43}}{\partial x_3} = 0. \end{aligned}\right.$$

L'équation (183) devient

$$(233)\quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho v^3)}{\partial x_3} = 0;}$$

cette équation est équivalente à

$$(234)\quad \boxed{\frac{d}{dt}\int \rho\, \delta x_1\, \delta x_2\, \delta x_3 = 0,}$$

$\frac{d}{dt}$ désignant une dérivée *totale*, et l'intégration étant étendue à un domaine *spatial* dans la carte Γ.

Posons

$$(235)\quad \delta e^* \equiv \rho\, \delta x_1\, \delta x_2\, \delta x_3 ;$$

alors, l'invariant intégral (234) devient

$$(236)\quad \boxed{\frac{d}{dt}\int \delta e^* = 0.}$$

La *force électromagnétique* (185) devient, dans l'espace et le temps,

(237)
$$\mathcal{F}_\alpha^{(e)} \equiv \rho\left(\mathrm{H}_{\alpha 4} + \sum_{i=1}^{3} v^i \mathrm{H}_{\alpha i}\right),$$

c'est-à-dire, d'une manière explicite,

(238)
$$\left\{\begin{array}{l}
\mathcal{F}_1^{(e)} \equiv \rho(v^2 \mathrm{H}_{12} - v^3 \mathrm{H}_{31}) - \rho \mathrm{H}_{41},\\
\mathcal{F}_2^{(e)} \equiv \rho(v^3 \mathrm{H}_{23} - v^1 \mathrm{H}_{12}) - \rho \mathrm{H}_{42},\\
\mathcal{F}_3^{(e)} \equiv \rho(v^1 \mathrm{H}_{31} - v^2 \mathrm{H}_{23}) - \rho \mathrm{H}_{43},\\
\mathcal{F}_4^{(e)} \equiv \rho(v^1 \mathrm{H}_{41} + v^2 \mathrm{H}_{42} + v^3 \mathrm{H}_{43}).
\end{array}\right.$$

Le facteur de densité $\mathfrak{N}$ satisfait à l'équation (187) ; d'où

(239)
$$\boxed{\frac{\partial(\mathfrak{N}\mathrm{V}^{-1})}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial(\mathfrak{N}\mathrm{V}^{-1} v^i)}{\partial x_i} = 0.}$$

Cette équation équivaut à

(240)
$$\boxed{\frac{d}{dt}\int (\mathfrak{N}\mathrm{V}^{-1})\, \delta x_1\, \delta x_2\, \delta x_3 = 0,}$$

dans laquelle $\frac{d}{dt}$ représente une dérivée *totale*, et où l'intégrale est étendue à un domaine spatial; on *suit* le mouvement de l'électricité quand on dérive *totalement* par rapport à t.

Posons

(241)
$$\boxed{c^2\, \delta m^* \equiv (\mathfrak{N}\mathrm{V}^{-1})\, \delta x_1\, \delta x_2\, \delta x_3.}$$

D'où le spectateur S écrira dans la carte Γ que

(242)
$$\boxed{\frac{d}{dt}\int \delta m^* = 0.}$$

Retournons au théorème du tenseur asymétrique (190′) et tenons compte de la formule (219) de l'*Introduction;* nous aurons

(243)
$$\mathcal{F}^\alpha \equiv \mathfrak{N}\mathrm{V}^{-1}\left[\frac{d(v^\alpha \mathrm{V}^{-1})}{dt} + \mathrm{V}^{-1}\sum_\beta\sum_\gamma \left\{\begin{matrix}\beta\gamma\\ \alpha\end{matrix}\right\} v^\beta v^\gamma\right] - \rho\sum_\beta v^\beta \mathrm{H}_\beta^\alpha = 0.$$

Multiplions les deux membres de (243) par δx_1, δx_2, δx_3; cette équation deviendra, en vertu de (235), (241) et (242),

(244)
$$c^2\left[\frac{d(v^\alpha \mathrm{V}^{-1}\, \delta m^*)}{dt} + (\mathrm{V}^{-1}\, \delta m^*)\sum_\beta\sum_\gamma \left\{\begin{matrix}\beta\gamma\\ \alpha\end{matrix}\right\} v^\beta v^\gamma\right] - \delta e^* \sum_\beta v^\beta \mathrm{H}_\beta^\alpha = 0.$$

Remarquons que le crochet qui figure dans (244) est identique au premier membre de (99).

Si l'on pose, avec le spectateur S,

$$(245) \qquad \boxed{V\,\delta m = c\,\delta m^*}$$

on pourra écrire (244) sous la forme

$$(246) \qquad \boxed{c\left[\frac{d(\delta m\, v^\alpha)}{dt} + \delta m \sum_\beta \sum_\gamma \left\{ {\beta\gamma \atop \alpha} \right\} v^\beta v^\gamma\right] - \delta e^* \sum_\beta v^\beta H^\alpha_\beta = 0.}$$

Remarquons que le crochet qui figure dans (246) est identique au premier membre de (331).

Forme lagrangienne. — Posons, par analogie avec (196),

$$(247) \qquad U^* = \sum_\alpha v^\alpha \Phi_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4).$$

Considérons x_1, x_2, x_3, x_4 et v^1, v^2, v^3, v^4 comme deux groupes de variables indépendantes; nous aurons

$$(248) \qquad \left(\frac{\partial U^*}{\partial v^\alpha}\right) = \Phi_\alpha, \qquad \left(\frac{\partial U^*}{\partial x_\alpha}\right) = \sum_\beta v^\beta \Phi_{\beta,\alpha};$$

d'où

$$(249) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U^*}{\partial v^\alpha}\right) = \sum_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{\partial U^*}{\partial v^\alpha}\right) v^\beta = \sum_\beta v^\beta \Phi_{\alpha,\beta}.$$

Les relations précédentes permettent donc d'écrire, en vertu de (229),

$$(250) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U^*}{\partial v^\alpha}\right) - \left(\frac{\partial U^*}{\partial x_\alpha}\right) = \sum_\beta v^\beta(\Phi_{\alpha,\beta} - \Phi_{\beta,\alpha}) = V \sum_\beta u^\beta H_{\alpha\beta}.$$

Grâce à (249) et à la formule (223) de l'*Introduction*, le théorème du tenseur asymétrique électromagnétique, exprimé par (190), s'écrira

$$(251) \qquad \boxed{(\mathfrak{M} V^{-1})\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial v^\alpha}\right) - \left(\frac{\partial V}{\partial x_\alpha}\right)\right] + \rho\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U^*}{\partial v^\alpha}\right) - \left(\frac{\partial U^*}{\partial x_\alpha}\right)\right] = 0.}$$

Ces relations sont à rapprocher de (199) [1], ainsi que des équations (104) relatives au fluide massique incohérent.

---

[1] Les relations (110) ont été établies dans la *Gravifique einsteinienne* (178) et (328); si l'on y identifie $\mathfrak{T}_i^{(a)}$ et $\mathfrak{T}_\alpha^{(e)}$, on obtient les équations (251).

Multiplions les deux membres de (251) par $\delta x_1\,\delta x_2\,\delta x_3$ et utilisons (236) et (242); d'où, en suivant l'électricité dans son mouvement, on aura ([1])

$$(252)\quad \frac{d}{dt}\int\left(\frac{\partial V}{\partial v^\alpha}\right)c^2\,\delta m^* - \int\left(\frac{\partial V}{\partial x_\alpha}\right)c^2\,\delta m^* + \frac{d}{dt}\int\left(\frac{\partial U^*}{\partial v^\alpha}\right)\delta e^* - \int\left(\frac{\partial U^*}{\partial x_\alpha}\right)\delta e^* = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4).$$

Les équations (252) peuvent aussi s'écrire

$$(253)\quad \int(c^2\,\delta m^*)\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial v^\alpha}\right) - \left(\frac{\partial V}{\partial x_\alpha}\right)\right] + \int\delta e^*\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U^*}{\partial v^\alpha}\right) - \left(\frac{\partial U^*}{\partial x_\alpha}\right)\right] = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4).$$

22. Variables canoniques dans l'espace et le temps. — Introduisons les variables $p_i^{(m)}$ et $p_i^{(e)}$ en posant

$$(254)\quad \left\{\begin{aligned} p_i^{(m)} &\equiv \left(\frac{\partial V}{\partial v^i}\right) \\ p_i^{(e)} &\equiv \left(\frac{\partial U^*}{\partial v^i}\right) \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Introduisons en outre les fonctions

$$(255)\quad \left\{\begin{aligned} H_*^{(m)} &\equiv -V + \sum_i p_i^{(m)} v^i, \\ H_*^{(e)} &\equiv -U^* + \sum_i p_i^{(e)} v^i \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Rappelons ([2]) qu'on a les relations

$$(256)\quad \frac{\partial V}{\partial x_i} = -\frac{\partial H_*^{(m)}}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial U^*}{\partial x_i} = -\frac{\partial H_*^{(e)}}{\partial x_i},$$

où $H^{(m)}$ est fonction des x_α et des $p_\alpha^{(m)}$, et où $H^{(e)}$ est fonction des x_α et $p_\alpha^{(e)}$.

Les équations (253) nous fournissent les *trois* équations suivantes :

$$(257)\quad \int c^2\,\delta m^*\left[\frac{dp_i^{(m)}}{dt} + \frac{\partial H_*^{(m)}}{\partial x_i}\right] + \int\delta e^*\left[\frac{dp_i^{(e)}}{dt} + \frac{\partial H_*^{(e)}}{\partial x_i}\right] = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

En se reportant à (248) et à (222) de l'*Introduction*, on obtient

---

([1]) Ce sont les équations (354) de la *Gravifique einsteinienne* (1921).

([2]) *Voir*, par exemple, P. Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. II, 1924, p. 420 (Paris, Gauthier-Villars).

immédiatement

$$(258)\qquad \begin{cases} p_i^{(m)} = \sqrt{-1}\sum_{a=1}^{4} g_{ai} v^a \\ p_i^{(e)} = \Phi_i \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Substituons ces valeurs dans (255); d'où, après quelques réductions,

$$(259)\qquad H_*^{(m)} = -\sqrt{-1}\sum_{a=1}^{4} g_{a4} v^a.$$

$$(260)\qquad H_*^{(e)} = -\Phi_4.$$

Rappelons que $v^4 = 1$, et qu'il reste à tirer les v^1, v^2, v^3 de (259) en fonction de $p_1^{(m)}$, $p_2^{(m)}$, $p_3^{(m)}$, pour les substituer dans le second membre de (259).

Dynamique de l'électron dans l'espace et le temps. — Étendons les intégrales qui figurent dans (253) à un électron et remplaçons δm^* et δe^* respectivement par *les constantes* m^* et e^* qui caractérisent, dans la carte Γ de S, l'électron considéré pendant son mouvement. Nous pourrons alors mettre (253) sous la forme

$$(261)\qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(c^2 m^* V + e^* U^*)}{\partial v^\alpha}\right] - \left[\frac{\partial(c^2 m^* V + e^* U^*)}{\partial x_\alpha}\right] = 0.$$

Introduisons maintenant la fonction de Lagrange

$$(262)\qquad \boxed{L^* \equiv c^2 m^* V + e^* U^*;}$$

les équations (261) prennent alors la forme lagrangienne

$$(263)\qquad \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial v^i}\right) - \left(\frac{\partial L^*}{\partial x_i}\right) = 0}$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Passons aux variables canoniques en introduisant la fonction de Hamilton

$$(264)\qquad \boxed{H^* = -L^* + \sum_{i=1}^{3} p_i v^i}$$

où

(265) $$p_i = \frac{\partial L^*}{\partial v^i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

En procédant comme ci-dessus, on aura

(266) $$\frac{\partial L^*}{\partial x_i} = -\frac{\partial H^*}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où H^* est une fonction des x_i et des p_i $(i = 1, 2, 3)$.

Il en résulte immédiatement les équations canoniques

(267) $$\boxed{\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H^*}{\partial x_i}, \\ \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial H^*}{\partial p_i}. \end{aligned}}$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

On aura, en développant (265),

(268) $$p_i = c^2 m^* V^{-1} \sum_{a=1}^{4} g_{ai} v^a + e^* \Phi_i \qquad (i = 1, 2, 3);$$

d'où, (264),

(269) $$\boxed{H^* = -c^2 m^* V^{-1} \sum_{a=1}^{4} g_{a4} v^a - e^* \Phi_4.}$$

Dans (269) nous devons, grâce à (268), exprimer v^1, v^2, v^3 au moyen de p_1, p_2, p_3. Pour calculer aisément les v^1, v^2, v^3, posons, par extension de (268),

(270) $$p_4 = c^2 m^* V^{-1} \sum_{a=1}^{4} g_{a4} v^a + e^* \Phi_4;$$

d'où (269) peut s'écrire

(271) $$H^* = -p_4.$$

Joignons (270) à (268) et considérons le système suivant de quatre équations linéaires en v^1, v^2, v^3 et v^4 :

(272) $$p_\alpha = c^2 m^* V^{-1} \sum_{a=1}^{4} g_{a\alpha} v^a + e^* \Phi_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4).$$

De ces quatre équations, on tire immédiatement

(273) $$v^\alpha = \frac{V}{c^2 m^*} \sum_{\beta=1}^{4} g^{\alpha\beta} (p_\beta - e^* \Phi_\beta) \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4).$$

Substituons ces valeurs dans V^2 fourni par (229); d'où, après quelques réductions faciles,

$$(274)\quad (c^2 m^*)^2 = \sum_\alpha \sum_\beta g^{\alpha\beta}(p_\alpha - e^* \Phi_\alpha)(p_\beta - e^* \Phi_\beta) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4).$$

De cette équation, on tirera p_4 ; on verra aisément que, devant le radical qui figure dans p_4, il faudra prendre le signe *plus*, si l'on suppose V positif.

En vertu de (271), la valeur de p_4 changée de signe n'est autre que la fonction hamiltonienne H^*. De cette remarque, il résulte immédiatement que l'équation de Jacobi correspondant aux équations différentielles (267) s'obtient en remplaçant p_α par $\frac{\partial S}{\partial x_\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) dans l'équation (274).

D'où l'*équation de Jacobi* (¹) cherchée :

$$(275)\quad \boxed{\sum_\alpha \sum_\beta g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial S}{\partial x_\alpha} - e^* \Phi_\alpha\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x_\beta} - e^* \Phi_\beta\right) = (c^2 m^*)^2.}$$

23. Le champ électromagnétique de Maxwell-Lorentz. — Supposons que le champ gravifique se réduise à un champ de Minkowski; autrement dit, supposons que le $\overline{\delta s}^2$ se réduise à

$$(282)\quad \delta s^2 = -\delta x^2 - \delta y^2 - \delta z^2 + c^2\,\delta t^2.$$

Alors, la relation (143) devient

$$(283)\quad N = \frac{\mathfrak{N}}{c},$$

où c représente la vitesse de la lumière dans le vide.

En adoptant les notations de H.-A. Lorentz (²) nous posons (³)

$$(284)\quad \begin{cases} H_{12} = h_z, & H_{14} = +c\,d_x, \\ H_{13} = -h_y, & H_{24} = +c\,d_y, \\ H_{23} = h_x, & H_{34} = +c\,d_z, \end{cases}$$

(¹) On trouvera dans notre Note : *De l'Intégration des équations du champ gravifique massique et électromagnétique* (*Congrès de juillet* 1925 *de l'Association française pour l'Avancement des Sciences*) des indications concernant l'importance pratique de cette équation (275). On trouvera des problèmes fort intéressants traités dans deux Mémoires de K. Ogura (*Japanese Journal of Physics*, vol. III, nᵒˢ 4-6, p. 75 à 94), dans un travail de von Laue (*Die Theorien der Radiologie*, Leipzig, 1924, p. 15 à 37) et un autre de Sommerfeld publié dans le même recueil (*Theorien der Radiologie*, 1924, p. 212 à 214).

(²) H. A. LORENTZ, *Theory of electrons* (Leipzig, 1909).

(³) TH. DE DONDER, *Arch. Musée Teyler*, p. 16 et suiv.

où d_x, d_y, d_z sont les trois composantes du déplacement électrique d et ch_x, ch_y, ch_z celles de la force magnétique du champ considéré.

Alors, en se reportant à (141) et (149), on trouvera

$$(285)\quad \left\{\begin{array}{llll} H^{12} = h_z, & H^{14} = -\frac{1}{c} d_x, & H_{\overline{12}} = c\, d_z, & H_{\overline{14}} = h_x, \\ H^{13} = -h_y, & H^{24} = -\frac{1}{c} d_y, & H_{\overline{13}} = -c\, d_y, & H_{\overline{24}} = h_y, \\ H^{23} = h_x, & H^{34} = -\frac{1}{c} d_z, & H_{\overline{23}} = c\, d_x, & H_{\overline{34}} = h_z. \end{array}\right.$$

La fonction caractéristique (136) peut alors s'écrire

$$(286)\qquad \mathfrak{M} = -\mathrm{N}c + c(h^2 - d^2),$$

en posant

$$(287)\qquad \left\{\begin{array}{l} h^2 = h_x^2 + h_y^2 + h_z^2, \\ d^2 = d_x^2 + d_y^2 + d_z^2 \end{array}\right.$$

Le tenseur asymétrique T_β^α (150) à (153) s'écrira comme suit :

$$(288)\quad \left\{\begin{array}{l} T_1^1 = \mathrm{N} u_1 u^1 + \frac{1}{2}[d_x^2 - d_y^2 - d_z^2 + h_x^2 - h_y^2 - h_z^2], \\ T_2^2 = \mathrm{N} u_2 u^2 + \frac{1}{2}[d_y^2 - d_z^2 - d_x^2 + h_y^2 - h_z^2 - h_x^2], \\ T_3^3 = \mathrm{N} u_3 u^3 + \frac{1}{2}[d_z^2 - d_x^2 - d_y^2 + h_z^2 - h_x^2 - h_y^2], \\ T_4^4 = \mathrm{N} u_4 u^4 + \frac{1}{2}[d_x^2 + d_y^2 + d_z^2 + h_x^2 + h_y^2 + h_z^2]; \end{array}\right.$$

$$(289)\quad \left\{\begin{array}{l} T_2^1 = \mathrm{N} u_2 u^1 + (d_x d_y + h_x h_y), \\ T_3^1 = \mathrm{N} u_3 u^1 + (d_x d_z + h_x h_z), \\ T_4^1 = \mathrm{N} u_4 u^1 + c(d_y h_z - d_z h_y); \end{array}\right.$$

$$(290)\quad \left\{\begin{array}{l} T_1^2 = \mathrm{N} u_1 u^2 + (d_x d_y + h_x h_y), \\ T_3^2 = \mathrm{N} u_3 u^2 + (d_y d_z + h_y h_z), \\ T_4^2 = \mathrm{N} u_4 u^2 + c(d_z h_x - d_x h_z); \end{array}\right.$$

$$(291)\quad \left\{\begin{array}{l} T_1^3 = \mathrm{N} u_1 u^3 + (d_x d_z + h_x h_z), \\ T_2^3 = \mathrm{N} u_2 u^3 + (d_y d_z + h_y h_z), \\ T_4^3 = \mathrm{N} u_4 u^3 + c(-h_x d_y + d_x h_y); \end{array}\right.$$

$$(292)\quad \left\{\begin{array}{l} T_1^4 = \mathrm{N} u_1 u^4 + \frac{1}{c}(d_z h_y - d_y h_z), \\ T_2^4 = \mathrm{N} u_2 u^4 + \frac{1}{c}(d_x h_z - d_z h_x), \\ T_3^4 = \mathrm{N} u_3 u^4 + \frac{1}{c}(d_y h_x - d_x h_y). \end{array}\right.$$

En substituant (285) dans les équations (231) et (232) et en tenant compte de (179), on obtiendra les équations différentielles du champ électromagnétique de Maxwell-Lorentz :

$$(293)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial h_z}{\partial y}-\frac{\partial h_y}{\partial z}=\frac{1}{c}(\rho v^1+\dot{d}_x),\\ &\frac{\partial h_x}{\partial z}-\frac{\partial h_z}{\partial x}=\frac{1}{c}(\rho v^2+\dot{d}_y),\\ &\frac{\partial h_y}{\partial x}-\frac{\partial h_x}{\partial y}=\frac{1}{c}(\rho v^3+\dot{d}_z),\\ &\frac{\partial d_x}{\partial x}+\frac{\partial d_y}{\partial y}+\frac{\partial d_z}{\partial z}=\rho; \end{aligned}\right.$$

$$(294)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial d_z}{\partial y}-\frac{\partial d_y}{\partial z}=-\frac{1}{c}\dot{h}_x,\\ &\frac{\partial d_x}{\partial z}-\frac{\partial d_z}{\partial x}=-\frac{1}{c}\dot{h}_y,\\ &\frac{\partial d_y}{\partial x}-\frac{\partial d_x}{\partial y}=-\frac{1}{c}\dot{h}_z,\\ &\frac{\partial h_x}{\partial x}+\frac{\partial h_y}{\partial y}+\frac{\partial h_z}{\partial z}=0. \end{aligned}\right.$$

Le point qui surmonte h ou d indique une dérivée partielle par rapport à $t\equiv x_4$.

Reportons-nous maintenant aux équations (238) et introduisons les notations (284), d'où

$$(297)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathcal{F}_1^{(e)}=+c\rho\left[d_x+\frac{1}{c}(v_y h_z-v_z h_y)\right],\\ &\mathcal{F}_2^{(e)}=+c\rho\left[d_y+\frac{1}{c}(v_z h_x-v_x h_z)\right],\\ &\mathcal{F}_3^{(e)}=+c\rho\left[d_z+\frac{1}{c}(v_x h_y-v_y h_x)\right],\\ &\mathcal{F}_4^{(e)}=-c\rho\,[v_x d_x+v_y d_y+v_z d_z]. \end{aligned}\right.$$

En substituant dans ces dernières équations ρ et ρv_i par leurs valeurs tirées des équations de Maxwell (293), on peut écrire les $\mathcal{F}_\alpha^{(e)}$ sous la forme [1] d'une somme de dérivées partielles par rapport à x, y, z et t.

Le théorème du tenseur électromagnétique peut se mettre sous la forme (190) et (185) :

$$(299)\qquad \mathcal{F}_\alpha=\mathfrak{M}\mathrm{A}_\alpha+\mathcal{F}_\alpha^{(e)}=0,$$

où A_α désigne l'accélération covariante définie dans l'*Introduction*.

---

[1] *Grav. einst.*, éq. (535).

Nous avons vu que, dans le cas qui nous occupe, cette expression se réduisait à

$$
(300)\qquad \begin{cases} A_i = c^2 V^{-2}\left[\dfrac{d^2 x_i}{dt^2} - v_i \dfrac{d\log V}{dt}\right] & (i = 1, 2, 3), \\ A_4 = -c^2 V^{-2}\dfrac{d\log V}{dt}. \end{cases}
$$

Le théorème du tenseur électromagnétique devient donc

$$
(301)\qquad \begin{cases} \mathcal{F}_i = \mathfrak{M} c^2 V^{-2}\left[\dfrac{d^2 x_i}{dt^2} - v^i \dfrac{d\log V}{dt}\right] + \mathcal{F}_i^{(e)} = 0 & (i = 1, 2, 3), \\ \mathcal{F}_4 = -\mathfrak{M} c^2 V^{-2}\dfrac{d\log V}{dt} + \mathcal{F}_4^{(e)} = 0, \end{cases}
$$

où les $F_\alpha^{(e)}$ sont donnés par (297).

Remarquons qu'en vertu de (29), ce théorème peut aussi s'écrire

$$
(302)\qquad \mathcal{F}_\alpha = c\sum_\beta \frac{\partial T_\alpha^\beta}{\partial x_\beta} = 0,
$$

où les T_α^β sont donnés par les équations (288) à (292).

La *Relativité restreinte* pourrait prendre place ici, en passant du spectateur $\overline{S}$ au spectateur $\overline{S'}$ en translation rectiligne et uniforme par rapport à $\overline{S}$. On n'aurait qu'à effectuer le changement de variables de Lorentz ([1]) en tenant compte de la variance des symboles utilisés ci-dessus ([2]).

CHAPITRE V.

CHAMP GRAVIFIQUE MASSIQUE ET ÉLECTROMAGNÉTIQUE (CAS GÉNÉRAL).

24. Définition du champ gravifique massique et électromagnétique. — Considérons ([3]) le cas général où le champ gravifique est produit par des corps anisotropes, non homogènes, polarisables électriquement et magnétiquement ; ils peuvent porter des charges

([1]) *Voir* Introduction, formule (57).

([2]) Pour plus de détails, *voir* Chapitre XII de notre *Gravifique einsteinienne.*

([3]) Th. De Donder, *Sur la fonction caractéristique de la Gravifique* (*Bull. Cl. Sc. Ac. Roy. Belg.*, avril 1924).

électriques et des charges magnétiques ; ces charges, entraînées par les corps en mouvement, engendreront des courants de convection électriques ou magnétiques. Ces corps peuvent être aussi le siège de courants de conduction.

Les champs gravifiques étudiés dans ce Chapitre comprennent comme cas particuliers le champ gravifique massique et le champ gravifique électromagnétique.

25. Polarisation électrique et polarisation magnétique. — Nous avons posé (179)

$$H_{\overline{\alpha\beta}} = \mathcal{H}_{*}^{\alpha\beta}. \tag{303}$$

Posons aussi

$$\mathcal{H}^{*}_{\alpha\beta} \equiv \sum_{i} \sum_{j} g_{i\alpha} g_{j\beta} \mathcal{H}^{ij}_{*}. \tag{304}$$

Introduisons maintenant, avec Einstein ([1]), *la force de polarisation électrique* définie par les six composantes doublement contravariantes tensorielles :

$$\boxed{\mathfrak{P}^{\alpha\beta}_{(e)} \equiv \mathfrak{P}^{\alpha}_{(e)} u^{\beta} - \mathfrak{P}^{\beta}_{(e)} u^{\alpha},} \tag{305}$$

où $\mathfrak{P}^{\alpha}_{(e)}$ sont les quatre composantes contravariantes tensorielles de l'*intensité de polarisation électrique*. Rappelons que u^{α} sont les quatre composantes contravariantes de la vitesse des masses électrisées.

De même, introduisons *la force de polarisation magnétique* définie par les six composantes doublement contravariantes tensorielles

$$\boxed{\mathfrak{P}^{\alpha\beta}_{(\mu)} \equiv \mathfrak{P}^{\alpha}_{(\mu)} u^{\beta} - \mathfrak{P}^{\beta}_{(\mu)} u^{\alpha},} \tag{306}$$

où $P^{\alpha}_{(\mu)}$ sont les quatre composantes contravariantes tensorielles de l'*intensité de polarisation magnétique*.

([1]) A. Einstein, *Berlin. Berichte*, 1914, p. 1064 à 1066. Un premier essai de généralisation de ce Mémoire est dû à G. Nordström (*Societas Scientiarum Fennica Commentationes Physico-Mathematico*, I, 33. Helsingfors, 1923).

On posera aussi

(307) $$\mathfrak{T}^{(e)}_{\alpha\beta} \equiv \sum_i \sum_j g_{i\alpha} g_{j\beta} \mathfrak{T}^{ij}_{(e)}$$

et

(308) $$\mathfrak{T}^{(\mu)}_{\alpha\beta} = \sum_i \sum_j g_{i\alpha} g_{j\beta} \mathfrak{T}^{ij}_{(\mu)}.$$

Introduisons aussi *la force électromagnétique macroscopique* définie par ses six composantes contravariantes tensorielles :

(309) $$\boxed{\mathcal{K}^{\alpha\beta} \equiv \mathcal{H}^{\alpha\beta} - \mathfrak{T}^{\alpha\beta}_{(e)}}$$

ou par ses six composantes covariantes tensorielles :

(310) $$\mathcal{K}_{\alpha\beta} \equiv \mathcal{H}_{\alpha\beta} - \mathfrak{T}^{(e)}_{\alpha\beta}.$$

Nous écrirons aussi, comme d'habitude,

(311) $$K^{\alpha\beta} \equiv \frac{\mathcal{K}^{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}} \qquad \text{et} \qquad K_{\alpha\beta} \equiv \frac{\mathcal{K}_{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}}.$$

Enfin, introduisons *la force électromagnétique macroscopique adjointe :*

(312) $$\boxed{\mathcal{K}^{\alpha\beta}_{*} \equiv \mathcal{H}^{\alpha\beta}_{*} - \mathfrak{T}^{\alpha\beta}_{(\mu)}}$$

ou

(313) $$\mathcal{K}^{*}_{\alpha\beta} \equiv \mathcal{H}^{*}_{\alpha\beta} - \mathfrak{T}^{(\mu)}_{\alpha\beta}.$$

Nous écrirons aussi

(314) $$K^{\alpha\beta}_{*} \equiv \frac{\mathcal{K}^{\alpha\beta}_{*}}{\sqrt{-g}} \qquad \text{et} \qquad K^{*}_{\alpha\beta} = \frac{\mathcal{K}^{\alpha\beta}_{*}}{\sqrt{-g}}.$$

Remarquons que dans le cas particulier où il n'y a pas de polarisation, $K_{\alpha\beta}$ se réduit à $H_{\alpha\beta}$ et, d'autre part, $\mathcal{K}^{\alpha\beta}_{*}$ devient $\mathcal{H}^{\alpha\beta}_{*}$ ou $H_{\overline{\alpha\beta}}$.

26. La fonction caractéristique $\mathfrak{M}$ du champ gravifique massique et électromagnétique. — Par extension de ce que nous avons dit, dans les deux Chapitres précédents, à propos des champs massique et électromagnétique, nous prendrons [1] la *fonction caractéristique* ou *phénoménale* suivante :

$$
\boxed{\mathfrak{M} \equiv \sum_\alpha \sum_\beta g^{\alpha\beta} \left[(-\mathfrak{N} u_\alpha u_\beta - \mathfrak{T}_{\alpha\beta}) + \frac{\sqrt{-g}}{4} \sum_i \sum_j g^{ij} \left(K_{\alpha i} K_{\beta j} + \overset{*}{\mathcal{K}}{}^{\overline{\alpha i}} \overset{*}{\mathcal{K}}{}^{\overline{\beta j}} \right) \right],} \tag{315}
$$

où $\overline{\alpha i}$ a été défini en (149). Rappelons que $\mathfrak{N}$ est un facteur de densité d'origine massique et électromagnétique. Tous les autres symboles ont été définis au paragraphe précédent. Le *tenseur massique* $\mathfrak{T}_{\alpha\beta}$ a été défini au paragraphe 6.

Nous supposons que les u_α, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}_{\alpha\beta}$, $K_{\alpha\beta}$ et $\overset{*}{\mathcal{K}}{}^{\alpha\beta}$ ne renferment explicitement que $x_1, \ldots, x_4$; *leurs variations*, par rapport aux $g^{\alpha\beta}$, *seront donc identiquement nulles.*

27. Équations fondamentales du champ gravifique massique et électromagnétique. — Grâce à la fonction caractéristique (315) nous pouvons calculer le tenseur phénoménal $\mathfrak{G}_{\alpha\beta}$ défini par (10). Nous aurons ici :

$$
\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{G}_{\alpha\beta} \equiv \mathfrak{N} u_\alpha u_\beta + \mathfrak{T}_{\alpha\beta} - \frac{\sqrt{-g}}{2} \sum_i \sum_j g^{ij} \left(K_{\alpha i} K_{\beta j} + \overset{*}{\mathcal{K}}{}^{\overline{\alpha i}} \overset{*}{\mathcal{K}}{}^{\overline{\beta j}} \right) \\ + \frac{\sqrt{-g}}{8} g_{\alpha\beta} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l g^{kl} g^{ij} \left(K_{ki} K_{lj} + \overset{*}{\mathcal{K}}{}^{\overline{ki}} \overset{*}{\mathcal{K}}{}^{\overline{lj}} \right). \end{aligned}} \tag{316}
$$

Il en résulte, en permutant quelques indices (44),

$$
T = \sum_\alpha T_\alpha^\alpha = N + P. \tag{317}
$$

Grâce à ces préliminaires, on trouve immédiatement *les dix équations* (20) *du champ massique* et *électromagnétique :*

$$
\boxed{\frac{a}{2} g_{\alpha\beta} + b \mathcal{G}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (N + P).} \tag{318}
$$

[1] Th. De Donder, *loc. cit.*, formule (45).

28. Théorème du tenseur massique et électromagnétique. — Reportons-nous aux quatre équations (25) qui expriment le théorème du tenseur phénoménal. Substituons-y les valeurs de $\mathfrak{T}_\alpha^\gamma$ déduites de (316).

Nous aurons alors, après quelques calculs simples ([1]),

$$\mathcal{F}_\alpha \equiv \mathfrak{M}_\alpha + \mathfrak{T}_\alpha + \mathcal{F}_\alpha^{(e)} = 0, \tag{319}$$

où l'on a posé (49) et (51)

$$(320)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{M}_\alpha &\equiv \mathfrak{M} A_\alpha + u_\alpha \sum_i \frac{\partial(\mathfrak{M} u^i)}{\partial x_i}, \\ \mathfrak{T}_\alpha &= \sum_i \left[\frac{\partial \mathfrak{T}_\alpha^i}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \sum_j \sum_k g^{ij} g_{kj,\alpha} \mathfrak{T}_i^k \right], \\ \mathcal{F}_\alpha^{(e)} &= \frac{\sqrt{-g}}{8} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l g^{kl} g^{ij} \frac{\partial (K_{ki} K_{lj} + \mathcal{K}_*^{\overline{ki}} \mathcal{K}_*^{\overline{lj}})}{\partial x_\alpha} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} \sqrt{-g}\, g^{ij} g^{kl} (K_{\alpha i} K_{kj} + \mathcal{K}_*^{\overline{\alpha i}} \mathcal{K}_*^{\overline{kj}}). \end{aligned} \right.$$

En multipliant les deux membres de (319) par u^α et en sommant, on obtient

$$(321)\quad \begin{aligned} \sum_\alpha \mathcal{F}_\alpha u^\alpha &= \sum_\alpha \mathfrak{M}_\alpha u^\alpha + \sum_\alpha \mathfrak{T}_\alpha u^\alpha + \sum_\alpha \mathcal{F}_\alpha^{(e)} u^\alpha \\ &= \sum_\alpha \frac{\partial(\mathfrak{M} u^\alpha)}{\partial x_\alpha} + \sum_\alpha \mathfrak{T}_\alpha u^\alpha + \sum_\alpha \mathcal{F}_\alpha^{(e)} u^\alpha = 0. \end{aligned}$$

Cette dernière relation exprime l'*équation de continuité généralisée*.

Le théorème du tenseur massique et électromagnétique (319) peut aussi se mettre sous la forme suivante, grâce à (321) :

$$\mathcal{F}_\alpha \equiv \mathfrak{M} A_\alpha - u_\alpha \sum_i \mathfrak{T}_i u^i - u_\alpha \sum_i \mathcal{F}_i^{(e)} u^i + \mathfrak{T}_\alpha + \mathcal{F}_\alpha^{(e)} = 0. \tag{322}$$

Calcul de $\mathfrak{M}$. — Multiplions (322) par A^α et sommons par rapport à α; nous obtiendrons, en vertu de (166) et de la formule (211) de

([1]) Ces calculs sont les mêmes que ceux qui se trouvent développés dans la Note citée ci-dessus (*Bull. Ac. R. Belg., Cl. des Sc.*, juin 1925).

l'*Introduction*,

(323)
$$\boxed{\mathfrak{M} = -\frac{1}{B}\sum_{\alpha} A^{\alpha}(\mathfrak{T}_{\alpha} + \mathfrak{F}_{\alpha}^{(c)}).}$$

29. Équations électromagnétiques. — Par extension de (176) et (180), nous écrirons ([1]) ces équations comme suit :

(324)
$$\boxed{\sum_{i} \frac{\partial \mathcal{H}^{\alpha i}}{\partial x_i} = \sigma_{(e)} u^{\alpha} + \mathcal{L}^{\alpha}_{(e)},}$$

(325)
$$\boxed{\sum_{i} \frac{\partial \mathcal{H}^{\alpha i}_{*}}{\partial x_i} = \sigma_{(\mu)} u^{\alpha} + \mathcal{L}^{\alpha}_{(\mu)},}$$

où $\mathcal{L}^{\alpha}_{(e)}$ sont les composantes contravariantes tensorielles *du courant de conduction électrique;* où $\sigma_{(e)} u^{\alpha}$ sont les composantes contravariantes *tensorielles du courant de convection électrique*. Les symboles $\sigma_{(\mu)} u^{\alpha}$ et $\mathcal{L}^{\alpha}_{(\mu)}$ représentent respectivement *le courant de convection* ([2]) *magnétique* et *le courant de conduction magnétique*. Ce dernier courant, non observé, a été introduit ici par raison de symétrie formelle des seconds membres de (324).

Les équations (324) et (325) fournissent les théorèmes de la conservation des fluides électrique et magnétique :

(326)
$$\sum_{i} \frac{\partial(\sigma_{(e)} u^{i} + \mathcal{L}^{i}_{(e)})}{\partial x_i} = 0,$$

(327)
$$\sum_{i} \frac{\partial(\sigma_{(\mu)} u^{i} + \mathcal{L}^{i}_{(\mu)})}{\partial x_i} = 0.$$

30. Cas des corps matériels parfaits. — Nous dirons ([3]) que ces corps

---

([1]) Nous avons obtenu ces équations (*voir* Note citée ci-dessus, avril 1924) en généralisant les équations dues à A. Einstein (*Berlin. Ber.*, 1914, p. 1064 à 1066).

([2]) Le symbole $\sigma_{(\mu)}$ est ce qu'Einstein (*Sitzgsb. K Ak. Berlin. Wiss.*, 1914, p. 1064 à 1066) désigne par le symbole ρ_m et appelle *la densité magnétique* provenant de la polarisation rigide et permanente [die magnetische Ladungsdichte welche von der (starren) magnetischen Polarisation herrührt]. Einstein suppose les corps considérés *homogènes* et *isotropes*.

([3]) Cette généralisation des formules d'Einstein a été indiquée dans notre Note du 9 juillet 1923 (*C. R. Ac. Sc.*, Paris).

considérés sont *parfaits* si l'on a

$$(328)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathcal{L}^{\alpha}_{e} \equiv \sum_i \sum_j q^{\alpha}_{(e)i} \mathcal{H}^{ij} u_j, && \mathcal{L}^{\alpha}_{(\mu)} \equiv \sum_i \sum_j q^{\alpha}_{(\mu)i} \mathcal{H}^{ij} u_j, \\ &\mathcal{P}^{\alpha}_{(e)} \equiv \sum_i \sum_j p^{\alpha}_{e\,i} \mathcal{H}^{ij} u_j, && \mathcal{P}^{\alpha}_{(\mu)} \equiv \sum_i \sum_j p^{\alpha}_{(\mu)i} \mathcal{H}^{ij} u_j. \end{aligned}\right.$$

Les $q^{\alpha}_{(e)i}$ représentent un tenseur asymétrique qui généralise *le coefficient de conductibilité électrique* (de la loi d'Ohm). Les $p^{\alpha}_{(e)i}$ généralisent *le coefficient de susceptibilité électrique* (de la loi de Poisson). De même, les $p^{\alpha}_{(\mu)i}$ généralisent *le coefficient de susceptibilité magnétique.*

31. Cas où il y a un potentiel électromagnétique. — 1° Si l'on a

$$(329)\qquad \sigma_{(\mu)} u^{\alpha} + \mathcal{L}^{\alpha}_{(\mu)} \equiv 0,$$

on pourra poser, en vertu de (325),

$$(330)\qquad \mathcal{H}^{\alpha i}_{*} \equiv \Phi_{\overline{\alpha},i} - \Phi_{\overline{i,\alpha}}.$$

Les $\Phi_1, \ldots, \Phi_4$ représentent les quatre composantes covariantes du *potentiel électromagnétique.*

2° Si l'on a

$$(331)\qquad \sigma_{(e)} u^{\alpha} + \mathcal{L}^{e}_{\alpha} \equiv 0,$$

on pourra poser, en vertu de (324),

$$(332)\qquad \mathcal{H}^{\alpha i} \equiv \Phi^{*}_{\overline{\alpha,i}} - \Phi^{*}_{\overline{i,\alpha}}.$$

Les $\Phi^{*}_1, \ldots, \Phi^{*}_4$ représentent les quatre composantes covariantes du *potentiel électromagnétique adjoint.*

Électrodynamique de Minkowski. — En première approximation, supposons que le champ gravifique se réduise au *champ de Minkowski;* puis, appliquons notre théorie générale à ce champ spécial. Il en résultera *une électrodynamique* ([1]) *des corps en mouvement dite de Minkowski.*

CHAPITRE VI.

CHAMP GRAVIFIQUE MASSIQUE ET ÉLECTROMAGNÉTIQUE. CAS OU IL N'Y A PAS DE POLARISATION NI DE CONDUCTION.

32. Équations fondamentales. — Dans le cas où il n'y a pas de

([1]) Pour plus de détails, voir la Note de M. Nuyens (*Bull. Ac. Roy. de Belg., Cl des Sc.*, avril 1926).

polarisation électrique ou magnétique, la fonction caractéristique (315) se réduit à

$$\boxed{\mathfrak{M} = \sum_\alpha \sum_\beta g^{\alpha\beta}\left[-\mathfrak{N} u_\alpha u_\beta - \mathfrak{P}_{\alpha\beta} + \frac{\sqrt{-g}}{2}\sum_i \sum_j g^{ij} H_{\alpha i} H_{\beta j}\right].} \tag{333}$$

On remarquera que cette fonction caractéristique est la somme des fonctions caractéristiques du champ massique et du champ électromagnétique.

Les formules (316) et (317) se réduisent, dans le cas considéré, aux formules suivantes :

$$\boxed{\mathfrak{T}_{\alpha\beta} = \mathfrak{N} u_\alpha u_\beta + \mathfrak{P}_{\alpha\beta} + \frac{\sqrt{-g}}{4} g_{\alpha\beta}\sum_i \sum_j H^{ij} H_{ij} - \sqrt{-g}\sum_i H_\alpha^i H_{\beta i},} \tag{334}$$

$$\boxed{T = N + P.} \tag{335}$$

Les *équations générales du champ gravifique massique et électromagnétique* se simplifient donc et deviennent

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{a}{2} g_{\alpha\beta} + b\mathcal{G}_{\alpha\beta} = N u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(N + P) + P_{\alpha\beta}\\ + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta}\sum_i \sum_j H_{ij} H^{ij} - \sum_i H_\alpha^i H_{\beta i}.\end{aligned}} \tag{336}$$

33. Théorème du tenseur massique et électromagnétique. — Les équations du tenseur massique et électromagnétique (319) s'écriront encore dans le cas qui nous occupe

$$\mathcal{F}_\alpha = \mathfrak{N}_\alpha + \mathfrak{P}_\alpha + \mathcal{F}_\alpha^e = 0, \tag{337}$$

où $\mathfrak{N}_\alpha$ et $\mathfrak{P}_\alpha$ sont donnés par (320), mais où $\mathcal{F}_\alpha^e$ se réduit à

$$\mathcal{F}_\alpha^{(e)} = \sum_i \sum_j \left[\sqrt{-g}\, H^{\alpha j}\frac{\partial H_{ij}}{\partial x_i} - H_{\alpha j}\frac{\partial(\sqrt{-g}\, H^{ij})}{\partial x_i}\right]. \tag{338}$$

Les équations suivantes (321) à (323) ne seront changées qu'en ce que $\mathcal{F}_\alpha^{(e)}$ est donné maintenant par (338).

34. Équations électromagnétiques maxwelliennes. — Nous allons admettre, comme au Chapitre IV du champ électromagnétique *pur*, que les composantes $H_{\alpha\beta}$ de l'intensité du champ électromagnétique dérivent (169) des quatre composantes Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 d'un potentiel électromagnétique.

Introduisons aussi la *fonction fondamentale électromagnétique* (170) et annulons chacune des dérivées variationnelles de cette fonction par rapport à Φ_α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) (172). *Nous aurons donc encore les équations* (176), (180) et (183).

35. Conséquences des équations einsteiniennes et maxwelliennes. — Reportons-nous à (338); nous retrouverons les relations (185) et (186); l'équation (321) devient donc

$$\boxed{\sum_\alpha \frac{\partial(\mathfrak{N} u^\alpha)}{\partial x_\alpha} + \sum_\alpha \mathfrak{L}_\alpha u^\alpha = 0.} \tag{339}$$

Les quatre équations (322) du théorème du tenseur massique et électromagnétique deviennent, en vertu de (185),

$$\mathfrak{F}_\alpha - \mathfrak{N} A_\alpha - u_\alpha \sum_i \mathfrak{L}_i u^i - \mathfrak{L}_\alpha + \tau \sum_i u^i H_{\alpha i} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4). \tag{340}$$

Rappelons que de ces quatre équations (340), trois seulement sont distinctes, à cause de la relation (321).

En vertu de (185), la valeur (323) de $\mathfrak{N}$ devient

$$\boxed{\mathfrak{N} = -\frac{1}{B} \sum_\alpha A^\alpha \left(\mathfrak{L}_\alpha + \tau \sum_i u^i H_{\alpha i}\right).} \tag{341}$$

Remplaçons dans (340) $\mathfrak{N}$ par sa valeur (341); on aura

$$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{F}_\alpha = & - u_\alpha \sum_i \mathfrak{L}_i u^i + \mathfrak{L}_\alpha \\ & - \frac{1}{B} A_\alpha \sum_\beta A^\beta \left(\mathfrak{L}_\beta + \tau \sum_i u^i H_{\beta i}\right) + \tau \sum_i u^i H_{\alpha i} = 0. \end{aligned}} \tag{342}$$

TABLE DES MATIÈRES.

77166 Paris. — Imp. Gauthier-Villars et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.