GEORGES BOULIGAND

Fonctions harmoniques. Principes de Picard et de Dirichlet

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 11 (1926)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1926__11__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), ETC.
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT
Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,
Professeur à l'Université de Strasbourg.

FASCICULE XI.

Fonctions harmoniques. Principes de Picard et de Dirichlet

PAR M. GEORGES BOULIGAND,
Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1926

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras figurant entre crochets dans le courant du texte renvoient à cette Bibliographie.

FONCTIONS HARMONIQUES

PRINCIPES DE PICARD ET DE DIRICHLET

Par M. Georges BOULIGAND

I. — INTRODUCTION.

1. La théorie des fonctions harmoniques joue en analyse un rôle de premier plan. D'une part, elle englobe celle des fonctions analytiques; d'autre part, elle domine en physique maint problème. En outre, c'est sur le terrain des fonctions harmoniques que le calcul fonctionnel et les méthodes qui s'y rattachent ont fait leurs preuves. Là s'est révélée d'emblée la théorie de Fredholm; là, on s'est accoutumé, plus qu'ailleurs, à l'usage des concepts intégraux, rendus très maniables par les théories de H. Lebesgue; là encore, à propos de la fonction de Green du problème de Dirichlet, J. Hadamard a rencontré l'une des premières équations aux dérivées fonctionnelles; là enfin, dans l'étude du problème de Dirichlet généralisé, se présente inévitablement l'idée du prolongement d'une fonctionnelle par continuité, qu'on trouve déjà, en puissance, dans un beau Mémoire de S. Zaremba [60, *l*], marquant le premier pas décisif dans l'extension du principe de Dirichlet.

Nous exposerons ici successivement les idées générales relatives aux fonctions harmoniques, les principes concernant leurs lois de croissance au voisinage des singularités, notamment, le principe de Picard, et enfin le principe de Dirichlet.

II. — L'HARMONICITÉ.

2. Rappel de formules. — Soient, dans l'espace euclidien à n dimensions, n axes rectangulaires et un champ scalaire U. L'expression

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2}$$

s'appelle *laplacien* de U : elle est invariante quant au groupe des déplacements (d'où son intervention constante en physique classique), ce qui apparaît bien sous la forme div $\overrightarrow{\text{grad}}$ U. On appelle *fonction harmonique*, lorsqu'on n'a garde d'énoncer des conditions surabondantes, une solution de $\Delta U = 0$, continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres dans une certaine région (région d'harmonicité). L'étude de ces fonctions fait appel à la formule de Green

$$(1) \qquad \int_\Omega (U\,\Delta V - V\,\Delta U)\,d\omega + \int_\Sigma \left(U\frac{dV}{d\nu} - V\frac{dU}{d\nu}\right)d\sigma = 0,$$

déduite du théorème flux-divergence appliqué aux champs vectoriels U $\overrightarrow{\text{grad}}$ V et V $\overrightarrow{\text{grad}}$ U. On suppose provisoirement la continuité de tous les éléments, y compris celle du champ des normales à la surface Σ qui limite le domaine Ω : s'il y a plusieurs surfaces, on fera la même hypothèse sur chacune d'elles et Σ désignera l'ensemble de ces surfaces. On entend par $\frac{d}{d\nu}$ la dérivée prise suivant la normale, dirigée vers l'intérieur de Ω. Pour chaque fonction harmonique dans Ω, ayant un champ de gradients continu dans $\Omega + \Sigma$, on a en appliquant (1) à $\Omega - \omega_P$ où ω_P est une petite sphère de centre P :

$$(2) \qquad U_P = \frac{1}{(n-2)S_n}\int_\Sigma \left[U_M \frac{d}{d\nu}\left(\frac{1}{\overline{MP}^{n-2}}\right) - \frac{dU_M}{d\nu}\frac{1}{\overline{MP}^{n-2}}\right]d\sigma_M,$$

où S_n est la surface de la sphère unitaire dans l'espace à n dimensions. Appliquons (2) à une sphère Σ, pour une première position de P intérieure à Σ, et pour l'image P′ de la première $\left(\text{définie par } \overrightarrow{OP'} = \frac{R^2}{\overline{OP}^2}\overrightarrow{OP}\right)$. On tire des équations obtenues la formule de Poisson

$$(3) \qquad U_P = \frac{1}{RS_n}\int_\Sigma U_M \frac{R^2 - \overline{OP}^2}{\overline{MP}^n}\,d\sigma_M,$$

suivant laquelle les valeurs de la fonction sur la sphère la déterminent à l'intérieur. On a ainsi un nouveau mode de définition des fonctions harmoniques, de nature intégrale, établissant une solidarité entre les valeurs de la fonction en divers points du champ, montrant l'existence d'un développement de Taylor représentant la fonction autour de chaque point de la région d'harmonicité. L'harmonicité apparaît ainsi comme un type de monogénéité défini dans le champ réel, et apparenté avec l'analyticité dans le champ complexe : cette monogénéité consiste en ce que deux fonctions harmoniques dans une région ne peuvent coïncider sur certains ensembles de points intérieurs à cette région sans y être identiques (1).

Les formules (2) et (3) sont à modifier dans le cas de $n = 2$, où la *solution élémentaire* (terminologie de J. Hadamard, préférable à *solution fondamentale*) est $\log \frac{1}{\mathrm{MP}}$ au lieu de $\frac{1}{\overline{\mathrm{MP}}^{n-2}}$. Pour le cas de $n = 2$ et pour la notion des *fonctions harmoniques conjuguées*, nous renverrons aux traités classiques.

3. **Définitions diverses de l'harmonicité**, — On peut s'efforcer de faire sur U un minimum d'hypothèses. Ayant choisi des axes rectangulaires, on peut supposer avec W. Wilkosz [59] la *continuité* de U, et l'existence de *dérivées secondes directes* $\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_i^2}$ de somme nulle, la dérivée seconde directe de $f(x)$ étant la limite de

$$h^{-2}[f(x+h)+f(x-h)-2f(x)].$$

L'harmonicité en résulte, à la faveur de résultats de S. Zaremba (*cf.* n° 13).

Cette hypothèse comporte un choix d'axes arbitraire. Pour l'éviter, on utilise avec G.-C. Evans [10, *a*] des définitions généralisées du gradient et de la divergence. Soit un champ scalaire U, sommable sur toute surface σ (douée d'un champ continu de normales), un champ vectoriel $\vec{\mathrm{V}}$ sommable en volume. Par définition, $\vec{\mathrm{V}} = \operatorname{grad} \mathrm{U}$, si *pour toute* surface fermée séparant l'espace en deux régions et délimitant la région interne ω, on a

$$\int_\omega \vec{\mathrm{V}}\, d\omega + \int_\sigma \mathrm{U}\vec{\nu}\, d\sigma = 0, \tag{4}$$

(1) *Voir* la note du n° 18.

$\vec{\nu}$ étant le vecteur unitaire de la normale intérieure. Soient $\vec{V}.\vec{\nu}$ sommable sur chaque σ, et u un nouveau champ scalaire sommable en volume. Par définition, $u = \operatorname{div} \vec{V}$, si l'on a pareillement

$$(5) \qquad \int_\omega u\, d\omega + \int_\sigma \vec{V}.\vec{\nu}\, d\sigma = 0 \quad (1).$$

Enfin, si l'on a simultanément (4) et (5), on dira que u est le laplacien de U. A ce point de vue, l'équation de Laplace est remplacée par le système de l'équation (4) et de l'équation (5') formée en annulant le premier terme de (5). Soit U, $\vec{V}$ une solution : Evans établit que les discontinuités de U ne sont pas essentielles et disparaissent en changeant U sur un ensemble de mesure nulle, ce qui donne une fonction harmonique. Il y a ici encore surabondance d'hypothèses par l'arbitraire du choix de σ.

On peut alors chercher un point de vue intermédiaire, consistant à décrire, autour de chaque point P de la région considérée comme centre, une sphère infiniment petite et à admettre l'existence de limites pour des expressions formées à l'aide d'intégrales étendues à la surface de cette sphère ou à son volume, limites qui, dans le champ des fonctions douées de dérivées continues jusqu'au second ordre, coïncident avec le laplacien. Le problème se pose alors, pour chaque définition généralisée ainsi construite, de savoir si une fonction continue et à laplacien nul est harmonique, c'est-à-dire représentable dans une sphère par l'intégrale de Poisson ? Ce problème sera résolu dans des cas étendus par l'affirmative (n° **13**).

4. Le théorème de la moyenne. — Considérons une fonction U(P) continue dans une certaine région, et à chaque point P de cette région, associons une sphère σ_P intérieure à cette région, ayant pour centre P et pour rayon une fonction continue R_P de P. Soit $U_1(P)$ la nouvelle fonction qui exprime la moyenne des valeurs de la première, soit sur la surface de σ_P, soit dans le volume de cette sphère. L'opération qui fait passer de U(P) à $U_1(P)$ s'appelle une *médiation*, périphérique ou spatiale. On sait depuis Gauss que toute fonction harmonique est invariante par médiation périphérique, quel que soit

(1) $\vec{V}$ dans la définition (4) et u dans (5) peuvent être arbitrairement modifiés sur un ensemble de mesure nulle.

d'ailleurs R_P : cela résulte de (3) pour $OP = 0$. S. Zaremba a remarqué que l'invariance par médiation périphérique des fonctions harmoniques, étant satisfaite quel que soit R_P, entraîne leur invariance par médiation spatiale [60, *i*]. Enfin, H. Lebesgue [27, *f*] a noté que cette invariance subsiste par une *médiation générale* dont les deux précédentes sont des cas particuliers, et qui fait correspondre à U(P) quelconque

$$U_1(P) = \frac{\displaystyle\int_{r=0}^{r=R} \left[\int U(M)\, d\sigma_M\right] d\varphi(r)}{\displaystyle S_n \int_{r=0}^{r=R} r^{n-1}\, d\varphi(r)}$$

dans le numérateur, l'intégrale entre crochets s'étend à la sphère de centre P et de rayon r; on voit apparaître le processus d'intégration de Stieltjes, fréquent dans cette théorie en raison de son aptitude à exprimer le mode de composition linéaire le plus général.

L'invariance par médiation des fonctions harmoniques entraîne :

1° L'impossibilité d'extrema stricts ou larges en des points intérieurs à la région d'harmonicité. Empruntons à cette région un domaine fermé quelconque. La borne supérieure (b. s.) et la borne inférieure (b. i.) de la fonction dans ce domaine coïncident respectivement avec sa b. s. et sa b. i. sur la frontière de ce domaine. C'est ce qu'on exprime en disant que toute fonction harmonique est *monotone* [1].

2° Une affirmation fondamentale d'unicité : soit le domaine ouvert Ω, de frontière Σ, et soit donnée sur Σ une fonction continue $f(Q)$; il ne peut exister plus d'une fonction U(P) continue dans $\Omega + \Sigma$, harmonique dans Ω, et qui se réduise à $f(Q)$ sur Σ. Le *principe de Dirichlet au sens classique* est composé de cette affirmation d'unicité et de l'affirmation de l'existence de U(P), pour toute $f(Q)$, dans des cas étendus. Cette seconde partie sera étudiée ultérieurement. Quant à l'affirmation d'unicité, c'est une conséquence immédiate de la monotonie,

5. Les propriétés d'invariance par médiation admettent des réciproques. D'abord une fonction sommable en volume dans une

(1) Notons en outre que les bornes sont exclusivement atteintes sur la frontière, sauf si la fonction est constante.

certaine région, et invariante par médiation spatiale, pour toute valeur du rayon moindre qu'une certaine limite R_P, est nécessairement harmonique. En effet, elle est d'abord continue en tant que médiante spatiale d'une foction sommable. Soit à l'intérieur de notre région une sphère Σ assez petite pour qu'en aucun point P intérieur à Σ, R_P ne soit inférieur à la plus courte distance de P à la sphère. La fonction proposée et l'intégrale de Poisson, formée avec ses valeurs sur Σ, diffèrent d'une fonction continue dans la sphère et sur sa surface, s'annulant sur cette dernière, et invariante par médiation, donc monotone : cette fonction est par suite nulle, et ainsi la fonction proposée coïncide bien avec l'intégrale de Poisson [24]. En second lieu, si l'on suppose la sommabilité, non seulement en volume, mais sur toute sphère utile, on ramène au cas précédent celui de l'invariance par médiation périphérique (pour toute valeur du rayon $< R_P$). Enfin, on a cherché des réciproques faisant intervenir une seule valeur du rayon pour chaque point P : nous y reviendrons lors de l'étude du principe de Dirichlet.

L'ordre d'idées qui précède suggère de nouvelles définitions du laplacien, notamment la suivante, qui est du type périphérique :

$$\Delta U_P = \lim_{r=0} \frac{n}{r^{n+1} S_n} \int (U_M - U_P)\, d\sigma_M \qquad \text{avec} \qquad r = MP.$$

Cette définition et les définitions correspondantes (issues de la médiation spatiale ou de la médiation générale) rentrent précisément dans la catégorie signalée à la fin du numéro précédent et soulevant ce problème : une fonction continue et dont le laplacien, ainsi défini, est nul, est-elle harmonique ? (n° **13**).

III. — Potentiels usuels. Problèmes aux limites.

6. Décomposition en potentiels d'une fonction arbitraire. — Reprenons les hypothèses et les notations du n° **2**, relatives à Ω et à Σ, et désignons par U une fonction continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres dans $\Omega + \Sigma$. On tire de (1) la formule

$$U_P = -\frac{1}{(n-2) S_n} \left[\int_\Omega \frac{\Delta U_M}{\overline{MP}^{n-2}} d\omega_M + \int_\Sigma \frac{dU_M}{d\nu} \frac{1}{\overline{MP}^{n-2}} d\sigma_M - \int_\Sigma U_M \frac{d}{d\nu}\left(\frac{1}{\overline{MP}^{n-2}}\right) d\sigma_M \right],$$

qui donne U comme somme d'un *potentiel de volume*, d'un *potentiel de simple couche* et d'un *potentiel de double couche*.

7. **Formule de Poisson.** — Ces deux derniers étant harmoniques dans Ω, le laplacien de potentiel de volume est donc ΔU. Plus généralement, si la densité cubique ρ_{M} est continue à la Lipchitz (pour ses conditions plus larges, voir Petrini [35, *a*]) on démontre que le potentiel de volume correspondant, soit φ, a pour laplacien $-(n-2)\,S_n\rho$: c'est la *formule de Poisson*. Elle est vérifiée, moyennant la seule continuité de ρ, si l'on prend le laplacien généralisé au sens du n° 5, dernier alinéa, ou encore, si on le définit avec S. Zaremba et W. Wilkosz (*cf.* n° 3) par une somme de dérivées directes évaluées suivant n directions rectangulaires. Pour aller plus loin, G.-C. Evans remarque [10, *a*] qu'elle peut être remplacée par l'identité

$$\int_{\Sigma}\frac{d\varphi}{d\nu}\,d\sigma = \int_{\Omega}(n-2)\,S_n\rho\,d\omega, \tag{6}$$

où Σ est arbitraire, aux hypothèses près du n° 2 : le second membre est une fonctionnelle additive et à variation bornée $F(\Sigma)$. Soit généralement une $F(\Sigma)$, additive et à variation bornée, et telle que sous les hypothèses du n° 2, on ait l'identité

$$F(\Sigma) = f(\Omega) + \frac{1}{2}f(\Sigma), \tag{7}$$

$f(e)$ représentant une fonction additive d'ensemble, soit la somme algébrique des masses d'une répartition donnée située sur e. Considérons l'équation fonctionnelle

$$\int_{\Sigma}\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi.\vec{\nu}\,d\sigma = F(\Sigma), \tag{8}$$

où le gradient est défini suivant (4). De même que l'équation (6) a pour solution particulière le potentiel de volume de densité ρ, Evans montre que (8) est vérifiée par le potentiel des masses précédentes, soit

$$\varphi(P) = \frac{1}{(n-2)\,S_n}\int_{\Omega+\Sigma}\frac{1}{\overline{MP}^{n-2}}\,df(e). \tag{9}$$

Ces résultats sont intuitifs si l'on remarque que (8) exprime le théorème de Gauss (flux de force en fonction de la masse totale intérieure à Σ ou sur Σ). La présence de points ou de lignes anguleuses nécessiterait des termes complémentaires au second membre de (8). Notons la généralité du résultat d'Evans, indépendant des aspects très variés que peut affecter une répartition de masses : le succès est dû à l'emploi de l'intégrale de Stieltjes.

8. Discontinuité de la dérivée normale d'un potentiel de simple couche. — Un potentiel de simple couche V, relatif à une surface Σ douée d'un champ continu de normales, et de densité superficielle ρ continue, est continu au passage de la couche, mais son gradient éprouve une discontinuité qui affecte seulement la composante normale. Soit $\vec{\nu}$ le vecteur unité de la normale à Σ (que nous dirigerons vers l'intérieur de Ω, si Σ fait partie de la frontière de Ω). La discontinuité éprouvée par le gradient lorsqu'on franchit Σ en un point où la densité est ρ, de manière à entrer dans la région contenant $\vec{\nu}$ a pour valeur géométrique $-(n-2)S_n\rho\vec{\nu}$. Appelons *région positive* cette région et *région négative* celle qui se trouve de l'autre côté de Σ. On peut donc écrire

$$(10)\qquad \left(\frac{dV}{d\nu}\right)_+ - \left(\frac{dV}{d\nu}\right)_- = -(n-2)S_n\rho \qquad \text{ou} \qquad \left(V_P = \int_\Sigma \frac{\rho_M}{\overline{MP}^{n-2}}\, d\sigma_M\right),$$

et l'on a en outre

$$(11)\qquad \left(\frac{dV}{d\nu}\right)_+ + \left(\frac{dV}{d\nu}\right)_- = 2(n-2)\int \rho_M \frac{\cos\psi}{\overline{MQ}^{n-1}}\, d\sigma_M,$$

Q étant le point de passage, et ψ l'angle de $\vec{\nu}_Q$ et de la demi-droite QM. Nous renvoyons pour la démonstration aux traités classiques, en signalant seulement que si ρ est sommable sur Σ (et non plus continu), l'ordre d'idées présenté au n° 7 fournit une généralisation de (10).

9. Discontinuité d'un potentiel de double couche. — Reprenons sur Σ et sur ρ les hypothèses du début du n° 8, et considérons le potentiel de double couche

$$W_P = \int \rho_M \frac{d}{d\nu}\left(\frac{1}{\overline{MP}^{n-2}}\right) d\sigma_M.$$

Ce potentiel est discontinu au passage de la couche, et l'on a, moyennant le même principe de notations,

$$(12)\quad (W_+)_Q - (W_-)_Q = (n-2)\,S_n\,\rho_Q,$$

$$(13)\quad (W_+)_Q + (W_-)_Q = 2(n-2)\int \rho_M \frac{\cos\varphi}{\overline{MQ}^{n-1}}\,d\sigma_M \quad \text{avec} \quad \varphi = \widehat{(\vec{\nu}_M, \overrightarrow{MQ})}.$$

Ces relations doivent être modifiées lorsque Σ présente des pointes et des arêtes [47].

10. Solution des problèmes aux limites par les équations intégrales. — Laissant de côté les problèmes mixtes, nous nous bornerons aux problèmes de Dirichlet et de Neumann. Dans le problème de Dirichlet, on cherche une fonction harmonique dans un domaine, continue dans ce domaine et sur sa frontière, et se réduisant sur cette dernière à une distribution continue de valeurs données. Le problème de Neumann est un problème analogue où l'on remplace la donnée des valeurs à la frontière par celle des valeurs de la dérivée normale. Si le domaine est la région extérieure à une ou plusieurs surfaces fermées, on imposera en outre à la solution la condition de tendre vers zéro à l'infini (excepté si $n=2$).

Supposons essentiellement que la frontière du domaine Ω soit une surface Σ, douée d'un champ continu de normales, ayant en chaque point deux courbures principales finies. On démontre qu'il existe une double couche, étendue sur Σ, dont le potentiel fournit la solution du problème de Dirichlet intérieur au domaine Ω (et cela, pour chaque distribution continue $f(Q)$ sur Σ) (¹). La densité ρ est en effet astreinte à vérifier l'équation de Fredholm :

$$(14)\qquad \frac{1}{2}S_n\rho_Q + \int_\Sigma \rho_M \frac{\cos\psi}{\overline{MQ}^{n-1}}\,d\sigma_M = f(Q).$$

La discussion est facilitée lorsque Σ sépare l'espace en deux régions. L'équation générale

$$(15)\quad \rho_Q - \lambda\int_\Sigma \rho_M K(M, Q)\,d\sigma_M = \frac{2f(Q)}{S_n} \qquad \text{ou} \qquad K(M, Q) = -\frac{2\cos\varphi}{S_n\overline{MQ}^{n-1}}$$

(¹) Le recours au potentiel de double couche est naturel si l'on remarque avec P. Lévy [2), a] qu'il fournit immédiatement la solution lorsque Σ est un plan indéfini et Ω l'une des régions suivant lesquelles ce plan subdivise l'espace.

se réduit à la précédente pour $\lambda = +1$ et à l'équation analogue du problème extérieur pour $\lambda = -1$. On peut d'ailleurs passer par itération à une équation à noyau borné (*voir* III, Chap. 33) grâce à l'hypothèse des courbures principales bornées. Donc, la solution de (15) est une fonction méromorphe de λ : on montre que tous ses pôles sont réels et simples, qu'aucun d'eux n'est compris entre -1 et $+1$, enfin que de ces deux valeurs, la première seule fournit un pôle. D'ailleurs, même sans hypothèse de connexion relative à Σ, il est évident que $\lambda = 1$ ne peut être un pôle, sinon la théorie de Fredholm ferait prévoir des cas où l'unicité de la solution du problème de Dirichlet intérieur se trouverait compromise. Donc le problème de Dirichlet intérieur a, moyennant les hypothèses faites sur Σ (et sans que Σ soit nécessairement connexe), une solution et une seule.

Reprenons notre hypothèse de connexion. Puisque $\lambda = -1$ est un pôle, il n'y a pas toujours de potentiel de double couche dont les valeurs limites sur Σ, prises extérieurement à Σ, soient égales à $f(Q)$. Pour que ce potentiel existe, il faut et il suffit qu'en désignant par $\tau(Q)$ la densité d'une simple couche en équilibre électrique sur Σ, on ait

$$\int_\Sigma f(Q)\,\tau(Q)\,d\sigma_Q = 0, \tag{16}$$

moyennant quoi ρ_Q est déterminé à une constante additive près, sans influence sur le potentiel extérieur. Si (16) n'a pas lieu, on détermine une constante C telle que

$$\int_\Sigma [f(Q) - C]\,\tau(Q)\,d\sigma_Q = 0.$$

Le problème de Dirichlet extérieur a une solution, qui est la somme du potentiel de la double couche, qui correspond aux valeurs $f(Q) - C$, et du potentiel d'une simple couche en équilibre, dont la masse totale est choisie de manière que C soit le potentiel d'équilibre.

11. *Pour le problème de Neumann*, on exprime la solution par un potentiel de simple couche. L'adjointe de (15) correspond précisément, pour $\lambda = -1$, au problème de Neumann intérieur; pour $\lambda = 1$, au problème de Neumann extérieur. Les pôles de cette adjointe sont ceux de (15) : donc, le problème extérieur a une solution et une

seule. Par contre, le problème intérieur exige la condition que la valeur moyenne de la dérivée normale sur Σ soit nulle, moyennant quoi, il y a une solution, définie à une constante additive près. L'équation adjointe de (15) sans second membre admet alors précisément pour solution la densité $\tau(Q)$ (définie à un facteur constant près) d'une couche en équilibre électrique sur la surface.

12. Fonction de Green. — Nous ne nous occuperons dorénavant que du problème de Dirichlet, dont la résolubilité dans des conditions assez larges est maintenant un fait acquis. Il est clair que la solution est une fonction de la surface Σ qui porte les données, en même temps qu'une fonctionnelle linéaire de ces valeurs. On adopte ainsi, avec J. Hadamard (IV, *b*) [16, *b*], le point de vue fécond de l'analyse fonctionnelle.

La solution du problème de Dirichlet se trouvant définie dans un certain champ, nous aurons à l'étendre à des champs fonctionnels plus généraux. Cela nous mènera à la conception du principe de Dirichlet généralisé. Pour atteindre ce but, nous aurons à réaliser quelque chose d'analogue à ce qui se fait en théorie des fonctions, quand on veut étendre au champ de toutes les valeurs réelles possibles une fonction continue définie d'abord seulement dans le champ des valeurs rationnelles.

Bien avant qu'on sût exprimer, avec F. Riesz, toute fonctionnelle linéaire par une intégrale de Stieltjes, on avait songé à exprimer la solution du problème de Dirichlet, en fonction des valeurs $f(Q)$ données sur Σ, sous la forme

$$U(P) = \frac{1}{(n-2)S_n}\int_\Sigma f(Q)\frac{dG_P^Q}{d\nu_Q}\,d\sigma_Q, \tag{17}$$

où G_P^Q est la fonction de Green du domaine Ω limité par Σ : le point P (pôle) étant regardé comme fixe, G_P^M se définit ainsi : c'est une fonction de M continue dans $\Omega+\Sigma$ et s'annulant sur Σ et telle que $\dfrac{1}{\overline{MP}^{n-2}} - G_P^M$ soit harmonique dans Ω; la formule (17) a été écrite explicitement [équation (31)] dans le cas de la sphère.

Le calcul de G_M^P est un cas particulier du problème de Dirichlet. Donc G_M^P existe dans des conditions assez larges, limitées d'ailleurs jusqu'à nouvel ordre, disons-le en passant, par des difficultés accessoires (vaincues dans certains cas par T. Carleman [7]) introduites dans la question par l'usage des équations intégrales. La formule (17) met d'ailleurs en jeu l'existence de la dérivée normale de G. Nous aurons à y revenir. Notons seulement pour l'instant la possibilité d'appliquer les mêmes considérations au problème intérieur, pour lequel G devra en plus s'évanouir à l'infini.

La fonction de Green est symétrique par rapport aux points dont elle dépend : pour établir $G_A^B = G_B^A$, il suffit d'appliquer la formule de Green dans $\Omega - \sigma_A - \sigma_B$ (où σ_A et σ_B sont deux sphères de centre A et B) aux fonctions G_A^M et G_B^M. En outre G_A^M exprime la température en M, lorsque Ω est rempli d'une substance homogène, conductrice de la chaleur, qu'on maintient à zéro les points de la frontière et qu'on place en A une source qui, dans l'espace infini rempli de la même substance, donnerait en M la température $\frac{1}{\overline{AM}^{n-2}}$. Ceci rend intuitives les inégalités $0 < G_A^B < \frac{1}{\overline{AB}^{n-2}}$, et plus généralement le fait que G_A^B croît, lorsque, A et B restant fixes, on dilate de toutes parts le domaine Ω. Avec plus de précision, on peut évaluer, pour une déformation infinitésimale de Ω, la variation éprouvée par G_A^B. Elle est donnée par la formule de M. Hadamard (IV, *b*) :

$$\delta G_A^B = -\frac{1}{(n-2)S_n}\int_\Sigma \frac{dG_A^Q}{d\nu_Q}\frac{dG_Q^B}{d\nu_Q}(\vec{\nu}.\overrightarrow{\delta Q})\,d\rho_Q, \tag{18}$$

où $\overrightarrow{\delta Q}$ est le déplacement infinitésimal subi par un point Q de Σ. On déduit (18) de (17) en remarquant que δG_A^B est une fonction harmonique du point B, prenant en Q la valeur $-\frac{dG_A^B}{d\nu_Q}(\vec{\nu}.\overrightarrow{\delta Q})$. L'équation (18) est une *équation aux dérivées fonctionnelles* qu'on peut utiliser pour calculer la fonction de Green d'un domaine déduit par déformation continue d'un autre domaine, dont on a déjà la fonction de Green (par exemple d'une sphère). Nous renverrons aux beaux travaux de Paul Lévy pour cette question (VIII) [25, *b*, *c*, *d*] et pour l'étude de l'allure de la fonction de Green lorsque les deux points dont elle dépend sont voisins d'un même point de Σ [25, *e*].

13. Problème de Dirichlet pour $\Delta U = \rho$. — Soit ρ_M une fonction continue donnée. Il existe une fonction U et une seule, continue dans $\Omega + \Sigma$, nulle sur Σ et admettant en chaque point de Ω un laplacien généralisé (au sens du n° 5, dernier alinéa) égal à ρ. Elle est donnée par

$$U_P = -\frac{1}{(n-2)S_n}\int_\Omega \rho_M G_M^P \, d\omega_M. \tag{10}$$

La solution de l'équation $\Delta U = \rho$, prenant sur Σ des valeurs données, s'obtient en ajoutant au second membre de (19) la solution du problème de Dirichlet harmonique.

A cela se rattache une méthode de S. Zaremba pour établir l'harmonicité d'une fonction continue dont certain laplacien généralisé est nul. Il suffit que la définition du laplacien assure l'exactitude du résultat suivant : la fonction ρ étant continue, le laplacien d'un potentiel d'une distribution dont la densité de volume est ρ est précisément proportionnel à ρ. Par exemple, c'est ce qui a lieu pour les définitions envisagées au n° 5, dernier alinéa, pour les définitions déduites de celles d'Evans (n° 3) en prenant pour σ une sphère de centre fixe et pour la définition utilisant les dérivées secondes directes suivant n directions rectangulaires.

Soit alors u une fonction continue à laplacien nul, au sens convenu. Prenons une sphère quelconque intérieure à la région de validité de nos hypothèses. Soit v l'intégrale de Poisson formée avec les valeurs de u sur cette sphère. Soit enfin w ce que devient le second membre de (19) pour cette sphère et pour $\rho = 1$. Chacune des fonctions $u - v + t^2 w$ et $v - u + t^2 w$ a un laplacien (au sens convenu) égal à t^2, en désignant par t une constante. On en déduit aisément (notamment pour les définitions citées) qu'elles ne peuvent avoir de maximum dans la sphère. Quel que soit t^2, elles y sont donc $\leqq 0$. Cela exige $u - v = 0$. (C. Q. F. D.)

14. Difficultés dues aux dérivées normales. — La formule (17) soulève la question de savoir si la fonction de Green admet bien, le long de Σ, une dérivée normale : avec précision, y a-t-il continuité, sur $\Omega' + \Sigma$ (Ω' désignant un voisinage de Σ, prélevé sur Ω), de la projection de $\overrightarrow{\text{grad}}\, G$, sur la normale abaissée de chaque point de Ω' à Σ. La même difficulté se présente dans la recherche de la courbe en équilibre sur une surface (problème de Robin [48]), lorsqu'on suppose obtenue au préalable, par quelque méthode, la solution du problème de Dirichlet extérieur, c'est-à-dire le potentiel correspondant à l'équilibre : la véritable inconnue, la densité électrostatique, se présente alors justement comme la dérivée normale extérieure de ce potentiel, à un facteur près de proportionnalité. Aussi a-t on consacré, surtout avant les travaux de Fredholm et de ses disciples, d'importants mémoires à l'existence des dérivées normales : signalons ceux de Liapounoff [26], Zaremba [60, *g*], Korn [21, *b*] et, plus récemment, ceux de O. D. Kellogg pour le cas du plan [19, *b*, *c*, *d*]. Une tendance générale consiste à déduire l'existence et la continuité du gradient de la solution du problème de Dirichlet dans $\Omega+\Sigma$ d'hypothèses locales vérifiées en chaque point de Σ (continuité à la Lipchitz du champ des normales à Σ) jointes à l'existence, dans un certain voisinage bilatéral de Σ, d'une fonction continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres (sans plus) et prenant les valeurs données sur Σ. Cette dernière hypothèse est d'emblée satisfaite pour la fonction de Green et pour le potentiel d'équilibre électrique. Moyennant les hypothèses qui assurent la validité de la théorie de Fredholm, les difficultés précédentes n'existent plus : nous avons montré que la solution $\tau(Q)$ du problème électrostatique peut s'obtenir comme solution d'une équation intégrale homogène; pareillement, on peut former, avec J. Hadamard [cours du Collège de France (1913-1914)], une équation intégrale, définissant $\frac{dG_P^Q}{d\nu_Q}$. On écrit

$$G_M^P = \frac{1}{\overline{MP}^{n-2}} - \frac{1}{(n-2)S_n}\int_\Sigma \frac{1}{\overline{MQ}^{n-2}} \frac{dG_P^Q}{d\nu_Q}\,d\sigma_Q,$$

et l'on remarque que si P est fixe, le second terme du second membre est un potentiel de simple couche. De (10) et (11), on tire, M venant sur Σ, l'équation intégrale en question :

$$\frac{1}{2}\frac{dG_P^M}{d\nu_M} = \frac{d}{d\nu_M}\left(\frac{1}{\overline{PM}^{n-2}}\right) - \frac{1}{S_n}\int_\Sigma \frac{dG_P^Q}{d\nu_Q}\,\frac{\cos\left(\vec{\nu}_M, \vec{MQ}\right)}{\overline{MQ}^{n-1}}\,d\sigma .$$

Ajoutons que la présence dans (17) de $\frac{dG}{d\nu}$ masque une propriété importante de la solution du problème de Dirichlet regardée comme fonction de la surface Σ, à savoir sa continuité d'ordre zéro (c'est-à-dire fondée sur un voisinage concernant seulement les points correspondants de Σ et de la surface variée, et non les plans tangents en ces points). Nous verrons plus tard que cette continuité a lieu dans des conditions beaucoup plus larges. Pour l'instant, indiquons seulement qu'on obvie à l'inconvénient signalé en substituant à (17) cette formule

$$(20) \qquad U(P) = \lim_{\lambda=\infty} \frac{\lambda^2}{(n-2)S_n} \int_\Omega e^{-\lambda\delta} f(M)\, G(M, P)\, d\omega_M$$

dont le second membre est une intégrale singulière, étendue au domaine Ω lui-même et non plus à sa frontière (1). Par $f(M)$, nous entendons une fonction continue dans $\Omega + \Sigma$, et prenant sur Σ les valeurs données, par δ la plus courte distance de M à Σ [5, *l*].

IV. — Considérations physiques. Première idée des principes concernant les singularités.

15. Interprétation des formules (17) **et** (20). — Ces formules donnent la température d'équilibre du domaine Ω, empli d'un milieu conducteur de la chaleur, homogène et isotrope, lorsqu'on maintient les points périphériques aux températures $f(Q)$, continûment réparties sur Σ. Dans (17), la température interne apparaît comme la résultante des effets de sources périphériques, dont chacune est établie en un point Q d'un élément $d\sigma_Q$ de Σ, et donnerait isolément la température $\frac{1}{(n-2)S_n} f(Q) \frac{dG_P^Q}{d\nu_Q} d\sigma_Q$. La fonction $\frac{dG_P^Q}{d\nu_Q}$ exprime la température interne due à une source placée en Q, quand les autres points de Σ sont au zéro : c'est donc une fonction harmonique et positivé dans Ω, s'annulant en tout point de Σ, sauf en Q, point au voisinage duquel elle croît indéfiniment, avec une rapidité comparable à $\frac{1}{PQ^{n-1}}$ dans chaque direction issue de Q, et par suite l'emportant sur celle de la solution élémentaire, ce qu'on interprète en remarquant qu'une source périphérique, pour établir dans Ω une température non nulle, doit lutter, d'une manière plus immédiate qu'une

(1) Dans ce genre de questions, il y a intérêt à substituer autant que possible aux intégrales de frontière des intégrales étendues au domaine lui-même : c'est ce qu'a fait M. Gevrey [15] dans une méthode qu'il a fait connaître pour le calcul des fonctions de Green.

source interne, contre l'effet réfrigérant de la frontière portée au zéro : elle a donc besoin d'une puissance (manifestée par la rapidité de croissance de la température en son voisinage) plus grande. Lorsque P tend vers un point Q de la frontière, l'intégrale (17) atteint la limite $f(Q)$, en tant qu'intégrale singulière à noyau positif, constamment égale à 1 dans Ω pour $f = 1$.

Dans (20), on utilise une distribution de sources internes, de puissances comparables à celle de la *source unitaire*, c'est-à-dire celle qui dans l'espace entier empli du même milieu donnerait justement en chaque point une température égale à la solution élémentaire. Dans les éléments de volume $d\omega_M$ et $d\omega'_{M'}$, on dispose des sources dont les puissances sont entre elles comme $e^{-\lambda\delta} f(M)\,\delta\omega_M$ et $e^{-\lambda\delta'} f(M')\,\delta\omega_{M'}$: l'importance d'une source s'accroît lorsqu'on s'approche de la frontière, et ce caractère s'accentue lorsque λ croît. Quand λ tend vers $+\infty$, tout est reporté à la périphérie.

16. Aperçus généraux sur les principes. — Les considérations de ce genre donnent un fil conducteur pour l'étude des principes généraux sur les singularités des fonctions harmoniques.

1° Lorsqu'on aura résolu le problème de Dirichlet pour un domaine Ω avec une distribution continue de valeurs $f(Q)$ sur sa frontière, même si cette frontière consiste en surfaces Σ soumises aux hypothèses faites jusqu'ici, ses points seront en général des points singuliers de la solution, pour laquelle Σ est une coupure. Au voisinage de Σ, la fonction reste bornée, et même continue dans les cas étudiés jusqu'à présent. Ceci nous achemine vers la conception du principe de Dirichlet comme une loi intégrale relative à des singularités bornées sur la frontière d'un domaine ouvert. Signalons encore un théorème de Schwarz : si une certaine portion de Σ est régulièrement analytique, et s'il en est de même des valeurs $f(Q)$ sur cette portion, celle ci cesse d'être une coupure pour la solution du problème de Dirichlet.

2° On connaît des fonctions harmoniques dans un certain domaine, sauf pour les points d'un ensemble intérieur E, qui tendent vers $+\infty$ lorsqu'on tend de quelque manière vers un point de E, par exemple, dans l'espace à n dimensions, le potentiel V d'une distribution de masses positives, de densité sommable, sur une multiplicité soumise en chaque point à des conditions locales de régularité, et de l'un des ordres 0, 1, 2, ..., $n-2$ (1) ; prenons les surfaces $V = \text{const.}$: la région extérieure à l'une d'elles formée par les points tels que $V(P) \leqq C$ s'étend lorsqu'on fait croître C, et seuls les points de E n'appartiennent à cette région pour aucune valeur de C. Cette remarque donne un grand prix à l'étude du cas général où une fonction V est harmonique dans un domaine D, sauf aux points d'un ensemble intérieur E (dont chaque point est un point frontière de la région d'harmonicité) sur lequel la fonction est infinie et positive. Peut-on le réaliser, conformément aux suggestions du problème de l'équilibre calorifique, par une association de sources émissives, distribuées sur E, la température, ou mieux sa partie singulière, s'exprimant au moyen de solutions élémentaires composées *additivement* (au sens arithmétique du mot, c'est-à-dire avec des coefficients positifs), suivant le processus linéaire le plus général ?

3° Prenant la résultante du 1° et du 2°, on peut chercher une fonction harmonique dans un domaine, prenant des valeurs données sur la frontière, sauf en certains points (de Ω ou de Σ) où elle devient infinie et positive. Prenons d'abord un seul point A intérieur à Ω : si une fonction est harmonique dans $\Omega - A$ et s'annule sur Σ, si elle reste en outre positive, *elle est déterminée à un facteur constant près*, elle est précisément de la forme $CG(A, P)$ en désignant par C une constante positive. Ce théorème, donné depuis fort longtemps par Émile Picard dans son cours de la Sorbonne $\left(\text{à la forme près, l'auteur montrant, en l'absence de condition d'annulation sur } \Sigma\text{, que la partie singulière est } \frac{C}{\overline{AP}^{n-2}}\right)$ (2), fournit la réponse affirmative à la question du n° 2 lorsque E est réduit au point A. — Prenons main-

(1) Pour une répartition continue de masses sur une multiplicité d'ordre $n-2$, le potentiel au voisinage de celle-ci est infini logarithmique ; c'est-à-dire de la forme $\mu_0 \log \frac{1}{\delta}$, où δ est la plus petite distance du point potentié à la multiplicité et où μ_0 est proportionnelle à la densité au pied de la normale. Pour une multiplicité d'ordre $n-k$, on a de même une partie principale de la forme $\frac{1}{\delta^{n-k}}$. Le cas d'une ligne potentiante dans l'espace à trois dimensions a été étudié, dans l'hypothèse de données analytiques par A. Tonolo [53] et pleinement élucidé par J. Hadamard [16, *c*].

(2) On peut noter qu'il y a deux formes d'énoncé du principe de Picard, la forme locale de l'auteur, et la forme intégrale que nous proposons ici. Pour la première, voyez [39, *e*, *f*].

tenant le point A sur Σ, et soit une fonction harmonique dans Ω, continue dans $\Omega + \Sigma - A$, s'annulant sur $\Sigma - A$, et qui reste en outre positive. Dans des conditions assez larges, elle est encore, nous le verrons, *déterminée à un facteur constant près.* C'est cette affirmation, dont la validité est soumise à des restrictions, que nous appellerons *principe de Picard.* La fonction précédente, déterminée à un facteur constant près, représente la répartition relative des températures qu'est susceptible de produire une source placée en A, lorsque $\Sigma - A$ est au zéro. Elle est donc proportionnelle à $\frac{dG_A^P}{d\nu_A}$ si cette dérivée existe, c'est-à-dire à la quantité employée dans (17) pour exprimer la solution du problème de Dirichlet. Cela montre déjà une dépendance entre le principe de Dirichlet et le principe de Picard.

4° Les conditions aux limites restant les mêmes, on pourra se représenter les singularités au voisinage desquelles la fonction, devenant infinie, prend des valeurs de signes quelconques (au moins dans des cas étendus), comme provenant de la présence simultanée au point A de sources émissives et de sources absorbantes : mais alors, pour qu'il subsiste un effet non nul à l'antagonisme de ces sources, il faudra que la puissance de chacune d'elles dépasse celle de la source unitaire, autrement dit, dans les régions où la fonction est positive (par exemple), c'est-à-dire où domine l'effet des sources émissives, on obtiendra des croissances dépassant en rapidité celle de la distribution que donnerait une source émissive unique placée en A. En même temps, suivant la complexité plus ou moins grande du système de sources mises en présence, on prévoit qu'on peut s'attendre à trouver des solutions, s'étageant par ordres progressifs de croissance (*séparation des croissances*); comme le principe de Picard, le *principe de la séparation des croissances* est à validité limitée.

5° Revenant aux singularités positives, on aperçoit des cas étendus où une liaison existe entre les caractères dimensionnels de l'ensemble singulier, moyennant certaine régularité de répartition sur cet ensemble, et les caractères de la croissance : elle apparaît dans les énoncés de la note (¹) du 2° (ce numéro).

Ces aperçus n'ont qu'une valeur intuitive. Ils nous feront cependant mieux comprendre l'enchaînement des résultats partiels que nous pourrons ultérieurement établir d'une manière rigoureuse.

V. — Familles de fonctions harmoniques.

17. Généralités sur les familles de fonctions continues. — Une notion essentielle est celle d'*égale continuité*. En l'imposant à une famille de fonctions continues dans un domaine fermé et bornées dans leur ensemble, on peut affirmer que cette famille est *compacte* (Fréchet) ou *normale* (Montel), c'est-à-dire que de toute suite infinie prélevée sur la famille, on peut extraire une suite qui converge uniformément vers une fonction continue (Ascoli). D'ailleurs, si une suite de fonctions également continues converge vers une fonction limite, il faut que cette fonction soit continue et que la convergence soit uniforme.

Soit maintenant une famille de fonctions, dont chacune est continue et bornée, mais non plus bornées dans leur ensemble. Si les fonctions obtenues en divisant chacune des précédentes par la borne supérieure de sa valeur absolue sont également continues, nous dirons que les premières possèdent l'*égale continuité relative* [5, *n*]. Si l'on a une suite partout non décroissante de fonctions, dont chacune est bornée, et possédant l'égale continuité relative il n'y a que deux cas possibles, ou bien la suite tend vers $+\infty$ dans tout le domaine, ou bien elle converge en un point et alors il existe une fonction continue limite vers laquelle les fonctions de la suite tendent uniformément.

18. Cas des fonctions harmoniques. — Osgood [32] et P. Montel [28, *a*] ont noté que des fonctions harmoniques dans un domaine ouvert D et inférieures en valeur absolue à un certain nombre $\mathfrak{M}$ sont également continues dans tout D′ fermé intérieur à D. Cela résulte immédiatement de la formule (3). On en tire en outre, dans les mêmes conditions, l'égale continuité relative de fonctions harmoniques positives dans D. D'où les théorèmes suivants :

1° Si une suite de fonctions harmoniques dans D et bornées dans leur ensemble converge dans D vers une fonction limite, la convergence est uniforme dans tout D′ intérieur à D; si D′ est pris sphérique, chaque fonction de la suite y équivaut à son intégrale de Poisson, et en vertu de la convergence uniforme, la fonction limite est aussi donnée par son intégrale de Poisson dans toute sphère intérieure à D : elle est donc harmonique.

2° Une suite de fonctions harmoniques dans D, bornées dans leur ensemble, converge dans D vers une fonction harmonique, pourvu qu'elle converge en une infinité de points de D ayant un point O *ultra-limite* intérieur à D, ce qui veut dire qu'à l'intérieur d'un cône droit de sommet O, tout autre cône droit de sommet O contient des points de convergence. La démonstration s'appuie sur ce qu'un point *ultra-limite* de l'ensemble sur lequel une fonction harmonique U s'annule est nécessairement singulier pour la fonction U (1), et emprunte le raisonnement qui établit le théorème de Vitali-Porter, affirmant la convergence dans D d'une suite de fonctions holomorphes également bornées, lorsqu'elle est supposée sur un ensemble ayant un point limite intérieur à D.

3° Une suite non décroissante de fonctions harmoniques dans D, qui converge en un point de D, tend vers une fonction harmonique dans D. C'est le théorème de Harnack.

Dans tous ces énoncés, la convergence (uniforme dans tout D') a lieu non seulement pour les fonctions de la suite vers la fonction harmonique limite, mais encore pour les dérivées de tout ordre des premières vers les dérivées correspondantes de la fonction limite. Car, on peut limiter les dérivées d'une fonction harmonique sur une sphère à l'aide des valeurs prises par la fonction sur cette sphère. Si ces valeurs tendent vers zéro, il en est de même des dérivées.

19. Lemme et critère de S. Zaremba. — 1° Si U est harmonique, dans D ouvert, sa valeur en un point P de D satisfait à l'inégalité

$$[U(P)]^2 \leqq \frac{n}{R^n S_n} \int_D U^2\, d\omega,$$

où R est la plus courte distance de P à la frontière de D. Cela

(1) On peut encore dire que deux fonctions harmoniques dans un domaine ne peuvent prendre les mêmes valeurs sur un ensemble de points admettant un point ultra-limite à l'intérieur de ce domaine sans coïncider dans la totalité du domaine. Cet énoncé met en évidence la monogénéité harmonique et peut d'ailleurs s'établir sans emprunt à la théorie des fonctions analytiques. Nous avons introduit la notion de point ultra limite dans un enseignement donné à l'Université de Cracovie sur ces questions (octobre-décembre 1925).

résulte de la formule d'invariance par médiation spatiale (dont on majore l'intégrale en l'étendant à D) et de l'inégalité classique de Schwarz.

2° Soit, dans D ouvert, une série de fonctions harmoniques $U_1 + U_2 + \ldots + U_k + \ldots$; elle converge uniformément dans tout D′ intérieur à D, pourvu qu'à tout ε positif, on puisse faire correspondre un entier m tel que $j \geqq m$ entraîne quel que soit p

$$\int_D [U_{j+1} + U_{j+2} + \ldots + U_{j+p}]^2 \, d\omega < \varepsilon.$$

Plus brièvement, la convergence en moyenne dans D entraîne la convergence pure et simple. On peut noter que la convergence en moyenne d'une suite de fonctions de carré sommable vers une fonction de carré sommable entraîne la convergence pure et simple de la suite des médiantes spatiales vers la médiante de la fonction φ. Le résultat de S. Zaremba (**60**, *i*) est un cas particulier de ce théorème.

VI. — Transformation du laplacien. Équations solidaires de l'équation de Laplace.

20. Forme générale du laplacien. — Passons des coordonnées cartésiennes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ à des coordonnées quelconques $y_1, \ldots, y_n$, définies par des relations au moins localement réversibles

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

L'élément linéaire s'exprimera par une forme quadratique

$$dx_1^2 + \ldots + dx_n^2 = \sum_{i,k} g^{ik} \, dy_i \, dy_k$$

dont les coefficients sont fonctions des y. Soit g le déterminant des g^{ik}, appelons g_{ik} le quotient par g du mineur de g^{ik} dans ce déterminant. Le laplacien est donné par

$$\Delta U = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i} \left[\sqrt{g} \left(g_{i1} \frac{\partial U}{\partial y_1} + \ldots + g_{in} \frac{\partial U}{\partial y_n} \right) \right], \tag{21}$$

et cette expression est valable non seulement pour l'espace euclidien à n dimensions, mais encore pour des multiplicités à n dimensions tracées dans un espace euclidien d'un nombre de dimensions supérieur à n. On peut en effet, pour de telles variétés considérer des champs scalaires et des champs vectoriels tangents, et généraliser les notions de gradient et de divergence, qui obéissent aux relations intégrales rencontrées à leur endroit en géométrie euclidienne (ces relations sont indépendantes de la métrique de la variété). Les calculs ainsi effectués dépendent exclusivement de l'élément linéaire de la variété, qu'on peut considérer *in abstracto*, sans souci d'un espace euclidien la contenant (point de vue de Riemann). On peut donc, avec Beltrami, définir un paramètre différentiel du second ordre, qui se réduit au laplacien dans l'espace euclidien et qui se calcule au moyen de (21). Ce laplacien plus général est encore la divergence du gradient.

Dans le cas particulier où les multiplicités $y_1 = a_1$ sont les trajectoires orthogonales des lignes $y_2 = a_2, \ldots, y_n = a_n$, on peut écrire

$$ds^2 = \gamma\, dy_1^2 + ds'^2,$$

ds'^2 désignant un élément linéaire $dy_2, \ldots, dy_n$ dont les coefficients dépendent, non seulement de $y_2, \ldots, y_n$, mais aussi de y_1. Désignons par des lettres accentuées les opérateurs relatifs à ds'^2 qui, à cela près, seront représentés par les mêmes notations que les opérateurs analogues relatifs à ds. Nous aurons, en cherchant le flux sortant de $\overrightarrow{\text{grad}}\, U$, à travers le volume compris entre deux multiplicités $y_1 = a_1$ très rapprochées, et intérieur à un tube de trajectoires orthogonales

$$(22) \qquad \Delta U = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{div}'\left(\sqrt{\gamma}\, \overrightarrow{\text{grad}'}\, U\right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma g'}} \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\sqrt{\frac{g'}{\gamma}} \frac{\partial U}{\partial y_1}\right).$$

Plus particulièrement, si les $y_2 = a_2, \ldots, y_n = a_n$ sont des géodésiques orthogonales aux multiplicités parallèles $y_1 = a_1$, on a $\gamma = 1$ et

$$(23) \qquad \Delta U = \Delta' U + \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\sqrt{g'} \frac{\partial U}{\partial y_1}\right).$$

Par exemple, dans l'espace euclidien, en coordonnées sphériques, on a

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\sigma^2,$$

$d\sigma^2$ étant l'élément linéaire de la sphère unitaire. Soient, pour cette sphère, δ_2 le paramètre de Beltrami et γ' la valeur de g', en vertu de l'homogénéité

$$\Delta' U = \frac{\delta_2 U}{r^2}, \qquad \sqrt{g'} = \sqrt{\gamma'}\, r^{n-1},$$

et comme γ' est indépendant de r, il vient finalement

$$\Delta U = \frac{\delta_2 U}{r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}. \tag{24}$$

Dans le cas de $n = 2$, l'expression (21) montre que si l'on passe d'un élément linéaire ds^2 à un élément linéaire $\lambda\, ds^2$ (surfaces se correspondant avec *conservation des angles*), ΔU se transforme en $\Delta U : \lambda$. Donc aux fonctions harmoniques correspondent des fonctions harmoniques. Pour l'étude de *la représentation conforme*, nous renverrons au fascicule correspondant du Mémorial (P. Montel), aux œuvres de Schwarz (XII) et aux importants travaux de P. Montel [28, *d*], G. Lery [22 *ter*] et H. Villat [55, *a*, *b*].

Signalons aussi que l'attention des géomètres s'est portée sur les cas où l'équation $\Delta U = 0$, écrite sous la forme (22), admet des solutions de la forme $Y_1\, u\,(y_2, \ldots, y_n)$, en désignant par Y_1 une fonction de y_1 seul. Ce point de vue a donné naissance à l'étude détaillée de classes intéressantes de fonctions harmoniques :

1° Fonctions qui en coordonnées cylindriques r, θ, z (cas de $n = 3$) sont de la forme $e^{kz}\varphi(r)\cos m\theta$; on est ainsi conduit aux *fonctions de Bessel;*

2° *Fonctions sphériques*, c'est-à-dire polynomes harmoniques homogènes [de la forme $r^n\,Y\,(p)$ où p désigne un point de la sphère unitaire];

3° *Fonctions de Lamé*, obtenues en prenant pour surfaces de coordonnées des quadriques homofocales.

Ces questions seront étudiées dans des fascicules spéciaux. Le fascicule X du Mémorial (P. Humbert) donne la théorie des fonctions de Lamé et de Mathieu.

21. Équations solidaires de l'équation de Laplace. — Les considérations qui précèdent montrent qu'il est impossible de séparer l'équation des potentiels de certaines équations du type elliptique, vérifiées par la fonction $u\,(y_2, \ldots, y_n)$ dans la recherche de solutions de la forme $Y_1\, u$ (lorsqu'elles existent). Mais il y a plus et l'on est amené à faire intervenir dans la théorie des fonctions harmoniques certaines équations intégro-différentielles. Reprenons par exemple les multiplicités $y_1 = a_1$ orthogonales aux lignes $y_2 = a_2, \ldots, y_n = a_n$. Prenons un tube de ces lignes et *une fonction harmonique dans ce tube* (ou au moins dans une portion telle que $a'_1 < y_1 < a''_1$) *s'annulant sur la paroi latérale du tube*. D'après (22) l'équation de Laplace s'écrit encore

$$\operatorname{div}'(\sqrt{\gamma}\,\overrightarrow{\operatorname{grad}'}\,\mathrm{U}) + \frac{1}{\sqrt{g'}}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\sqrt{\frac{g'}{\gamma}}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y_1}\right) = 0.$$

Le premier terme est un opérateur identique à son adjoint. Soit $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{P}}(y_1)$ la fonction de Green correspondante, positive et symétrique en M et P, pour une section Ω' de notre tube (les notations M, P désignent deux trajectoires particulières des multiplicités $y_1 = \text{const.}$; en fixant y_1, nous avons une section déterminée). Cette fonction de Green représente la température d'équilibre d'un conducteur réparti dans la multiplicité y_1, à l'intérieur de la section précédente, sa conductibilité en chaque point étant proportionnelle à $\sqrt{\gamma}$, lorsque la périphérie est portée au zéro et que P est le siège d'une source unitaire. Dans ces conditions, il est clair que la fonction U considérée vérifie l'équation intégro-différentielle

$$(25)\qquad \mathrm{U}_{\mathrm{P}}(y_1) = \frac{1}{(n-3)\,\mathrm{S}_{n-1}}\int_{\Omega'}\left[\frac{1}{\sqrt{g'}}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\sqrt{\frac{g'}{\gamma}}\frac{\partial \mathrm{U}}{d y_1}\right)\right]_{\mathrm{M}} \mathcal{G}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{P}}(y_1)\,d\Omega'_{\mathrm{M}}$$

dont la liaison intime avec l'équation de Laplace entraîne immédiatement cette conséquence : il y a une solution unique de (25) se réduisant pour $y_1 = a'_1$ et $y_1 = a''_1$ à deux fonctions données u'_{P} et u''_{P}. Nous verrons le rôle important d'équations de cette forme ou d'équations analogues dans l'étude du principe de Picard [dans le cas de $n = 3$, la quantité $(n-3)\,\mathrm{S}_{n-1}$ doit être remplacée par 2π].

VII. — Cas de simplification des équations intégro-différentielles solidaires de $\Delta\mathrm{U} = 0$. Domaines coniques ou cylindriques.

22. Cas des domaines cylindriques. — Revenons à l'espace euclidien, supposons que les surfaces $y_1 = \text{const.}$ soient des plans parallèles. Un tube de trajectoires orthogonales est donc ici un domaine cylindrique. L'équation (25) prend la forme

$$(26)\qquad \mathrm{U}_{\mathrm{P}}(y_1) = \frac{1}{(n-3)\,\mathrm{S}_{n-1}}\int_{\Omega'}\frac{\partial^2 \mathrm{U}_{\mathrm{M}}}{\partial y_1^2}\,\mathcal{G}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{P}}\,d\omega'_{\mathrm{M}},$$

la section droite Ω' et $\mathcal{G}_M^P$ étant maintenant indépendantes de y_1. Il en résulte que cette équation apparaît comme la limite d'un système différentiel linéaire *à coefficients constants.*

23. Considérations sur certains systèmes différentiels linéaires. — Le système en question est de la forme

$$(27) \qquad u_i = a_{i1}\frac{d^2 u_1}{dy^2} + \ldots + a_{iN}\frac{d^2 u_N}{dy^2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

où les coefficients a_{ik} sont positifs et forment un tableau symétrique par rapport à sa diagonale principale. Ce système définit, dans l'espace à N dimensions, en fonction du temps y, les mouvements du point $(u_1, \ldots, u_N)$ de masse unité, dans un champ de forces dérivant d'un champ scalaire du second degré f, dont les surfaces de niveau $f = c$ sont des ellipsoïdes ayant pour centre commun l'origine. Parmi les directions principales communes à ces surfaces, qui sont aussi les trajectoires rectilignes du problème de dynamique, il y en a une et une seule Δ_1 traversant la région où tous les u_i sont > 0. Sur chacune de ces trajectoires, l'abscisse du mobile a la forme $\lambda e^{\alpha y} + \mu e^{-\alpha y}$, et Δ_1 est la trajectoire rectiligne pour laquelle la constante positive α est la plus petite. D'autre part, tout mouvement intégral de (27) s'obtient en composant, par addition géométrique les mouvements sur les trajectoires rectilignes. Supposons que le mobile s'éloigne indéfiniment, de manière que $u_1, \ldots, u_N$ restent tous posistifs : on peut alors affirmer que Δ_1 est direction asymptotique de la trajectoire et que la distance du mobile à l'origine est de l'ordre de $e^{\alpha y}$. Cette double affirmation constitue *le principe de Picard* [1] *pour le système* (27). En outre, si l'on classe les directions principales suivant les α croissants, et si l'on impose à la distance du mobile à l'origine de demeurer inférieure à une expression de la forme $Ke^{\beta y}$, avec $\alpha_i < \beta < \alpha_{i+1}$, on voit que la trajectoire admettra une direction asymptotique qui sera l'une des i premières directions principales, et en général celle qui correspond à la plus grande α_i des constantes α inférieures à β. Remarquons enfin que chaque α est l'inverse de la

(1) Il s'agit ici du principe de Picard sous la forme même de l'auteur, qui en cas de solution infiniment grande et positive fait connaître la forme d'un système d'infiniment grands respectivement équivalents aux infiniment grands dont l'ensemble constitue cette solution. Notre raisonnement suppose tous les α distincts.

longueur de l'axe correspondant de l'ellipsoïde $f = 1$, et qu'un accroissement de chaque a_{ik} entraîne une dilatation d'ensemble de cet ellipsoïde : il entraîne par là même l'allongement du grand axe, donc une diminution de α_1.

24. Parallélisme entre l'équation (26) et le système précédent. — Les propriétés de l'équation (26) sont celles du système (27), à la substitution près du dénombrable au fini : chaque direction principale est remplacée par une fonction fondamentale de l'équation intégrale

$$\varphi_P = \frac{\alpha^2}{(n-3)S_{n-1}} \int_{\Omega'} \varphi_M \mathcal{G}_M^P \, d\omega'_M; \tag{28}$$

les φ forment une suite orthogonale qu'on peut rendre normale. A la première constante caractéristique α_1^2 correspond une fonction fondamentale $\varphi_P^{(1)}$ partout positive (à l'exclusion des autres) : elle remplace Δ_1. Toute fonction harmonique dans le cylindre et s'annulant sur sa surface [c'est-à-dire toute solution de (26)] est développable en série

$$F_P(y_1) = \sum_{i=1}^{\infty} c^{(i)}(y_1)\varphi_P^{(i)} \tag{29}$$

absolument et uniformément convergente [5, a] où les $c^{(i)}$ sont des combinaisons linéaires de $e^{\alpha_i y_1}$ et $e^{-\alpha_i y_1}$ (¹). On a donc, en appelant λ et λ' deux constantes,

$$\int_{\Omega'} F_P(y_1)\varphi_P^{(1)} d\omega_P = \lambda e^{\alpha_1 y_1} + \lambda' e^{-\alpha_1 y_1}. \tag{30}$$

Soit $F_P(y_1) > 0$ pour $y_1 > a_1$; on a $\lambda > 0$. En outre [5, n], les fonctions $F_P(y_1)$ forment une famille (à un paramètre y_1) de fonctions du point P détenant dans Ω' *l'égale continuité relative* (¹). Il

(¹) On peut en effet prouver que des fonctions harmoniques et positives dans un cylindre droit, continues sur sa surface et s'y annulant latéralement, possèdent l'égale continuité relative dans chaque nouveau cylindre ayant pour bases deux sections droites internes du premier. Cela posé, soit $\{h_n\}$ une suite de valeurs de y_1 en progression arithmétique. Dans les cylindres Γ_n limités par les plans $y_1 = h_n$ et $y_1 = h_{n+3}$, considérons les fonctions $F_P(y_1)$. En faisant coïncider les Γ_n avec un même cylindre droit Γ, nous avons une famille de fonctions harmoniques positives dans Γ, s'annulant latéralement, donc possédant l'égale continuité relative dans le cylindre partiel γ de Γ provenant dans Γ_n du cylindre γ_n limité par les plans $y_1 = h_{n+1}$ et $y_1 = h_{n+2}$.

s'ensuit qu'en chaque point P, le produit $e^{-\alpha_1 y_1} F_P(y_1)$ demeure au-dessous d'une limite finie [1]. Mais on a, en vertu de (29),

$$(31) \qquad \int_{\Omega'} [F_P(y_1)]^2 d\omega' = \sum_{i=1}^{\infty} [c^{(i)}(y_1)]^2,$$

et d'après ce qui précède, la croissance du premier membre ne peut l'emporter sur celle de $e^{\alpha_1 y_1}$. Il faut donc que pour $i \geqq 2$, tous les $c_i(y_1)$ manquent de terme en $e^{+\alpha_i y_1}$. On a par suite, en vertu des hypothèses qui précèdent,

$$(32) \qquad F_P(y) = \lambda e^{\alpha_1 y_1} \varphi_P^{(1)} + \varepsilon,$$

ε tendant uniformément vers zéro quand y_1 croît indéfiniment : on a ainsi, sous forme locale, c'est-à-dire pour les y_1 positifs et très grands, le principe des singularités positives de Picard. Notons qu'en dilatant Ω', on diminue α_1, et par suite la puissance à donner à une source à l'infini vers les y_1 positifs pour lui permettre de lutter efficacement contre le pouvoir réfrigérant de la frontière portée au zéro.

La légitimité du développement (29) en série de fonctions fondamentales a été établie pour la première fois par S. Zaremba [60, a'']; elle a été généralisée par Hilbert et Schmidt, au point de vue de la théorie des équations intégrales (*voir* II, Chap. II, Sect. IV).

25. Distinction des singularités. — Nous appellerons *polaires* celles pour lesquelles les coefficients $c^{(i)}$ du développement (29), présentant effectivement des termes en $e^{+\alpha_i y_1}$, sont en nombre fini, *essentielles*, les autres. *Pour que* $F_P(y_1)$ *présente une singularité polaire, il faut et il suffit que la famille à un paramètre* y_1 *de fonctions* $F_P(y_1)$ *du point* P *possède l'égale continuité relative dans* Ω'. Le seul point délicat est de montrer que cette condition suffit : or, si elle est remplie, nous pouvons extraire de l'ensemble des valeurs de y_1 une certaine suite de valeurs telle que la suite corres-

---

[1] Sinon $e^{-\alpha_1 y_1} \mu(y_1)$ pourrait dépasser tout nombre donné. Donc l'intégrale dans Ω' de $\varphi_P^{(1)} F_P(y_1) : \mu(y_1)$ pourrait acquérir des valeurs arbitrairement petites, et de même, celle de $F_P(y_1) : \mu(y_1)$, alors que cette fonction atteint nécessairement dans Ω' la valeur 1 : ce qui est en contradiction avec l'égale continuité des $F_P : \mu$. [Nous désignons ici par $\mu(y_1)$ le maximum, pour y_1, de $F(y_1)$].

pondante, ayant pour terme général

$$\frac{c^{(1)}(y_1)\varphi_P^{(1)} + c^{(2)}(y_1)\varphi_P^{(2)} + \ldots + c^{(k)}(y_1)\varphi_P^{(k)} + \ldots}{\sqrt{[c_1(y_1)]^2 + [c^{(2)}(y_1)]^2 + \ldots + [c^{(k)}(y_1)]^2 + \ldots}}$$

tende uniformément vers une fonction limite ψ_P, continue dans Ω', s'annulant sur la frontière de ce domaine, et telle que

$$(33) \qquad \int_{\Omega'} \psi_P^2 \, d\omega' = 1.$$

Alors, cette fonction ψ_P sera elle-même représentable (¹) par un développement procédant suivant les fonctions fondamentales $\varphi_P^{(k)}$, développement dont les coefficients seront les limites des suites telles que

$$\frac{c^k(y_1)}{\sqrt{[c^{(1)}(y_1)]^2 + \ldots + [c^{(k)}(y_1)]^2 + \ldots}}.$$

Cela posé, si à partir d'une certaine valeur de l'indice, tous les $c^{(k)}$ ne sont pas nuls, la rapidité de croissance du dénominateur l'emportera sur celle de chaque numérateur, et tous les coefficients de ψ_P seront nuls; or (33) exige que la somme des carrés de ces coefficients soit égale à 1. D'où une contradiction qui établit en définitive le résultat annoncé.

26. Séparation des croissances. — Supposons que l'on ait $\alpha_i < \beta < \alpha_{i+1}$ et que la fonction harmonique $F_P(y_1)$ vérifie une inégalité du type : $F_P(y_1) < Ke^{\beta y_1}$, où K désigne une constante positive (²). Alors, une singularité essentielle est impossible. En effet, en vertu de (30), la somme des éléments négatifs de l'intégrale figurant au premier membre prise en valeur absolue ne peut dépasser en croissance $e^{\beta y}$: d'où la même propriété pour la somme des éléments positifs et pour celle des éléments négatifs de l'intégrale de $F_P(y_1)$, et aussi de l'intégrale de $F_P(y_1)\varphi_P^{(k)}$, ce qui exige évidemment la disparition des infiniment grands dans les $c^{(k)}$, à partir de la valeur $k = i+1$. On aura donc une singularité polaire, avec une partie singulière réduite aux i premiers termes.

(¹) En toute généralité, ce développement ne converge qu'en moyenne vers la fonction ψ_P, mais cela n'introduit aucune difficulté.

(²) Il convient de noter, dans cette condition, l'absence de symboles de valeur absolue.

Nous avons supposé les α_i distincts. Mais l'éventualité que certains d'entre eux s'égalisent laisse subsister, à des détails près de forme, les raisonnements précédents et leurs conclusions. D'ailleurs α_1 est toujours distinct de α_2.

27. **Cas des domaines coniques.** — La théorie s'étend à un domaine conique [5, f] sans modification essentielle, car par le changement de variables

$$r = e^{-\rho}, \qquad U = e^{\frac{n-2}{2}\rho}V \tag{34}$$

on obtient l'équation

$$\delta_2 V - \frac{(n-2)^2}{4}V = -\frac{\partial V^2}{\partial \rho^2}; \tag{35}$$

en désignant alors par $g(m, p)$ la fonction de Green du domaine ω, section sphérique unitaire de notre domaine conique, relativement à l'équation

$$\delta^2 V - \frac{(n-2)^2}{4}V = 0,$$

on obtient l'équation intégro-différentielle

$$V_p(\rho) = \frac{1}{(n-3)S_{n-1}}\int_\omega \frac{\partial^2 V_m}{\partial \rho^2} g(m,p)\,d\omega_m \tag{36}$$

qui appartient au type précédemment étudié. On retrouve donc exactement les mêmes propriétés que dans le cas précédent :

1° *Principe de Picard.* — L'expression asymptotique des fonctions harmoniques et positives dans le cône, s'annulant sur sa surface, quoique non bornées aux environs du sommet, est de la forme $Cr^{-\alpha}\varphi_1(p) + \varepsilon$, en désignant par $\varphi_1(p)$ la première fonction fondamentale relative à $g(m, p)$. L'exposant α, caractéristique de la croissance de la température produite à l'intérieur du cône par une source émissive placée en son sommet, lorsque la surface est au zéro, s'accroît si l'on contracte la section droite sphérique.

2° *Distinction des singularités polaires par l'égale continuité relative* des empreintes de la fonction sur les sections droites sphériques successives.

3° *Principe de la séparation des croissances.* — Lorsque la section droite est la totalité de la sphère (alors, plus de condition d'annulation), on retrouve *les théorèmes sur les fonctions harmo-*

niques uniformes autour d'un point singulier isolé. Les fonctions fondamentales relatives à (36) sont ici les fonctions sphériques et le développement procédant suivant ces fonctions est l'analogue du développement de Laurent pour une fonction analytique uniforme dans les mêmes conditions. Ce fait, anciennement connu, a permis par exemple à P. Appell de faire une théorie systématique des fonctions harmoniques uniformes et méromorphes, d'étendre à ces fonctions le développement de Mittag-Leffler, et d'étudier notamment celles qui sont périodiques, pour un certain réseau de parallélipipèdes [5, *a*, *b*, *c*]. De leur côté, P. Noaillon [31, *a*, *b*] et W. Stozek [51] ont indiqué des résultats partiels, relatifs au principe de la séparation des croissances, donnée ici sous sa forme générale.

28. Fonctions de Green des domaines cylindriques ou coniques. — Le même ordre d'idées conduit à exprimer la fonction de Green d'un cylindre indéfini par une intégrale de Fourier qui, dans le cas de trois dimensions, s'écrit

$$G(M,P) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(m,p;\lambda^2)\cos\lambda y\, d\lambda, \tag{37}$$

y désignant la projection de $\overrightarrow{MP}$ sur les génératrices, m, p les projections de M, P sur une section droite; g est la fonction de Green de cette section pour l'équation $\Delta' U = \lambda^2 U$. Pour diverses généralisations, nous renvoyons à notre thèse [5, *a*].

De même, en posant $OP = r$ et $OM = s$, la fonction de Green d'un domaine conique indéfini (bien déterminé par sa section droite sphérique unitaire σ) sera

$$\frac{1}{\pi\sqrt{rs}}\int_{-8}^{+\infty} g(m,p;\lambda^2)\cos\left(\lambda\log\frac{r}{s}\right) d\lambda,$$

où $g(m,p;\lambda^2)$ est la fonction de Green de σ pour l'équation

$$\delta_2 V = \left(\frac{1}{4}+\lambda^2\right)V.$$

VIII. — Généralisation des principes relatifs aux singularités. Cas exceptionnels.

29. Cas d'extension régulière. — Soit un domaine de l'espace à n dimensions, dont la frontière admet, sauf peut-être en un point O (où subsiste un cône des tangentes), un champ continu de normales. Soit une fonction harmonique dans ce domaine et s'annulant sur la frontière, bien que non bornée aux environs de O. Le changement de variables (34) montre qu'elle satisfait à l'équation (36) où le domaine ω et par suite $g(m,p)$ dépendent maintenant de ρ. Il faut encore étudier les solutions de cette équation lorsque ρ tend vers $+\infty$. On a un problème limite de l'étude d'un système linéaire à coefficients positifs, qui au lieu d'être constants comme au n° 23, sont maintenant fonctions de la variable indépendante (qui est ici ρ, à la place de y) : en considérant cette variable comme le temps, on est amené à une étude asymptotique de mouvements, dans un champ linéaire dépendant du temps, mais tendant, lorsque le temps croît indéfiniment, vers un champ limite bien déterminé. La quadrique indicatrice (¹) de ce champ limite est un ellipsoïde : les directions Δ_i de ses axes sont précisément les directions asymptotiques des trajectoires, tandis que les longueurs $\frac{1}{\alpha_i}$ des axes témoignent de la rapidité de croissance de la distance du mobile à l'origine, en fonction du temps; si petit soit ε, elle est intermédiaire entre celle de $e^{(\alpha_i-\varepsilon)\rho}$ et celle de $e^{(\alpha_i+\varepsilon)\rho}$, ce qu'on peut exprimer en disant que α_i est un *exposant caractéristique* [IX, t. III, chap. XIV] relatif à la direction asymptotique Δ_i. Si donc les α_i sont distincts, le principe de Picard s'applique encore au système différentiel en question, ainsi que le principe de la séparation des croissances : en se plaçant au point de vue qualitatif, on peut dire que ce système a mêmes propriétés asymptotiques que (27).

Ces considérations permettent de prévoir les propriétés des solutions de l'équation intégro-différentielle : au point de vue qualitatif, elles auront mêmes propriétés asymptotiques que les solutions de l'équation correspondante des domaines coniques, c'est-à-dire qu'on pourra justifier [5, *f*] :

1° Le principe de Picard;

2° L'existence d'un système fondamental de solutions S_m *orthogonalement asymptotiques* au moyen desquelles se développe la partie singulière de toute solution non bornée; la singularité pourra être *essentielle*, ou exceptionnellement, *polaire* (si sa partie non bornée

(¹) D'après les notations du n° 23, cette quadrique est celle qui définit l'équation $f = 1$.

est formée d'un nombre fini des solutions S_m), ce qu'on reconnaîtra en s'assurant de l'égale continuité relative;

3° Le principe de la séparation des croissances.

Le domaine conique qui intervient ici est naturellement celui que délimite le cône des tangentes. Aux Δ_i se substituent les fonctions fondamentales de la section droite : à chacune d'elles, correspond une S_m qui, dans une section infiniment voisine de O, tend à lui devenir proportionnelle, tandis que la croissance de la fonction V correspondante suivant le rayon vecteur est intermédiaire entre $e^{(\alpha_i-\varepsilon)\rho}$ et $e^{(\alpha_i+\varepsilon)\rho}$, α_i^2 désignant la constante caractéristique du noyau limite $g(m,p)$ laquelle répond à la fonction fondamentale considérée.

30. **Cas exceptionnels.** — Nous bornant à ces indications sur ce sujet, auquel sera consacré ailleurs un travail plus étendu, signalons l'existence de cas exceptionnels où le princpe de Picard et le principe de la séparation des croissances (d'ailleurs solidaires) tombent en défaut. Soit le domaine compris entre deux sphères tangentes intérieurement en un point O ($n = 3$). Une fonction harmonique et positive dans ce domaine, s'annulant sur ces sphères, mais non bornée aux environs de O, n'y est nullement déterminée à un facteur constant près. Car, en prenant O comme pôle d'inversion, on obtient le domaine compris entre deux plans parallèles, par exemple définis par $x = 0$ et $x = \pi$ (moyennant axes et unité convenables). On démontre que toute fonction harmonique et positive dans ce domaine et s'annulant sur deux plans extrêmes a une expression de la forme

$$\int_0^{2\pi} e^{y\cos\alpha + z\sin\alpha}\, df(\alpha),$$

$f(\alpha)$ étant quelque fonction non décroissante. Si l'on revient, par la transformation de Lord Kelvin, aux deux sphères tangentes, on a bien le résultat annoncé [5, f].

Ce résultat tient à une *fusion de croissances*, qu'on met clairement en évidence par cet autre exemple, très voisin : on part d'un prisme à section droite rectangulaire de côtés a, b, on prend le domaine infini délimité par ce prisme et une section droite de base; le principe de Picard s'y applique, dans le champ des fonctions harmoniques s'annulant sur la base et sur les faces, mais non bornées à l'infini. Les constantes caractéristiques

$$-\pi^2\left(\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\right) \qquad (h,\ k \text{ entiers})$$

provenant d'une même valeur de h se fondent en une seule lorsque b tend vers $+\infty$, c'est-à-dire lorsque, laissant fixes trois faces, on éloigne indéfiniment la quatrième. On s'explique ainsi la mise en défaut, pour le domaine limite, du principe de Picard et du principe de la séparation des croissanees. En supposant $a=\pi$, l'expression générale des solutions positives est ici

$$\sin x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sh}(y\cos\alpha)\,\operatorname{sh}(z\sin\alpha)\,df(\alpha).$$

Une étude plus complète de ces exemples fait ressortir l'analogie qui existe entre les caractères comparés de croissance des solutions que l'on y rencontre et les caractères analogues présentés par les fonctions harmoniques dans un domaine, exception faite pour les points d'un segment de droite intérieur à ce domaine, segment sur lequel la fonction considérée peut devenir infinie. Ces deux ordres de question présentent d'ailleurs un caractère commun : chacun d'eux traduit les propriétés d'une équation intégro-différentielle, solidaire de $\Delta U=0$, laquelle emprunte *un domaine d'intégration variable dont l'une des dimensions devient infiniment petite par rapport aux autres* (en nombre réduit à l'unité, dans le cas actuel $n=3$). Pour chaque problème, il y a ainsi une infinité d'équations intégro-différentielles qui le traduisent, et qui correspondent aux divers choix possibles des multiplicités $y_1=$ const. sur lesquelles on étudie les empreintes successives de la fonction harmonique ; mais, dans de larges conditions, il est clair que la perte relative d'une dimension par le champ d'extension est indépendante du choix particulier des $y_1=$ const. Il y a donc là une circonstance invariante, jouant dans la théorie générale (encore mal connue) des équations intégro différentielles solidaires de $\Delta U=0$, un rôle essentiel : aussi le rapprochement qui vient d'être fait dépasse-t-il en portée une simple analogie [1].

---

[1] Pareillement, dans l'étude des fonctions harmoniques uniformes autour d'un point singulier isolé, peut-on étudier les empreintes de la fonction sur des surfaces fermées tendant vers le point. Dans de larges conditions, l'égale continuité relative, caractéristique des singularités polaires, aura lieu indépendamment des surfaces choi-

IX. — Principe de Dirichlet.

31. Le prolongement fonctionnel. — Ainsi que nous l'avons dit au n° 12, la méthode des équations intégrales devient insuffisante dès qu'il s'agit d'étudier le problème de Dirichlet pour des domaines dont la frontière est affranchie d'un certain nombre de conditions, qui sont au fond de pure commodité. Ces équations introduisent des difficultés accessoires qui masquent le véritable aspect de la question.

Pour étudier le principe de Dirichlet, il y a avantage à adopter le point de vue de l'analyse fonctionnelle. Soit un domaine ouvert Ω, tout entier à distance finie. Soit Σ la frontière de Ω, laquelle est un ensemble fermé et comprenant, pour le moins, un continu externe. Sur Σ est donnée une fonction continue $f(Q)$. La solution du problème de Dirichlet dépend alors à la fois de la frontière Σ et de la fonction $f(Q)$. Cette solution est définie dans des cas déjà généraux et il s'agit de l'étendre à tous les cas possibles, au moyen d'un prolongement fonctionnel par continuité.

32. La méthode des réseaux de Philipp's et Wiener. — Il y a tout avantage à rendre la théorie autonome et notamment à la libérer de propositions sur les équations intégrales, souvent citées, rarement bien connues. Pour cela on peut, avec Philipp's et Wiener [36], et à la suite des recherches analogues de J. Le Roux dans le cas du plan (22 *bis*), utiliser la méthode des réseaux cubiques qui substitue à l'équation de Laplace l'équation aux différences finies des *fonctions préharmoniques*, c'est-à-dire des fonctions, exclusivement définies aux nœuds du réseau, et dont la valeur en chaque nœud, en vertu de l'équation précédente, est la moyenne arithmétique des valeurs en chacun des six nœuds (cas de $n = 3$) les plus proches. Soit Δ un *domaine polycubique*, c'est-à-dire fourni par juxtaposition de cubes du réseau. Le *préproblème de Dirichlet* consiste à trouver une fonction préharmonique, définie aux nœuds intérieurs de Δ, connaissant ses valeurs aux nœuds périphériques. C'est un problème linéaire ayant autant d'équations que d'inconnues et dont le déterminant ne peut s'annuler (fait solidaire de la monotonie sur le réseau). Il a donc toujours une solution et une seule.

---

sies. Nous touchons donc là à une propriété qualitative commune à toutes les équations intégro-différentielles possibles de ce problème.

Une méthode de passage à la limite permet alors de résoudre le *problème de Dirichlet classique* pour un domaine polycubique et d'établir qu'il admet une solution et une seule.

33. **Les cas d'impossibilité du problème de Dirichlet au sens classique.** — La locution : *problème de Dirichlet classique* implique la nécessité d'une distinction dont un exemple de H. Lebesgue [22, *d*] a montré l'importance capitale.

Étant donné un domaine Ω, de frontière Σ, il n'existe pas toujours une fonction $F(P)$, harmonique dans Ω, continue dans $\Omega + \Sigma$, et se réduisant sur Σ à $f(Q)$. Le problème de Dirichlet classique n'étant plus possible, il faut alors songer à le remplacer par un problème de Dirichlet généralisé, toujours soluble, et dont la solution soit celle du problème classique, dans les cas où elle existe.

Voici l'exemple de H. Lebesgue : sur un segment de droite unitaire OA sont réparties des masses avec une densité égale à OM en chaque point M. Pour $C \geqq 1$, les surfaces équipotentielles $V = C$ [nous appelons $V(P)$ le potentiel] ou mieux leurs méridiennes offrent en O un rebroussement de tangente OA. Soit un domaine Ω dont la frontière Σ aux environs de O est la surface $V = 2$, puis, au delà d'une certaine distance, est déterminée arbitrairement. Prenons pour valeurs $f(Q)$ sur Σ celles qu'y acquiert $V(P)$: nous aurons ainsi $f(O) = 2$. Utilisons ce lemme de S. Zaremba [60, *k*] : *une fonction harmonique dans* Ω, *continue dans* $\Omega + \Sigma - O$ *et s'annulant sur* $\Sigma - O$ *est identiquement nulle si elle reste bornée* (parce qu'inférieure en valeur absolue en chaque point P de Ω à la solution du problème de Dirichlet extérieur à une sphère arbitrairement petite de centre O et portant la valeur $\mathfrak{M}$ de la borne). D'après ce lemme, *le problème de Dirichlet au sens classique ne peut avoir de solution autre que* $V(P)$; mais cette fonction ne tend pas vers 2 quand O tend vers P, *il y a donc impossibilité*. L'énoncé du problème de Dirichlet est trop restrictif. Le prolongement fonctionnel va nous fournir une nouvelle forme assurant toujours l'existence d'une solution attachée aux valeurs $f(Q)$, solution qui, dans l'exemple cité, sera justement $V(P)$.

34. **Le théorème général de M. Norbert Wiener.** — D'après un lemme de H. Lebesgue [22, *a*], étant donné l'ensemble fermé Σ, on

peut construire une $\mathcal{F}(P)$ continue dans tout l'espace et se réduisant sur Σ à une $f(Q)$ continue donnée; on peut même s'arranger de manière que $\mathcal{F}(P)$ soit monotone dans Ω. Cela posé, l'existence de la solution du problème de Dirichlet général est assurée par le théorème suivant [1] [58, *a*] :

Soit le domaine ouvert Ω, *à distance finie, de frontière* Σ, *et soit donnée* $f(Q)$ *continue sur* Σ; *formons une* $\mathcal{F}(P)$ *continue dans* $\Omega + \Sigma$ *et égale à* $f(Q)$ *sur* Σ [2]. *Considérons* Ω *comme limite d'une suite* $\{\Omega_k\}$ *de domaines* (par exemple de domaines polycubiques, obtenus en considérant une suite de réseaux procédant d'un réseau initial par subdivision binaire, et prenant les cubes de chaque réseau intérieurs à Ω) *qui vont en se dilatant et pour lesquels le problème de Dirichlet classique est résoluble : soit* $F_k(P)$ *la solution pour* Ω_k, *qui, sur sa frontière* Σ_k, *acquiert mêmes valeurs que* $\mathcal{F}(P)$. *La suite des fonctions harmoniques* $\{F_k(P)\}$ *tend vers une limite* $F(P)$, *indépendante du choix de* $\mathcal{F}$ *et des domaines approchés; c'est justement la solution annoncée.*

Le cas de $f(Q) = 0$ est immédiat et montre de suite que les propriétés limites des $\{F_k\}$ sont indépendantes du choix de $\mathcal{F}$ et des Ω_k. En outre, si $\mathcal{F}(P)$ est un polynome, on peut, d'après une remarque de H. Poincaré, le regarder comme la différence de deux polynomes à laplacien $\geqq 0$. Chacun d'eux donne naissance à une suite $\{F_k\}$ croissante, pour laquelle l'existence et l'harmonicité de la limite découlent du théorème d'Harnack. Le théorème étant vrai dans le champ des fonctions $\mathcal{F}(P)$ qui sont des polynomes est général, car dans ce champ

$$|f'(Q) - f''(Q)| < \varepsilon \quad \text{entraîne} \quad |F'(P) - F''(P)| < \varepsilon,$$

et d'autre part, d'après Weierstrass, on peut approcher uniformément, dans $\Omega + \Sigma$, d'une fonction continue quelconque par une suite de polynomes. C. Q. F. D.

---

(1) L'idée d'une fonction harmonique attachée à des valeurs $f(Q)$ est très ancienne. Quiconque est familier avec ces questions la trouve en germe dans l'exposé de H. Poincaré sur sa méthode du balayage [10 *a*], chez tous les géomètres, qui, à la suite d'Hilbert, se sont occupés du principe du minimum [14, 23]. Mais aucun de ces auteurs n'a étudié cette solution généralisée pour elle-même : le premier pas décisif dans cette voie a été magistralement accompli par S. Zaremba; son travail principal sur ce sujet (60, *l*) avait été précédé par une Communication au Congrès de Rome (1907) : elle marque une date dans l'histoire du principe de Dirichlet, au même titre que les travaux de H. Poincaré et de H. Lebesgue.

(2) L'existence de fonctions $\mathcal{F}(P)$ résulte d'un théorème de H. Lebesgue (22, *a*).

35. **Le théorème de O. Perron et N. Wiener.** — Nous dirons avec O. Perron [34] que $\varphi(P)$, continue dans Ω, est une *fonction supérieure* pour $f(Q)$, si l'on a

$$\Delta\varphi \leqq 0 \text{ (dans } \Omega) \quad \text{et} \quad \underline{\lim}\, \varphi(P) \geqq f(Q) \quad (\text{sur } \Sigma);$$

ces hypothèses entraînent l'existence d'une $\mathcal{F}(P) \leqq \varphi(P)$, d'où l'on déduit, par un raisonnement facile (comparaison des termes correspondants de deux suites de Wiener),

$$\varphi(P) \geqq F(P). \tag{38}$$

Posant la notion de *fonction inférieure*, on obtient des résultats analogues. Mais (38) exprime que $\varphi - F$ est une fonction supérieure pour $f = 0$; une telle fonction peut être rendue arbitrairement petite. On a donc ce théorème général établi par M. Norbert Wiener [58, *d*] à la faveur des concepts précédents :

La solution du problème de Dirichlet généralisé est la borne inférieure des fonctions supérieures et la borne supérieure des fonctions inférieures relatives à $f(Q)$.

36. **Propositions de première espèce, de seconde espèce.** — Les deux théorèmes précédents ne supposent aucune hypothèse complémentaire sur Σ. Nous dirons qu'ils sont de *première espèce* pour les distinguer de théorèmes mettant en relation avec $f(Q)$ les valeurs limites de la solution $F(P)$ du problème de Dirichlet généralisé (théorèmes de seconde espèce). Pour comprendre que ces derniers exigent des restrictions, il suffit de citer l'exemple d'un domaine Ω, constitué par les points intérieurs à une sphère de centre O, moins ceux d'un certain segment OA. Une fonction harmonique, attachée aux valeurs $f(Q)$ sur la sphère et $f_1(Q)$ sur OA coïncide, quelle que soit $f_1(Q)$ bornée, avec l'intégrale de Poisson formée avec $f(Q)$. Il ne peut donc exister de relation entre les propriétés limites, aux points de OA, de $F(P)$ et les valeurs $f_1(Q)$.

Nous dirons que OA est un ensemble impropre à porter efficacement des données de Dirichlet (physiquement : inapte à influencer par les températures qu'il porte le milieu ambiant) ou brièvement : un *ensemble impropre*.

37. Les ensembles impropres sont ceux de capacité électrostatique nulle. — Soient $G(A, P)$ la fonction de Green de Ω; σ_λ l'ensemble des points de Σ appartenant au domaine ouvert Δ_λ tel que $G(A, P) > \lambda$; σ la limite des σ_λ lorsque λ tend vers zéro; σ constitue la *partie impropre* de la frontière Σ. On montre aisément qu'elle sera impropre pour toute autre frontière, ou mieux que, tout ensemble fermé σ' contenu dans σ peut être ajouté à la frontière d'un domaine Ω contenant σ', de manière que la solution du problème de Dirichlet, dans le champ des f bornées, soit la même pour Ω et $\Omega - \sigma'$.

Cela posé, on peut définir la solution du problème de Dirichlet extérieur, avec le degré de généralité du n° 34, pour chaque domaine connexe Ω' formé des points extérieurs à une sphère donnée S_0 et de certains points non extérieurs. Soit Σ l'ensemble frontière. Le cas de données $f(Q)$ positives sur Σ se traite par l'intermédiaire du problème intérieur pour la partie de Ω' intérieure à S_0 (données f sur Σ et o sur S_0) et du théorème d'Harnack (1). En particulier, se traite ainsi le cas $f = 1$, ou *problème généralisé de la couche en équilibre sur* Σ. La notion de *capacité* (2), acquise pour des classes étendues de frontières Σ peut être définie, par prolongement fonctionnel, pour tout ensemble frontière Σ (donc, fermé) en notant que, dans les cas déjà étudiés, une modification de Σ qui exclut tout gain de point pour Ω' ne peut qu'augmenter la capacité de Σ.

On démontre alors ces théorèmes très étroitement liés : *pour qu'un ensemble soit impropre, il faut et il suffit que sa capacité soit nulle*. En disposant sur un tel ensemble des masses positives, de manière que chaque sous ensemble du premier intérieur à une sphère contienne une masse non nulle, le potentiel sera infini sur cet ensemble. Une fonction harmonique dans une certaine région, sauf peut-être sur un ensemble de points intérieurs où elle se maintient bornée, est harmonique dans toute cette région si cet ensemble est

---

(1) Dans ce passage à la limite se manifeste la distinction du cas de $n = 2$ avec le cas général $n \geqq 2$. On suppose que le rayon de S_0 croît indéfiniment.

(2) La recherche systématique des ensembles de capacité nulle est un problème difficile. La propriété en question est une propriété topologique restreinte, invariante par les transformations ponctuelles conservant la rectificabilité. Cette remarque nous a amené à étudier ce problème dans ses rapports avec la notion de nombre dimensionnel d'un ensemble [5, *m*] déjà définie antérieurement par F. Hausdorff [16 *bis*]. — Du cas de $f > 0$ et du cas de $f = 1$, on déduit facilement la solution du problème de Dirichlet extérieur pour f quelconque.

de capacité nulle. Des cas particuliers de ce théorème ont été indiqués par H. Lebesgue [22, *g*].

Il est clair que le mode de continuité de la solution du problème de Dirichlet [5, *j*] est plus large que la continuité d'ordre zéro signalée au n° 14 : la frontière variée devra être formée de points infiniment rapprochés, soit de la frontière initiale, soit d'ensembles impropres.

38. **Quelques théorèmes de seconde espèce.** — Soit le domaine Ω de frontière Σ; soit σ la partie impropre de Σ : il est préférable de poser le problème de Dirichlet pour le domaine $\Omega+\sigma$ de frontière $\Sigma-\sigma$ (*frontière réduite*). Moyennant cette précaution, on obtient les théorèmes suivants :

1° *Il existe une fonction* G(A, P) *et une seule, telle que* $\frac{1}{\mathrm{AP}^{n-2}}-\mathrm{G}(\mathrm{A},\mathrm{P})$ *soit harmonique et telle que la limite inférieure de* G *en chaque point de la frontière réduite soit nulle : c'est justement la fonction de Green. Le fait pour une suite* $\{\mathrm{P}_k\}$ *tendant vers un point frontière de faire tendre* G *vers zéro est indépendant du choix de* A *et assure aux* $\mathrm{F}(\mathrm{P}_k)$ *la limite* $f(\mathrm{Q})$.

2° *S'il correspond à* $f(\mathrm{Q})$ *une* $\mathcal{F}(\mathrm{P})$ *telle que l'on ait dans tout le domaine réduit* $\Delta\mathcal{F}\leqq 0$, *la limite supérieure de* F(P) *en chaque point frontière est* $f(\mathrm{Q})$, *et cette propriété détermine univoquement* F(P). *Résultat analogue si* $\Delta\mathcal{F}\geqq 0$.

La démonstration de ces théorèmes s'appuie sur la formule

$$\mathrm{F}(\mathrm{P})=\mathcal{F}(\mathrm{P})+\frac{1}{(n-2)\mathrm{S}_n}\int_{\Omega-1}\Delta\mathcal{F}(\mathrm{M})\,\mathrm{G}(\mathrm{M},\mathrm{P})\,d\omega_{\mathrm{M}},$$

qui donne la solution du problème de Dirichlet général dans un champ étendu de $\mathcal{F}(\mathrm{P})$, contenant notamment les polynomes, ce qui suffit pour passer à des $\mathcal{F}(\mathrm{P})$ continues quelconques.

39. **Points réguliers, points irréguliers.** — Pour qu'un point Q de Σ soit *régulier*, il faut et il suffit, par définition, que F(P) tende vers $f(\mathrm{Q})$ pour chaque suite de points P de Ω tendant vers Q. Donc d'après le théorème 1° du n° 38, *il faut et il suffit que* G(A, P) *tende vers zéro pour chacune de ces suites.* De Q comme centre, décrivons une sphère de rayon ρ, soit Ω_ρ l'ensemble des points de Ω intérieurs à cette sphère; définissons pareillement Σ_ρ et soit $\mathcal{S}$ l'en-

semble des points de Ω situés sur la sphère. La régularité ou l'irrégularité en Q apparaît, à la suite d'un raisonnement facile, comme la décision d'un conflit entre la valeur 1 sur $\mathcal{S}$ et la valeur 0 sur Σ_ρ : il y aura régularité si la fonction H(P) harmonique dans Ω_ρ, attachée à ces valeurs, tend vers zéro quand P tend vers Q. Il s'agit donc d'une *propriété locale. Pour que* Q *soit irrégulier, il est nécessaire que l'aire* $\mathcal{S}$ *et* $S_n \rho^{n-1}$ *soient des infiniment petits équivalents :* on en déduit que *la limite supérieure en* Q *de* H(P) *est encore la valeur limite de la moyenne de cette fonction sur une sphère infiniment petite de centre* Q (ou mieux sur $\mathcal{S}$). Voici une autre remarque : soient deux domaines Ω et Ω' dont les frontières Σ et Σ' ont un point Q commun et tels que, pour $\rho < \rho_0$, le domaine partiel Ω_ρ soit formé exclusivement de points de Ω'_ρ : alors, si Q est régulier pour Σ', il l'est pour Σ; si Q est irrégulier pour Σ, il l'est pour Σ' (*régularité ou irrégularité* a fortiori).

De ces propositions découle le théorème suivant, de première espèce :

Soit un domaine Ω *de frontière* Σ, *et soit donnée* $f(Q)$ *continue sur* Σ. *Il existe une fonction et une seule* F(P), *harmonique et bornée dans* Ω, *et telle que,* ε *positif étant arbitrairement donné, l'ensemble des points* Q *de* Σ, *où quelque valeur limite de* $f(P)$ *est extérieure à l'intervalle* $[f(Q)-\varepsilon, f(Q)+\varepsilon]$ *soit de capacité nulle :* F(P) *est précisément la solution du problème de Dirichlet généralisé* (1).

On montre aussi que si Σ est réduite, chaque point irrégulier est limite de points réguliers; on remarque en outre que le continu externe de Σ appartient toujours, en totalité, à la frontière réduite.

40. Discrimination des points irréguliers. — D'importants résultats ont été signalés par H. Lebesgue : dès 1907, il a montré que dans le plan, pour les domaines dont l'ordre de connexion est fini, il ne se présente jamais de points irréguliers [22, *a*]. Si l'ordre de connexion devient infini, certains points peuvent devenir irréguliers, et cela, dans le cas où une certaine série converge. La remarque de *régula-*

(1) Pour la démonstration de ce théorème et de quelques autres, donnés pour la première fois dans notre Cours d'hiver 1925 à l'Université de Cracovie, nous renvoyons à un Mémoire, actuellement à l'impression, dans les *Annales de la Société mathématique Polonaise,* t. III, p. 59 et suivantes.

rité ou irrégularité a fortiori rend d'ailleurs intuitif le fait qu'il existe une solidarité entre le caractère de chaque point de la frontière et celui d'une certaine série, convenablement formée. Une telle série a été obtenue par Norbert Wiener [58, *b*] qui a démontré le théorème suivant : *soit* λ *un nombre positif* < 1, *soit* γ *la capacité de l'ensemble des points non situés dans* Ω *et dont la distance à* Q *soit comprise entre* λ^k *et* λ^{k-1}. *Alors*, Q *est régulier ou irrégulier suivant que la série de terme général* $\frac{\gamma_k}{\lambda^{k(n-2)}}$ *diverge ou converge* (dans le cas de $n = 2$, on substitue la série $2^k \gamma_k$), en désignant cette fois par γ_k la capacité de l'ensemble des points non situés dans Ω, dont la distance à Q est comprise entre λ^{2^k} et $\lambda^{2^{k-1}}$). De ce théorème, on déduit des conditions de régularité *pour les frontières présentant en* Q *une pointe* (cas de $n = 3$) : on étudie d'abord le cas d'une surface de révolution (pointe sur l'axe) dont la méridienne a pour équation polaire $\theta = f(\rho)$, Q étant le pôle, la fonction f étant croissante et s'annulant pour $\rho = 0$; soit θ_k la valeur de θ pour $\rho = \lambda^k$. La série caractéristique est alors celle de terme général $-(1 : \log \theta_k)$. On passe de là à un corollaire permettant de reconnaître la régularité dans des cas étendus : on procède par comparaison entre deux pointes, dont l'une est de révolution, l'autre quelconque. La régularité de la première étant supposée acquise, celle de la seconde s'ensuivra si, en désignant par s_1 et s_2 les aires qu'elles découpent sur une sphère de rayon ρ, centrée en chaque pointe, on a toujours $s_2 \leqq s_1$ pour ρ assez petit. On peut aussi étudier le cas où la frontière, au voisinage de Q, affecte la forme d'une *pointe en lame* (de manière que les points du complémentaire de Ω suffisamment voisins de Q soient des points de Σ). Si la lame est plane et admet un axe de symétrie passant par Q, son profil, en tournant autour de cet axe, engendrerait une pointe de révolution : le caractère de Q est le même pour la pointe en lame et pour la pointe de révolution. Dans le même ordre d'idées : soit Q un point de la frontière Σ, et soit en Q une pointe de révolution empruntée à une autre frontière Σ'. Comparons l'ensemble des points de Σ et celui des points de Σ' dont la distance à Q est comprise entre ρ et ρ'. Si Q est régulier sur Σ' et si la projection orthogonale du premier ensemble sur un certain plan a toujours sa mesure superficielle supérieure à celle du second (pour ρ et ρ' assez petits), le point Q est aussi régulier pour Σ.

Ces théorèmes englobent des critères de régularité déjà très généraux antérieurement proposés, et notamment ceux de H. Lebesgue [22, *b*]. Enfin, N. Wiener a complété les résultats précédents en reprenant, à ce point de vue général, un remarquable exemple de O.-D. Kellog [19, *e*] : il s'agit de la résolution du problème de Dirichlet, dans le plan, pour un domaine obtenu en enlevant du cercle $x^2+y^2=4$ les points appartenant à un ensemble triadique, construit sur le segment de base $(-1, +1)$ de l'axe $x'x$ par subdivision ternaire indéfinie et ablation de la partie médiane de chaque segment divisé. L'auteur cité avait établi directement que tous les points d'un tel ensemble sont réguliers.

41. **Méthode de l'inversion.** — Pour qu'un point Q soit irrégulier, il faut et il suffit que la limite supérieure de $G(M, P)$ ne soit pas nulle lorsque P tend vers Q : cette limite $G(M, Q)$ est une fonction harmonique de M, attachée à la valeur zéro sur Σ, non bornée autour de Q, mais inférieure à la solution élémentaire. En faisant une inversion de pôle Q, on obtient donc un domaine infini capable d'une fonction harmonique bornée et non nulle, attachée à la valeur zéro en chaque point à distance finie de la frontière. Un tel domaine sera dit *exceptionnel* (D. E.) par opposition aux domaines infinis où la condition imposée à une fonction harmonique, attachée à zéro sur la frontière, de demeurer bornée entraîne son annulation identique : ces derniers seront appelés *domaines normaux* (D. N.). A une inversion près, la distinction entre points réguliers et irréguliers équivaut donc à la distinction : D. E., D. N. [5, *b*, *i*, *l*]. D'après quoi, pour avoir un D. E., il faut que l'aire de l'ensemble des points du domaine situés sur une sphère de centre fixe et de rayon infiniment grand soit équivalente à son aire totale. Une fonction harmonique bornée dans un D. E., attachée à zéro sur sa frontière, est déterminée à un facteur constant près : en emplissant le complémentaire du domaine de matière conductrice de l'électricité, la fonction précédente exprime la différence de potentiel entre un point de l'espace ambiant et ce système de conducteurs en équilibre. Pour les D. E., cette différence de potentiel reste bornée; pour les D. N., elle acquiert toute valeur positive : en réalité, le potentiel d'équilibre est alors infini, bien que la différence de potentiel ait un sens (circonstance que l'on rencontre en étudiant l'équilibre sur un conducteur cylindrique indéfini et de

révolution pour $n = 3$) : cette fonction sera déterminée, à un facteur constant près, en vertu du principe de Picard, dont l'exactitude est indispensable pour permettre de généraliser le problème de l'équilibre électrique à des systèmes de conducteurs s'étendant indéfiniment.

Cela posé, considérons dans l'espace à n dimensions une répartition de masses positives sur un ensemble de capacité nulle E, qui s'étend à l'infini, et tel que la différence de potentiel entre deux points soit convergente. On peut définir, par rapport à chaque surface équipotentielle, une région extérieure ne contenant aucun point de E. Cela posé, pour que cette région soit un D. E., il faut et il suffit que le potentiel soit convergent. Cette simple remarque nous a permis, en opérant par comparaison de frontières, d'obtenir des critères de régularité offrant le même degré de généralité que ceux du numéro précédent [5, *i*].

42. Autres résultats. — Pour obtenir la solution du problème de Dirichlet, on peut, lorsqu'elle existe au sens classique, opérer avec H. Lebesgue [22, *b*) de la manière suivante : on forme une $\mathcal{F}(P)$ continue dans $\Omega + \Sigma$ et égale à $f(Q)$ sur Σ. A chaque point P de Ω, on fait correspondre la sphère ayant ce point pour centre et pour rayon la plus courte distance de P à Σ. Cela fait, on prend la médiante spatiale de $\mathcal{F}(P)$, soit $\mathcal{F}_1(P)$, puis la médiante spatiale de cette nouvelle fonction, et ainsi de suite. Dans les conditions indiquées, on démontre que ces médiantes successives convergent vers la solution du problème de Dirichlet. On prouve aussi par là qu'une fonction invariante par médiation spatiale, dans un cas où cette invariance n'a lieu que pour une sphère bien déterminée centrée en chaque point, est harmonique au moins dans les conditions indiquées. Sur ce sujet, on pourra consulter également un travail de M. Volterra [56].

43. Cas de données $f(Q)$ discontinues. — L'hypothèse d'une distribution $f(Q)$ discontinue a donné lieu à des travaux nombreux dans le cas du cercle et de la sphère [11, 12, 18, 37]. Dans le cas d'un domaine quelconque Ω, des résultats importants ont été obtenus par G. C. Evans [10, *b*] et N. Wiener [58, *c*], qui ont utilisé, pour l'expression de la solution, l'intégrale de Daniell [9, *b*]. Nous nous bornerons ici à faire observer, avec N. Wiener [58, *d*] qu'en général la borne inférieure des fonctions supérieures relatives à $f(Q)$ et la borne supérieure des fonctions inférieures ne coïncident plus.

OUVRAGES A CONSULTER.

I. APPELL (P.). — *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III, Chap. XXVIII et XXVIV, 3e édition (Gauthier-Villars, 1921).

II. FRÉCHET et HEYWOOD. — *L'équation de Fredholm et ses applications à la Physique mathématique* (Hermann, 1912).

III. GOURSAT (E.). — *Cours d'Analyse mathématique*, t. III, Chap. XXVII, XXVIII et XXXIII, 3e édition, et Note de MONTEL (P.) : *Sur la représentation conforme* (Gauthier-Villars, 1922).

IV. HADAMARD (J.). — *a. Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique*, Chap. I (Hermann, 1903).

b. Leçons sur le calcul des variations, Livre II, Chap. VII (Hermann, 1910).

V. HARNACK. — *Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials* (Leipzig, 1877).

VI. HILBERT (D.). — *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, 2ter Absch. (Leipzig, 1912).

VII. KORN (A.). — *Lehrbuch der Potentialtheorie* (Berlin, 1899).

VIII. LÉVY (P.). — *Leçons d'analyse fonctionnelle*, 2e Partie, Chap. II et III.

IX. LICHTENSTEIN. — *Potentialtheorie* (*Encyclopedie der Mathematischen Wissenschaften*).

X. PICARD (E.). — *Traité d'Analyse*, t. I, Chap. V, VI, VII; t. II, Chap. I, II, III et IV, 3e édition (Gauthier-Villars, 1920, 1925).

XI. PLEMELJ. — *Potentialtheoretische Untersuchungen* (Leipzig, 1911).

XII. POINCARÉ (H.). — *Leçons sur la théorie du potentiel newtonien*, rédigées par LE ROY et VINCENT (Gauthier-Villars, 1899).

XIII. SCHWARZ. — *Œuvres complètes*, t. II.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. APPELL (P.). — *a.* Sur les fonctions de trois variables réelles satisfaisant à l'équation $\Delta F = 0$ (*Acta math.*, t. 4, 1884, p. 313-374).

b. Sur quelques applications de la fonction Z (x, y, z) à la Physique (*Ibid.*, t. 8, 1886, p. 265-295).

c. Sur les fonctions harmoniques à trois groupes de périodes (*Rendic. Circ. mat. Palermo*, t. 22, 2e semestre 1906, p. 361-370).

2. ARZELA (C.). — Sul principio di Dirichlet (*Rendic. Acc. Bologna*, 1897).

3. BERTRAND (G.). — Le problème de Dirichlet et le potentiel de simple couche (*C. R. Ac. Sc.*, t. 176, 16 avril 1923, p. 1040).

4. BOCHER (M.). — On harmonics functions in two dimensions (*Proceedings of the Amer. Acad. Sc.*, vol. 41, 1905-1906).

5. BOULIGAND (G.). — *a.* Sur les fonctions de Green et de Neumann du cylindre (*Bull. Soc. math. France*, 1914, p. 168-242).

b. Sur les fonctions harmoniques et bornées dans un domaine infini, nulles sur la frontière (*C. R. Ac. Sc.*, t. 169, 3 novembre 1919, p. 763).

c. Sur les solutions de $\Delta u = \lambda u$, analytiques et bornées dans un domaine infini, nulles sur sa frontière (*Ibid.*, 17 novembre 1919, p. 893).

d. Sur le problème de Dirichlet dans un domaine infini (*Ibid.*, 1er décembre 1919, p. 1020).

e. Sur certains modes de détermination des solutions de $\Delta u = \omega^2 u$ (*Ibid.*, t. 172, 21 février 1921, p. 437).

f. Sur les singularités des fonctions harmoniques (*Ibid.*, t. 176, 16 avril 1923, p. 1037; 30 avril 1923, p. 1200; 14 mai 1923, p. 1366.

g. Sur quelques points d'analyse fonctionnelle (*Ibid.*, 19 mars 1923, p. 822).

h. Sur l'existence de la solution du problème de Dirichlet harmonique (*Ibid.*, t. 178, 2 janvier 1924, p. 55).

i. Domaines infinis et problème de Dirichlet (*Ibid.*, 23 mars 1924, p. 1054).

j. Sur les modes de continuité de certaines fonctionnelles. — Sur la définition et le mode de continuité de la fonction de Green harmonique et de la solution du problème de Dirichlet (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 47, juillet et novembre 1923).

k. Application du prolongement des fonctionnelles à l'étude de l'exis tence de la solution du problème de Dirichlet harmonique (*Ibid.*, mai et juin 1924).

l. Sur les principes de la théorie du potentiel (*Ibid.*, t. 48, juillet 1924).

m. Dimension, étendue, densité (*C. R. Ac. Sc.*, t. 180, 1925, p. 245; pli cacheté déposé le 17 novembre 1924).

n. Sur quelques points de la théorie des fonctions harmoniques (*Ibid.*, t. 181, 16 novembre 1925, p. 705).

6. BRAY (H. E.). — *a.* A Green's theorem in term's of Lebesgue integrals (*Annals of math.*, 2e série, vol. 21, 1920, p. 141-156).

b. *Voir* EVANS (G. C.), n° 11.

7. CARLEMAN (T.). — Ueber das Neumann-Poincarésche Problem für ein gebiet mit Ecken (*Inaug. diss.*, Upsal, 1916, Almovist et Wiksells).

8. CISOTTI (U.). — Sul comportamento della funzione di Neumann in punti prossimi al contorno (*Rendic. Circ. mat. Palermo*, t. 31, 1er semestre 1911, p. 201-234).

9. DANIELL (P. J.). — *a.* A general form of green's theorem (*Bull. Amer. math. Soc.*, vol. 25, 1919, p. 201-234).

b. A general form of integral (*Annal's of math.*, 2e série, vol. 20, 1918, p. 279-294).

10. Evans (G. C.). — *a.* Fundamental points of potential theory : Stieltjes potential, Green's theorem, Dirichlet problem (*Rice Instit. Pamphlet*, vol. 7, octobre 1920, p. 252-329).

b. Problems of potential theory (*Proc. Amer. Acad. Sc.*, vol. 7, 1921, p. 89-98).

11. Evans (G. C.) et Bray (H. E.). — Sur l'intégrale de Poisson généralisée (*C. R. Ac. Sc.*, t. 176, 16 avril 1923, p. 1042).

12. Fatou (P.). — Séries trigonométriques et séries de Taylor (*Acta math.*, t. 30, 1906, p. 339).

13. Fredholm (I.). — Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet (*Ofr. Kgl. Vet. Ak. Förh. Stockholm*, 1900).

14. Fubini (G.). — Il principio di minimo (*Rend. Circ. mat. Palermo*, t. 23, 1er semestre 1907, p. 58-84 et 300-301).

15. Gevrey (M.). — *a.* Sur la détermination des fonctions de Green (*C. R. Ac. Sc.*, t. 171, 4 octobre 1920, p. 609).

b. Sur la résolution des problèmes aux limites (*Ibid.*, 2 novembre 1920, p. 839).

16. Hadamard (J.). — *a.* Sur le principe de Dirichlet (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 34, 1906, p. 135).

b. Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées (*Mémoires présentés par divers savants Ac. Sc.*, t. 33, 1908).

c. Notice sur les travaux scientifiques, 2e Partie (Hermann, 1912).

16 *bis*. Hausdorff (F.). — Dimension einer Punktmenge (*Math. Ann.*, t. 69, juillet 1918).

17. Hilbert (D.). — *a.* Ueber das Dirichletsche Prinzip (*Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung*, 1900).

b. Festschrift zur Feier der 150 jährigen Bestehens der Kgl. Ges. Wiss. (Göttingen, 1901).

18. Julia (G.). — *a.* Sur les valeurs limites de l'intégrale de Poisson relative à la sphère en un point de discontinuité des données (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 42, 1918, p. 214-220 et 224-231).

b. Sur une équation aux dérivées fonctionnelles liée à la représentation conforme (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. 39, 1922, p. 1-29).

19. Kellogg (O. D.). — *a.* Note on conjugate potentials (*Bull. of the amer. math. Soc.*, 2e série, vol. 13, p. 168-170).

b. Potential functions on the boundary of the regions of definition (*Transact. amer. math. Soc.*, vol. 9, 1908, p. 39-50).

c. Double distributions and the Dirichlet problem (*Ibid.*, p. 51-66).

d. Harmonic functions and Green's integral (*Ibid.*, vol. 13, 1912, p. 109-132).

e. An example in potential theory (*Proc. Amer. Ac. Sc.*, vol. 58, juin 1923, n° 14).

f. Une condition d'harmonicité (*Amer. math. Monthly*, vol. 31, n° 10, décembre 1924).

20. Koebe. — Sitzungsberichte d. Berl. Math. Gesellschafft (vol. 5, 1906, p. 39).

21. Korn (A.). — *a.* Fünf Abhandlungen zur Potentialtheorie :

I. Ein allgemeinen Beweis der Methoden des alternierende Verfahrens und der Existenz der Lösungen des Dirichlet'schen Probleme ein Raume;

II. Eine weitere Verallgemeinerung der Methode des arithmetischen Mittels;

III. Ueber die zweite und die dritte Randwertaugfabe und ihre Lösung;

IV. Ueber die Differentialgleichung $\Delta u + K \varphi^2 u = f$ und die harmonischen Funktionen Poincaré's;

V. Ueber einen Satz von Zaremba und die Methode des arithmetischen Mittels ein Raume.

(Berlin, Ferd. Dümmler, 1901.)

b. Ueber die Lösungen des Dirichlets'chen Problems Welche durch eine Combination der Methoden von Neumann und Schwarz gefunden Worden (*Math. Ann.*, t. 53, 1900, p. 593-608).

c. Ein neuer allgemeiner Beweis für die Gultigkeit der Neumann. Robinschen Methoden des arithmetischen Mittels (*Nova Acta Acad. Caes. Leopold. Carol. Germanicæ Nauræ Curiosum*, vol. 88, 1908, p. 149-173).

d. Ueber die erste und zweite Randwertaufgabe der Potentialtheorie (*Rendic. di Palermo*, t. 35, 1er semestre 1913, p. 317-323).

22. Lebesgue (H.). — *a.* Sur le problème de Dirichlet (*Rendic. Circ. mat. Palermo*, t. 24, 2e semestre 1907, p. 371-402).

b. Sur le problème de Dirichlet (*C. R. Ac. Sc.*, t. 154, 5 février 1912, p. 335).

c. Sur le principe de Dirichlet (*Ibid.*, t. 155, 14 octobre 1912, p. 699).

d. Sur les cas d'impossibilité du problème de Dirichlet (*C. R. séances Soc. math. France*, t. 41, 27 novembre 1912, p. 17).

e. Sur l'équivalence du problème de Dirichlet et du problème de calcul des variations considéré par Riemann (*Ibid.*, 25 juin 1913, p. 47).

f. Notice sur les travaux scientifiques, p. 64-73 (Privat, Toulouse, 1922).

g. Sur les singularités des fonctions harmoniques (*C. R. Ac. Sc.*, t. 176, 23 avril et 7 mai 1923, p. 1097 et 1270).

h. Conditions de régularité, conditions d'irrégularité, conditions d'impossibilité dans le problème de Dirichlet (*Ibid.*, t. 178, 21 janvier 1924, p. 349).

22 *bis.* Le Roux (J.). — Sur le p oblème de Di.ichlet (*Journ. math, pures et appl.*, t. 10, 1914, p. 189-230).

22 *ter.* Léry (G.). — Sur la fonction de Green pour un contour algébrique (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. 32, p. 49, 136).

23. Levi (B.). — Sul principio di Dirichlet (*Rendic. Circ. mat. Palermo*, t. 22, 2e semestre, 1906, p. 293-360 et 387-394).

24. Levi (E. E.). — Sopra una proprietate caratteristica delle funzioni armoniche (*Atti dei Lincei*, 1er semestre 1909, p. 10).

25 Lévy (P.). — *a.* Sur une généralisation de la méthode de Fredholm pour la résolution du problème de Dirichlet (*Journ. Éc. Polyt.*, 2e série, 15e cahier, 1911, p. 195 210).

b. Sur les équations intégro différentielles [1] définissant des fonctions de lignes (*Thèse*, Paris, 1911, n° 1436).

c. Sur les équations aux dérivées fonctionnelles et leurs applications à la Physique mathématique (*Rendic. Circ. mat. di Palermo*, t. 33, 1er semestre 1912, p. 281 312).

d. Sur la fonction de Green du cylindre de révolution (*Ibid.*, t. 34, 2e semestre 1912, p. 187-219).

e. Sur l'allure des fonctions de Green et de Neumann dans le voisinage du contour (*Acta math.*, t. 42, 1919).

f. Sur la variation de la distribution de l'électricité sur un conducteur dont la surface se déforme (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 46, 1918, p. 35-68)

26. Liapounoff. — Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet (*Journ. Math. pures et appl.*, 6e série, t. 4, 1898, p. 241-311).

27. Lichtenstein. — *a.* Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (*Rend. Circ. mat. Palermo*, t. 28, 2e semestre 1909, p. 267-306).

b. Article de titre analogue (*Math. Ann.*, t. 67, 1909, p. 559-575).

c. Beiträge zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen 2ter Ordnung, vom elliptischen Typus : unendliche Folgen positiver Lösungen (*Rendic. Circ. mat. Palermo*, t. 33, 1er semestre 1912, p. 201-211).

28. Montel (P.). — *a.* Sur les suites infinies de fonctions (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. 24, 1907, p. 323 334).

b. Sur les familles de fonctions analytiques (*Ibid.*, t. 29, 1912, p. 487-535).

c. Sur les familles normales de fonctions analytiques (*Ibid.*, t. 33, 1916, p. 223-302).

d. Sur la représentation conforme (*Journ. Math. pures et appl.*, 7e série, t. 3, 1917, p. 1-54).

29. Neumann (C.). — Untersuchungen über das logarithmische und newtonische Potential (Leipzig, 1877).

29 *bis.* Neumann (C.). — Potential und Kugel functionen (édité par C. Neumann, Leipzig, 1887).

30. Neumann (F. R.). — *a.* Zur Integration der Potentialgleichung vermittelst C. Neuman's Methode des arithmetischen Mittels (erster und zweiter Aufsatz; *Math. Ann.*, t. 55 et 56).

b. Die Randwert aufgaben für den Innen, und Aussenraum derselben geschlossenen Fläche in ihren gegenseitigen Beziehungen (*Rendic. Circ. mat. Palermo*, t. 24, 2e semestre 1907, p. 333 370).

---

[1] On dit aujourd'hui : aux dérivées fonctionnelles.

31. Noaillon (P.). — *a*. Fonction harmonique dont le gradient s'annule à l'infini (*C. R. Ac. Sc.*, t. 176, 26 mars 1923, p. 879).

b. Sur les pôles des fonctions harmoniques (*C. R. séances Soc. math. Fr.*, t. 51, 14 novembre 1923, p. 39).

32. Osgood. — *Annal's of Math.*, 2e série, vol. 3, 1902, p. 26.

33. Paraf. — Sur le problème de Dirichlet et son extension à l'équation linéaire générale du second ordre (*Ann. Toulouse*, t. 6, 1892, H).

34. Perron (O.). — Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$ (*Math. Zeitschrift*, vol. 18, Heft 1, 2, 1924).

35. Petrini (H.). — *a*. Les dérivées premières et secondes du potentiel (*Acta math.*, t. 31, 1908, p. 127-322).

b. Les dérivées premières et secondes du potentiel logarithmique (*Journ. Math. pures et appl.*, 6e série, t. 5, 1909, p. 127-225).

36. Philipp's (H. B.) et Wiener (N.). — Nets and the Dirichlet Problem (*Journ. Math. Phys. Massachussetts Institute of Technology*, 2e série, n° 55, mars 1923).

37. Plancherel. — Remarques sur l'intégration de $\Delta u = 0$ (*Bull. Sc. math.*, 2e série, vol. 34, 1910, p. 111-114).

38. Plemelj. — Ueber lineare Randwertaufgabe der Potentialtheorie (*Monatshefte für Math. u. Phys.*, vol. 15, 1904, p. 337-411).

39. Picard (E.). — *a*. Une série de Mémoires fondamentaux sur l'extension du principe de Dirichlet aux équations du type elliptique, *par les approximations successives* (*Journ. Math. pures et appl.*, 4e série, t. 6, 1890, p. 145-210); t. 9, 1893, p. 217-271; 5e série, t. 6, 1900, p. 129-140; *Acta math.*, t. 25, 1902, p. 121-137; *Journal Éc. Polyt.*, 60e cahier, 1890, p. 89-105), et *par la méthode de Fredholm* (*Ann. Éc. Norm. sup.*, t. 23, 1906, p. 503-517; t. 24, 1907, p. 335-340). Sujets connexes dans les tomes 25 et 26.

b. Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de Physique mathématique (*Rend. Circ. math. Palermo*, t. 29. 1er semestre 1910, p. 79-97).

c. Sur un exemple simple d'une équation singulière de Fredholm (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. 28, 1911, p. 313-324).

d. Sur la distribution de l'électricité avec la loi de Neumann (*Rendic. Circ. mat. Palermo*, t. 37, 1er semestre 1914, p. 249-261).

e. Sur les singularités des fonctions harmoniques (*C. R. Ac. Sc.*, t. 176, 3 avril 1923, p. 933, et 16 avril 1923, p. 1025).

f. Quelques théorèmes élémentaires sur les fonctions harmoniques (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 52, 1924, p. 162-166).

40. Poincaré (H.). — *a*. Sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique (et en particulier, exposé de la méthode du balayage) (*Amer. Journ. of Math.*, t. 12, 1890).

b. Sur les équations de la Physique mathématique (*Rendic. Circ. math. Palermo*, t. 20, année 1894, p. 57-156).

c. La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet (*Acta math.*, t. 20, 1896, p. 59-142).

41. PRASAD (G.). — On the newtonian potential due to a surface distribution, having a discontinuity of the second kind (*Rendic. Circ. mat. Palermo*, t. 42, 1917, p. 125-127).

42. PUCCIANO (G.). — *a.* Studio sui potenziali logaritmici di strato lineare simplice e doppio et dell lore derivate prime (*Rend. Circ. mat. Palermo*, t. 23, 1er semestre 1907, p. 374-393).

b. Contributo alla critica di alcune questioni che si riattacano all'integrazione dell' equazione differenziale di Laplace (*Ibid.*, t. 28, 2e semestre 1909, p. 97-112).

43. RAYNOR (G. E.). — Dirichlet's Problem (*Annal's of math.*, 2e série, vol. 23, p. 183-198).

45. RIEMANN (B.). — Schwere, Elektrizität und Magnetismus (Hann, 1875; 2e édition, 1880).

46. RIEMANN (J.). — Le problème de Dirichlet (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. 5, 1888, p. 331-420).

47. RIQUIER (Ch.). — Sur l'extension de la méthode de Neumann à l'hyperespace (*Thèse*, Paris, Hermann, 1886).

48. ROBIN. — Sur la distribution de l'électricité (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. 3, 1886, suppl.).

49. SANIELERICI. — Sur les équations différentielles des cordes et des membranes vibrantes (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. 26, 1909, p. 79-92).

50. STEKLOFF. — *a.* Les méthodes générales pour résoudre les problèmes de la Physique mathématique (*Ann. Toulouse*, t. 2).

b. Sur les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique (*C. R. Ac. Sc.*, t. 128, 6 mars 1899, p. 588).

c. Sur l'existence des fonctions fondamentales (*Ibid.*, 27 mars 1899, p. 808).

51. STOZEK (W.). — Sur l'allure des fonctions harmoniques au voisinage d'un point exceptionnel (*C. R. Ac. Sc.*, t. 180, 9 mars 1925).

52. TONELLI (L.). — Sopra una proprietate caratteristica delle funzione armoniche (*Rendic. Acc. Lincei*, 1er semestre 1909).

53. TONOLO (A.). — Sul comportamento asintotico di un potenziale di linea nel campo analitico (*Math. Ann.*, t. 72, 1912, p. 78-106).

54. VALCOVICI (V.). — Sur un problème mixte de Dirichlet [*Bull, Sect. Scient. Acad. roumaine*, 4e année, 1915 1916, 7 mai et 23 octobre 1915).

55. VILLAT (H.). — *a.* Le problème de Dirichlet pour une aire annulaire (*Rendic. Circ. mat. Palermo*, t. 33, 1er semestre 1912, p. 134-175).

b. Sur la représentation conforme des aires doublement connexes (*Ann. Éc. Norm. sup.*, t. 38, 1921, p. 183-227).

56. VOLTERRA (V.). — Alcune osservazioni sopra proprieta atte ad individuare una funzione armoniche (*Rendic. dei Lincei*, 1er semestre 1909, p. 263).

57. WEIERSTRASS. — Ueber das Dirichlets che sogenannte Prinzip (*Werke*, Band 2, p. 49).

58. WIENER (N.). — *a.* Certains notions in potential theory (*J. Math. Ph. Massach. Instit.*, 2e série, nº 70, janvier 1924).

b. The Dirichlet Problem (*Ibid.*, nº 78, avril 1924).

c. Discontinuous boundary conditions (*Ibid.*, nº 72, février 1924).

d. Note on a paper O. Perron (*Ibid.*, vol. 4, nº 1, janvier 1925).

59. WILKOSZ (W.). — Sur un point fondamental de la théorie du potentiel (*C. R. Ac. Sc.*, t. 174, 13 février 1922, p. 435).

60. ZAREMBA (S.). — *a.* Sur le problème de Dirichlet (*Ann. Éc. Norm. sup.*, t. 24, 1897, p. 251-258).

a'. Sur l'équation $\Delta u + \xi u + f = 0$ et sur les fonctions harmoniques [*Ann. Éc. Norm. sup.*, t. 26, 1899, p. 427-464 (1)].

a''. Sur le développement d'une fonction arbitraire en une série procédant suivant les fonctions harmoniques [*Journ. Math. pures et appl.*, t. 6, 1900. p. 47-72 (1)].

b. Sur les fonctions fondamentales (*Bull. Ac. Sc. Cracovie*, 1901).

c. Sur l'équation de Laplace et les méthodes de Neumann et de Robin (*Ibid.*, 4 mars 1901, p. 171-189).

d. Cas où les fonctions fondamentales de Poincaré se réduisent à celles de Le Roy ou de Stekloff (*Ibid.*, 7 janvier 1902, p. 35-43).

e. Sur les méthodes de la moyenne arithmétique de Neumann et de Robin dans le cas d'une frontière non connexe (*Ibid.*, 13 octobre 1902, p. 457-488).

f. Les fonctions fondamentales de Poincaré et la méthode de Neumann pour une frontière composée de polygones curvilignes (*J. Math. pures et appl.*, t. 10, 1904, p. 395-444).

g. Sur la fonction de Green et quelques unes de ses applications (*Bull. Crac.*, 5 novembre 1906, p. 803-864).

h. L'équation biharmonique et une classe remarquable de fonctions fondamentales harmoniques (*Ibid.*, 4 mars 1907, p. 148-196).

i. Sur l'intégration de l'équation biharmonique (*Ibid.*, 7 janvier 1908, p. 1-29).

j. Sur le calcul numérique des fonctions demandées dans le problème de Dirichlet et le problème hydrodynamique (*Ibid.*, 1er février 1909, p. 125-195).

k. Sur l'unicité de la solution du problème de Dirichlet (*Ibid.*, 5 avril 1909, p. 561-564).

l. Sur le principe du minimum (*Ibid.*, 5 juillet 1909, p. 197-264).

m. Sur un problème mixte relatif à l'équation de Laplace (*Ibid.*, 4 juillet 1910, p. 313-344).

(1) Dans les Mémoires 60 (*a'* et *a''*) l'épithète d'harmonique équivaut à « *fondamentale* », désormais usitée.

TABLE DES MATIÈRES.

77474 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.