MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAUL APPELL

Sur les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables, les polynômes d'Hermite et autres fonctions sphériques dans l'hyperespace

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 3 (1925)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1925__3__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), ETC. ET DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.
AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris
Professeur à l'Université de Strasbourg.

FASCICULE III.

Sur les Fonctions hypergéométriques de plusieurs variables les Polynomes d'Hermite et autres fonctions sphériques dans l'hyperespace

Par M. Paul APPELL

Membre de l'Institut, Recteur de l'Université de Paris

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55.

1925

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en gros caractères, figurant entre parenthèses dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

SUR

LES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES

DE PLUSIEURS VARIABLES

LES POLYNOMES D'HERMITE

ET AUTRES FONCTIONS SPHÉRIQUES DANS L'HYPERESPACE

Par M. Paul APPELL

INTRODUCTION.

La fonction hypergéométrique d'une variable de Gauss et les fonctions sphériques qui s'y rattachent, notamment les polynomes de Legendre, ont été l'origine de très nombreux travaux, théorie et applications, qui ont été résumés dans l'Ouvrage de E. Heine (**36**).

Ces diverses théories peuvent être étendues à des fonctions de deux ou de plusieurs variables. Déjà Hermite se plaçant à un point de vue purement algébrique a, en 1865, étendu la théorie des polynomes de Legendre à des fonctions de deux variables; j'ai étendu de même en 1880 la théorie des fonctions hypergéométriques au cas de deux variables, et j'ai montré en 1913 comment les polynomes d'Hermite se rattachent aux fonctions sphériques dans l'hyperespace.

Les nombreuses recherches relatives aux deux théories se trouvent indiquées, sous le rapport bibliographique, d'abord dans l'ouvrage cité de Heine, dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (**49** et **17**), puis dans l'Ouvrage (**16**) que je publie en collaboration avec M. Kampé de Fériet, chez Gauthier-Villars. On trouvera dans cet Ouvrage, avec la bibliographie antérieure à 1914, l'indication de travaux récents de P. Humbert, de J. Kampé de Fériet, de Pérès, de B. Jekhowsky, de M. Akimoff : ces trois derniers se sont occupés des fonctions de Fourier-Bessel à plusieurs variables introduites dans l'analyse en 1915.

PREMIÈRE PARTIE.

I. — Fonctions hypergéométriques de deux variables.

1. Définition des quatre séries hypergéométriques de deux variables. — Considérons les deux séries hypergéométriques dépendant chacune d'une seule variable.

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) \quad \text{et} \quad F(\alpha', \beta', \gamma', y).$$

Si nous formons leur produit, nous obtiendrons une série double dépendant des deux variables x et y, dont le terme général aura pour expression

$$\frac{(\alpha, m)(\alpha', n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

où nous employons la notation suivante : k étant un entier positif ou nul, on pose

$$(\lambda, k) = \frac{\Gamma(\lambda + k)}{\Gamma\lambda} = \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1).$$

Pour obtenir une série double, généralisant la série de Gauss et ne se décomposant plus en un produit d'une fonction de x par une fonction de y, nous modifierons le terme général de la manière suivante :

Nous remplacerons un, deux, ou trois des produits

$$(\alpha, m)(\alpha', n), \quad (\beta, m)(\beta', n), \quad (\gamma, m)(\gamma', n)$$

par les expressions correspondantes

$$(\alpha, m+n), \quad (\beta, m+n), \quad (\gamma, m+n).$$

Sur les cinq combinaisons possibles, nous écarterons celle-ci :

$$\frac{(\alpha, m+n)(\beta, m+n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

qui est tout simplement le développement de la fonction

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x+y),$$

comme on s'en assure en remarquant que, dans la série double, l'ensemble des termes pour lesquels $m+n$ a une valeur donnée k est égal à

$$\frac{(\alpha, k)(\beta, k)}{(\gamma, k)(1, k)}(x+y)^k.$$

Les quatre combinaisons qui restent donnent les séries doubles (3)

$$(1)\quad F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

$$(2)\quad F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

$$(3)\quad F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha, m)(\alpha', n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

$$(4)\quad F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

où la sommation doit s'étendre à toutes les valeurs entières de m et n depuis zéro jusqu'à l'infini.

Dans ces séries doubles, on considère les éléments $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ comme des paramètres, x et y comme des variables; ces paramètres et ces variables peuvent prendre des valeurs complexes; on doit seulement exclure pour γ et γ' les valeurs entières et négatives.

Dans la série F_3, on peut permuter les éléments α et β, α' et β'; de même dans la série F_4, les éléments α et β.

Il est aisé de donner les valeurs entières, négatives des éléments $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, pour lesquelles les quatre séries F se réduisent à des polynomes.

On aperçoit immédiatement que pour des valeurs particulières des éléments $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ ces quatre séries s'identifient avec des développements connus :

$$\begin{aligned}
(1-x)^{-\beta}(1-y)^{-\beta'} &= F_1(\alpha, \beta, \beta', \alpha, x, y),\\
(1-x-y)^{-\alpha} &= F_2(\alpha, \beta, \beta', \beta, \beta', x, y),\\
(1-y)^{\beta-\alpha}(1-x-y)^{-\beta} &= F_2(\alpha, \beta, \beta', \alpha, \beta', x, y),\\
(1-x)^{\beta'-\alpha}(1-x-y)^{-\beta'} &= F_2(\alpha, \beta, \beta', \beta, \alpha, x, y),\\
\operatorname{Log}\frac{1}{1-x-y} &= x\,F_2(1, 1, \beta', 2, \beta', x, y)\\
&\quad + y\,F_2(1, \beta, 1, \beta, 2, x, y),
\end{aligned}$$

. . . .

En ordonnant les quatre séries doubles par rapport à x, elles prennent la forme de séries simples dont les éléments sont des fonctions hypergéométriques de y. On obtient des expressions analogues en ordonnant les quatre séries doubles par rapport à y.

Nous n'insistons pas sur les cas élémentaires où les séries doubles se réduisent à la série de Gauss.

2. **Domaine de convergence des séries doubles : F_1.** — La série F_1 est convergente tant que les modules de x et de y sont moindres que l'unité :

$$|x| < 1, \qquad |y| < 1.$$

Si $|x|$ ou $|y|$ est plus grand que l'unité, la série F_1 est divergente.

F_2. — La série F_2 est convergente tant que

$$|x| + |y| < 1.$$

Elle est divergente si

$$|x| + |y| > 1.$$

F_3. — La série F_3 est convergente lorsque x et y sont moindres que l'unité :

$$|x| < 1, \qquad |y| < 1.$$

Elle est divergente si $|x|$ ou $|y|$ est plus grand que l'unité.

F_4. — La série F_4 est convergente si

$$|\sqrt{x}| + |\sqrt{y}| < 1.$$

On déduit facilement de ces résultats les cercles de convergence associés et les domaines d'existence des quatre fonctions.

La fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, définie par la série de Gauss seulement à l'intérieur du cercle $|x| = 1$, peut être calculée en dehors de ce cercle par prolongement analytique et constitue une fonction uniforme de x dans tout le plan, une fois tracée la coupure 1 à $+\infty$. De même, on peut prolonger analytiquement les quatre séries doubles hypergéométriques en dehors des cercles de convergence associés et parvenir, par cheminement, à des valeurs quelconques de x et y. *Nous appellerons alors fonctions hypergéométriques de deux variables, les quatre fonctions définies à l'inté-*

rieur des cercles de convergence associés par les quatre séries convergentes (1), (2), (3), (4) *et à l'extérieur par le prolongement analytique de ces séries.*

Pour rendre ces fonctions uniformes, il suffit de tracer certains systèmes de coupures; pour F_1 et F_3, par exemple, il faut prendre comme coupures les deux segments $(1 + \infty)$ des axes réels des variables x et y.

Nous donnerons plus loin des expressions analytiques des quatre fonctions uniformes F_1, F_2, F_3, F_4, valables dans tout leur domaine d'existence.

3. Dérivées partielles des fonctions hypergéométriques. Fonctions contiguës. — En dérivant terme à terme les séries (1) à (4), on s'assure aisément que la dérivée partielle d'ordre m par rapport à x et n par rapport à y d'une des quatre fonctions F s'exprime par une fonction du même type.

Deux fonctions hypergéométriques du même type caractérisées respectivement par les éléments α, α', β, β', γ, γ' et α_1, α'_1, β_1, β'_1, γ_1 γ'_1 sont dites *contiguës* lorsqu'une des différences $\alpha_1 - \alpha$, $\alpha'_1 - \alpha'$, $\beta_1 - \beta$, $\beta'_1 - \beta'$, $\gamma_1 - \gamma$, $\gamma'_1 - \gamma'$ est égale à ± 1, les autres étant nulles. Les fonctions F_1, F_2, F_3, F_4 admettent respectivement 8, 10, 10, 8 fonctions contiguës.

Quatre fonctions F_1 ou F_2 contiguës sont liées par une relation linéaire; de même trois fonctions F_3 ou F_4 contiguës.

Entre trois des huit fonctions :

$$\begin{array}{ll}
F_1(\alpha+1, \beta, \beta', \gamma, x, y); & F_1(\alpha, \beta+1, \beta', \gamma, x, y); \\
F_1(\alpha, \beta, \beta'+1, \gamma, x, y); & F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma+1, x, y); \\
F_1(\alpha-1, \beta, \beta', \gamma, x, y); & F_1(\alpha, \beta-1, \beta', \gamma, x, y); \\
F_1(\alpha, \beta, \beta'-1, \gamma, x, y); & F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma-1, x, y);
\end{array}$$

contiguës à $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$ et cette fonction elle-même, il y a ainsi $\frac{8.7.6}{1.2.3} = 56$ relations linéaires, les coefficients étant rationnels en x et y. De même entre trois des dix fonctions contiguës à

$$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y)$$

et cette fonction elle-même, il y a $\frac{10.9.8}{1.2.3} = 120$ relations linéaires.

Entre deux des dix fonctions contiguës à $F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y)$ et cette fonction elle-même, il y a $\frac{10.9}{1.2} = 45$ relations linéaires. Entre deux des huit fonctions contiguës à $F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y)$ et cette fonction elle-même, il y a $\frac{8.7}{1.2} = 28$ relations linéaires.

On trouvera à la page 20 de l'Ouvrage (16) les équations entre fonctions contiguës que l'on peut faire correspondre aux relations données par Gauss.

Les fonctions contiguës à une fonction F donnée s'expriment linéairement au moyen de cette fonction F et de ses dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$. Par exemple les fonctions contiguës à la fonction F_1 s'expriment par des formules qui ont été données par M. R. Le Vavasseur (51) pages 8, 11 et 12, et qui se trouvent reproduites à la page 21 de l'Ouvrage (16).

4. Formules de réduction et de transformation des quatre fonctions hypergéométriques. — En dehors des cas évidents où les séries hypergéométriques F_1, F_2, F_3, F_4 se réduisent à la série de Gauss, il en existe encore d'autres.

Prenons, par exemple, la fonction F_1 sous la forme d'une série ordonnée par rapport à x et faisons $y = 1$, on a, en supposant $\mathcal{R}(\gamma - \alpha - \beta') > 0$,

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta')}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta')} F(\alpha, \beta, \gamma - \beta', x).$$

En particulier, si dans cette formule on fait encore $x = 1$, on obtient d'après la valeur de la série de Gauss au point 1 [en supposant que $\mathcal{R}(\gamma - \alpha - \beta - \beta') > 0$]

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, 1, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta - \beta')}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta - \beta')}.$$

La série F_1 *se réduit encore à la série* F *quand* $y = x$; pour le montrer, faisons $y = tx$; on a, en ordonnant la série double (1) par rapport aux puissances de x,

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, tx) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{(\alpha, n)(\beta, n)}{(\gamma, n)(1, n)} F(-n, \beta', -\beta - n + 1, t)x^n.$$

La fonction F qui figure dans le coefficient de x^n est un polynome. Si l'on fait $t = 1$, on a

$$F(-n, \beta', -\beta - n + 1, 1) = \frac{(\beta + \beta', n)}{(\beta, n)}.$$

Donc

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, x) = F(\alpha, \beta + \beta', \gamma, x).$$

Voici un exemple relatif à la fonction F_2; faisons $\beta' = \gamma'$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \beta', x, y) &= \sum \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)}(1 - y)^{-\alpha - m} x^m \\ &= (1 - y)^{-\alpha} F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{1 - y}\right). \end{aligned}$$

En échangeant les rôles de x et y, on voit que *la fonction* F_2 *se ramène à la fonction de Gauss chaque fois que* $\beta = \gamma$ *ou* $\beta' = \gamma'$.

Pour donner un exemple élémentaire relatif à la fonction F_4, partons de la formule établie par Gauss [(27), p. 127] :

$$(1 + x)^n + (1 - x)^n = 2F\left(-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right).$$

On en tire une formule qui, dans un cas particulier, ramène la fonction F_4 à une somme de deux fonctions de Gauss :

$$\begin{aligned} F_4\left(\alpha, \alpha + \frac{1}{2}, \gamma, \frac{1}{2}, x, y\right) = \;& \frac{1}{2}(1 + \sqrt{y})^{-2\alpha} F\left[\alpha, \alpha + \frac{1}{2}, \gamma, \frac{x}{(1 + \sqrt{y})^2}\right] \\ &+ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{y})^{-2\alpha} F\left[\alpha, \alpha + \frac{1}{2}, \gamma, \frac{x}{(1 - \sqrt{y})^2}\right]. \end{aligned}$$

Pour obtenir d'autres formules de transformation et de réduction des quatre fonctions hypergéométriques, on peut partir des formules donnant leur expression sous forme de séries simples ordonnées par rapport aux puissances de x auxquelles on joint la suivante :

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x + y) = \sum_{m=0}^{m=+\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} F(\alpha + m, \beta + m, \gamma + m, y) x^m.$$

En appliquant aux fonctions F qui figurent dans ces cinq séries les formules de transformation d'Euler, on obtient les formules de réduction suivantes :

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \beta+\beta', x, y) = (1-y)^{-\alpha} F\left(\alpha, \beta, \beta+\beta', \frac{y-x}{y-1}\right)$$

qui ramène la fonction F_1 *à la fonction de Gauss, toutes les fois que*

$$\gamma = \beta + \beta';$$

$$(5)\quad F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = (1-y)^{-\beta'} F_3\left(\alpha, \gamma-\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, \frac{y}{y-1}\right).$$

La fonction F_1 *se ramène donc toujours à la fonction* F_3 :

$$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y)$$
$$= \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} (1-y)^{-\alpha-m} F\left(\alpha+m, \gamma'+\beta', \gamma, \frac{y}{y-1}\right) x^m.$$

On trouvera d'autres formules analogues dans l'Ouvrage **16**, pages 25, 26, 27, et dans le Mémoire **7**.

5. Expression des fonctions F_1, F_2, F_3 par des intégrales définies. — Les quatre séries doubles précédentes ne définissent les fonctions hypergéométriques qu'à l'intérieur des cercles de convergence associés; on peut donc se proposer de rechercher des expressions analytiques représentant ces fonctions dans tout leur domaine d'existence. On obtient ce résultat pour F_1, F_2, F_3 en les exprimant par des intégrales doubles qui généralisent l'expression connue donnant $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ (**4**).

On a en effet

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma-\beta-\beta')}{\Gamma(\gamma)} F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) \\ & = \iint u^{\beta-1} v^{\beta'-1} (1-u-v)^{\gamma-\beta-\beta'-1} (1-ux-vy)^{-\alpha}\, du\, dv \\ & \qquad (u \geqq 0,\ v \geqq 0,\ 1-u-v \geqq 0), \end{aligned} \right.$$

l'intégrale double ayant un sens tant que $\mathfrak{R}(\beta) > 0$, $\mathfrak{R}(\beta') > 0$, $\mathfrak{R}(\gamma-\beta-\beta') > 0$;

$$(7)\quad \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\gamma'-\beta')}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')} F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y)$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 u^{\beta-2} v^{\beta'-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} (1-v)^{\gamma'-\beta'-1} (1-ux-vy)^{-\alpha}\, du\, dv,$$

l'intégrale double ayant un sens tant que $\mathcal{R}(\beta) > 0$, $\mathcal{R}(\beta') > 0$, $\mathcal{R}(\gamma - \beta) > 0$, $\mathcal{R}(\gamma' - \beta') > 0$;

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma-\beta-\beta')}{\Gamma(\gamma)} F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y) \\ &= \iint u^{\beta-1} v^{\beta'-1} (1-u-v)^{\gamma-\beta-\beta'-1} (1-ux)^{-\alpha} (1-vy)^{-\alpha'}\, du\, dv \\ &\qquad (u \geqq 0,\ v \geqq 0,\ 1-u-v \geqq 0), \end{aligned} \right.$$

l'intégrale double ayant un sens tant que $\mathcal{R}(\beta) > 0$, $\mathcal{R}(\beta') > 0$, $\mathcal{R}(\gamma - \beta - \beta') > 0$.

La fonction F_1 peut aussi, comme l'a montré M. E. Picard (59), s'exprimer par une intégrale simple :

$$(9)\quad \begin{aligned} &\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) \\ &= \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'}\, du, \\ &\qquad \mathcal{R}(\alpha) > 0, \qquad \mathcal{R}(\gamma-\alpha) > 0. \end{aligned}$$

Pour démontrer ces résultats, il suffit de constater qu'à l'intérieur des cercles de convergence associés, les intégrales (6) et (7), (8) et (9) sont développables en des séries procédant selon les puissances de x et y et coïncidant respectivement avec les séries hypergéométriques (1), (2) et (3). Cette vérification s'effectue aisément en s'appuyant sur les formules élémentaires de la théorie des intégrales eulériennes.

Les formules de transformation des fonctions hypergéométriques peuvent se déduire de leurs expressions par des intégrales définies.

Les expressions des fonctions F_1, F_2, F_3 par des intégrales définies permettent d'établir simplement certaines autres de leurs propriétés; il est notamment aisé d'en déduire les équations récurrentes qui lient les fonctions contiguës. C'est ce qu'on verra à la page 33 de l'Ouvrage **16**.

6. Développement de $F_3\left(\alpha, \alpha', 1, 1, \gamma, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ analogue au développement de $F\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{1}{x}\right)$ en fraction continue. — L'expression de F_3 par une intégrale définie permet de démontrer pour cette fonction une proposition intéressante par son analogie avec le résultat obtenu par Jacobi dans le développement en fraction continue de

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\,\frac{1}{x}\,F\left(\alpha,\ 1,\ \gamma,\ \frac{1}{x}\right).$$

Jacobi détermine le dénominateur $Q_n(x)$ de la réduite de rang n par la condition que le développement de $Q_n(x)\varphi(x)$, selon les puissances de $\frac{1}{x}$, commence par un terme en $\frac{1}{x^{n+1}}$, et obtient pour son expression

$$Q_n(x) = \frac{x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha+1-\gamma}}{(\alpha,\ n)}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{\alpha+n-1}(1-x)^{\gamma+n-\alpha-1}\right].$$

Considérons (5) la fonction

$$\varphi(x,\ y) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha')\Gamma(\gamma-\alpha-\alpha')}{\Gamma(\gamma)}\,\frac{1}{x}\,\frac{1}{y}\,F_3\left(\alpha,\ \alpha',\ 1,\ 1,\ \gamma,\ \frac{1}{x},\ \frac{1}{y}\right).$$

En vertu de la formule (8), on a

$$\varphi(x,\ y) = \int\int \frac{f(u,\ v)}{(x-u)(y-v)}\,du\,dv$$

$$[u \geqq 0,\ v \geqq 0,\ 1-u-v \geqq 0,\ f(u,\ v) \equiv u^{\alpha-1}v^{\alpha'-1}(1-u-v)^{\gamma-\alpha-\alpha'-1}].$$

Proposons-nous, par analogie avec la question traitée par Jacobi, de déterminer un polynome $Q_{m,n}(x,\ y)$ de degré $m+n$ tel que le produit

$$Q_{m,n}(x,\ y)\,\varphi(x,\ y)$$

développé selon les puissances de $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ ne contienne aucun terme en $\frac{1}{x^{j+1}y^{k+1}}$, j et k étant des entiers positifs ou nuls tels que

$$j+k < m+n \quad \text{ou} \quad j+k = m+n \quad (j \neq m;\ k \neq n);$$

$$Q_{m,n}(x,\ y) = \frac{x^{1-\alpha}y^{1-\alpha'}(1-x-y)^{\alpha+\alpha'+1-\gamma}}{(\alpha,\ m)(\alpha',\ n)} \times \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n}\left[x^{\alpha+m-1}y^{\alpha'+n-1}(1-x-y)^{\gamma+m+n-\alpha-\alpha'-1}\right].$$

Comme on le voit, l'analogie est complète avec la formule de Jacobi; mais elle se poursuit plus loin; en effet, dans le problème de Jacobi $Q_n(x)$ s'exprime par un *polynome hypergéométrique*

$$Q_n(x) = (1-x)^n\,F\left(\alpha+1-\gamma-n,\ -n,\ \alpha,\ \frac{x}{x-1}\right).$$

Or on peut donner du polynome $Q_{m,n}(x, y)$, au moyen de la fonction hypergéométrique F_2, une expression qui généralise la formule précédente. En effet, on a

$$Q_{m,n}(x, y) = (1 - x - y)^{m+n} F_2\left(\alpha + \alpha' + 1 - \gamma - m - n, -m, -n, \alpha, \alpha', \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}\right).$$

La méthode suivie dans l'étude du développement de l'intégrale (18) est, avec quelques modifications faciles à apercevoir, un cas particulier d'une méthode générale indiquée par Didon (25).

7. Représentation des quatre fonctions hypergéométriques par des intégrales prises le long de contours complexes. — Au paragraphe 6, nous n'avons pas donné de représentation pour la fonction F_4; en outre, les formules relatives aux fonctions F_1, F_2, F_3 ne sont valables que si les éléments β, β', γ, γ' vérifient des conditions assez restrictives; il y a donc intérêt à rechercher un mode de représentation valable pour ces quatre fonctions hypergéométriques et dans des conditions plus larges.

En partant de la représentation de $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ par l'intégrale de Barnes on obtient

$$(10)\quad \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta')}{\Gamma(\gamma)} F_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} F(\alpha+t, \beta, \gamma+t, x)\frac{\Gamma(\alpha+t)\Gamma(\beta'+t)}{\Gamma(\gamma+t)}\Gamma(-t)(-y)^t\,dt,$$

$$(11)\quad \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta')}{\Gamma(\gamma')} F_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} F(\alpha+t, \beta, \gamma, x)\frac{\Gamma(\alpha+t)\Gamma(\beta'+t)}{\Gamma(\gamma'+t)}\Gamma(-t)(-y)^t\,dt,$$

$$(12)\quad \frac{\Gamma(\alpha')\Gamma(\beta')}{\Gamma(\gamma)} F_3 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} F(\alpha, \beta, \gamma+t, x)\frac{\Gamma(\alpha'+t)\Gamma(\beta'+t)}{\Gamma(\gamma+t)}\Gamma(-t)(-y)^t\,dt,$$

$$(13)\quad \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma')} F_4 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} F(\alpha+t, \beta+t, \gamma, x)\frac{\Gamma(\alpha+t)\Gamma(\beta+t)}{\Gamma(\gamma'+t)}\Gamma(-t)(-y)^t\,dt.$$

Ces expressions sont valables tant qu'aucun des éléments α, α', β, β' n'est un entier négatif. M. Kampé de Fériet a montré qu'*on peut condenser les expressions précédentes en une expression unique qui fait ressortir le lien existant entre les quatre fonctions hypergéométriques de deux variables.*

Soit

$$(14)\quad \frac{\Gamma(\alpha')\Gamma(\beta')}{\Gamma(\gamma')}\Phi(x,y) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\Psi(s,t)\,\Gamma(-s)\,\Gamma(-t)\,(-x)^s(-y)^t\,ds\,dt,$$

$$\Psi(s,t) \equiv \frac{\left\{\begin{array}{l}\Gamma(\alpha+s+\varepsilon_{\alpha,\alpha'}t)\,\Gamma(\alpha'+\varepsilon_{\alpha,\alpha'}s+t)\\ \quad\times\Gamma(\beta+s+\varepsilon_{\beta,\beta'}t)\,\Gamma(\beta'+\varepsilon_{\beta,\beta'}s+t)\,\Gamma[\gamma+\varepsilon_{\gamma,\gamma'}(s+t)]\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l}\Gamma[\alpha+\varepsilon_{\alpha,\alpha'}(s+t)]\,\Gamma[\beta+\varepsilon_{\beta,\beta'}(s+t)]\\ \quad\times\Gamma(\gamma+s+\varepsilon_{\gamma,\gamma'}t)\,\Gamma(\gamma'+\varepsilon_{\gamma,\gamma'}s+t)\end{array}\right\}},$$

le symbole $\varepsilon_{\lambda,\lambda'}$ ayant la signification suivante :

$$\varepsilon_{\lambda,\lambda'} = 0 \quad \text{pour} \quad \lambda \neq \lambda', \qquad \varepsilon_{\lambda,\lambda} = 1.$$

En annulant 2, 1, 0 ou 3 des différences $\alpha'-\alpha$, $\beta'-\beta$, $\gamma'-\gamma$, on obtient comme cas particuliers de la fonction Φ, les quatre fonctions F_1, F_2, F_3, F_4, ou le produit $F(\alpha, \beta, \gamma, x)\,F(\alpha', \beta', \gamma', y)$, ou la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x+y)$.

II. — Équations simultanées aux dérivées partielles (3).

8. Les quatre systèmes d'équations aux dérivées partielles. — De même que la fonction hypergéométrique de Gauss vérifie une équation différentielle linéaire qui permet de définir cette fonction pour toutes les valeurs de la variable indépendante, les quatre fonctions F_1, F_2, F_3, F_4 satisfont à des équations différentielles simultanées permettant de les définir pour tous les groupes de valeurs des variables indépendantes x et y.

Ces équations sont les suivantes :

$$F_1\left\{\begin{array}{l} x(1-x)r + y(1-x)s + [\gamma-(\alpha+\beta+1)x]p - \beta y q - \alpha\beta z = 0,\\ y(1-y)t + x(1-y)s + [\gamma-(\alpha+\beta'+1)y]q - \beta' x p - \alpha\beta' z = 0,\\ (x-y)s - \beta' p + \beta q = 0,\end{array}\right.$$

où la troisième équation est une conséquence nécessaire des deux autres :

$$F_2 \begin{cases} x(1-x)r - xys + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p - \beta y q - \alpha\beta z = 0, \\ y(1-y)t - xys + [\gamma' - (\alpha+\beta'+1)y]q - \beta' x p - \alpha\beta' z = 0; \end{cases}$$

$$F_3 \begin{cases} x(1-x)r + ys + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p - \alpha\beta z = 0, \\ y(1-y)t + xs + [\gamma - (\alpha'+\beta'+1)y]q - \alpha'\beta' z = 0; \end{cases}$$

$$F_4 \begin{cases} x(1-x)r - y^2 t - 2xys + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p \\ \qquad\qquad - (\alpha+\beta+1)yq - \alpha\beta z = 0, \\ y(1-y)t - x^2 r - 2xys + [\gamma' - (\alpha+\beta+1)y]q \\ \qquad\qquad - (\alpha+\beta+1)xp - \alpha\beta z = 0. \end{cases}$$

Dans ces équations les lettres p, q, r, s, t désignent, comme il est d'usage, les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Pour les vérifier, il suffit d'y remplacer les fonctions hypergéométriques et leurs dérivées partielles par leur développement en série double et de constater que le coefficient de $x^m y^n$ est identiquement nul, quels que soient les entiers positifs m et n.

9. Théorèmes généraux sur les systèmes de deux équations simultanées du second ordre aux dérivées partielles. — Les systèmes d'équations aux dérivées partielles vérifiées par les fonctions F_2, F_3, F_4 se ramènent à la forme suivante :

$$(15) \qquad \begin{cases} r = a_1(x, y)s + a_2(x, y)p + a_3(x, y)q + a_4(x, y)z, \\ t = b_1(x, y)s + b_2(x, y)p + b_3(x, y)q + b_4(x, y)z. \end{cases}$$

On peut étendre, à ces systèmes, les théorèmes essentiels de Riemann et de Fuchs relatifs aux équations linéaires et homogènes.

Cette extension repose sur un théorème démontré par Bouquet (20) sur les systèmes de p équations aux différentielles totales entre n variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$ et p fonctions de ces variables $z_1, \ldots, z_p$.

On dit que le système de p équations

$$dz_j = \sum_{k=1}^{k=n} f_{j,k}(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_p)\, dx_k \qquad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

est *complètement intégrable* lorsque les np coefficients $f_{j,k}$ vérifient identiquement (c'est-à-dire quels que soient $x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_p$) les $\frac{n(n-1)}{1.2} p$ conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial^2 z_j}{\partial x_r \partial x_s} = \frac{\partial^2 z_j}{\partial x_s \partial x_r}$$

ou

$$\frac{\partial f_{j,r}}{\partial x} + \frac{\partial f_{j,r}}{\partial z_1} f_{1,s} + \ldots + \frac{\partial f_{j,r}}{\partial z_p} f_{p,s} = \frac{\partial f_{j,s}}{\partial x_r} + \frac{\partial f_{j,s}}{\partial z_1} f_{1,r} + \ldots + \frac{\partial f_{j,s}}{\partial z_p} f_{p,r}.$$

Ceci rappelé, voici le théorème démontré par Bouquet :

Tout système complètement intégrable — où les coefficients $f_{j,k}$ *sont des fonctions holomorphes de* $x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_p$ *dans le voisinage du système de valeurs*

$$x_1 = \xi_1, \quad \ldots, \quad x_n = \xi_n, \quad z_1 = \zeta_1, \quad \ldots; \quad z_p = \zeta_p,$$

— admet un système d'intégrales $z_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, z_p(x_1, \ldots, x_n)$ *holomorphes dans le domaine de* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *et prenant respectivement les valeurs* $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$ *pour* $x_1 = \xi_1, \ldots, x_n = \xi_n$.

Ceci étant, revenons au système d'équations aux dérivées partielles (1); nous allons d'abord supposer que la quantité $1 - a_1 b_1$ n'est pas nulle identiquement, ce qui exclut provisoirement de nos considérations les deux premières équations vérifiées par F_1. Lorsque les coefficients a et b vérifient, en outre, la condition d'intégrabilité, que nous indiquerons plus loin, on déduit facilement du théorème précédent la proposition suivante :

Théorème I. — *Soit* x_0, y_0 *un système de valeurs des variables* x *et* y *tel que, pour des valeurs de ces variables voisines de* x_0 *et* y_0, *les coefficients des équations* (15) *soient holomorphes, et que la quantité* $1 - a_1 b_1$ *ne soit pas nulle pour* $x = x_0, y = y_0$; *on pourra satisfaire aux équations* (15) *par une fonction de* x *et* y *holomorphe dans le voisinage des valeurs* x_0, y_0, *les valeurs de cette fonction et des trois dérivées* p, q, s *étant arbitraires pour* $x = x_0, y = y_0$.

En effet, en différentiant la première des équations (15) par rapport à x, et remplaçant $\frac{\partial r}{\partial y}$ par $\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial x}$ par $\frac{\partial s}{\partial y}$, on obtient deux équations du premier degré par rapport à $\frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial y}$, d'où l'on pourra tirer ces deux quantités. On a ainsi

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \alpha_1 s + \alpha_2 p + \alpha_3 q + \alpha_4 z, \qquad \frac{\partial s}{\partial y} = \beta_1 s + \beta_2 p + \beta_3 q + \beta_4 z.$$

Cela posé, considérons le système des quatre équations aux différentielles totales, définissant les quatre fonctions z, p, q, s de x et y :

$$(16) \quad \begin{cases} dz = p\,dx + q\,dy, \\ dp = (a_1 s + a_2 p + a_3 q + a_4 z)\,dx + s\,dy, \\ dq = s\,dx + (b_1 s + b_2 p + b_3 q + b_4 z)\,dy, \\ ds = (\alpha_1 s + \alpha_2 p + \alpha_3 q + \alpha_4 z)\,dx + (\beta_1 s + \beta_2 p + \beta_3 q + \beta_4 z)\,dy. \end{cases}$$

Les quatre conditions d'intégrabilité de ce système se réduisent à une seule qui est $\frac{\partial^2 s}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 s}{\partial y\,\partial x}$,

$$\frac{\partial(\alpha_1 s + \alpha_2 p + \alpha_3 q + \alpha_4 z)}{\partial y} = \frac{\partial(\beta_1 s + b_2 p + \beta_3 q + \beta_4 z)}{\partial x},$$

que nous supposons remplie identiquement, ce qui veut dire que dans la dérivation on remplace $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y}, \frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial y}$ par leurs valeurs tirées des équations (16) et que la relation obtenue est vérifiée identiquement en z, p, q, s, x et y.

On peut donc appliquer le théorème de Bouquet, et l'on a le théorème I qu'il fallait démontrer.

Dans ce qui suit, nous appelons *couple de valeurs singulières* un couple de valeurs $x = \xi, y = \eta$ tel que pour ces valeurs $1 - a_1 b_1$ s'annule, ou que les coefficients a et b ne soient pas, dans le voisinage de ces valeurs, des fonctions holomorphes de x et y, c'est-à-dire développables en séries de la forme

$$\sum_0^\infty A_{m,n}(x - \xi)^m (y - \eta)^n.$$

Il est, alors, aisé de définir ce qu'il faut entendre par une fonction satisfaisant aux équations (15). Donnons à y une valeur constante y_0, qui ne soit pas une valeur singulière pour les coefficients a et b et qui n'annule pas la quantité $1 - a_1 b_1$. Soit T une portion du plan des x limitée par un contour simple, dans laquelle les coefficients a et b

soient des fonctions holomorphes de x et la quantité $1 - a_1 b_1$ soit différente de zéro, à l'exception de points singuliers isolés les uns des autres. Soient x_0 et x deux points non singuliers du domaine T; joignons-les par une courbe quelconque $x_0 x$ située entièrement dans le domaine T et ne passant par aucun des points singuliers; choisissons arbitrairement les valeurs de z et des dérivées p, q, s au point x_0. Au moyen de la continuité, on pourra en déduire les valeurs de la fonction z tout le long de la courbe $x_0 x$. Inversement, on pourra laisser x constant et faire varier y. De sorte que l'on pourra toujours passer de la valeur de la fonction pour $x = x_0, y = y_0$ à la valeur de la fonction pour $x = x_1$, $y = y_1$, pourvu que les couples de valeurs (x_0, y_0), (x_1, y_1) ne soient pas des couples de valeurs singulières.

Théorème II. — *Si l'on a cinq fonctions z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, satisfaisant aux équations* (15), *il y a entre ces fonctions une relation linéaire à coefficients constants, telle que*

$$C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + C_4 z_4 + C_5 z_5 = 0.$$

Corollaire. — Si l'on a quatre fonctions z_1, z_2, z_3, z_4 satisfaisant aux équations (15), et telles que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}$$

soit nul identiquement, il existe entre ces quatre fonctions une relation linéaire à coefficients constants, telle que

$$C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + C_4 z_4 = 0.$$

Théorème III. — *Soient z_1, z_2, z_3, z_4 quatre fonctions satisfaisant aux équations* (15), *le déterminant* D *vérifie la relation*

$$d \log D = (a_2 + \alpha_1)\, dx + (b_3 + \beta_1) dy,$$

$$D = A e^{\int_{x_0}^{x} (a_2 + \alpha_1)\, dx + \int_{y_0}^{y} (b_3 + \beta_1)_{x_0} dy}.$$

Soient z_1, z_2, z_3, z_4 quatre fonctions satisfaisant aux équations (15), et telles que, pour $x = x_0$, $y = y_0$, le déterminant D ne soit pas nul; d'après le théorème III, ce déterminant ne sera nul que pour les couples de valeurs singulières. Nous donnerons à l'ensemble de ces quatre fonctions le nom de *système fondamental d'intégrales*. On voit immédiatement, d'après le théorème II, que *toute solution des équations différentielles peut s'exprimer linéairement au moyen des éléments d'un système fondamental quelconque*.

On peut encore démontrer cette proposition en remarquant que, si l'on pose

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + C_4 z_4,$$

on pourra déterminer les coefficients constants C_i de façon que, pour $x = x_0$, $y = y_0$, z, p, q, s prennent des valeurs données d'avance. On aura, pour cela, à résoudre quatre équations du premier degré dont le déterminant D est différent de zéro, puisque z_1, z_2, z_3, z_4 forment un système fondamental d'intégrales.

Supposons, dans les équations (15), que, lorsqu'on laisse une des variables constantes, $y = \eta$ par exemple, les coefficients soient des fonctions uniformes de x dans une région T du plan des x et n'y présentent qu'un nombre fini de points dont les affixes forment avec η des couples de valeurs singulières. D'après le théorème I, une intégrale quelconque z des équations différentielles sera une fonction de x holomorphe en tous les points situés dans la région T, excepté aux points singuliers en question.

Soit ξ un de ces points singuliers, et soient z_1, z_2, z_3, z_4 les éléments d'un système fondamental d'intégrales. Supposons que, y restant égal à η, la variable x fasse le tour du point ξ en restant dans le domaine T, et appelons (z_1), (z_2), (z_3), (z_4) les nouvelles valeurs que prennent les intégrales quand le tour est accompli. Ces nouvelles fonctions sont encore des solutions des équations, et, d'après ce qui précède, elles forment encore un système fondamental. On a donc

$$(z_i) = \lambda_{i1} z_1 + \lambda_{i2} z_2 + \lambda_{i3} z_3 + \lambda_{i4} z_4 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

le déterminant des constantes λ_{ik} étant différent de zéro. Les conséquences de ces relations sont analogues à celles qui se présentent, dans la théorie des équations différentielles linéaires à une variable indépendante (voir, par exemple, les *Annales de l'École Normale*, t. VI, Mémoire de Tannery, p. 134 et suiv.).

10. Intégrale générale des systèmes d'équations aux dérivées par-

tielles des fonctions F_2, F_3, F_4. — Voici comment on peut déterminer les intégrales générales des équations F_2, F_3, F_4, qui rentrent dans la catégorie des équations que nous venons d'étudier.

1° *Équations de* F_2. — Dans les équations de F_2 posons

$$z = x^\lambda y^\mu z',$$

λ et μ désignant deux indéterminées. Nous obtenons pour les équations vérifiées par la fonction z' des équations qui prennent la même forme que les équations de F_2, si l'on annule simultanément les deux expressions

$$\lambda(\lambda + \gamma - 1), \qquad \mu(\mu + \gamma' - 1),$$

ce qui nous donne quatre combinaisons pour déterminer λ et μ, La combinaison $\lambda = 0$, $\mu = 0$ redonne identiquement les équations de F_2 Finalement nous obtenons pour l'intégrale générale des équations de F_2

$$\begin{aligned} z = {} & A\,F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y) \\ & + B x^{1-\gamma} F_2(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, \beta', 2 - \gamma, \gamma', x, y) \\ & + C y^{1-\gamma'} F_2(\alpha + 1 - \gamma', \beta, \beta' + 1 - \gamma', \gamma, 2 - \gamma', x, y) \\ & + D x^{1-\gamma} y^{1-\gamma'} F_2(\alpha + 2 - \gamma - \gamma', \beta + 1 - \gamma, \beta' + 1 - \gamma', 2 - \gamma, 2 - \gamma', x, y), \end{aligned}$$

A, B, C, D étant des constantes arbitraires. Cette intégrale, dans laquelle on considère y comme une constante, est, dans le voisinage du point singulier $x = 0$, de la forme trouvée pour le cas général.

2° *Équations de* F_3. — Les équations F_3 peuvent, par un changement de variables, se ramener à la forme F_2. Comme on connaît l'intégrale générale des équations de F_2, il en résulte l'intégrale générale des équations de F_3

$$\begin{aligned} z = {} & A x^{-\alpha} y^{-\alpha'} F_2\left(\alpha + \alpha' - \gamma + 1, \alpha, \alpha', \alpha - \beta + 1, \alpha' - \beta' + 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \\ & + B x^{-\beta} y^{-\alpha'} F_2\left(\beta + \alpha' - \gamma + 1, \beta, \alpha', \beta - \alpha + 1, \alpha' - \beta' + 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \\ & + C x^{-\alpha} y^{-\beta'} F_2\left(\alpha + \beta' - \gamma + 1, \alpha, \beta', \alpha - \beta + 1, \beta' - \alpha' + 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \\ & + D x^{-\beta} y^{-\beta'} F_2\left(\beta + \beta' - \gamma + 1, \beta, \beta', \beta - \alpha + 1, \beta' - \alpha' + 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right). \end{aligned}$$

Notamment la fonction $F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y)$ qui est une intégrale particulière des équations doit pouvoir s'exprimer sous la forme précédente; effectivement en posant (4)

$$f(\lambda, \mu, \rho, \sigma) = (-1)^{-\lambda}(-1)^{-\mu}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\rho-\lambda)\Gamma(\sigma-\mu)}{\Gamma(\rho)\Gamma(\sigma)\Gamma(\gamma-\lambda-\mu)},$$

on a (16, p. 43)

$$\begin{aligned}
&F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y)\\
&\quad= f(\alpha, \alpha', \beta, \beta')x^{-\alpha}y^{-\alpha'}F_2\left(\alpha+\alpha'-\gamma+1, \alpha, \alpha', \alpha-\beta+1, \alpha'-\beta'+1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)\\
&\qquad+f(\beta, \alpha', \alpha, \beta')x^{-\beta}y^{-\alpha'}F_2\left(\beta+\alpha'-\gamma+1, \beta, \alpha', \beta-\alpha+1, \alpha'-\beta'+1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)\\
&\qquad+f(\alpha, \beta', \beta, \alpha')x^{-\alpha}y^{-\beta'}F_2\left(\alpha+\beta'-\gamma+1, \alpha, \beta', \alpha-\beta+1, \beta'-\alpha'+1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)\\
&\qquad+f(\beta, \beta', \alpha, \alpha')x^{-\beta}y^{-\beta'}F_2\left(\beta+\beta'-\gamma+1, \beta, \beta', \beta-\alpha+1, \beta'-\alpha'+1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right).
\end{aligned}$$

3° *Équations de* F_4. — En faisant dans les équations F_4 la substitution $z = x^\lambda y^\mu z'$, on obtient pour z' des équations qui se ramènent aux équations de F_4 pour des valeurs de λ et μ aisées à déterminer. On obtient ainsi quatre intégrales particulières des équations de F_4; d'où l'intégrale générale

$$\begin{aligned}
z = {} & A\,F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y)\\
&+ B\,x^{1-\gamma}F_4(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, \gamma', x, y)\\
&+ C\,y^{1-\gamma'}F_4(\alpha+1-\gamma', \beta+1-\gamma', \gamma, 2-\gamma', x, y)\\
&+ D\,x^{1-\gamma}y^{1-\gamma'}F_4(\alpha+2-\gamma-\gamma', \beta+2-\gamma-\gamma', 2-\gamma, 2-\gamma', x, y).
\end{aligned}$$

Remarque. — La méthode employée pour obtenir l'intégrale générale des équations F_2, F_3, F_4 tombe en défaut lorsque les éléments α, α', β, β', γ, γ' prennent certaines valeurs spéciales; pour F_2 et F_4 il faut supposer que ni γ, ni γ' ne sont entiers; pour F_3 qu'aucune des deux différences $\alpha-\beta$, $\alpha'-\beta'$ n'est un entier; dans le cas contraire il se passe un fait analogue à ce qui se produit pour l'équation de Gauss dont l'intégrale générale contient un *terme logarithmique* lorsque γ est entier.

11. Intégration du système de la fonction F_1. — Comme on l'a déjà remarqué, les théorèmes généraux du paragraphe 9 ne s'appliquent plus aux équations de la fonction F_1, car pour ces équations $1 - a_1 b_1 = 1 - \left(-\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{x}{y}\right)$ est identiquement nul. Si nous différentions la première équation par rapport à y, la deuxième par rapport à x et si nous remplaçons $\frac{\partial r}{\partial y}$ et $\frac{\partial t}{\partial x}$ respectivement par $\frac{\partial s}{\partial x}$ et $\frac{\partial s}{\partial y}$, nous avons deux équations du premier degré en $\frac{\partial s}{\partial x}$ et $\frac{\partial s}{\partial y}$, entre lesquelles nous pouvons éliminer ces deux quantités puisque le déterminant de leurs coefficients est nul; on obtient ainsi une équation qui, simplifiée à l'aide des équations de F_1, se réduit à

$$(x-y)s - \beta' p + \beta q = 0.$$

La fonction F_1 vérifie donc aussi cette équation, qui est une conséquence des deux autres. Elle vérifie donc trois équations linéaires simultanées de la forme

$$(17) \qquad \begin{cases} r = a_1 p + a_2 q + a_3 z, \\ t = b_1 p + b_2 q + b_3 z, \\ s = c_1 p + c_2 q + c_3 z, \end{cases}$$

les a, b, c étant des fonctions de x et y, et les conditions d'intégrabilité $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial y}$ étant remplies quels que soient z, p, q, x et y. En considérant le système des équations aux différentielles totales, complètement intégrable, définissant z, p, q en fonction de x et y

$$(18) \qquad \begin{cases} dz = p\,dx + q\,dy, \\ dp = (a_1 p + a_2 q + a_3 z)\,dx + (c_1 p + c_2 q + c_3 z)\,dy, \\ dq = (c_1 p + c_2 q + c_3 z)\,dx + (b_1 p + b_2 q + b_3 z)\,dy, \end{cases}$$

on pourra appliquer à ce système le théorème de Bouquet déjà cité, et l'on verra que :

Théorème a. — *Si pour $x = x_0$, $y = y_0$ les coefficients a, b, c sont holomorphes, on pourra satisfaire aux équations* (17) *par une fonction z de x et y holomorphe pour $x = x_0$, $y = y_0$; les valeurs de cette fonction et des dérivées p et q étant arbitraires pour $x = x_0$, $y = y_0$.*

Théorème b. — *Si l'on a quatre fonctions z_1, z_2, z_3, z_4 vérifiant les équations* (17), *il existe entre ces fonctions une relation linéaire à coefficients constants*

$$C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + C_4 z_4 = 0.$$

Corollaire. — Si l'on a trois fonctions z_1, z_2, z_3 vérifiant les équations (17) et telles que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}$$

soit nul identiquement, il existe entre ces fonctions une relation linéaire à coefficients constants.

Théorème c. — *Si l'on a trois fonctions z_1, z_2, z_3 vérifiant les équations* (17), *le déterminant Δ satisfait à la relation*

$$d \log \Delta = (a_1 + c_2)\, dx + (c_1 + b_2)\, dy.$$

Les conclusions qu'on tire de ces théorèmes relativement à l'intégrale générale des équations (17) sont analogues à celles du paragraphe précédent; on a un autre exemple dans les Mémoires 12 et 13.

Dans le cas particulier des équations F_1, on a

$$\Delta = A x^{\beta'-\gamma} y^{\beta-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1} (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'-1} (x-y)^{-(\beta+\beta')}.$$

12. Tableau des soixante intégrales des équations de la fonction F_1. — *De même que l'équation différentielle de la fonction hypergéométrique de Gauss admet vingt-quatre intégrales de la forme*

$$x^l (1-x)^m F(\lambda, \mu, \nu, t),$$

t étant rationnel et du premier degré en x, il est possible de trouver soixante fonctions du type suivant :

$$x^l (1-x)^m y^{l'} (1-y)^{m'} (x-y)^n F_1(\lambda, \mu, \mu', \nu, t, t'),$$

t et t' étant rationnels en x et y, vérifiant le système d'équations aux dérivées partielles de F_1.

Pour obtenir le tableau de ces 60 intégrales, il suffit d'employer une méthode indiquée par M. Goursat (32) qui est l'extension au cas de deux variables de la méthode que l'on peut suivre pour former le tableau des 24 intégrales de Kummer. La méthode de M. Goursat repose sur la proposition suivante : *La fonction*

$$z(x, y) = \int_g^h u^{\beta+\beta'-\gamma} (u-1)^{\gamma-\alpha-1} (u-x)^{-\beta} (u-y)^{-\beta'}\, du,$$

où g et h désignent deux des cinq quantités $0, 1, \infty, x, y$, *est une intégrale du système d'équations aux dérivées partielles de* F_1.

Pour démontrer cette proposition, due à M. E. Picard (60), il suffit de calculer les dérivées partielles p, q, r, s, t de la fonction z et de substituer leurs valeurs ainsi trouvées dans les équations de F_1. Mais il est préférable (64, t. III, p. 319) de former les équations vérifiées par la fonction

$$z(x, y) = \int_g (u - a_1)^{b_1-1}(u - a_2)^{b_2-1}(u - x)^{\lambda-1}(u - y)^{\mu-1}\, du,$$

on trouve ainsi que g et h étant deux des quantités a_1, a_2, ∞, et x, y; λ, μ étant tels que l'intégrale ait un sens.

On a, par un calcul que l'on trouvera développé à la page 56 de l'Ouvrage 16, le résultat suivant :

$$z(x, y) = \int_g^h u^{\beta+\beta'-\gamma}(u - 1)^{\gamma-\alpha-1}(u - x)^{-\beta}(u - y)^{-\beta'}\, du$$

vérifie les équations de F_1.

En prenant pour g et h deux des cinq quantités 0, 1, ∞, x, y, nous obtenons ainsi dix intégrales particulières des équations de F_1.

Les dix intégrales z s'expriment au moyen de la fonction F_1; *si, à chacune de ces dix fonctions* F_1, *on applique cinq transformations connues, on obtient le tableau des* 60 *intégrales du système d'équations aux dérivées partielles de la fonction* F_1.

Les équations de la fonction F_1 n'admettent que trois intégrales linéairement indépendantes; par conséquent si l'on considère 4 des 60 intégrales du tableau précédent, elles doivent être liées par une relation linéaire.

Ces relations ont été formées par M. Le Vavasseur dans sa Thèse, où leur énoncé occupe les pages 76 à 112; nous ne pouvons donc songer à les reproduire toutes ici; nous avons donné une idée de la méthode suivie et des résultats acquis aux pages 65 à 68 de l'Ouvrage 16.

13. Équations adjointes des équations de F_1, F_2, F_3, F_4. — Étant donnée une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre

$$\mathcal{A}(u) \equiv A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0,$$

on désigne sous le nom d'*équation adjointe* de cette équation, l'équation

$$\mathfrak{M}(v) \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mathrm{A}v) + 2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\mathrm{B}v) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\mathrm{C}v) - \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{D}v) - \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{E}v) + \mathrm{F}v = 0.$$

Ceci rappelé, considérons les trois équations vérifiées par la fonction $u = \mathrm{F}_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$. Pour les adjointes de ces équations, on a la proposition :

Les trois équations adjointes de la fonction $\mathrm{F}_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$ *sont les équations de la fonction*

$$\mathrm{F}_1(2-\alpha, 1-\beta, 1-\beta', 3-\gamma, x, y).$$

En particulier, les trois équations vérifiées par la fonction

$$\mathrm{F}_1\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x, y\right)$$

sont identiques à leur adjointe.

Des calculs analogues aux précédents conduisent, pour les autres fonctions hypergéométriques, à la proposition suivante :

Les équations adjointes des équations des fonctions

$$\mathrm{F}_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y); \quad \mathrm{F}_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y); \quad \mathrm{F}_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y)$$

sont respectivement les équations vérifiées par les fonctions

$$\begin{aligned}&\mathrm{F}_2(2-\alpha, 1-\beta, 1-\beta', 2-\gamma, 2-\gamma', x, y);\\ &\mathrm{F}_3(1-\alpha, 1-\alpha', 1-\beta, 1-\beta', 3-\gamma, x, y);\\ &\mathrm{F}_4(2-\alpha, 2-\beta, 2-\gamma, 2-\gamma', x, y).\end{aligned}$$

En particulier, les équations vérifiées par les fonctions

$$\mathrm{F}_2\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1, x, y\right); \quad \mathrm{F}_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x, y\right); \quad \mathrm{F}_4(1, 1, 1, 1, x, y)$$

sont identiques à leurs adjointes.

14. Équations différentielles des fonctions F_1, F_2, F_3, F_4 considérées comme fonctions d'une seule variable. — Au n° 7, nous avons étudié quelques propriétés des systèmes de deux équations aux dérivées partielles de la forme (15) en supposant la quantité $1 - a_1 b_1$ non identiquement nulle.

Supposons que dans la fonction $z(x, y)$ la variable y garde une valeur constante $y = y_0$, alors la fonction vérifie une équation différentielle linéaire du quatrième ordre

$$A_0(x, y_0)\frac{d^4 z}{dx^4} + A_1(x, y_0)\frac{d^3 z}{dx^3} + A_2(x, y_0)\frac{d^2 z}{dx^2} + A_3(x, y_0)\frac{dz}{dx} + A_4(x, y_0)z = 0.$$

On pourra appliquer à l'étude de cette équation les méthodes classiques de Fuchs. De même z considérée comme fonction de y seul $(x = x_0)$ satisfait à une équation différentielle du quatrième ordre en y.

Si nous considérons, par exemple, le système vérifié par la fonction F_3 nous obtenons, pour F_3 considéré comme fonction de x seul, l'équation du quatrième ordre

$$A_0(x, y)\frac{d^4 z}{dx^4} + A_1(x, y)\frac{d^3 z}{dx^3} + A_2(x, y)\frac{d^2 z}{dx^2} + A_3(x, y)\frac{dz}{dx} + A_4(x, y)z = 0,$$

où les coefficients ont les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
A_0 &= x^2(1-x)[(1-x)(1-y)-1],\\
A_1 &= x[(1-x)(1-y)-1][\gamma+2-(\alpha+\beta+5)x]\\
&\quad + x(1-x)[(\alpha'+\beta'-\gamma-1)y-(\alpha+\beta+3)x(1-y)],\\
A_2 &= [\gamma+1-(\alpha+\beta+3)x][(\alpha'-\beta'-\gamma-1)y-(\alpha+\beta+3)x(1-y)]\\
&\quad - x[(1-x)(1-y)-1][2\alpha\beta+3\alpha+3\beta+5]-(\alpha+1)(\beta+1)x-\alpha'\beta'y,\\
A_3 &= -(\alpha+1)(\beta+1)\big\{(\alpha'+\beta'-\gamma-1)y-(\alpha+\beta+3)x(1-y)\\
&\qquad + [\gamma-(\alpha+\beta+1)x](1-y)\big\},\\
A_4 &= \alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)(1-y).
\end{aligned}$$

Pour les fonctions F_2 et F_4, on obtiendrait des résultats entièrement analogues.

Supposons au contraire que l'on parte d'un des systèmes étudiés au paragraphe II quand on y considère z comme une fonction de x seul $z(x) = z(x, y_0)$; *on obtient pour z une équation différentielle linéaire du troisième ordre*

$$B_0(x, y)\frac{d^3 z}{dx^3} + B_1(x, y)\frac{d^2 z}{dx^2} + B_2(x, y)\frac{dz}{dx} + B_3(x, y)z = 0.$$

Ce cas est en particulier celui de la fonction F_1.

III. — Extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann.

15. Historique. Recherches de M. E. Picard relatives à F_1. — Dans un Mémoire célèbre, Riemann a défini la fonction hypergéométrique d'Euler et de Gauss, comme fonction d'une variable complexe x, par ses trois points critiques et les exposants relatifs à ces points, exposants assujettis à une relation convenable. Le Mémoire de Riemann est fondamental : il forme la base des recherches de Fuchs sur les équations différentielles linéaires (*Journal de Crelle*, t. 66), recherches qui ont été exposées et complétées par Tannery (*Annales de l'École Normale supérieure*, année 1874). Les mathématiciens Gauss (28) et Kummer (48) ont donné des relations linéaires à coefficients constants entre trois des intégrales de l'équation différentielle de la fonction hypergéométrique; mais comme ils se sont placés au point de vue des valeurs réelles de la variable, les formules qu'ils ont obtenues présentent quelques difficultés quand on veut passer aux applications. Ces difficultés ont été levées par M. Goursat dans sa Thèse (30); la méthode de Riemann est encore ici le fil conducteur.

Un problème analogue à celui de Riemann se pose pour les fonctions hypergéométriques de deux variables. C'est à M. Émile Picard qu'on doit la solution de la question, dans le cas d'une fonction de deux variables vérifiant trois équations aux dérivées partielles linéaires simultanées du type considéré dans le paragraphe 11 (59, 60). M. Émile Picard est, par cette voie nouvelle, conduit à la fonction F_1.

Nous ne pouvons ici exposer sa méthode en détail; nous renverrons soit à son Mémoire des *Annales de l'École Normale,* soit à l'Ouvrage (16), pages 76 et suivantes. Pour les fonctions F_2, F_3, F_4, qui vérifient *deux* équations aux dérivées partielles simultanées du type du paragraphe 9, on peut traiter le même problème en partant des méthodes de Pochhammer (67); c'est ce qu'a fait M. Goursat (n° 16).

Ces recherches montrent que les fonctions F_1, F_2, F_3, F_4 constituent les généralisations de la fonction F aussi bien du point de vue de Gauss que de celui de Riemann.

16. Recherches de M. Goursat relatives aux fonctions F_2, F_3 et F_4.

— En s'appuyant sur les résultats de Pochhammer, M. Goursat (**33**) a montré que les fonctions F_2, F_3, F_4 peuvent être définies par leurs points critiques et les exposants correspondants. M. Goursat retrouve la fonction F_3 comme solution d'un problème analogue à celui de Riemann. Il existe effectivement une fonction $z(x)$ remplissant les conditions du problème; cette fonction satisfait à une équation linéaire du quatrième ordre complètement déterminée

$$A_0(x)\frac{d^4 z}{dx^4} + A_1(x)\frac{d^3 z}{dx^3} + A_2(x)\frac{d^2 z}{dx^2} + A_3(x)\frac{dz}{dx} + A_4(x)z = 0,$$

où les coefficients ont des valeurs telles que si l'on remplace la constante c par sa valeur $\frac{y}{y-1}$, l'équation s'identifie immédiatement avec celle que vérifie la fonction F_3 considérée comme fonction de x seul. Donc le problème posé conduit directement à la fonction F_3.

17. Résultats de M. E. Picard. Groupe des équations de F_1. Fonctions hyperfuchsiennes déduites de F_1. — A l'étude du système d'équations aux dérivées partielles de F_1, envisagé à un point de vue connexe de celui des paragraphes précédents, se rattache un ensemble de travaux de M. E. Picard (**63**) dont nous ne pouvons que résumer les résultats les plus importants. D'abord l'intégrale générale des équations de F_1 n'est pas une fonction uniforme de x et y; il y a donc lieu de chercher comment elle se transforme lorsque les variables x et y tournent autour d'un des points singuliers

$$\begin{array}{ll} x = 0, & y = b \neq 0,\ 1,\ \infty, \\ x = 1, & y = b \neq 0,\ 1,\ \infty, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

C'est le problème de la détermination du groupe des équations de F_1.

M. Picard considère trois intégrales particulières de ces équations :

$$\omega_1 = \int_0^x V\,du, \qquad \omega_2 = \int_0^y V\,du, \qquad \omega_3 = \int_0^1 V\,du,$$
$$V = u^{\beta+\beta'-\gamma}(u-1)^{\gamma-\alpha-1}(u-x)^{-\beta}(u-y)^{-\beta'}$$

qu'il met sous la forme suivante :

$$\omega_1 = U_x - U_0, \qquad \omega_2 = U_y - U_0, \qquad \omega_3 = U_1 - U_0$$

en posant

$$U_x = \int_{u_0}^{x} V\,du, \qquad U_y = \int_{u_0}^{y} V\,du,$$

$$U_0 = \int_{u_0}^{0} V\,du, \qquad U_1 = \int_{u_0}^{1} V\,du, \qquad U_\infty = \int_{u_0}^{\infty} V\,du,$$

u_0 désignant un point arbitraire du plan de la variable u, les chemins d'intégration étant des courbes, ne se coupant pas, joignant u_0 aux points x, y, o, 1, ∞, disposées en éventail autour de u_0 dans l'ordre (de gauche à droite), o, x, 1, y, ∞. On étudie alors comment varient les U lorsqu'on fait décrire à x un circuit autour du point o, puis autour du point 1, etc.; des formules de transformation des U se déduisent immédiatement celles des ω, d'où le groupe de F_1 qui contient cinq substitutions fondamentales. Voici, par exemple, celle qui correspond à la circulation dans le sens direct de x autour de l'origine :

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= e^{2(2+\beta'-\gamma)\pi i}\,\omega_1, \\ \omega'_2 &= \omega_2 + [e^{2(1-\beta)\pi i} - 1]\,\omega_1, \\ \omega'_3 &= \omega_3 + [e^{2(1-\beta)\pi i} - 1]\,\omega_1. \end{aligned}$$

A l'étude du groupe de F_1 se rattache le problème connexe de *l'inversion du quotient de deux intégrales : à quelles conditions les fonctions $x\ (s, t)$ et $y\ (s, t)$ définies par les équations*

$$\frac{\omega_1(x, y)}{\omega_3(x, y)} = s, \qquad \frac{\omega_2(x, y)}{\omega_3(x, y)} = t$$

sont-elles des fonctions uniformes de s et t.

On sait (64, t. III) que le même problème, résolu pour l'inversion du quotient de deux intégrales de l'équation hypergéométrique, conduit à une classe particulière remarquable de ces fonctions que H. Poincaré a appelées *fuchsiennes*.

M. E. Picard (61) a démontré que, pour que l'inversion se fasse d'une manière uniforme, il faut que dix nombres soient les inverses d'un nombre entier positif ou négatif.

Tous les systèmes de nombres vérifiant ces conditions ont été déterminés par M. Le Vavasseur (51, p. 113-191) qui en a trouvé 102.

Lorsque l'inversion conduit à des fonctions x et y uniformes, ces fonctions rentrent dans la classe de fonctions que M. E. Picard a appelées *hyperfuchsiennes* et dont il a fait l'étude.

M. E. Picard a considéré (62) spécialement le cas qui correspond à

$F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, x, y\right)$; les intégrales ω des équations de F_1 sont ici de la forme

$$\int_g^h [u(u-1)(u-x)(u-y)]^{-\frac{1}{3}} du.$$

Les fonctions uniformes $x(s, t)$ et $y(s, t)$ jouent dans la théorie des fonctions abéliennes auxquelles conduit la relation algébrique

$$v^3 = u(u-1)(u-x)(u-y)$$

le même rôle que la fonction modulaire dans la théorie des fonctions elliptiques.

IV. — Réduction des fonctions hypergéométriques de deux variables.

18. Considérations générales. — On peut concevoir de deux façons différentes le problème de la réduction :

Premier mode de réduction, obtenu en supposant y fonction de x, ou réductions de première espèce. — Imaginons un système d'équations aux dérivées partielles linéaires et homogènes simultanées dont l'intégrale générale z est une combinaison linéaire à coefficients constants d'un certain nombre ρ de fonctions linéairement indépendantes $z_1, z_2, \ldots, z_\rho$

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_\rho z_\rho. \tag{19}$$

Les variables indépendantes sont supposées être au nombre de deux, x et y; $z_1, z_2, \ldots, z_\rho$ sont des fonctions de x et y. Si alors on établit une relation quelconque $y = f(x)$ entre x et y, z devient fonction de x seul et vérifie une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre ρ. Mais, quand y est une fonction spéciale de x, définie par une équation différentielle non linéaire d'ordre $\rho - 1$, z vérifie une équation linéaire et homogène d'ordre $\rho - 1$. L'équation différentielle non linéaire qui donne y en fonction de x est *l'équation différentielle réductrice ;* son intégrale générale est

$$K_1 z_1 + K_2 z_2 + \ldots + K_\rho z_\rho = 0, \tag{20}$$

avec $\rho - 1$ constantes qui sont les rapports des constantes K_1, $K_2, \ldots, K_\rho$, à l'une d'entre elles.

Deuxième mode de réduction. — En se plaçant dans l'hypothèse d'une fonction z de x et y définie par un système d'équations aux dérivées partielles linéaires et homogènes simultanées, dont l'intégrale générale est de la forme (19) et dont les coefficients sont *rationnels* en x et y, on peut dire que ces équations ne sont pas *irréductibles* et par suite qu'il y a *réduction*, quand il existe une intégrale z vérifiant des équations analogues, *à coefficients rationnels*, dont l'intégrale générale renferme moins de ρ constantes arbitraires. Si cette nouvelle intégrale générale renferme $\rho-\sigma$ constantes arbitraires, on peut dire que la réduction est d'ordre σ.

Nous allons envisager successivement ces deux points de vue.

19. **Réductions de première espèce. Premier cas de réduction.** — Soit z une fonction des deux variables indépendantes x et y satisfaisant à deux équations différentielles linéaires aux dérivées partielles de la forme (15) qui admettent *quatre intégrales* communes linéairement indépendantes. Si l'on établit une relation entre y et x, $y=f(x)$, l'intégrale générale z des équations (15) devient une fonction de x seulement, et cette fonction z satisfait, en général, à une équation différentielle linéaire du quatrième ordre; mais, pour certaines déterminations spéciales de la fonction $f(x)$, cette fonction z de x pourra satisfaire à une équation différentielle *d'ordre moindre que* 4.

Voici comment on obtiendra ces déterminations particulières de $f(x)$ (8). On a, puisque z dépend de x directement et par l'intermédiaire de y,

$$\frac{dz}{dx}=p+qy'.$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=r+2sy'+ty'^2+qy'',$$

y' et y'' désignant les dérivées de y par rapport à x, tirées de la relation $y=f(x)$. En vertu des équations, ces expressions deviennent

$$\frac{dz}{dx}=p+qy',$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2z}{dx^2}=&s(a_1+2y'+b_1y'^2)+p(a_2+b_2y'^2)\\&+q(a_3+b_3y'^2+y'')+z(a_4+b_4y'^2).\end{aligned}$$

Donc la fonction z de x vérifiera une équation différentielle du deuxième ordre facile à former, si l'on peut trouver une fonction y de x remplissant les deux conditions

$$\begin{aligned} a_1 + 2y' + b_1 y'^2 &= 0, \\ a_3 + b_3 y'^2 + y'' &= (a_2 + b_2 y'^2) y'. \end{aligned}$$

Il pourra ne pas exister de fonctions y de x vérifiant ces deux équations; c'est même ce qui arrivera en général.

Voici comment on obtient les déterminations de $f(x)$ pour lesquelles z vérifie une équation linéaire et homogène du troisième ordre. Nous avons trouvé plus haut

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \gamma_1 s + \gamma_2 p + \gamma_3 q + \gamma_4 z,$$

où γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 sont les coefficients qui viennent d'être calculés et qui contiennent y' et y''. En prenant encore une fois la dérivée par rapport à x, on a

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = \gamma_1 \left(\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} y' \right) + s \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial y} y' + \frac{\partial \gamma_1}{\partial y'} y'' \right) + \ldots$$

et, à l'aide des équations (16), on pourra mettre cette équation sous la forme

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = \delta_1 s + \delta_2 p + \delta_3 q + \delta_4 z,$$

les coefficients δ_i contenant x, y, y', y'', y'''. Une nouvelle dérivation donne, après un calcul analogue,

$$\frac{d^4 z}{dx^4} = \varepsilon_1 s + \varepsilon_2 p + \varepsilon_3 q + \varepsilon_4 z,$$

les ε_i contenant x, y, y', y'', y''' et y^{IV}. On a alors, par élimination de s, p, q, l'équation linéaire et homogène du quatrième ordre prévue

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dz}{dx} & 0 & 1 & y' \\ \dfrac{d^2 z}{dx^2} - \gamma_4 z & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \dfrac{d^3 z}{dx^3} - \delta_4 z & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \dfrac{d^4 z}{dx^4} - \varepsilon_4 z & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est là le cas général.

Pour qu'il existe une équation linéaire du troisième ordre à laquelle satisfasse z, il faut et il suffit que l'on ait

$$(21)\qquad \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ 0 & 1 & y' \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est *une équation différentielle du troisième ordre donnant y en x.*

Cette équation différentielle (21) est attachée, d'une façon invariante, aux équations données (15). On peut l'appeler l'équation différentielle *réductrice.*

Intégration de l'équation différentielle réductrice. — Les équations aux dérivées partielles (15) admettant quatre intégrales communes linéairement indépendantes z_1, z_2, z_3, z_4 fonctions de x et y, leur intégrale générale contient linéairement quatre constantes arbitraires C_1, C_2, C_3, C_4. Mais si l'on établit entre x et y une relation de la forme (20) où K_1, K_2, K_3, K_4 sont des *constantes*, la fonction z devient fonction de x seul et ne contient plus linéairement que *trois* constantes; elle vérifie donc alors une équation différentielle linéaire du *troisième ordre* $p = 4$.

L'intégrale générale de l'équation réductrice (21) définissant y en x est fournie par la relation donnant y en fonction de x et de *trois constantes arbitraires* qui sont les rapports de trois des quantités K_1, K_2, K_3, K_4 à la quatrième (52, 14).

Les théorèmes généraux qui donnent les intégrales des équations simultanées F_2, F_3, F_4 (13) fourniront des exemples de ces considérations générales.

Inversement, si l'on connaît l'intégrale générale de l'équation différentielle réductrice (21), on en déduit l'intégrale générale du système (15), par l'intégration d'une différentielle totale à deux variables.

20. Réduction de première espèce. Autres cas de réduction. — On obtient des cas analogues plus simples en supposant qu'une fonction z de x et y vérifie comme F_1 trois équations différentielles simultanées; ou deux équations de la forme

$$(22)\qquad \begin{cases} p = a_1 q + a_2 z, \\ s = b_1 q + b_2 z, \end{cases}$$

ou enfin deux de la forme

$$p = az, \qquad q = bz, \tag{23}$$

21. Réductions de seconde espèce. — *Cas de réduction des fonctions hypergéométriques.* — En se plaçant à un autre point de vue sur l'irréductibilité des systèmes d'équations différentielles *à coefficients rationnels* en x et y, on peut considérer les cas de réduction suivants.

D'abord, pour chacune des fonctions F_2, F_3, F_4, il y aura réduction du premier, du second ou du troisième ordre, si, pour certaines relations établies entre les éléments α, β, α', β', γ, γ' qui y figurent, cette fonction vérifie, non seulement un système tel que (15), mais un autre système tels que ceux du numéro précédent, *avec des coefficients rationnels en x et y.*

De même, pour la fonction F_1, il y aura réduction du premier ou du second ordre si, sous certaines conditions imposées aux éléments α, β, β', γ de F_1, cette fonction vérifie, non seulement un système tel que (17), mais un autre système tel que (22) ou (23) *avec des coefficients rationnels en x et y* (15). La recherche systématique de tous ces cas de réduction est un problème très digne d'intérêt. Nous nous bornerons ici à donner des exemples.

Exemples de réduction du premier ordre. — La formule

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = (1-y)^{-\beta'} F_3\left(\alpha, \gamma-\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, \frac{-y}{1-y}\right)$$

donne, en changeant y en $\dfrac{-y}{1-y}$,

$$F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y) = (1-y)^{-\beta'} F_1\left(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, \frac{-y}{1-y}\right)$$

sous la condition unique $\alpha + \alpha' = \gamma$. La fonction F_3, dans laquelle cette condition est remplie, vérifie donc non seulement deux équations du type (15), mais, comme F_1, trois équations du type (17) à *coefficients rationnels;* la condition est donc une condition de réduction du premier ordre de F_3.

Exemple de réduction du second ordre de F_3. — Considérons les deux équations suivantes de la forme (22) que nous écrirons d'une manière symétrique

$$(24) \qquad \begin{cases} (1-x)p-(1-y)q-\lambda z=0, \\ (xy-x-y)s-\mu(1-x)p+\nu(1-y)q=0, \end{cases}$$

λ, μ, ν désignant des constantes données différentes de zéro. Il existe une fonction particulière F_3 vérifiant ces équations. Les cinq éléments α, α', β, β', γ qui figurent dans F_3 vérifient les cinq équations suivantes :

$$(25) \qquad \alpha+\beta+\alpha'+\beta'-2\gamma=0, \qquad (\alpha-\beta)^2-(\alpha'-\beta')^2=0,$$

$$(26) \qquad \alpha+\beta-\alpha'-\beta'-2\lambda=0, \qquad \alpha\beta+\lambda\nu=0, \qquad \alpha'\beta'+\lambda\mu=0.$$

Les deux premières (25) indépendantes de λ, μ, ν donnent les conditions nécessaires et suffisantes que doivent remplir α, β, α', β', γ pour que la réduction ait lieu ; les trois autres (26) donnent ensuite λ, μ et ν. Comme la fonction F_3 ne change pas quand on permute α avec β ou α' avec β', on peut toujours réduire la seconde des relations (25) à $\alpha-\beta=\alpha'-\beta'$. Dans cette hypothèse, les équations (24) admettent l'intégrale particulière F_3, les éléments de cette fonction étant donnés par les relations

$$\alpha+\beta=\lambda+\mu-\nu, \quad \alpha\beta=-\lambda\nu, \quad \gamma=\mu-\nu, \quad \alpha'=\alpha-\lambda, \quad \beta'=\beta-\lambda.$$

La fonction F_3 correspondante peut s'exprimer à l'aide de la série hypergéométrique de Gauss.

V. — LES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES DE n VARIABLES.

22. Définition des fonctions hypergéométriques de Lauricella. Leurs propriétés. — Le procédé, utilisé au paragraphe 2 pour former des séries à deux variables généralisant la série hypergéométrique de Gauss, est susceptible de s'étendre, sans d'ailleurs mettre en jeu aucune idée essentiellement nouvelle, à la formation de séries hypergéométriques de n variables. Cette extension a été faite par Lauricella (50) dans son Mémoire *Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili*, dont nous allons exposer brièvement les résultats.

Formons le produit des n séries hypergéométriques

$$F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, x_1), \quad F(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, x_2), \quad \ldots, \quad F(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, x_n).$$

Le terme général aura pour expression

$$\frac{(\alpha_1, m_1)(\beta_1, m_1)}{(\gamma_1, m_1)(1, m_1)} \frac{(\alpha_2, m_2)(\beta_2, m_2)}{(\gamma_2, m_2)(1, m_2)} \cdots \frac{(\alpha_n, m_n)(\beta_n, m_n)}{(\gamma_n, m_n)(1, m_n)} x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}.$$

Considérons, dans ce terme général, le produit de p facteurs ($1 \leqq p \leqq n$)

$$(\alpha_j, m_j)(\alpha_{j+1}, m_{j+1}) \ldots (\alpha_{j+p-1}, m_{j+p-1}),$$

et remplaçons-le par l'expression

$$(\alpha, m_j + m_{j+1} + \ldots + m_{j+p-1});$$

répétons la même opération sur un ou plusieurs des groupes de produits de facteurs (α, m), puis sur des groupes de facteurs (β, m) et de facteurs (γ, m); le terme général ainsi obtenu définira une série hypergéométrique de n variables. Telles sont les quatre fonctions suivantes :

$$F_A(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \ldots, x_1, x_n)$$
$$= \sum \frac{(\alpha, m_1 + \ldots + m_n)(\beta_1, m_1) \ldots (\beta_n, m_n)}{(\gamma_1, m_1) \ldots (\gamma_n, m_n)(1, m_1) \ldots (1, m_n)} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n},$$

$$F_B(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma, x_1, \ldots, x_n)$$
$$= \sum \frac{(\alpha_1, m_1) \ldots (\alpha_n, m_n)(\beta_1, m_1) \ldots (\beta_n, m_n)}{(\gamma, m_1 + \ldots + m_n)(1, m_1) \ldots (1, m_n)} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n},$$

$$F_C(\alpha, \beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, x_1, \ldots, x_n)$$
$$= \sum \frac{(\alpha, m_1 + \ldots + m_n)(\beta, m_1 + \ldots + m_n)}{(\gamma_1, m_1) \ldots (\gamma_n, m_n)(1, m_1) \ldots (1, m_n)} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n},$$

$$F_D(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma, x_1, \ldots, x_n)$$
$$= \sum \frac{(a, m_1 + \ldots + m_n)(\beta_1, m_1) \ldots (\beta_n, m_n)}{(\gamma, m_1 + \ldots + m_n)(1, m_1) \ldots (1, m_n)} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}.$$

Ces quatre fonctions, qui sont la généralisation directe respectivement des fonctions F_2, F_3, F_4, F_1, sont les seules qu'a étudiées Lauricella; mais, comme il le fait remarquer, le procédé de formation que nous venons d'exposer permet d'en construire bien d'autres. Pour se borner au cas de $n = 3$, on peut obtenir 14 fonctions hypergéométriques de trois variables, en excluant bien entendu les combinaisons qui correspondent au produit de trois fonctions de Gauss, ou d'une fonction de Gauss par une fonction hypergéométrique de deux variables.

Les domaines de convergence des séries se déterminent comme pour le cas de deux variables.

Ces fonctions hypergéométriques peuvent être exprimées par des intégrales définies analogues à celles que nous avons données.

Elles vérifient des systèmes de n équations aux dérivées partielles qui contiennent comme cas particuliers : pour $n = 1$, l'équation hypergéométrique de Gauss; pour $n = 2$, les quatre systèmes d'équations du cas de deux variables.

On peut ramener ces systèmes à la forme générale

$$(27) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} = \sum_{(r \neq s)}\sum a_{r,s}^{(j)} \frac{\partial^2 F}{\partial x_r \partial x_s} + \sum b_k^{(j)} \frac{\partial F}{\partial x_k} + c^{(j)} F \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Lauricella a démontré au sujet des systèmes de cette forme une série de propositions qui constituent la généralisation complète des théorèmes du paragraphe 2; pour le détail des calculs nous renvoyons aux pages 122-129 de son Mémoire.

VI. — Les dégénérescences des quatre fonctions hypergéométriques de deux variables.

23. Dégénérescences de la fonction de Gauss : fonction de Bessel. — Si l'on remarque que M étant un entier positif quelconque, l'on a, en faisant tendre ε vers zéro,

$$\lim_{\varepsilon=0} \left(\frac{1}{\varepsilon}, M\right) \varepsilon^M = 1,$$

on trouve aisément les dégénérescences de la fonction de Gauss, étudiées par Kummer (48), qui considère la fonction

$$(28) \qquad G(\alpha, \gamma, x) = \lim_{\varepsilon=0} F\left(\alpha, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \varepsilon x\right);$$

l'équation, à laquelle satisfait la fonction $G(\alpha, \gamma, x)$, se déduit immédiatement comme limite de celle de F.

Dans ce passage à la limite, l'équation de la série hypergéométrique, qui admettait les points singuliers 0, 1, ∞, admet le point $\frac{1}{\varepsilon}$ qui vient se réunir au point ∞. On dit alors que l'on obtient une fonction hypergéométrique *confluente*.

De même on pose habituellement

$$\lim_{\varepsilon=0} F\left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \varepsilon^2 x\right) = J(\gamma, x). \tag{29}$$

La fonction $J(\gamma, x)$, qui apparaît ainsi comme une nonvelle dégénérescence de la fonction de Gauss, se ramène très simplement aux transcendantes $J_k(x)$ introduites dans l'Analyse par Fourier et Bessel; on a, en effet,

$$J_k(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{\Gamma(k+1)} J\left(k+1, -\frac{x^2}{2^2}\right).$$

24. Les dégénérescences des fonctions hypergéométriques de deux variables. — La méthode de passage à la limite, qui permet de déduire les deux fonctions hypergéométriques confluentes $G(\alpha, \gamma, x)$ et $J(\gamma, x)$ de la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, peut, comme l'a montré M. Pierre Humbert (40), s'étendre aux fonctions de deux variables et conduit à des fonctions confluentes dont il a fait l'étude; voici les résultats qu'il a obtenus.

En procédant comme au paragraphe précédent, on trouve 23 fonctions confluentes de deux variables dont le tableau est donné pages 124 et 125 de l'Ouvrage 16. Certaines de ces fonctions hypergéométriques confluentes se ramènent à des fonctions d'une variable; d'autres se réduisent l'une à l'autre en mettant (α, α') à la place de (β, β'); d'autres sont identiques; d'autres enfin se déduisent l'une de l'autre en échangeant le rôle de x et de y.

M. Pierre Humbert introduit les notations suivantes :

$$\Phi_1(\alpha; \beta; \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)}{(\gamma, m+n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)};$$

$$\Phi_2(\beta, \beta'; \gamma, x, y) = \sum \frac{(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)};$$

$$\Phi_3(\beta; \gamma, x, y) = \sum \frac{(\beta, m)}{(\gamma, m+n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)};$$

$$\Psi_1(\alpha; \beta; \gamma, \gamma', x, y) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)}{(\gamma, m)(\gamma', n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)};$$

$$\Psi_2(\alpha; \gamma, \gamma', x, y) = \sum \frac{(\alpha, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)};$$

$$\Xi_1(\alpha, \alpha'; \beta; \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha, m)(\alpha', n)(\beta, m)}{(\gamma, m+n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)};$$

$$\Xi_2(\alpha; \beta; \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m+n)} \frac{x^m}{(1, m)} \frac{y^n}{(1, n)}.$$

25. Propriétés élémentaires des fonctions hypergéométriques confluentes. — Comme les fonctions hypergéométriques elles-mêmes, les fonctions confluentes s'expriment par des séries simples dont les éléments sont l'une des fonctions $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, $G(\alpha, \gamma, x)$, $\mathfrak{J}(\gamma, x)$; on obtient ces expressions en passant à la limite dans les formules correspondantes.

M. P. Humbert a encore exprimé les fonctions confluentes sous forme de séries dont les éléments sont des produits de fonctions F, G ou J.

Dans le même ordre d'idées, on peut montrer que, de même que F_1 se ramène toujours à F_3, Φ_1 s'exprime simplement au moyen de Ξ_1.

Enfin les fonctions hypergéométriques confluentes s'expriment par des intégrales définies qu'on obtient aisément comme limites.

Les sept fonctions hypergéométriques confluentes vérifient chacune un système de deux équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre, que l'on obtient en passant à la limite dans le système de la fonction F_1, F_2, F_3 ou F_4, dont elle dérive; tous ces systèmes se ramènent à la forme du n° 9.

La quantité $1 - a_1 b_1$ est identiquement nulle pour les systèmes vérifiés par Φ_1, Φ_2, Φ_3; pour ceux des fonctions Ψ_1, Ψ_2, Ξ_1, Ξ_2, au contraire, elle n'est pas identiquement nulle.

Chacune des fonctions Φ vérifie, en plus des deux équations précédentes, une troisième équation qui est une conséquence nécessaires des deux premières :

$$\Phi_1 \qquad xs - p + \beta q = 0,$$

$$\Phi_2 \qquad (x - y)s - \beta' p + \beta q = 0,$$

$$\Phi_1 \qquad xs - p + \beta q = 0.$$

On obtient ces équations en passant à la limite dans la troisième équation vérifiée par la fonction F_1

$$F_1 \qquad (x - y)s - \beta' p + \beta q = 0.$$

Les intégrales générales des systèmes d'équations précédentes s'expriment à l'aide des fonctions correspondantes.

Les équations adjointes des équations des fonctions confluentes se déterminent aisément; par exemple, les équations adjointes de celles de $\Phi_2(\beta, \beta'; \gamma; x, y)$ sont les équations vérifiées par la fonction $\Phi_2(1 - \beta, 1 - \beta'; 3 - \gamma; -x, -y)$.

26. Les fonctions $W_{k,\mu,\nu}(x, y)$ et $W_{k,\mu_1,\ldots,\mu_n}(x_1, \ldots, x_n)$ de M. Pierre Humbert. — Aux fonctions confluentes déduites de $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ se rattachent deux fonctions définies par M. Whittaker (68, p. 337). Pour définir des fonctions de deux variables généralisant les fonctions $M_{k,\mu}$ et $W_{k,\mu}$ de M. Whittaker (68, p. 337), M. Pierre Humbert part de la fonction hypergéométrique confluente

$$\begin{aligned}&\Psi_2(\mu+\nu-k+1,\ 2\mu+1,\ 2\nu+1,\ x,\ y)\\ &= \lim_{\varepsilon=0} F_2\left(\mu+\nu-k+1,\ \frac{1}{\varepsilon},\ \frac{1}{\varepsilon},\ 2\mu+1,\ 2\nu+1,\ \varepsilon x,\ \varepsilon y\right).\end{aligned}$$

Il pose

$$M_{k,\mu,\nu}(x, y) = x^{\mu+\frac{1}{2}} y^{\nu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x+y}{2}} \Psi_2(\mu+\nu-k+1,\ 2\mu+1,\ 2\nu+1,\ x,\ y).$$

Du système de deux équations vérifiées par la fonction hypergéométrique confluente $\Psi_2(\alpha, \gamma, \gamma', x, y)$ on déduit deux équations vérifiées par $M_{k,\mu,\nu}(x, y)$

$$(30)\qquad \begin{cases} x^2 r - xyq + \left(-\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{xy}{2} + kx + \dfrac{1}{4} - \mu^2\right) z = 0,\\[2mm] y^2 t - xyp + \left(-\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{xy}{2} + ky + \dfrac{1}{4} - \nu^2\right) z = 0 \end{cases}$$

qui admettent pour intégrale générale, lorsque μ et ν ne sont pas des multiples de $\frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} u = {}& A M_{k,\mu,\nu}(x, y) + B M_{k,-\mu,\nu}(x, y) + C M_{k,\mu,-\nu}(x, y)\\ &+ D M_{k,-\mu,-\nu}(x, y).\end{aligned}$$

La fonction $W_{k,\mu,\nu}(x, y)$, définie par M. Pierre Humbert, est une intégrale particulière du système (30), où les constantes A, B, C, D ont pour valeurs, lorsque μ et ν ne sont pas des multiples de $\frac{1}{2}$,

$$(31)\qquad \begin{cases} A = \dfrac{\Gamma(-2\mu)\Gamma(-2\nu)}{\Gamma(-\mu-\nu-k)}, & C = \dfrac{\Gamma(-2\mu)\Gamma(2\nu)}{\Gamma(-\mu+\nu-k)},\\[3mm] B = \dfrac{\Gamma(2\mu)\Gamma(-2\nu)}{\Gamma(+\mu-\nu-k)}, & D = \dfrac{\Gamma(2\mu)\Gamma(2\nu)}{\Gamma(+\mu+\nu-k)}. \end{cases}$$

Pour passer au cas de n variables, M. Pierre Humbert (39) part de la fonction hypergéométrique F_A de Lauricella et considère la fonction confluente

$$\begin{aligned}&\Psi_2(\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, x_1, \ldots, x_n)\\ &= \lim_{\varepsilon=0} F_A\left(\alpha, \frac{1}{\varepsilon}, \ldots, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \varepsilon x_1, \ldots, \varepsilon x_n\right)\end{aligned}$$

puis il pose

$$\begin{aligned}
&M_{k,\mu_1,\ldots,\mu_n}(x_1,\ldots,x_n)\\
&=x_1^{\mu_1+\frac{1}{2}}\ldots x_n^{\mu_n+\frac{1}{2}}e^{-\frac{x_1+\ldots+x_n}{2}}\Psi_2\Big(\mu_1+\ldots+\mu_n-k+\frac{n}{2},\\
&\qquad\qquad 2\mu_1+1,\ldots,2\mu_n+1,x_1,\ldots,x_n\Big).
\end{aligned}$$

On voit facilement que cette fonction vérifie les n équations

$$(32)\quad \left\{ \begin{aligned} & x_j^2\frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2}-x_j\sum_{(r\neq j)} x_r\frac{\partial F}{\partial x_r}+\left[-\frac{x_j^2}{4}-\frac{x_j}{2}\sum_{(r\neq j)} x_r+kx_j+\frac{1}{4}-\mu_j^2\right]F=0\\ &\qquad (j=1,2,\ldots,n). \end{aligned}\right.$$

Pour avoir l'intégrale générale on peut remarquer que, toutes les équations demeurant invariantes quand on y change l'un des μ en $-\mu$, les 2^n fonctions déduites de $M_{k,\mu_1,\ldots,\mu_n}$ en y affectant de toutes les manières possibles les μ du signe $-$ sont des intégrales particulières. Par conséquent, lorsque aucun des μ n'est un multiple de $\frac{1}{2}$, l'intégrale générale de (30) a pour expression

$$(33)\qquad u(x_1,\ldots,x_n)=\Sigma\, A M_{k,\omega_1\mu_1,\ldots,\omega_n\mu_n}(x_1,\ldots,x_n),$$

les ω devant être faits de toutes les manières possibles égaux à $+1$ et à -1. La fonction $W_{k,\mu_1,\ldots,\mu_n}(x_1,\ldots,x_n)$ est une intégrale particulière du système (30), définie lorsque aucun des nombres μ n'est un multiple de $\frac{1}{2}$, par la relation

$$(34)\qquad \begin{aligned} &W_{k,\mu_1,\ldots,\mu_n}(x_1,\ldots,x_n)\\ &=\sum\frac{\Gamma(-2\omega_1\mu_1)\ldots\Gamma(-2\omega_n\mu_n)}{\Gamma\left(1-\frac{n}{2}-\omega_1\mu_1-\ldots-\omega_n\mu_n-k\right)}M_{k,\omega_1\mu_1,\ldots,\omega_n\mu_n}. \end{aligned}$$

VII. — Les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur a deux variables.

27. Les fonctions hypergéométriques les plus générales à deux variables. — Les deux points de vue, qui permettent de passer de la fonction de Gauss à ses généralisations dans le domaine d'une variable (16, p. 136), sont susceptibles d'être employés pour obtenir la généralisation des quatre fonctions F_i.

Le premier point de vue, analogue à celui de Pochhammer, consisterait à considérer des fonctions telles que

$$z(x, y) = \int_g^h (u - a_1)^{b_1 - 1} \ldots (u - a_k)^{b_k - 1} (u - x)^{\lambda - 1} (u - y)^{\mu - 1}\, du,$$

g et h désignant deux des quantités $a_1, \ldots, a_k$, ∞, x, y.

Cette expression contient comme cas particulier l'expression de la fonction F_1 : $(k = 2)$

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = 1, \qquad b_1 = \beta + \beta' + 1 - \gamma,$$
$$b_2 = \gamma - \alpha, \qquad \lambda = 1 - \beta, \qquad \mu = 1 - \beta'.$$

On pourrait former deux équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre k vérifiées par la fonction $z(x, y)$. Ce point de vue n'a pas, à notre connaissance, fait l'objet d'une étude systématique. Signalons cependant que M. René Garnier, au cours de ses recherches sur les équations différentielles à points critiques fixes (26) a été amené à considérer des systèmes d'équations aux dérivées partielles de ce type, dont il a indiqué plusieurs propriétés, en connexion avec l'étude qu'il poursuivait.

Le second point de vue a été envisagé par MM. Hj. Mellin (55, 56, 57), R. Birkeland (19), Kampé de Fériet, qui considèrent comme *la fonction hypergéométrique la plus générale à deux variables* toute fonction définie par une série double $\sum_0^{+\infty} a_{m,n} x^m y^n$, dont les coefficients vérifient les conditions

$$\frac{a_{m+1,n}}{a_{m,n}} = \frac{P(m, n)}{R(m, n)}, \qquad \frac{a_{m,n+1}}{a_{m,n}} = \frac{Q(m, n)}{S(m, n)}; \tag{35}$$

P, Q, R, S désignant des polynomes soumis seulement aux restrictions suivantes :

1° Les degrés de P et Q sont au plus égaux respectivement à ceux de R et S, pour que la série puisse converger en dehors des valeurs $x = y = 0$;

2° R et S ne s'annulent pour aucune valeur des entiers positifs m et n, afin qu'aucun des coefficients $a_{m,n}$ ne soit infini;

3° Les deux relations (35) doivent être compatibles.

Ces trois restrictions étant satisfaites, les polynomes P, Q, R, S peuvent être choisis arbitrairement.

La propriété fondamentale (44) *des fonctions hypergéométriques générales c'est que la connaissance des polynomes* P, Q, R, S *suffit pour former un système de deux équations linéaires aux dérivées partielles vérifiées par cette fonction.*

La place nous manque pour démontrer cette proposition pour laquelle nous renverrons à la Note de M. Kampé de Fériet et à l'Ouvrage 16, p. 144 et suivantes.

La méthode que nous venons d'indiquer est susceptible de s'étendre (45) *aux fonctions beaucoup plus générales, dont les coefficients* $a_{m,n}$ *vérifient un système de deux équations aux différences finies linéaires, mais d'ordre quelconque :*

$$(35') \quad \sum_{r=0,\, s=0}^{r=p,\, s=q} P_{r,s}(m, n) a_{m+r,n+s} = 0, \quad \sum_{r=0,\, s=0}^{r=p',\, s=q'} Q_{r,s}(m, n) a_{m+r,n+s} = 0,$$

$P_{r,s}$ et $Q_{r,s}$ désignant des polynomes en m et n, au nombre de $(p+1)(q+1)$ et $(p'+1)(q'+1)$, soumis seulement aux restrictions suivantes :

1° Les degrés de $P_{r,s}$ et $Q_{r,s}$ sont au plus égaux respectivement à ceux de $P_{p,q}$ et $Q_{p',q'}$;

2° $P_{p,q}$ et $Q_{p',q'}$ ne s'annulent pour aucune valeur des entiers positifs m et n;

3° Les deux équations (35') sont compatibles.

28. Les fonctions hypergéométriques à deux variables d'ordre supérieur. — Pour les fonctions d'une variable les polynomes P (n) et R (n) se décomposent toujours en facteurs du premier degré :

$$P(n) = (\alpha_1 + n)\ldots(\alpha_\mu + n),$$
$$R(n) = (\beta_1 + n)\ldots(\beta_\omega + n)(1 + n).$$

On est donc, dans tous les cas, conduit à considérer des fonctions du type suivant :

$$F(x) = \sum_0^{+\infty} \frac{(\alpha_1, n)\ldots(\alpha_\mu, n)}{(\beta_1, n)\ldots(\beta_\omega, n)(1, n)} x^n.$$

Mais il n'en est plus de même pour les fonctions de deux variables. Les polynomes P, Q, R, S ne peuvent pas en général se décomposer en facteurs du premier degré.

Le cas exceptionnel où cette décomposition est possible conduit à considérer une classe particulière de fonctions hypergéométriques générales.

Ces fonctions définies et étudiées par J. Kampé de Fériet sous le nom de *fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur* (46, 47) jouissent de propriétés remarquables dont on trouvera l'exposé succinct dans les Notes citées et dans l'Ouvrage 16 (p. 149).

Les systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur et leurs intégrales ont été formés par M. Kampé de Fériet : les calculs sont développés dans l'Ouvrage 16 (p. 155 et suivantes).

VIII. — Fonctions de Fourier-Bessel a plusieurs variables.

29. Définition. — On peut définir des fonctions de Fourier-Bessel à plusieurs variables comme je l'ai montré dans une Note aux *Comptes rendus* (17). La théorie de ces fonctions, l'étude des systèmes d'équations différentielles simultanées qu'elles vérifient, ont été développées par MM. Pérès (58), Jekowsky (42), Akimof (1). La façon la plus simple de définir ces transcendantes paraît être (1) de partir de la fonction génératrice

$$(35)\quad e^{\frac{x_1}{r}\left(u-\frac{1}{n}\right)+x_2\left(u^2-\frac{1}{u^2}\right)+\ldots+x_n\left(u^n-\frac{1}{u^n}\right)} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} u^k J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

d'où l'on tire aisément les principales propriétés des nouvelles transcendantes J_k.

Parmi les applications il convient de citer l'inversion d'une intégrale de la forme $\int_{-1}^{x} \frac{P(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (11) et la résolution des problèmes de mécanique dans lesquels intervient l'équation de Képler généralisée.

DEUXIÈME PARTIE.

IX. — Polynomes généralisant les polynomes de Jacobi.

30. Polynomes hypergéométriques déduits de la fonction F_2. — La fonction de Gauss $F(-n, \beta, \gamma, x)$ où le premier élément est égal à un entier négatif se réduit à un polynome de degré n; comme on peut toujours poser $\beta = \alpha + n$, l'étude des polynomes hypergéométriques se ramène à celle des *polynomes de Jacobi*

$$\mathcal{J}_n(\alpha, \gamma, x) = F(-n, \alpha + n, \gamma, x).$$

En partant de la fonction hypergéométrique F_2, j'ai défini (6) une famille de polynomes à deux variables qui généralisent les résultats de Jacobi. La fonction

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) \\ &\quad = \frac{x^{1-\gamma} y^{1-\gamma'}}{(\gamma, m)(\gamma', n)} (1 - x - y)^{\gamma+\gamma'-\alpha} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \\ &\quad \times [x^{\gamma+m-1} y^{\gamma'+n-1} (1 - x - y)^{\alpha+m+n-\gamma-\gamma'}] \end{aligned}$$

est un polynome de degré $(m + n)$ en x et y s'exprimant au moyen de la fonction F_2. On a, en effet,

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) \\ &\quad = (1 - x - y)^{m+n} \\ &\quad \times F_2\left(\gamma + \gamma' - \alpha - m - n, -m, -n, \gamma, \gamma', \frac{x}{x + y - 1}, \frac{y}{x + y - 1}\right). \end{aligned}$$

Ces polynomes à deux variables constituent à un autre point de vue une généralisation des polynomes de Jacobi; en effet, d'après une formule de transformation d'Euler, on obtient, pour le polynome de Jacobi, l'expression équivalente

$$\mathcal{J}_n(\alpha, \gamma, x) = (1 - x)^n F\left(\gamma - \alpha - n, -n, \gamma, \frac{x}{x - 1}\right).$$

La propriété d'orthogonalité s'étend aux polynomes $\mathcal{J}_{m,n}$ de la manière suivante.

Considérons l'intégrale

$$(36)\qquad \int\!\!\int x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha-\gamma-\gamma'}\mathrm{P}(x,y)\,\mathfrak{F}_{m,n}(\alpha,\gamma,\gamma',x,y)\,dx\,dy$$

étendue au domaine $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $1-x-y \geqq 0$, $\mathrm{P}(x,y)$ désignant un polynome et supposons (pour que l'intégrale ait un sens)

$$\mathcal{R}(\gamma) > 0, \qquad \mathcal{R}(\gamma') > 0, \qquad \mathcal{R}(\alpha+1-\gamma-\gamma') > 0.$$

Si le polynome arbitraire $\mathrm{P}(x,y)$ *est de degré inférieur à* $m+n$, *l'intégrale* (36) *est nulle*, comme on le voit par l'intégration par parties.

La propriété d'orthogonalité des polynomes $\mathfrak{F}_{m,n}$ résulte comme cas particulier de cette proposition. En effet, faisons dans l'intégrale (36)

$$\mathrm{P}(x,y) = \mathfrak{F}_{m',n'}(\alpha,\gamma,\gamma',x,y).$$

Lorsque $m'+n'$ est différent de $m+n$, on peut supposer, pour fixer les idées, que c'est $m'+n'$ qui est inférieur à $m+n$, on a donc

$$\int\!\!\int x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha-\gamma-\gamma'}\mathfrak{F}_{m,n}\mathfrak{F}_{m',n'}\,dx\,dy = 0 \qquad (m+n \neq m'+n').$$

Au contraire, si $m+n = m'+n'$, la dérivée $\dfrac{\partial^{m+n}\mathfrak{F}_{m'n'}}{\partial x^m\,\partial y^n}$ est une constante, on a

$$\begin{aligned}
&\int\!\!\int x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha-\gamma-\gamma'}\mathfrak{F}_{m,n}\mathfrak{F}_{m',n'}\,dx\,dy\\
&= \frac{(-1)^{m+n}}{(\gamma,m)(\gamma',n)}\,\frac{\partial^{m+n}\mathfrak{F}_{m',n'}}{\partial x^m\,\partial y^n}\int\!\!\int x^{\gamma+m-1}y^{\gamma'+n-1}(1-x-y)^{\alpha+m+n-\gamma-\gamma'}\,dx\,dy\\
&= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')\Gamma(\alpha+m+n+1-\gamma-\gamma')}{\Gamma(\alpha+2m+2n+1)}(-1)^{m+n}\frac{\partial^{m+n}\mathfrak{F}_{m',n'}}{\partial x^m\,\partial y^n}\\
&\qquad\qquad (m+n = m'+n').
\end{aligned}$$

Essayons alors de développer une fonction arbitraire $\mathrm{F}(x,y)$ définie dans le domaine considéré en série de polynomes $\mathfrak{F}_{m,n}$:

$$\mathrm{F}(x,y) = \sum_{m=0,\,n=0}^{m=\infty,\,n=\infty} \mathrm{A}_{m,n}\mathfrak{F}_{m,n}(\alpha,\gamma,\gamma',x,y).$$

En partant des formules précédentes, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int\!\!\int x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha-\gamma-\gamma'}\mathrm{F}\,\mathfrak{F}_{m,n}\,dx\,dy\\
&= \sum_{m'+n'=m+n}\mathrm{A}_{m',n'}\int\!\!\int x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha-\gamma-\gamma'}\mathfrak{F}_{m,n}\mathfrak{F}_{m',n'}\,dx\,dy,
\end{aligned}$$

résultat beaucoup plus compliqué que dans le cas d'une variable puisque le second membre, au lieu de contenir un seul des coefficients à déterminer, est formé d'une combinaison linéaire des $(m+n+1)$ *coefficients* $A_{m',n'}$, *pour lesquels* $m'+n'=m+n$.

Pour obtenir les coefficients des polynomes d'un degré donné $m+n=k$, il faut donc écrire les $k+1$ équations analogues à la précédente en donnant dans le premier membre à m et n toutes les valeurs compatibles avec la relation $m+n=k$; les deuxièmes membres de ces équations sont des combinaisons linéaires des $k+1$ coefficients $A_{m',n'}$ tels que $m'+n'=k$; on a ainsi un système de $(k+1)$ équations linéaires entre ces $(k+1)$ inconnues $A_{m',n'}$, qui permettra de les déterminer. Il est à peine utile de faire remarquer à quels calculs pratiquement inextricables on sera ainsi conduit pour déterminer effectivement les coefficients $A_{m,n}$ du développement d'une fonction donnée. Nous indiquerons plus loin comment, en adjoignant aux polynomes $\mathcal{F}_{m,n}$ une autre famille de polynomes, il est possible, en appliquant la méthode de Fourier, d'obtenir une formule simple déterminant un à un les coefficients $A_{m,n}$.

Le système des deux équations de F_2 donne le système des deux équations aux dérivées partielles vérifiées par la fonction

$$\begin{aligned} z(x, y) &= (1-x-y)^{\alpha-\gamma-\gamma'}\mathcal{F}_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) \\ &= \frac{x^{1-\gamma}y^{1-\gamma'}}{(\gamma, m)(\gamma', n)} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}[x^{\gamma+m-1}y^{\gamma'+n-1}(1-x-y)^{\alpha+m+n-\gamma-\gamma'}]. \end{aligned}$$

31. Propriétés de l'équation aux dérivées partielles obtenue en faisant la somme des deux équations de la fonction. F_2. — Faisons la somme des deux équations de F_2 et posons

$$\beta+\beta'=\delta,$$

nous obtenons l'équation

$$\begin{aligned} (37) \qquad & x(1-x)r - 2xys + y(1-y)t + [\gamma-(\alpha+\delta+1)x]p \\ & + [\gamma'-(\alpha+\delta+1)x]q - \alpha\delta z = 0 \end{aligned}$$

dont nous voulons établir quelques propriétés générales (3).

D'abord il est clair que l'on a une infinité de solution de cette équation en prenant

$$z = F_2(\alpha, \delta + h, -h, \gamma, \gamma', x, y),$$

h étant une constante arbitraire.

On a une nouvelle solution de (37) en prenant

$$z = F_4\left(\alpha, \delta, \gamma, \gamma', \frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right).$$

Si l'on cherche une série entière en x et y vérifiant l'équation

$$\Phi = \Sigma A_{m,n} x^m y^n,$$

on trouve

$$\Phi(\alpha, \delta, \gamma, \gamma', x, y) = \sum_{m=0, n=0}^{m=\infty, n=\infty} \frac{(\alpha, m+n)(\delta, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} B_{m,n} x^m y^n,$$

où $B_{m,n}$ vérifie une équation aux différences finies de premier ordre.

On voit, en particulier, que la condition suffisante pour que $\Phi(\alpha, \delta, \gamma, \gamma', x, y)$ *soit un polynome est que* α *ou* δ *soit égal à un entier négatif.* Si cette condition est remplie, $\alpha = -N$ par exemple, l'expression Φ donne une *infinité* de polynomes satisfaisant à l'équation (37). On peut démontrer que cette condition est *nécessaire* en remarquant que si l'équation (37) est vérifiée par un polynome z de degré $m + n = k$, l'équation que vérifie la fonction

$$z' = \frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \partial y^n}$$

doit admettre la solution $z' = \text{const.}$; par conséquent le coefficient de z' doit y être nul. Or on forme facilement cette équation : en dérivant le premier membre de (37) m fois par rapport à x, n fois par rapport à y, on obtient

$$\begin{aligned} x(1-x)r' - 2xys' + y(1-y)t' + [\gamma + m - (\alpha + \delta + 2m + 2n + 1)x]p' \\ + [\gamma' + n - (\alpha + \delta + 2m + 2n + 1)y]q' - (\alpha + m + n)(\delta + m + n)z' = 0. \end{aligned}$$

On retrouve la condition

$$(\alpha + k)(\delta + k) = 0.$$

Une solution $\Phi(\alpha, \delta, \gamma, \gamma', x, y)$ de l'équation (29) étant connue, on peut en déduire de nouvelles solutions grâce à la remarque suivante. Dans cette équation faisons

$$z = x^{\lambda} y^{\mu} (1 - x - y)^{\nu} z',$$

et désignons par p', q', r', s', t' les dérivées partielles de z'.

Si l'on donne à λ, μ, ν des valeurs annulant les trois termes

$$\lambda(\lambda + \gamma - 1) = 0,$$
$$\mu(\mu + \gamma' - 1) = 0,$$
$$\nu(\alpha + \delta - \gamma + \gamma' + \nu) = 0,$$

l'équation prend la forme (37) où l'on aurait remplacé α, δ, γ, γ' par $\alpha + \lambda + \mu + \nu$, $\delta + \lambda + \mu + \nu$, $\gamma + 2\lambda$, $\gamma' + 2\mu$; par suite, elle admet, pour z', la solution

$$z' = \Phi(\alpha + \lambda + \mu + \nu,\ \delta + \lambda + \mu + \nu,\ \gamma + 2\lambda,\ \gamma' + 2\mu,\ x, y);$$

d'où, pour l'équation (37), la solution

$$z = x^{\lambda} y^{\mu} (1 - x - y)^{\mu} z'.$$

Ces généralités étant posées, parmi les fonctions qui satisfont à l'équation (37), considérons maintenant celles qui restent finies pour les valeurs réelles de x et y satisfaisant aux conditions

$$(38) \qquad x \geqq 0, \qquad y \geqq 0, \qquad 1 - x - y \geqq 0.$$

Ces fonctions possèdent des propriétés intéressantes que l'on trouve de la façon suivante :

Soient z une fonction satisfaisant à l'équation (37)

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(z) \equiv x(1-x)r - 2xys + y(1-y)t \\ + [\gamma - (\alpha + \delta + 1)x]p + [\gamma' - (\alpha + \delta + 1)y]q - \alpha\delta z = 0\end{aligned}$$

et z_1 une fonction satisfaisant à l'équation

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(z_1) \equiv x(1-x)r_1 - 2xys_1 + y(1-y)t_1 \\ + [\gamma - (\alpha + \delta + 1)x]p_1 \\ + [\gamma' - (\alpha + \delta + 1)y]q_1 - (\alpha - \lambda)(\delta + \lambda)z_1 = 0,\end{aligned}$$

obtenue en changeant α en $\alpha - \lambda$ et δ en $\delta + \lambda$ (λ désignant une indéterminée). Entre les deux équations $\mathcal{A}(z) = 0$ et $\mathcal{B}(z_1) = 0$ existe une relation analogue à celle qui lie deux équations adjointes. En effet, multiplions la première par z_1, la deuxième par $-z$ et ajoutons. Nous avons

$$z_1 \mathcal{A}(z) - z \mathcal{B}(z_1) \equiv x(1-x)(rz_1 - zr_1) - 2xy(sz_1 - zs_1)$$
$$+ y(1-y)(tz_1 - zt_1) + [\gamma - (\alpha+\delta+1)x](pz_1 - zp_1)$$
$$+ [\gamma' - (\alpha+\delta+1)y](qz_1 - zq_1) - \lambda(\delta - \alpha + \alpha)zz_1 = 0.$$

Posons

$$pz_1 - zp_1 = P, \qquad qz_1 - zq_1 = Q,$$

on peut écrire

$$(39) \quad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}[x^\gamma y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'+1} P] \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}[x^{\gamma-1} y^{\gamma'}(1-x-y)^{\alpha-\delta-\gamma-\gamma'+1} Q] + \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial y} \\ &= \lambda(\delta - \alpha + \lambda) x^{\gamma-1} y^{\gamma-1}(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'} zz_1, \\ &H = x^\gamma y^{\gamma'}(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'}(P-Q). \end{aligned}$$

Cela posé, supposons que les fonctions z et z_1 restent finies pour les valeurs réelles de x et y du domaine d'intégration, et que les fonctions Q, P, P — Q soient, aux limites, finies ou infinies d'ordre moindre que

$$x^{-\gamma}, \quad y^{-\gamma'}, \quad (1-x-y)^{\gamma+\gamma'-\alpha-\delta-1},$$

et que, en outre,

$$\mathfrak{R}(\gamma) > 0, \qquad \mathfrak{R}(\gamma') > 0, \qquad \mathfrak{R}(\alpha+\delta-\gamma-\gamma'+1) > 0.$$

Multiplions les deux membres de l'équation (39) par $dx\,dy$, et prenons l'intégrale double étendue aux valeurs $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $1 - x - z \geqq 0$. On trouve

$$\lambda(\delta - \alpha + \lambda) \int\int x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'} zz_1\, dx\, dy = 0.$$

On conclut de là que, z et z_1 désignant respectivement des solutions des équations précédentes vérifiant les conditions voulues dans le domaine $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $1 - x - y \geqq 0$ et aux limites, l'intégrale double étendue à ce domaine

$$(40) \qquad I = \int\int x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'} zz_1\, dx\, dy$$

est nulle tant que

$$(41) \qquad \lambda(\delta - \alpha + \lambda) \gtrless 0.$$

Les conditions d'application du théorème sont évidemment *remplies dans le cas particulier où les deux fonctions z et z_1 sont des polynomes. Alors l'équation* (41) *exprime que les deux polynomes sont de degrés différents;* car nous avons vu précédemment que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (37) admette comme solution un polynome de degré k est

$$(\alpha+k)(\delta+k)=0;$$

et la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation qui se déduit de (37) par le changement de α, δ en $\alpha-\lambda$, $\delta+\lambda$, admette comme solution un polynome de degré k_1 est par conséquent

$$(\alpha-\lambda+k_1)(\delta+\lambda+k_1)=0.$$

Donc si $k=k_1$, on aura nécessairement

$$\lambda(\delta-\alpha+\lambda)=0.$$

Il est à remarquer que l'équation aux dérivées partielles classique des fonctions $Y_n(\theta,\varphi)$ de Laplace se ramène à la forme (37) par la substitution $\sin\theta\cos\varphi=\sqrt{x}$, $\sin\theta\sin\varphi=\sqrt{y}$, (3) et (69).

32. Orthogonalité des deux systèmes de polynomes $F_{m,n}$ et $E_{m,n}$. — La propriété générale exprimée par la formule (40), que nous venons d'établir pour deux solutions z et z_1 des équations $\mathcal{A}(z)$ et $\mathcal{B}(z_1)$, va nous permettre de démontrer la propriété d'orthogonalité de deux systèmes adjoints remarquables de polynomes (7, p. 208) :

$$F_{m,n}(\gamma,\gamma',x,y)=F_2(-m-n,\gamma+m,\gamma'+n,\gamma,\gamma',x,y),$$
$$E_{m,n}(\gamma,\gamma',x,y)=F_2(\gamma+\gamma'+m+n,-m,-n,\gamma,\gamma',x,y),$$

dont les premiers sont des cas particuliers des polynomes $\mathfrak{F}(m,n)$. En ajoutant les deux équations différentielles de $F_{m,n}$ d'une part, celles de $E_{m,n}$ d'autre part, on obtient le même résultat, cas particuliers de l'équation (37).

Considérons donc l'équation vérifiée par $F_{m,n}$

$$\begin{aligned}x(1-x)r-2xys+y(1-y)t+[\gamma-(\gamma+\gamma'+1)x]p\\ +[\gamma'-(\gamma+\gamma'+1)y]q+(m+n)(\gamma+\gamma'+m+n)z=0,\end{aligned}$$

et l'équation vérifiée par $E_{m',n'}$

$$\begin{aligned}x(1-x)r-2xys+y(1-y)t+[\gamma-(\gamma+\gamma'+1)a]p\\ +[\gamma'-(\gamma+\gamma'+1)y]q+(m'+n')(\gamma+\gamma'+m'+n')z=0.\end{aligned}$$

Ces équations s'identifient immédiatement avec ($\mathcal{A}$) et ($\mathcal{B}$) en y faisant

$$\alpha = -m-n, \qquad \delta = \gamma+\gamma'+m+n, \qquad \lambda = m'+n'-m-n.$$

Par conséquent, si les deux polynomes $F_{m,n}$ et $E_{m',n'}$ sont de degrés différents,

$$m+n \neq m'+n',$$

comme on a

$$\lambda(\delta-\alpha-\lambda) \equiv (m'+n'-m-n)(\gamma+\gamma'+m+n+m'+n'),$$

cette quantité est différente de zéro et l'on a

$$\int\int x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} F_{m,n}(\gamma, \gamma', x, y) E_{m',n'}(\gamma, \gamma', x, y)\, dx\, dy = 0$$
$$(x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 1-x-y \geqq 0).$$

Supposons maintenant les deux polynomes $F_{m,n}$ et $E_{m',n'}$ de même degré : $m+n = m'+n'$. L'application à $F_{m,n}$ de la formule démontrée pour les polynomes $\mathfrak{F}_{m,n}$ permet d'écrire

$$\int\int x^{\gamma+1} y^{\gamma'-1} F_{m,n} E_{m',n'}\, dx\, dy$$
$$= \frac{(-1)^{m+n}}{(\gamma, m)(\gamma', n)} \int\int x^{\gamma+m-1} y^{\gamma'+n-1} (1-x-y)^{m+n} \frac{\partial^{m+n} E_{m',n'}}{\partial x^m\, \partial y^n}\, dx\, dy,$$

ceci d'ailleurs quel que soit le degré de $E_{m'n'}$.

En particulier, si $E_{m',n'}$ est de degré $m+n$, la dérivée qui figure dans la seconde intégrale est une constante; comme dans le polynome

$$E_{m'n'} = F_2(\gamma+\gamma'+m'+n', -m', -n', \gamma, \gamma', x, y)$$

le seul terme de degré $m'+n'$ est le terme en $x^{m'} y^{n'}$, cette constante est nulle si l'on n'a pas $m'=m$, $n'=n$. Mais

$$\frac{\partial^{m+n} E_{m,n}}{\partial x^m\, \partial y^n} = (-1)^{m+n} \frac{(m+n+\gamma+\gamma', m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)} (1, m)(1, n);$$

l'intégrale

$$\int\int x^{\gamma+m-1} y^{\gamma'+n-1} (1-x-y)^{m+n} \frac{\partial^{m+n} E_{m,n}}{\partial x^m\, \partial y^n}\, dx\, dy$$

a pour valeur

$$(-1)^{m+n} \frac{(m+n+\gamma+\gamma', m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)} (1, m)(1, n)$$
$$\times \int\int x^{\gamma+m-1} y^{\gamma'+n-1} (1-x-y)^{m+n}\, dx\, dy,$$

$$(-1)^{m+n} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\gamma+\gamma')} \frac{(1, m)(1, n)(1, m+n)}{(\gamma+\gamma', m+n)} \frac{1}{\gamma+\gamma'+2m+2n}.$$

Nous pouvons donc conclure que l'intégrale

$$K_{m,n}^{m',n'} = \int\int x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} F_{m,n}(\gamma, \gamma', x, y) E_{m',n'}(\gamma, \gamma', x, y)\, dx\, dy$$
$$(x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 1 - x - y \geqq 0)$$

est nulle tant que l'on n'a pas a la fois $m' = m$, $n' = n$. Dans ce dernier cas, elle a pour valeur

$$K_{m,n}^{m,n} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\gamma+\gamma')} \frac{(1, m)(1, n)(1, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(\gamma+\gamma', m+n)} \frac{1}{\gamma+\gamma'+2m+2n}.$$

Cette propriété d'orthogonalité des deux systèmes adjoints de polynomes $F_{m,n}$ et $E_{m,n}$ permet de résoudre le problème posé plus haut :

Une fonction $F(x, y)$ étant donnée dans le domaine $x \geqq 0, y \geqq 0$, $1 - x - y \geqq 0$, calculer les coefficients de son développement

$$F(x, y) = \Sigma A_{m,n} F_{m,n}(\gamma, \gamma', x, y)$$

par la méthode de Fourier.

Il suffit de multiplier les deux membres par $x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} E_{m,n}\, dx\, dy$ et d'intégrer dans le domaine considéré; on obtient immédiatement

$$K_{m,n}^{m,n} A_{m,n} = \int\int x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} E_{m,n}(\gamma, \gamma', x, y) F(x, y)\, dx\, dy.$$

La même méthode permet encore de calculer les coefficients du développement

$$F(x, y) = \Sigma B_{m,n} E_{m,n}(\gamma, \gamma', x, y)$$

par la formule

$$K_{m,n}^{m,n} B_{m,n} = \int\int x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} F_{m,n}(x, y) F(x, y)\, dx\, dy.$$

X. — Polynomes d'Hermite et analogues. Potentiels.

33. Polynomes d'Hermite. — Ch. Hermite (37-38) s'est proposé d'étendre à des fonctions de deux variables la définition des polynomes X_n de Legendre et des fonctions $\dfrac{\sin[(n+1)\arc\cos x]}{\sqrt{1-x^2}}$, en écrivant pour deux variables les équations analogues aux équations bien connues

$$(42)\qquad (1-2ax+a^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} a^n X_n,$$

$$(42')\qquad (1-2ax+a^2)^{-1} = \sum_{n=\infty}^{n=\infty} a^n \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}$$

Pour cela, Hermite, se plaçant au point de vue purement algébrique, prend deux groupes de formules, le premier analogue à (42)

$$(43)\qquad \begin{cases} (1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1} = \sum\limits_{m,n} a^m b^n V_{m,n}, \\ [(1-ax-by)^2+(a^2+b^2)(1-x^2-y^2)]^{-\frac{1}{2}} = \Sigma a^m b^n U_{m,n}, \end{cases}$$

le second analogue à (42′)

$$(44)\qquad \begin{cases} (1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-\frac{3}{2}} = \Sigma a^m b^n \mathcal{V}_{m,n} \\ [(1-ax-by)^2+(a^2+b^2)(1-x^2-y^2)]^{-1} = \sum \dfrac{a^m b^n}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mho_{m,n}. \end{cases}$$

L'analogie des polynomes $U_{m,n}$ avec les polynomes de Legendre éclate quand on a démontré que ces polynomes sont

$$U_{m,n} = \frac{1}{2^{m+n}\, m!\, n!} \frac{\partial^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{\partial x^m\, dy^n},$$

et qu'ils se présentent comme coefficients de $a^m b^n$ dans le développement de

$$[(1-ax-by)^2+(a^2+b^2)(1-x^2-y^2)]^{-\frac{1}{2}},$$

de même que les polynomes X_n de Legendre s'écrivent

$$X_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},$$

et se présentent comme coefficients de a^n dans le développement de

$$[(1-ax)^2+a^2(1-x^2)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Ces polynomes vérifient un système de deux équations simultanées aux dérivées partielles, donné par Hermite,

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - xy\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + (n-2)x\frac{\partial U}{\partial x} - (m+1)y\frac{\partial U}{\partial y} + (m+n)(m+1)U = 0,$$

$$(1-y^2)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - xy\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + (m-2)y\frac{\partial U}{\partial y} - (n+1)x\frac{\partial U}{\partial x} + (m+n)(n+1)U = 0,$$

analogues à l'équation des polynomes X_n. Ce système de deux équations peut se ramener à celui de la fonction F_2, de sorte que les polymones $U_{m,n}$ d'Hermite s'expriment à l'aide de F_2 comme ceux de Legendre à l'aide de la fonction F de Gauss. Si l'on fait $x^2 = \xi$, $y^2 = \eta$, on trouve que le polynome $U_{m,n}$ vérifie les deux équations F_2 où

$$\alpha = -\frac{m+n}{2}, \qquad \beta = \frac{m+1}{2}, \qquad \beta' = \frac{n+1}{2}, \qquad \gamma = \gamma' = \frac{1}{2}.$$

On voit alors immédiatement, d'après l'intégrale générale des équations F_2, que ces équations admettent toujours deux intégrales qui sont des polynomes en x et y.

34. **Orthogonalité.** — Les polynomes d'Hermite possèdent la propriété d'orthogonalité suivante.

Si l'on pose

$$I_{m,n}^{\mu,\nu} = \int\int U_{m,n} U_{\mu,\nu}\, dx\, dy$$

étendue au cercle

(C) $$x^2 + y^2 - 1 \leqq 0,$$

on a

$$I_{m,n}^{\mu,\nu} = 0 \qquad (m+n \neq \mu+\nu),$$

quand les deux polynomes sont de degrés différents; cette intégrale a une valeur connue quand les deux polynomes sont de même degré. Pour calculer plus facilement, par la méthode de Fourier, les coefficients du développement d'une fonction en série de polynomes $U_{m,n}$, Hermite associe à ces polynomes les polynomes $V_{m,n}$ qui possèdent, entre autres, la propriété suivante : soit

$$K_{m,n}^{\mu,\nu} = \int\int U_{m,n} V_{\mu,\nu}\, dx\, dy$$

l'intégrale étant étendue au cercle (C).

Cette intégrale est nulle tant que

$$(m-\mu)^2+(n-\nu)^2>0;$$

elle prend la valeur

$$K_{m,n}^{m,n}=\frac{\pi}{m+n+1}\,\frac{(m+n)!}{m!\,n!}$$

pour $\mu=m$, $\nu=n$.

Hermite, généralisant la méthode de Legendre, rattache le calcul de $I_{m,n}^{\mu,\nu}$ et $K_{m,n}^{\mu,\nu}$ à celui des deux intégrales

$$\int\int\frac{dx\,dy}{PP'},\qquad \int\int\frac{dx\,dy}{P'\sqrt{Q}}$$

où l'on a

$$P=1-2ax-2by+a^2+b^2,$$
$$Q=(1-ax-by)^2+(a^2+b^2)(1-x^2-y^2),$$

P′ étant obtenu en remplaçant a et b par a' et b' et l'intégration étant étendue au cercle (C).

Les fonctions $\mho_{m,n}$ et $\mho_{m,n}$ ont des propriétés analogues. On a notamment la formule

$$\mho_{m,n}=\frac{m+n!}{m!\,n!}\,\frac{(-1)^{m+n}(m+n+1)}{1.3.5\ldots(2m+2n+1)}\,\frac{\partial^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n+\frac{1}{2}}}{\partial x^m\,\partial y^n}$$

qui rapproche ces fonctions de la fonction de Jacobi

$$\sin[(n+1)\arccos x]=\frac{(-1)^n(n+1)}{1.3.5\ldots(2n+1)}\,\frac{d^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n}.$$

35. Généralisations de Didon. — Ces résultats ont été généralisés par Didon (**24**). Il donne les développements de $U_{m,n}$ en somme de polynomes V et de $V_{m,n}$ en somme de polynomes U. Il étend les recherches d'Hermite au cas de p variables en considérant les polynomes U qui naissent du développement de

$$[(1-ax-by-cz\ldots)^2-(a^2+b^2+c^2+\ldots)(x^2+y^2+z^2+\ldots-1)]^{-\frac{1}{2}},$$

suivant les puissances positives de a, b, c, …, et il montre que ces polynomes sont identiques à

$$\frac{1}{m!\,m'!\,m''!\ldots}\,\frac{1}{2^{m+m'+m''+}}\,\frac{\partial^{m+m'+m''+}\,(x^2+y^2+z^2\ldots-1)^{m+m'+m''+}}{\partial x^m\,\partial y^{m'}\,\partial z^{m''}\ldots},$$

il leur associe les polynomes V coefficients de $a^m b^{m'} c^{m''}\ldots$ dans le développement de

$$(1-2ax-2by-2cz-\ldots+a^2+b^2+c^2+\ldots)^{-\frac{\mu}{2}},$$

il donne les systèmes d'équations différentielles auxquels satisfont ces polynomes; en particulier, il donne celui des polynomes $V_{m,n}$ qu'il intègre. Il généralise les fonctions $\cos[n \arccos x]$. Il montre que les intégrales

$$\int\int \frac{X_m X_n}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

étendues au cercle (C) sont nulles quand $m \neq n$, X_m et X_n désignant des polynomes de Legendre. Cette propriété est étendue par lui aux polynomes

$$P_n(x) = \frac{d^\mu X n+\mu}{dx^\mu}.$$

36. Les polynomes d'Hermite et leurs analogues rattachés aux potentiels à $q+1$ variables. — De nombreux mathématiciens ont généralisé les fonctions sphériques en considérant des potentiels ou des fonctions harmoniques et des formules analogues à la formule de Green, dans l'espace à $q+1$ dimensions. On en trouvera la liste dans les articles de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* consacrés aux fonctions sphériques. Je me bornerai ici à citer Green (34), Cayley (22), Heine (35). Nous allons donner une méthode générale rattachant à ce point de vue les polynomes $V_{m,n}$ qu'Hermite a créés comme généralisation des polynomes de Legendre et associés aux polynomes $U_{m,n}$, nous verrons ensuite que les polynomes $U_{m,n}$ se rattachent de même au potentiel comme les polynomes X_n de Legendre et que ce sont de véritables fonctions sphériques sur l'hypersphère dans l'espace à $q+1$ dimensions.

On sait que la fonction

$$T_{q+1,q+1} = (x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{q+1}^2)^{\frac{1-q}{2}},$$

où $q+1$ désigne le nombre des variables, vérifie l'équation

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 T}{\partial x_{q+1}^2} = 0. \tag{45}$$

Pour $q=1$, l'exposant est nul, et la fonction P correspondante devient un logarithme :

$$T_{2,2} = \log(x_1^2+x_2^2).$$

Dans cette notation $T_{i,j}$, le premier indice i indique le nombre des variables, le deuxième j le nombre de dimensions de l'espace considéré.

Chacun de ces potentiels donne naissance à des fonctions sphériques sur l'hypersphère

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{q+1}^2 = 1. \tag{46}$$

Je me propose d'abord de montrer brièvement que les polynomes $V_{m,n}$ d'Hermite peuvent être considérés comme des fonctions sphériques déduites du potentiel dans l'espace à quatre dimensions. Nous désignerons les quatre coordonnées par x, y, z, t et nous écrirons

$$T_{4,4} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}.$$

On arrive au résultat en suivant une méthode analogue à celle qu'emploie M. V. Giulotto (29) pour déduire son polynome X_n^q de la dérivation réitérée de $(x^2 + \lambda^2)^{\frac{2q-3}{2}}$. Pour cela, remarquons que les fonctions

$$W_{m,n} = (-1)^{m+n} \frac{1}{\Pi_m \Pi_n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + t^2} \tag{47}$$

vérifient évidemment l'équation du potentiel

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0,$$

comme la fonction $T_{4,4}$ dont elles sont les dérivées partielles. Or ces fonctions, sur l'hypersphère

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1,$$

se réduisent aux polynomes $V_{m,n}$ d'Hermite. En effet, en posant

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2},$$

on voit d'abord que $W_{m,n}$ est de la forme

$$W_{m,n} = \frac{Q_{m,n}(x, y, \rho)}{\rho^k},$$

k désignant un entier et $Q_{m,n}$ un polynome en x, y, ρ. Mais, d'après la formule de Taylor appliquée à la fonction

$$\frac{1}{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2+t^2},$$

où $-a$, $-b$ sont les accroissements donnés à x et à y, on a

$$\frac{1}{\rho^2-2ax-2by+a^2+b^2}=\sum_{m,n} a^m b^n W_{m,n}.$$

Faisant alors $\rho=1$, on voit que $W_{m,n}$ devient un polynome

$$Q_{m,n}(x,y,1)$$

et que l'on a

$$\frac{1}{1-2ax-2by+a^2+b^2}=\sum a^m b^n Q_{m,n}. \tag{48}$$

La fonction génératrice des polynomes $V_{m,n}$ d'Hermite est précisément cette fonction (48). On a donc

$$V_{m,n}=Q_{m,n}(x,y,1).$$

Ces polynomes apparaissent ainsi comme une généralisation directe des fonctions sphériques : on pourra leur appliquer les méthodes classiques pour l'étude de ces fonctions et pour la formation des développements correspondants en séries.

A ce point de vue, les polynomes $V_{m,n}$ sont compris dans d'autres polynomes $V_{m,n,p}$, déduits du même potentiel $T_{4,4}$, mais contenant trois variables et obtenus en faisant

$$x^2+y^2+z^2+t^2=1$$

dans les dérivées partielles de $T_{4,4}$:

$$(-1)^{m+n+p}\frac{1}{\Pi_m\Pi_n\Pi_p}\frac{\partial^{m+n+p}}{\partial x^m\partial y^n\partial z^p}\frac{1}{x^2+y^2+z^2+t^2}.$$

Ces polynomes ont pour fonction génératrice

$$\frac{1}{1-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2}.$$

Nous donnerons plus loin leur propriété fondamentale comme conséquence des formules générales que nous allons maintenant établir.

On peut rattacher les formules d'Hermite et les généralisations que Didon en a données aux considérations générales suivantes.

Posons, dans l'espace à $q+1$ dimensions, en axes rectangulaires,

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{q+1}^2}.$$

La fonction

$$\rho^{1-q}$$

étant harmonique, les fonctions

$$W_{m_1, m_2, \ldots, m_q} = \frac{(-1)^{m_1+m_2+\ldots+m_q}}{\Pi_{m_1} \Pi_{m_2} \ldots \Pi_{m_q}} \frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_q}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \ldots \partial x_q^{m_q}} \rho^{1-q}$$

le seront également. Ces fonctions sont de la forme

$$\rho^k Q_{m_1, m_2, \ldots, m_q}\left(\frac{x_1}{\rho}, \frac{x_2}{\rho}, \ldots, \frac{x_q}{\rho}\right),$$

où $Q_{m_1, m_2, \ldots, m_q}$ est un polynome en $\frac{x_1}{\rho}, \frac{x_2}{\rho}, \ldots, \frac{x_q}{\rho}$ de degré

$$M = m_1 + m_2 + \ldots + m_q,$$

et où

$$k = 1 - q - M.$$

Les fonctions harmoniques

$$W_{m_1, m_2, \ldots, m_q} = \rho^k Q_{m_1, m_2, \ldots, m_q}$$

sont uniformes et n'ont d'autre point singulier que l'origine

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{q+1} = 0.$$

D'après la formule de Taylor appliquée à la fonction ρ^{1-q} dans laquelle on donne à $x_1, x_2, \ldots, x_q$ les accroissements

$$-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, \alpha_q,$$

on a

$$\begin{aligned}(\rho^2 - 2\alpha_1 x_1 - 2\alpha_2 x_2 - \ldots - 2\alpha_q x_q + \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_q^2)^{\frac{1-q}{2}} \\ = \Sigma \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \ldots \alpha_q^{m_q} W_{m_1, m_2, \ldots, m_q}.\end{aligned}$$

Sur l'hypersphère

$$\rho = 1,$$

les fonctions $W_{m_1, m_2, \ldots, m_q}$ se réduisent à des polynomes

$$V_{m_1, m_2, \ldots, m_q}(x_1, x_2, \ldots, x_q)$$

en $x_1, x_2, \ldots, x_q$, et l'on a

$$(49) \qquad \begin{aligned}(1 - 2\alpha_1 x_1 - \ldots - 2\alpha_q x_q + \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_q^2)^{\frac{1-q}{2}} \\ = \Sigma \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \ldots \alpha_q^{m_q} V_{m_1, m_2, \ldots, m_q}.\end{aligned}$$

La fonction est donc la fonction génératrice des polynomes considérés V, que l'on pourra désigner par $V^{(q+1)}$ pour rappeler qu'ils proviennent de potentiels dans l'espace à $q+1$ dimensions. Ces polynomes contiennent en général les q variables $x_1, x_2, \ldots, x_q$. Mais si l'on fait $a_q = 0$, on obtient une fonction génératrice où manque la variable x_q donnant des polynomes $V^{(q+1)}$ contenant en général les variables $x_1, x_2, \ldots, x_{q-1}$. De même, si l'on fait

$$a_q = a_{q-1} = a_{q-2} = \ldots = a_{q-s+1} = 0,$$

on obtient une fonction génératrice donnant des polynomes $V^{(q+1)}$ contenant les variables $x_1, x_2, \ldots, x_{q-s}$ seulement.

Considérons alors deux fonctions

$$W_{m_1, m_2, \ldots, m_q}, \qquad W_{m'_1, m'_2, \ldots, m'}$$

telles que

$$M = m_1 + m_2 + \ldots + m_q$$

soit différent de

$$M' = m'_1 + m'_2 + \ldots + m'_q;$$

et par suite

$$k = 1 - q - M$$

différent de

$$k' = 1 - q - M'.$$

Nous désignerons, pour abréger, ces deux fonctions par W et W' et nous écrirons, comme plus haut,

$$W = \rho^k Q, \qquad W' = \rho^{k'} Q',$$

Q et Q' étant deux polynomes en $\frac{x_1}{\rho}, \frac{x_2}{\rho}, \ldots, \frac{x_q}{\rho}$ de degrés M et M', qui se réduisent aux polynomes V et V' en $x_1, x_2, \ldots, x_q$ sur l'hypersphère $\rho = 1$.

Appliquons la formule de Green généralisée :

$$\int_{(q+1)} (W \Delta W' - W' \Delta W)\, dv = \int_{(q)} \left(W \frac{dW'}{dn} - W' \frac{dW}{dn} \right) d\sigma,$$

où la première intégrale est étendue à l'espace à $q+1$ dimensions compris entre deux hypersphères

$$\rho = R, \qquad \rho = R'$$
$$(R > R').$$

La première intégrale étant nulle, la seconde qui l'est également et qui est étendue aux aires des deux hypersphères limites se calcule par une méthode connue. Sur l'hypersphère $\rho = \mathrm{R}$, on a

$$\mathrm{W} = \mathrm{R}^k \mathrm{Q}\left(\frac{x_1}{\rho}, \frac{x_2}{\rho}, \ldots, \frac{x_q}{\rho}\right),$$

$$\mathrm{W}' = \mathrm{R}^{k'} \mathrm{Q}'\left(\frac{x_1}{\rho}, \frac{x_2}{\rho}, \ldots, \frac{x_q}{\rho}\right),$$

$\frac{x_1}{\rho}, \frac{x_2}{\rho}, \ldots, \frac{x_q}{\rho}$ étant les cosinus directeurs du rayon par rapport aux axes des $x_1, x_2, \ldots, x_q$. On a alors

$$\frac{d\mathrm{W}}{dn} = \frac{d\mathrm{W}}{d\mathrm{R}} = k\mathrm{R}^{k-1}\mathrm{Q},$$

$$\frac{d\mathrm{W}'}{dn} = \frac{d\mathrm{W}'}{d\mathrm{R}} = k'\mathrm{R}^{k'-1}\mathrm{Q}',$$

$$d\sigma = \mathrm{R}^{q-1}\, d\sigma_1,$$

$d\sigma_1$ désignant l'élément superficiel de l'hypersphère $\rho = 1$.

On obtient des formules analogues sur l'hypersphère $\rho = \mathrm{R}'$, avec un changement de signe, car

$$dn = -d\mathrm{R}'.$$

On a donc finalement, en posant $k + k' + q - 1 = h$:

$$(k' - k)(\mathrm{R}^h - \mathrm{R}'^h) \int_{s_1} \mathrm{Q}\left(\frac{x_1}{\rho}, \ldots\right) \mathrm{Q}'\left(\frac{x_1}{\rho}, \ldots\right) d\sigma_1 = 0,$$

l'indice S_1 indiquant une intégrale étendue à tous les éléments de σ_1 de l'hypersphère $\rho = 1$. Comme, sur cette surface, Q et Q' se réduisent aux polynomes V et V', avec M différent de M', on a finalement, pour deux polynomes V et V' *de degrés différents :*

$$\int_{\mathrm{S}_1} \mathrm{V}(x_1, x_2, \ldots, x_q)\mathrm{V}'(x_1, x_2, \ldots, x_q)\, d\sigma_1 = 0.$$

L'élément $d\sigma_1$ de la surface

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{q+1}^2 = 1$$

est

$$d\sigma_1 = \frac{dx_1\, dx_2 \ldots dx_q}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_q^2}}.$$

Comme deux éléments $d\sigma_1$ symétriques par rapport au plan $x_{q+1} = 0$

sont équivalents, la formule devient

$$(51)\qquad \int \frac{V(x_1, x_2, \ldots, x_q) V'(x_1, x_2, \ldots, x_q)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_q}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_q^2}} = 0$$

quand $M \gtrless M'$, l'intégrale étant étendue au domaine

$$x_1^2\, x_2^2 + \ldots + x_q^2 - 1 \leqq 0.$$

Telle est la formule générale pour les polynomes V définis par la fonction génératrice. Quand $M = M'$ l'intégrale prend une valeur qu'il est trop long d'écrire ici et qui a été donnée par M. Kampé de Fériet (43). Voici maintenant les divers cas particuliers qui peuvent se présenter et qui mettent bien en évidence la liaison intime des polynomes d'Hermite et des polynomes plus généraux que nous venons de définir, avec les fonctions sphériques.

1° Si toutes les variables $x_1, x_2, \ldots, x_q$ figurent effectivement dans l'ensemble des deux polynomes V et V', la formule fondamentale (51) ne peut pas être simplifiée.

L'exemple le plus simple de ce cas est relatif à l'espace à 2 dimensions, $q = 1$; alors $\log(1 - 2ax + a^2) = \Sigma a^n V_n^{(2)}(x)$ et les polynomes $V_n^{(2)}(x)$, comme il est classique, possèdent la propriété

$$\int_{-1}^{+1} V_n V_{n'} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 0,$$

quand $n \gtrless n'$.

Un autre exemple est donné, pour $q = 2$, par les polynomes $V_{m,n}^{(3)}$ définis à l'aide du développement

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2}} = \Sigma a^m b^n V_{m,n}^{(3)}(x, y).$$

On a

$$\int\int V_{m,n}^{(3)} V_{m',n'}^{(3)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = 0$$

quand

$$m + n \gtrless m' + n',$$

le champ d'intégration étant

$$x^2 + y^2 - 1 \leqq 0.$$

Enfin pour $q = 3$, si l'on fait

$$\frac{1}{1 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2} = \Sigma a^m b^n c^p V_{m,n,p}^{(4)}(x, y, z),$$

l'intégrale triple

$$\iiint \frac{V^{(4)}_{m,n,p} V^{(4)}_{m',n',p'} \, dx \, dy \, dz}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}} = 0$$

$$(\text{champ } x^2 + y^2 + z^2 - 1 \leqq 0)$$

quand

$$m + n + p \gtrless m' + n' + p'.$$

2° Supposons maintenant, en reprenant la formule fondamentale (51), qu'une des variables $x_1, x_2, \ldots, x_q$ manque dans les deux fonctions V et V' De telles fonctions peuvent être appelées *zonales*, d'après la dénomination que certains géomètres anglais appliquent à la fonction X_n de Legendre.

Supposons, pour fixer les idées, que x_q manque dans V et V'. On peut alors, dans (51), intégrer d'abord par rapport à x_q; ce qui donne

$$\int \frac{dx_q}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_q^2}}$$

entre les limites

$$\pm \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_{q-1}^2},$$

intégrale de la forme

$$\int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{dx}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} = \pi.$$

La formule devient, après cette intégration,

$$\int VV' \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_{q-1} = 0 \tag{52}$$

quand $M \gtrless M'$, l'intégrale étant étendue au champ

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{q-1}^2 - 1 \leqq 0.$$

C'est là le cas des polynomes de Legendre ($q = 2$)

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2ax + a^2}} = \Sigma a^n X_n,$$

et celui des polynomes $V^{(3)}_{m,n}$ d'Hermite ($q = 3$)

$$\frac{1}{1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2} = \Sigma a^m b^n V_{m,n}$$

qui donnent

$$\iint V_{m,n}(x, y) V_{m',n'}(x, y) \, dx \, dy = 0$$

$$(m + n \gtrless m' + n'),$$

le champ d'intégration étant

$$x^2 + y^2 - 1 \leqq 0.$$

Ce serait encore le cas des polynomes suivants correspondant à $q = 4$, et $a_4 = 0$ pour que x_4 manque :

$$(1 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2)^{-\frac{3}{2}} = \Sigma a^m b^n c^p V^{(5)}_{m,n,p}(x, y, z),$$

pour lesquels

$$\int\int\int V^{(5)}_{m,n,p} V^{(5)}_{m',n',p'} dx\, dy\, dz = 0 \qquad (m + n + p \gtrless m' + n' + p'),$$

le champ d'intégration étant

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 \leq 0.$$

3° On pourrait, de même, supposer que, dans les polynomes V et V′ de la formule générale, il manque 2, 3, ... variables. Supposons, pour prendre le cas général, qu'il en manque s :

$$x_q, \quad x_{q-1}, \quad x_{q-2}, \quad \ldots, \quad x_{q-s+1},$$

s étant un entier inférieur à q.

Alors, dans la formule (51), on pourra calculer d'abord l'intégrale multiple, d'ordre s,

$$\int \frac{dx_{q-s+1}\, dx_{q-s+2} \ldots dx_q}{\sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_{q-s+1}^2 - \ldots - x_q^2}}$$

étendue au domaine

$$1 - x_1^2 - \ldots - x_{q-s+1}^2 - \ldots - x_q^2 \geqq 0,$$

c'est-à-dire, en faisant

$$\lambda^2 = 1 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_{q-s}^2,$$

$$\int \frac{dz_1\, dz_2 \ldots dz_s}{\sqrt{\lambda^2 - z_1^2 - z_2^2 - \ldots - z_s^2}}$$

étendue au domaine

$$\lambda^2 - z_1^2 - z_2^2 - \ldots - z_s^2 \geqq 0.$$

Le changement

$$z_1 = \lambda y_1, \quad z_2 = \lambda y_2, \quad \ldots, \quad z_s = \lambda y_s$$

donne immédiatement

$$\lambda^{s-1} \int \frac{dy_1\, dy_2 \ldots dy_s}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2 - \ldots - y_s^2}}$$

avec

$$1 - y_1^2 - y_2^2 - \ldots - y_s^2 \geqq 0.$$

Cette dernière intégrale a une valeur *numérique* connue N. Substituant dans la formule (51) et divisant par N, on a enfin, d'après la valeur de λ,

$$(53) \qquad \int (1 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_{q-s}^2)^{\frac{s-1}{2}} \mathrm{V}\mathrm{V}' dx_1 dx_2 \ldots dx_{q-s} = 0,$$

quand $\mathrm{M} \gtrless \mathrm{M}'$, le champ d'intégration étant

$$x_1^2 + x_2^2 - \ldots + x_{q-s}^2 - 1 \leqq 0.$$

Par exemple, prenons $q = 3$, $s = 2$, alors il ne devra subsister dans V et V' qu'une variable. La fonction génératrice sera

$$\frac{1}{1 - 2ax + a^2} = \Sigma a^n \mathrm{V}_n^{(4)}(x)$$

et l'on aura le résultat classique

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{V}_n^{(4)} \mathrm{V}_{n'}^{(4)} dx = 0$$
$$(n \gtrless n').$$

Prenons encore

$$q = 5, \qquad s = 3;$$

il subsistera deux variables; les polynomes seront définis par la fonction génératrice

$$(1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-2} = \Sigma a^m b^n \mathrm{V}_{m,n}^{(6)}.$$

On aura

$$\int\int (1 - x^2 - y^2) \mathrm{V}_{m,n}^{(6)} \mathrm{V}_{m',n'}^{(6)} dx\, dy = 0$$
$$(m + n \lesseqgtr m' + n'),$$

le domaine d'intégration étant

$$x^2 + y^2 - 1 \leqq 0.$$

Dans les mémoires que nous avons cités, Hermite adjoint aux polynomes $\mathrm{V}_{m,n}$ d'autres polynomes $\mathrm{U}_{m,n}$, qui jouent un rôle important dans la détermination des coefficients du développement d'une fonction donnée $f(x, y)$, en série de polynomes $\mathrm{V}_{m,n}$ ou $\mathrm{U}_{m,n}$.

Il y a lieu, de même, d'associer aux polynomes V, que nous venons de définir, d'autres polynomes U qui sont définis comme il suit et qui comprennent, comme cas particuliers, ceux d'Hermite et de Didon. Nous considérerons successivement les cas particuliers 1, 2, 3 envisagés au paragraphe 4.

1° *Cas général.* — Toutes les variables figurent dans les polynomes V. Posons

$$X_n = 1 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2,$$

où n est le nombre des variables. Les polynomes associés sont

$$U_{m_1, m_2, \ldots, m_q} = X_q^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_q}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \ldots \partial x_q^{m_q}} X_q^{m_1+m_2+\ldots+m_q-\frac{1}{2}}.$$

2° Supposons que, dans les polynomes V, il manque une variable x_q, de telle façon qu'ils contiennent seulement $x_1, x_2, \ldots, x_{q-1}$. Alors les polynomes associés sont

$$U_{m_1, m_2, \ldots, m_{q-1}} = \frac{\partial^{m_1+m_2\ldots+m_{q-1}}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \ldots \partial x_{q-1}^{m_{q-1}}} X_{q-1}^{m_1+m_2+\ldots+m_{q-1}}.$$

3° Supposons que, dans les polynomes V, il manque s variables $x_q, x_{q-1}, x_{q-2}, \ldots, x_{q-s+1}$, de telle façon qu'ils contiennent seulement les variables

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_p \qquad (p = q - s).$$

Alors les polynomes associés sont

$$U_{m_1, m_2, \ldots, m_p} = X_p^{\frac{1-s}{2}} \frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_p}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \ldots \partial x_p^{m_p}} X_p^{m_1+m_2+\ldots+m_p+\frac{s-1}{2}}.$$

On peut poursuivre les résultats précédents et rattacher de même les polynomes $U_{m,n}$ à la théorie du potentiel (10). Pour cela imaginons que, dans l'espace à $q+1$ dimensions, on fasse un changement d'axes de coordonnées en prenant s hyperplans rectangulaires deux à deux pour plans de coordonnées. Nous aurons alors de nouvelles coordonnées $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s$ constituant des coordonnées dans un espace à s dimensions. Soit

$$\delta_p = \frac{a_{p,1} x_1 + a_{p,2} x_2 + \ldots + a_{p,q+1} x_{q+1} + b_p}{\sqrt{a_{p,1}^2 + a_{p,2}^2 + \ldots + a_{p,q+1}^2}}$$

la distance d'un point quelconque de l'espace à $q+1$ dimensions à un des hyperplans fixes P_p, la fonction des $q+1$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{q+1}$

$$T_{q+1,s} = (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots + \delta_s^2)^{\frac{2-s}{2}},$$

où $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s$ sont les distances du même point aux s hyperplans $P_1, P_2, \ldots, P_s$, deux à deux rectangulaires, vérifie aussi l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 T}{\partial x_{q+1}^2} = 0$$

à condition que s soit un entier quelconque inférieur à $q+1$. Pour $s=2$, la fonction $T_{q+1,2}$ devient un logarithme

$$T_{q+1,2} = \log(\delta_1^2 + \delta_2^2).$$

Avec ces notations les polynomes $U_{m,n}$ d'Hermite sont des fonctions sphériques dérivées de $T_{4,3}$; les polynomes $\mathfrak{V}_{m,n}$ et $\mathfrak{V}_{m,n}$ sont des fonctions sphériques déduites de $T_{3,5}$ $T_{5,4}$. Par exemple, dans l'espace à quatre dimensions x, y, z, t, en appelant

$$\delta_1 = \frac{ax + by - 1}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \delta_2 = z, \qquad \delta_3 = t,$$

les distances d'un point quelconque aux trois hyperplans rectangulaires

$$ax + by - 1 = 0, \qquad z = 0, \qquad t = 0,$$

la fonction $T_{4,3}$ est, à un facteur constant près,

$$T_{4,3} = \frac{1}{\sqrt{(ax + by - 1)^2 + (a^2 + b^2)(z^2 + t^2)}}.$$

Si l'on développe cette fonction suivant les puissances positives de a et b, ces coefficients sont des polynomes harmoniques et homogènes dans l'espace à quatre dimensions ; sur l'hypersphère

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1,$$

ces polynomes deviennent, par l'élimination de $z^2 + t^2$, des polynomes $U_{m,n}$ d'Hermite, comme on le voit en remarquant qu'on transforme ainsi la fonction $T_{4,3}$ en la fonction génératrice des polynomes $U_{m,n}$.

XI. — Application au calcul approché des intégrales multiples.

37. Calcul approché des intégrales doubles. — On sait que Didon a été conduit à d'importants résultats en considérant des polynomes $U_{m,n}$ en x et y de degré $m+n$ tel que l'on ait

$$\int\int K(x, y)\, U_{m,n} U_{\mu,\nu}\, dx\, dy = 0, \tag{54}$$

tant que $(m-\mu)^2+(n-\nu)^2$ n'est pas nul, $K(x, y)$ étant une fonction donnée gardant un signe constant dans le champ d'intégration, qui a une forme déterminée, d'ailleurs quelconque. Certains de ces polynomes peuvent être rattachés aux fonctions hypergéométriques à deux variables. D'autre part, dans la méthode de Gauss, les polynomes de Legendre interviennent pour le calcul approché des intégrales définies simples ; on peut faire intervenir les polynomes plus généraux $P_n(x)$ caractérisés par les conditions

$$\int_a^b K(x)\, P_n(x)\, P_\nu(x)\, dx = 0,$$

quand $n-\nu$ n'est pas nul, dans le calcul approché des intégrales simples de la forme

$$\int_a^b K(x) f(x)\, dx,$$

si $K(x)$ est une fonction donnée. Les polynomes d'Hermite et plus généralement ceux de Didon, et ceux qui proviennent des séries hypergéométriques interviennent dans le calcul approché des intégrales doubles de la forme

$$\int\int K(x, y) f(x, y)\, dx\, dy, \tag{55}$$

K étant une fonction déterminée servant à la définition des polynomes. Dans un Mémoire inséré au tome IV, en 1890, dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, pages 1-20, je démontre ce qui suit. Soient K une fonction de x et y gardant un signe constant dans le champ d'intégration et $f(x, y)$ une fonction développable dans ce champ en une série de puissances entières et positives de x et y, pour évaluer approximativement l'intégrale

$$I = \int\int K f(x, y)\, dx\, dy,$$

on prend un polynome $\varphi(x, y)$ de degré p en x et y contenant

$$n = \frac{(p+1)p+2)}{2}$$

coefficients arbitraires que l'on détermine par des équations linéaires en exprimant que φ prend la même valeur que la fonction $f(x, y)$, en n points (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) situés dans le champ et n'appartenant pas à une courbe d'ordre p; la valeur approchée de l'intégrale est alors

$$I = \int\int K \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

Comme le fait Gauss dans sa méthode pour les intégrales simples, il s'agit de déterminer les points (x_i, y_i) de manière à obtenir la plus grande approximation possible au sens de Gauss. On forme les équations qui déterminent ces points : des difficultés se présentent pour déterminer ces points comme intersection de deux courbes algébriques x.

Pour des détails nous ne pouvons que renvoyer au Mémoire, à une Note de M. Bourget (22) et à la Thèse de M. Angelesco (2).

BIBLIOGRAPHIE.

1. Akimoff (Michel). — *Comptes rendus*, t. 163, 1916, p. 26; t. 165, 1917, p. 23 et 1100; t. 17 , 1924, p. 435; *Thèse* (publiée en russe), 1922.
2. Angelesco. — *Thèse*, Paris (1916).
3. Appell (P.). — Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables et sur des équations linéaires aux dérivées partielles (*Comptes rendus*, t. 90, 1880, p. 296 et 731).
4. Appell (P.). — Sur certaines formules relatives aux fonctions hypergéo métriques de deux variables (*Comptes rendus*, t. 91, 1880, p. 364).
5. Appell (P.). — Sur la série F_3 (α, α', β, β', γ, x, y) (*Comptes rendus*, t. 90, 1880, p. 977 979).

6. APPELL (P.). — *Archiv der Math. und Physik* (Grunert), t. LXVI, 1881, p. 238.

7. APPELL (P.). — Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables (*Journal de Mathématiques*, 3e série, t. VIII, 1882, p. 173-216).

8. APPELL (P.). — Sur un problème de Tisserand (*Journal de Mathématiques*, 3e série, t. X, 1884).

9. APPELL (P.). — Calcul approché des intégrales multiples (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. IV, 1890).

10. APPELL (P.). — Les polynomes $V_{m,n}$ d'Hermite et leurs analogues rattachés aux fonctions sphériques dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions (*Comptes rendus*, t. 156, 1913, p. 1423 1428).

— Les polynomes $U_{m,n}$ d'Hermite, et leurs analogues, rattachés aux fonctions sphériques dans l'hyperespace (*Comptes rendus*, t. 156, 1913, p. 1582-1585).

11. APPELL (P.). — Sur les fonctions de Fourier Bessel à plusieurs variables (*Comptes rendus*, t. 160, 1915, p. 419).

12. APPELL (P.). — *Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto*, t. XII, 1917, p. 12.

13. APPELL (P.). — *Rendiconti di Palermo*, t. XLVII, 1923, p. 151

14. APPELL (P.). — Sur l'intégration des équations différentielles de $U_{m,n}$ (*Comptes rendus*, t. 167, 1918, p. 309-315).

15. APPELL (P.). — Sur les équations linéaires simultanées aux dérivées partielles et sur des cas de réduction des formations hypergéométriques de deux variables (*Comptes rendus*, t. 167, 1918, p. 408-413).

16. APPELL (P.) et J. KAMPÉ DE FÉRIET. — Fonctions hypergéométriques à plusieurs variables, fonctions hypersphériques et polynomes d'Hermite (Paris, Gauthier-Villars, 1925).

17. APPELL (P.). — Sur des équations différentielles ordinaires liées à certains systèmes d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles (*Comptes rendus*, t. 167, p. 469); Addition, *ibid.*, p. 580).

18. APPELL et LAMBERT. — Généralisations diverses des fonctions sphériques (*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, édition française, t. II, vol. 5, fasc. 2, février 1914).

19. BARNES (E.-W.). — *Proc. London Math. Soc.*, 2e série, t. VI, 1908, p. 141-177.

20. BIRKELAND (R.). — *Comptes rendus*, t. 171, 1920, p. 1370; t. 172, 1921, p. 309 et 1155.

21. BOUQUET. — Sur l'intégration d'un système d'équations différentielles totales simultanées du premier ordre (*Bull. Sciences math.*, t. III, 1872, p. 265-274).

22. BOURGET. — *Comptes rendus*, t. 126, 1898, p. 634.

23. CAYLEY (A.). — Sur les fonctions de Laplace (*Journal de Mathématiques*, 1re série, t. XIII, 1848, p. 275 280).

— A Memoir on Prepotentials (*Phil. Trans. of the Royal Soc. of London*, vol. 165, 1875, Part II, p. 675-774).

— *Math. Papers, Cambridge University Press*, vol. I, 1889, p. 397-401; vol. IX, 1896, p. 318-423.

24. Clausen. — *Journ. reine angew. Math.*, t. III, p. 89.

25. Didon. — *Annales de l'École Normale*, 1re série, t. 5, 1868, p. 229-310; t. VI, 1869, p. 7-26; t. VII, 1870, p. 247-268; *Comptes rendus*, t. 70, 1870, p. 749.

— *Annales de l'École Normale*, 1re série, t. VII, 1870, p. 265.

26. Garnier (R.). — Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes (*Thèse*, Paris).

27. Gauss. — Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha, \beta}{\gamma, 1} x + \ldots$ (*Werke*, t. III, p. 125-162).

28. Gauss. — *Werke*, t. III, p. 207 229.

29. Giulotto (V.). — Sopra una nuova estencione delle funzioni sferiche di Legendre (*Rendiconti di Palermo*, t. XVII, 1903, p. 1-43).

30. Goursat (E.). — Sur l'équation différentielle qui admet pour intégrale la série hypergéométrique (*Thèse*, Paris; *Annales de l'École Normale*, 2e série, t. X, 1881, supplément).

31. Goursat (E.). — Sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur (*Annales de l'École Normale*, t. XII, 1883, p. 261 et 393).

32. Goursat (E.). — Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables (*Comptes rendus*, t. 95, p. 717).

33. Goursat (E.). — *Comptes rendus*, t. 95, p. 903 et 1044.

34. Green (G.). — On the Determination if the Exterior and Interior Attractions of Ellipsoids of variable Densities (*Transactions of the Cambridge Philos. Soc.*, vol. V, 1835, p. 395-430; *Math. Papers*, Paris, Hermann, 1903, p. 187).

35. Heine (E.). — Die Lameschen Functionen verschiedener Ordnung (*J. fur reine und angew. Math.*, t. LX, 1862, p. 253-303).

— Ueber einige bestimmte Integrale (*Ibid.*, t. LXI, 1863, p. 356 366).

— Die speciellen Laméschen Functionen erster Art von beliebiger Ordnung (*Ibid.*, t. LXII, 1863, p. 110-141).

36. Heine. — *Handbuch der Kugelfunctionen, Theorie und Anwendung*, 2e édition (Berlin, chez G. Reimer, 1918).

37. Hermite (Ch.). — Extrait d'une lettre à M. Borchardt (*Journal de Crelle*, t. 64, 1865, p. 294).

38. Hermite (Ch.). — Sur deux intégrales doubles (*Annales de l'École Normale*, 1re série, t. II, 1865, p. 49; *Comptes rendus*, t. 60, 1865, p. 370, 432, 512; *Œuvres de Ch. Hermite*, t. II, p. 309-346).

39. Humbert (P.). — La fonction $Wk_{\mu_1, -\nu_n}(x, x, \ldots, x)$ (*Comptes rendus*, t. 171, 1920, p. 428).

40. Humbert (P.). — The confluent hypergeometric functions of two variables (*Proc. of the royal Soc. of Edinburgh*, vol. XLI, Part I, no 9, p. 73-96).

41. Jacobi. — Untersuchungen über die differential Gleichung der Hypergeometrischen Reihe (*J. der reine angew. Math.*, t. LVI, 1859, p. 149-175).

42. Jekhowski. — Sur les fonctions de Bessel à plusieurs variables (*Comptes

rendus, t. 162, 1916, p. 318; t. 164, 1917, p. 719; *Bulletin des Sciences math.*, t. XLI, 1917, p. 58; *Bulletin astronomique*, t. XXXIV).

43. Kampé de Fériet (J.). — *Comptes rendus*, t. 157, 1913, p. 912, 1392.

44. Kampé de Fériet (J.). — Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques les plus générales (*Comptes rendus*, t. 172, 1921, p. 1634).

45. Kampé de Fériet (J.). — Sur certains systèmes associés d'équations aux différences finies et d'équations aux dérivées partielles linéaires (*Comptes rendus*, t. 173, 1921, p. 285).

46. Kampé de Fériet (J.). — Les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur à deux variables (*Comptes rendus*, t. 173, 1921, p. 401).

47. Kampé de Fériet (J.). — Quelques propriétés des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur à deux variables (*Comptes rendus*, t. 173, 1921, p. 489).

48. Kummer. — *J. reine angew. Mathematik*, t. XV, 1836, p. 39.

49. Lambert (A.). — Fonctions sphériques, exposées d'après l'article allemand de Wangerin (*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, édition française, publiée sous la direction de J. Molk, professeur à l'Université de Nancy; t. II, vol. 5, fasc. 2).

50. Lauricella (G.). — Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili (*Rendiconti di Palermo*, t. VII, 1893, p. 111-158).

51. Le Vavasseur (R.). — Sur le système d'équations aux dérivées partielles simultanées auxquelles satisfait la série hypergéométrique de deux variables $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$ (*Thèse*, Paris, 1893).

52. Liouville (Roger). — *Comptes rendus*, t. 101, 1885, p. 1134; t. 103, 1886, p. 457, 476, 520; *Journal de l'École Polytechnique*, 1887.

53. Mellin (Hj.). — Om definita integraler hvilka for obegrandsat vaksande varden af vissa heltaliga parametrar harvfa till granser Hypergeometriska funktioner af sarokilda ordningar (*Acta Soc. Scientiarum Fennicæ*, t. XX).

54. Mellin (Hj.). — Ueber die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy fur die Theorien des Gamma-und der hypergeometrischen Funktionen (*Acta Soc. Scientiarum Fennicæ*, t. XXI).

— Ueber gewisse durch bestimmte Integrale vermittelte Bezichungen zwischen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten (*Ibid.*, t. XXI).

— Ueber Hypergeometrische Reihen höherer Ordnungen (*Ibid.*, t. XXIII).

— Zur Theorie des linearen Differenzengleichungen erster Ordnung (*Acta mathematica*, t. XV).

— Ueber die Integration simultaner linearer differentialgleichungen durch bestimmte Integrale (*Acta mathematica*, t. XXII).

55. Mellin (Hj.). — Zur Theorie weier allgemeinen Klassen bestimmter Integrale (*Acta Soc. Scientiarum Fennicæ*, t. XXI).

56. Mellin (Hj.). — Ueber die Integration partieller Linearer Differentialgleichungen durch vielfache Integrale (*Acta mathematica*, t. XXII, p. 19-40).

57. Mellin (Hj.). — *Comptes rendus*, t. 172, 1921, p. 658.

58. Pérès (J.). — Sur les fonctions de Fourier-Bessel à plusieurs variables (*Comptes rendus*, t. 161, 1915, p. 168).

59. Picard (E.). — Sur une extension aux fonctions de deux variables, du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques (*Comptes rendus*, t. 90, 1880, p. 1119-1267).

60. Picard (E.). — Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques (*Annales de l'École Normale*, 2e série, t. X, 1881).

61. Picard (E.). — Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables (*Annales de l'École Normale*, 2e série, t. II, 1881, p. 381).

62. Picard (E.). — Sur des fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaires (*Acta mathematica*, t. II, 1883, p. 114-135).

63. Picard (E.). — Sur les groupes de certaines équations différentielles linéaires (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. IX, 1885, p. 202-209).

64. Picard (E.). — Traité d'Analyse (Gauthier-Villars, Paris).

65. Pincherle (S.). — *Rendic. Acad. Lincei*, 4e série, t. IV, 1888, p. 694-700.

66. Pincherle (S.). — *Giornale di Matematiche*, t. XXXII, 1884.

67. Pochammer. — Ueber hypergeometrischen Funktionen hoheren ordnungen (*J. reine angew. Mathematik*, t. LXXI, 1870, p. 216).

68. Whittaker (E.-T.) and G. N. Watson. — Modern Analysis (Cambridge, University Press), 3e édition.

69. Appell (P.). — Sur une équation différentielle linéaire aux dérivées partielles qui se rattache aux fonctions hypergéométriques (*Rendiconti di Palermo*, t. 48, 1924).

70. P. Humbert. — Sur les fonctions hypersphériques zonales (*Comptes rendus*, t. 180, 1925, p. 723-725).

TABLE DES MATIÈRES.

X. — POLYNOMES D'HERMITE ET ANALOGUES. POTENTIELS.

XI. — APPLICATION AU CALCUL APPROCHÉ DES INTÉGRALES MULTIPLES.