

JEAN PETITOT

YANNICK TONDUT

Vers une neurogéométrie. Fibrations corticales, structures de contact et contours subjectifs modaux

Mathématiques et sciences humaines, tome 145 (1999), p. 5-101

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1999__145__5_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**VERS UNE NEUROGÉOMÉTRIE.
FIBRATIONS CORTICALES, STRUCTURES DE CONTACT
ET CONTOURS SUBJECTIFS MODAUX**

Jean PETITOT*, Yannick TONDUT†

RÉSUMÉ — *Ce travail propose certains modèles variationnels pour les processus corticaux d'intégration des contours subjectifs modaux (de type contours illusoires à la Kanizsa), modèles fondés sur les concepts géométriques de fibration et de structure de contact.*

La structure rétinotopique des hypercolonnes d'orientation de l'aire V_1 (telle qu'elle est décrite depuis les travaux pionniers de Hubel, Wiesel et Mountcastle) est une architecture fonctionnelle qui peut être mathématiquement idéalisée par la fibration $\pi : E \rightarrow M$ ayant pour base le plan M de la rétine et pour fibre F la droite projective \mathbb{P}^1 des directions du plan, l'espace total E de π étant isomorphe au produit direct $M \times F$. Au-dessus de chaque position rétinienne se trouve implémenté un exemplaire (discrétisé) de F . Les connexions horizontales cortico-corticales implémentent ce que l'on appelle la trivialité locale de cette fibration et sans doute également une connexion (au sens d'Elie Cartan) définissant un transport parallèle.

Après avoir rappelé ces données, le papier se focalise sur l'interprétation géométrique des résultats de Field, Hayes et Hess sur le champ d'association. Ces travaux semblent montrer que ce que l'on appelle en géométrie symplectique la structure de contact de la fibration $\pi : E \rightarrow M$ se trouve neuralemement implémenté. Le champ d'association correspond dans ce cadre à une condition d'intégrabilité des courbes dans E : elles doivent être les relevées de leur projection sur le plan rétinien M .

Ce modèle d'une fibration munie d'une structure de contact naturelle est ensuite appliqué à l'interprétation des contours subjectifs modaux et conduit à des variantes du modèle dit de l'elastica développé par B.K.P. Horn et D. Mumford. L'idée est que les contours subjectifs modaux ont des relevées qui sont "géodésiques" dans le fibré cortical

*CAMS, EHESS et CREA, École Polytechnique; petitot@ehess.fr; <http://www.ehess.fr/centres/-cams/person/petitot.html>. Cet article complète un travail d'Octobre 1997.

†École Polytechnique et Direction de l'Équipement.

E , c'est-à-dire de longueur minimale (pour une métrique appropriée) dans la classe des courbes satisfaisant la condition d'intégrabilité.

Les modèles "géodésiques" sont ensuite reformulés, à la suite de R. Bryant et P. Griffiths, dans un cadre géométrique plus fondamental, celui des groupes de Lie et du repère mobile d'Elie Cartan.

Quelques possibilités de test expérimentaux sont enfin considérées.

MOTS CLÉS — *Champ d'association, Condition d'intégrabilité, Contours subjectifs, Elastica, Equations d'Euler-Lagrange, Fibration, Géodésique, Groupe de Lie, Modèles variationnels, Repère mobile, Structure de contact.*

SUMMARY — *This work presents some variational models for the cortical algorithms processing Kanizsa modal subjective contours. These models are based on the geometric concepts of fibration and contact structure.*

The retinoptic structure of the orientation hypercolumns in the visual area V_1 is a functional architecture which can be mathematically idealized by the fibration $\pi : E \rightarrow M$ having the retinian plane M as base and the projective line \mathbb{P}^1 as fiber F . The total space E of π is isomorphic to the direct product $M \times F$. The cortico-cortical horizontal connections implement what is called the local triviality of this fibration, and also a Cartan connection defining a parallel transport between neighboring fibers.

Then, the paper focuses on the geometrical interpretation of the results of Field, Hayes and Hess concerning the association field. It shows that the latter implements what is called the contact structure of the fibration $\pi : E \rightarrow M$. The association field expresses an integrability condition for the skew curves in E : they have to be a lifting of their projection on the retinian plane M .

This model of a fibration endowed with a contact structure is then applied to the modal subjective contours and provides a variant of the elastica model developed by B.K.P. Horn and D. Mumford. The key idea is that the lifting of subjective contours satisfy a "geodesic" condition in the cortical fibration E : they have to be of minimal length (for an appropriate metrics) among the class of curves satisfying the integrability condition.

These "geodesic" models are then reformulated, according to R. Bryant and P. Griffiths, in the more fundamental geometric framework of Lie groups and Cartan's "repère mobile" (Vielbein).

Finally, some experimental possibilities are suggested.

KEY WORDS — *Association field, Contact structure, Elastica, Euler-Lagrange equations, Fibration, Geodesic, Integrability condition, Lie Groups, Subjective contours, Variational models, Vielbein.*

Table des Matières

1	Introduction	11
2	Le problème de la complétion	11
2.1	La place de la complétion dans le système visuel	11
2.2	Complétion modale <i>VS</i> complétion amodale	12
2.2.1	Définitions	12
2.2.2	La question des mécanismes de complétion	12
2.2.3	Comparaison des deux types de complétion	14
2.3	Quelques données expérimentales	14
2.3.1	Quelques résultats psychophysiques	14
2.3.2	La découverte de corrélats corticaux de bas niveau dans <i>V2</i> . . .	15
2.3.3	Réponses dans <i>V1</i>	17
2.3.4	La localisation problématique des contours subjectifs modaux . .	19
3	Quelques modèles de formation des contours subjectifs	20
3.1	Deux perspectives opposées	20
3.2	L'insuffisance des modèles	20
3.3	Deux modèles plausibles	23
3.4	Modèles de contours virtuels à base d'interactions locales	24
4	Le champ d'association et l'intégration des contours réels	25
4.1	Les expériences cruciales de Field, Hayes et Hess	25
4.2	Interprétation théorique des expériences	28
5	Structure de contact et intégrations des contours	31
5.1	Le fibré de contact et les hypercolonnes du cortex visuel primaire	31
5.1.1	Définition du fibré de contact	31
5.1.2	Confirmations neurophysiologiques : rétinotopie et connexions horizontales cortico-corticales	32
5.1.3	Différences entre la neurophysiologie et l'idéalisation géométrique	37
5.1.4	Fibré de contact et espace des 1-jets	38
5.2	La structure de contact	39
5.3	La condition d'intégrabilité de Frobenius	44
5.4	Symplectisation de la structure de contact de J^1M	45
5.5	Structures de contact et vision	46
6	Le champ d'association comme implémentation de la structure de con- tact	47
6.1	La géométrisation des expériences de Field, Hayes et Hess	47
6.2	Condition d'intégrabilité, synchronisation et binding	48
6.3	Du champ d'association à la forme globale des contours subjectifs	48
6.3.1	Des contours réels aux contours subjectifs	48

6.3.2	Du local au global	51
7	La forme globale des contours subjectifs	52
7.1	Les travaux pionniers de Shimon Ullman	52
7.2	Modèles variationnels	53
7.3	Remarques sur les modèles variationnels	55
7.3.1	Remarque épistémologique	55
7.3.2	Remarque méthodologique	55
7.4	Mécanisme local et <i>elasticae</i>	56
7.5	La théorie des <i>elasticae</i> de David Mumford	57
7.6	Intérêt des <i>elasticae</i>	59
7.7	D'autres mécanismes de formation des contours	59
8	Contours subjectifs et fibrés de contact	60
8.1	Des <i>elasticae</i> à l'optimalité dans l'espace des jets	60
8.2	Les "géodésiques legendriennes" dans le fibré de contact	61
8.2.1	Les équations d'Euler-Lagrange et leur intégration au moyen d'intégrales elliptiques	61
8.2.2	Intégration numérique dans le cas symétrique	64
8.2.3	Equation différentielle sur la courbure	66
8.3	Les équations d'Euler-Lagrange en termes de longueur d'arc	67
8.4	Le modèle du fibré en cercles	69
8.5	Les courbes de moindre énergie	72
8.6	Comparaison avec les <i>elasticae</i>	73
9	Modèles "géodésiques" et groupes de Lie	75
9.1	Groupes de Lie, perception et kinesthésie	75
9.2	Les repères mobiles d'Elie Cartan et le fibré principal du groupe des déplacements	75
9.3	Les représentations adjointe et co-adjointe	77
9.3.1	L'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G	78
9.3.2	Translations, changements de repère et automorphismes intérieurs	78
9.3.3	La représentation adjointe	80
9.3.4	Les orbites de la représentation adjointe	81
9.3.5	La représentation co-adjointe	81
9.3.6	Les orbites de la représentation co-adjointe	82
9.4	Le formalisme d'Elie Cartan	82
9.4.1	La forme de Maurer-Cartan	82
9.4.2	Les équations de Maurer-Cartan	84
9.5	Les problèmes variationnels sur le groupe affine des déplacements du plan d'après Bryant et Griffiths	85
9.5.1	Le système de Pfaff des relevées de Frénet dans le fibré principal G	85
9.5.2	La fonctionnelle du problème variationnel	87

9.5.3	Les équations d'Euler-Lagrange	88
9.5.4	L'interprétation géométrique des équations d'Euler-Lagrange . .	90
9.5.5	Retour sur les modèles du fibré en cercle et des <i>elasticae</i>	92
10	Conclusion	93
	Bibliographie	97

1 Introduction

Il est connu depuis longtemps que le système visuel possède la faculté d'extrapoler certains contours à partir de données rétiniennes incomplètes. Il le fait en respectant certaines règles de continuité et de lissité déjà décrites au début de ce siècle, comme d'autres phénomènes de perception des contours, par la loi gestaltiste dite de "bonne continuation". Dans un article précédent (Tondut, Petitot 1997), nous nous sommes intéressés à certains travaux psychophysiques et neurophysiologiques récents confirmant cette loi au moyen d'interactions locales entre les éléments locaux orientés d'une scène visuelle. Nous avons proposé un modèle *géométrique* de ces interactions locales afin de rendre compte de l'intégration d'éléments distribués le long d'un même contour. Nous faisons ici l'hypothèse que le même type d'interactions locales est capable, dans certaines conditions, d'engendrer un contour subjectif entre deux extrémités séparées par un gap. Nous proposons un modèle *variationnel* associé à ce processus de filling-in, modèle qui nous permet de préciser les équations qui régissent la forme de tels contours virtuels.

Nous commençons par définir les différents types de complétion de contours, puis nous présentons certaines des données expérimentales disponibles. Nous montrons que l'on peut traiter la question de la complétion comme un problème géométrique que le système visuel doit résoudre, ce qui nous permet, après les avoir rappelés, d'exploiter certains des résultats établis dans l'article cité ci-dessus. Nous mettons en perspective dans ce cadre géométrique différents modèles de contours subjectifs.

2 Le problème de la complétion

2.1 La place de la complétion dans le système visuel

Bien souvent, les données sensorielles concernant les objets sont incomplètes. Ainsi, dans le domaine visuel, lorsque les trois dimensions du monde sont projetées sur les deux dimensions de la rétine, un grand nombre de contours et de surfaces sont entièrement ou partiellement perdus parce qu'ils sont masqués par des objets plus proches. Cependant, il est capital de pouvoir identifier les objets. La perception nécessite par conséquent une capacité à compléter l'information lacunaire des données sensorielles. Ce processus fait intervenir, selon les cas, des niveaux très différents dans l'appareil de perception et de catégorisation, et il est souvent difficile de les démêler.

Cependant, dans certains cas, l'effectuation spontanée de cette complétion manifeste l'intervention de processus automatiques, a priori d'assez bas niveau. C'est le cas des contours appelés "illusoires", qui sont dépourvus de contrepartie objective (bord de contraste). Ce phénomène central ne résulte pas d'un dysfonctionnement : ces contours ne sont pas formés autrement que les autres. Tous les percepts sont des constructions du système visuel structurant globalement la scène visuelle à partir des données sensorielles, et non le simple reflet des propriétés locales de celles-ci. Les propriétés de large intégration spatiale des neurones, dès l'aire V1, en témoignent.

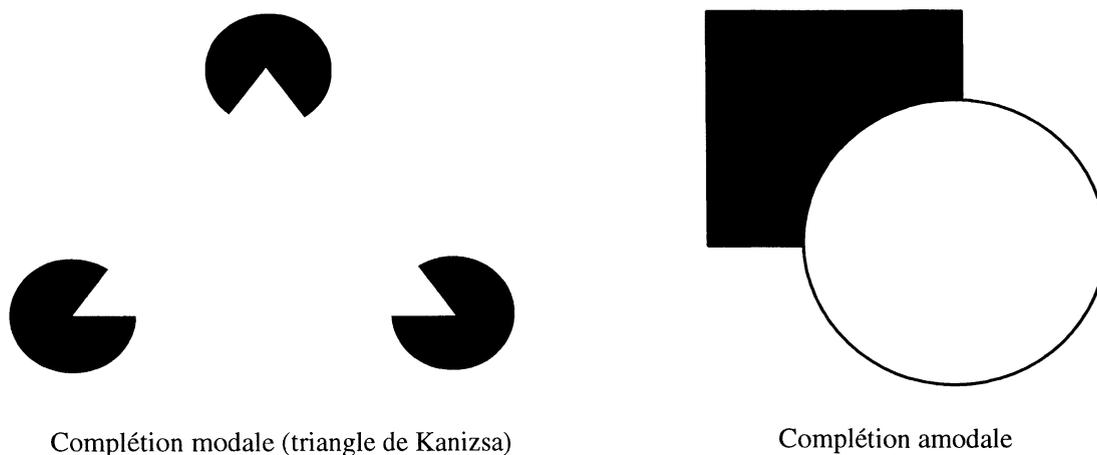


Figure 1: Contours subjectifs modaux et amodaux.

2.2 Complétion modale VS complétion amodale

2.2.1 Définitions

En psychophysique, tous les contours extrapolés ou complétés par le sujet en l'absence de différence de contraste objective sont appelés subjectifs ou "anomaux". On distingue alors parmi ces contours (cf. figure 1) :

- Ceux qui sont effectivement perçus : le sujet voit une différence de contraste. Ces contours illusoires sont également appelés *modaux*. Ils s'accompagnent en général de la perception d'une brillance accrue de l'une des surfaces délimitées par le contour.¹
- Ceux qui sont seulement conçus et imaginés : le sujet ne perçoit pas de différence de contraste mais il extrapole mentalement le contour. C'est le cas en général lors de l'occlusion (ou masquage) d'un objet par un autre. On parle alors de contours *amodaux*.

2.2.2 La question des mécanismes de complétion

Une question importante est de savoir si ces deux types de contours illusoires doivent être considérés comme résultant ou non des mêmes mécanismes. S'ils résultent vraisemblablement de processus de bas niveau (la physiologie ayant tranché en partie, comme

¹Le rapport des deux phénomènes de contraste et de surbrillance n'est pas complètement élucidé, mais il semble qu'ils résultent de processus distincts (voir Dresch et Bonnet 1993, et la dualité "Boundary Contour System / Featural Contour System" chez Grossberg et Mingolla 1985a, b, 1987). Dans ce qui suit, nous nous concentrons sur les contours eux-mêmes, sans nous préoccuper du phénomène de "surbrillance".

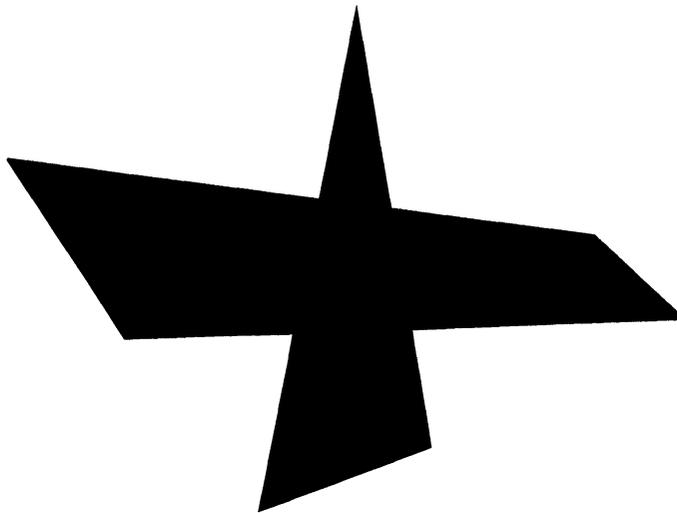


Figure 2: Un exemple de figure à scission spontanée.

nous le verrons, le débat entre les psychologues), les contours amodaux peuvent néanmoins apparaître comme étant plus “cognitifs” : leur perception n’est pas aussi nécessaire et automatique que celle des contours modaux, leur forme n’est pas bien définie et leur extrapolation requiert en général des connaissances préalables sur le monde.

Cependant, il semble plutôt y avoir continuité que rupture entre complétions modale et amodale (voir les expériences de Shipley et Kellman 1992a), ce qui a amené plusieurs spécialistes à les traiter comme un seul et même phénomène (Finkel et Edelman 1989, Peterhans et von der Heydt 1991). Un argument assez convaincant est donné par Kellman et Shipley (1991) à travers un exemple qui semble intermédiaire entre les deux modes de complétion, celui des *figures à scission spontanée*. Bien que leur surface soit homogène, elle tend à être perçue comme composée de deux éléments distincts : le premier est vu comme placé au-dessus de l’autre, et complété de façon modale ; le second est également vu comme un objet unitaire mais la partie cachée n’est complétée que de façon amodale. Cependant, après quelques dizaines de seconde de fixation, les positions s’inversent : le second objet est alors complété modalement et le premier amodalement. A partir de ce moment, le basculement se produit régulièrement (voir figure 2).

Certes, l’attention joue certainement un rôle majeur dans ce phénomène, rôle qui reste à élucider. Il n’empêche que la facilité avec laquelle se produisent les transitions d’un mode de complétion à l’autre plaide en faveur d’une proximité de leurs mécanismes, au moins dans les contextes géométriques simples. Ce sera le cas par la suite, de sorte que nous considérerons désormais un seul phénomène de complétion des contours, sans trop nous préoccuper de ce qui rend certains modaux et d’autres amodaux.²

²Selon Kellman et Shipley, c’est la façon dont le sujet ordonne les différentes surfaces selon la profondeur qui décide de leur mode de complétion. Nous ne développerons pas ce point.

2.2.3 Comparaison des deux types de complétion

Le rapprochement des deux types de complétion peut sembler un risque superflu : les contours illusoires modaux constituent à eux seuls un domaine de recherche important et bien délimité en psychophysique et, depuis peu, en neurophysiologie. Cependant, les travaux effectués par les spécialistes de la vision artificielle peuvent aider notre compréhension de la vision naturelle. Or la reconstruction des contours sous occlusion est un problème fondamental en vision computationnelle. La comparaison peut donc s'avérer fructueuse entre les modèles de calcul et de construction artificielle des contours masqués et les données expérimentales concernant les contours modaux.

Toutefois, bien qu'elle ait donné lieu à de remarquables modèles mathématiques comme celui de David Mumford (cf. section 7.5), la complétion amodale n'a pas, à notre connaissance, fait l'objet d'études psychophysiques récentes (alors qu'elle tient pourtant une place importante dans les travaux de Kanizsa). Il est vrai qu'il paraît difficile de mesurer les caractéristiques de contours qui ne sont pas effectivement vus. En l'absence de données venant des psychologues, ceux qui, dans le domaine de la vision artificielle, se sont efforcés de modéliser ces contours extrapolés (le premier étant Ullman en 1976, cf. section 7.1), ont dû se contenter d'heuristiques, faisant généralement intervenir des conditions de continuité et de faible courbure. Voyons dans quelle mesure ces critères sont psychologiquement et physiologiquement pertinents.

2.3 Quelques données expérimentales

2.3.1 Quelques résultats psychophysiques

L'influence des divers paramètres contrôlant la formation des contours illusoires a été peu explorée jusqu'à la fin des années 80, comme le déplorent Petry et Gannon (1987). Certains auteurs ont ensuite entrepris de combler cette lacune, mais les résultats disponibles aujourd'hui ne sont pas très nombreux, comme en témoignent des panoramas plus récents (Peterhans et von der Heydt 1991, Spillman et Dresch 1995). Ainsi une question aussi essentielle que celle de l'influence de la longueur des bords inducteurs et des vides à combler sur la netteté du contour reste controversée (Kellman et Shipley 1991, Shipley et Kellman 1992b, Spillman et Dresch 1995).

Dresp (1993), Dresp et Bonnet (1991, 1993, 1995) et Dresp et Grossberg (1997) ont rapproché le phénomène de formation des contours illusoires de la modification des seuils dans les tâches de détection de cible. Ainsi, un segment de droite dont le contraste est sous-liminaire peut devenir détectable lorsqu'il est situé sur un contour illusoire, le contour devenant lui-même plus visible (Dresp et Bonnet 1995). Ces effets de sommation, ainsi que d'autres résultats, montrent que contours réels et illusoires ont des mécanismes neuronaux en commun et qu'ils sont fonctionnellement en partie équivalents. Une variation du seuil de détection est également observée avec une cible ponctuelle, et survient même en présence d'un unique bord inducteur, aucun contour illusoire n'étant alors perçu (Dresp et Bonnet 1993). Nous reviendrons en conclusion sur l'importance expérimentale de cette méthode de "subthreshold summation".

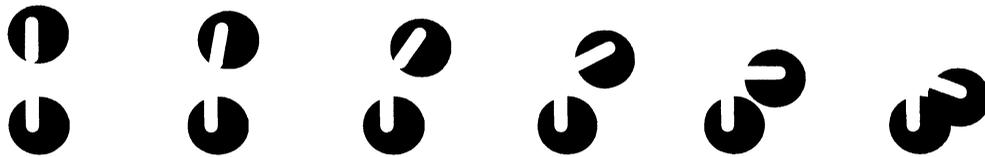


Figure 3: Apparition d'un contour illusoire en fonction de l'écart angulaire entre les bords inducteurs. (D'après Kellman et Shipley 1991, p. 180).

Malheureusement, très peu d'études ont porté sur les contours subjectifs *courbes*. Bien qu'ils soient effectivement perçus (Kanizsa 1979), peu de modèles ont la possibilité de les traiter (cf. Spillman et Dresp 1995). Signalons toutefois que Kellman et Shipley (1991) ont étudié l'apparition d'un contour illusoire en fonction de l'écart angulaire entre les bords inducteurs (figure 3). Un contour modal est observé jusqu'à des écarts angulaires de l'ordre de 90 degrés.

Pourtant, comme nous allons le voir en détail, le type *exact* de courbes qui peuvent réaliser des contours subjectifs modaux *fournit un indice de premier ordre sur les mécanismes neuronaux d'intégration* des contours.³

2.3.2 La découverte de corrélats corticaux de bas niveau dans V2

Si les contours illusoires ont toujours fasciné les psychophysiciens, pendant longtemps aucun résultat physiologique n'est venu appuyer ou infirmer leurs hypothèses. Ce n'est qu'au milieu des années 80 qu'une équipe suisse de Zürich (Rüdiger von der Heydt et Esther Peterhans) établissait un parallèle entre des réponses neuronales dans l'aire V2 du singe et les phénomènes perceptuels chez l'homme : certains neurones (un tiers de l'échantillon testé) déchargeaient lorsque leur champ récepteur contenait un fragment de contour illusoire. En revanche, les auteurs ne relevaient aucune réponse de ce type dans V1.

Dans V2, l'intensité de la décharge est en général moindre qu'avec un contour réel, mais la sélectivité spatiale et orientationnelle est identique. De plus, la décharge s'atténue avec la largeur du vide à compléter, et disparaît pratiquement lorsque l'un des deux bords inducteurs est supprimé ou que l'on ajoute des barres de terminaison, même très étroites (figure 4⁴). Ces résultats sont donc très proches des observations psychophysiques, mais ne peuvent s'expliquer par les propriétés élémentaires des neurones.

Ces auteurs ont ensuite procédé à des expériences complémentaires (von der Heydt et Peterhans 1989a, Peterhans et von der Heydt 1989). Ils ont constaté une assez grande variété dans les réponses des neurones de V2 aux contours illusoires : certains déchargent, d'autres non, la plupart moins qu'avec un contour réel, mais certains davantage, la

³Dans ce travail nous prenons "intégration" au sens mathématique : passage du local (et même de l'infinitésimal) au global lorsqu'on intègre une équation différentielle.

⁴Par défaut, les sous-figures d'une figure sont numérotées (a), (b), etc., dans le sens conventionnel de la lecture.

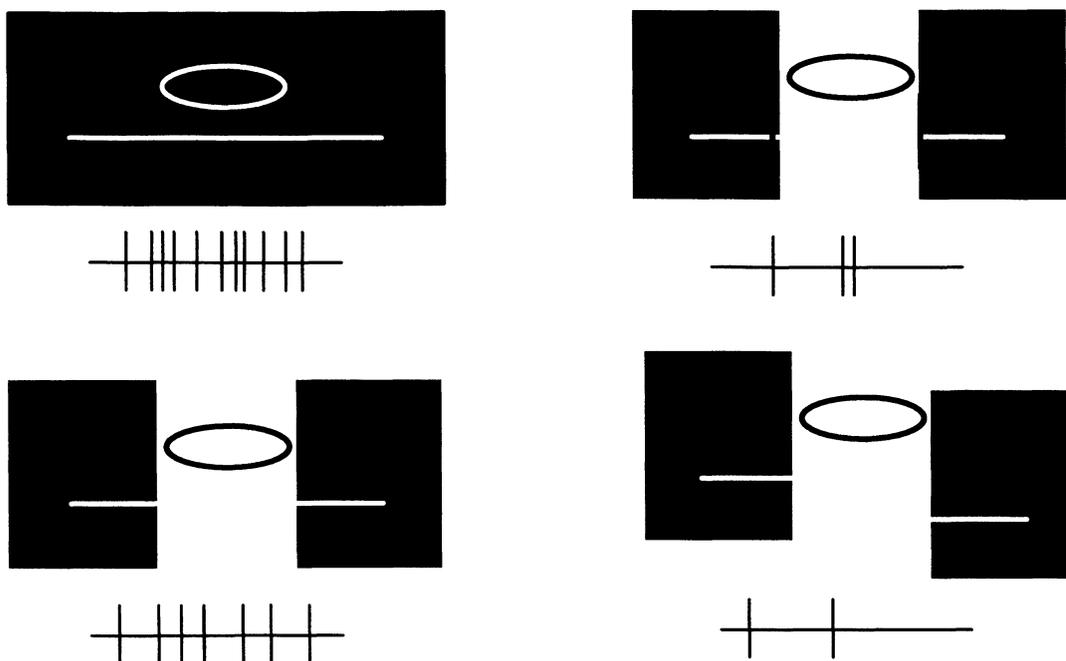


Figure 4: Réponse aux contours illusoires d'un neurone de V2. L'ellipse représente le champ récepteur du neurone. (a) Le neurone répond lorsqu'une barre traverse son champ récepteur. (b) Il répond très peu à un contour virtuel lorsque les deux segments inducteurs ont des barres de terminaison. (c) Il répond correctement à un contour virtuel. (d) Il ne répond presque plus lorsque les segments inducteurs sont incohérents. (D'après von der Heydt et al. 1984).

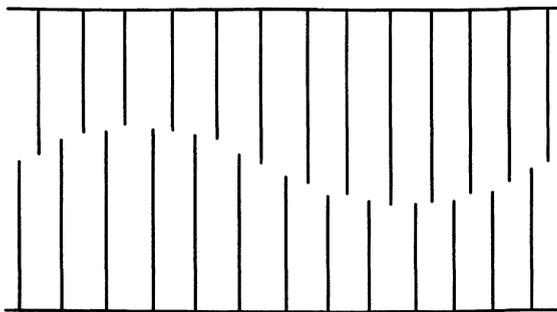


Figure 5: Un contour illusoire dessiné par des extrémités de lignes.

majorité avec la même préférence orientationnelle, mais d'autres avec un déplacement de leur courbe de réponse, etc. Ils ont observé ces résultats tant avec des figures "à bords" du type Kanizsa qu'avec des contours "à terminaisons" (dessinés par des extrémités de lignes, figure 5). En revanche, ils n'ont observé aucune réponse significative dans l'aire *V1* (cf. figures 6 et 7).

Les caractéristiques des réponses neuronales dans *V2* ne peuvent s'expliquer par les modèles classiques des neurones corticaux et de leurs connexions : ni la sommation au sein d'un même champ récepteur (les bords inducteurs sont nettement en dehors des champs récepteurs concernés), ni la sommation linéaire d'entrées synaptiques (la réponse à l'ensemble des deux bords inducteurs est supérieure à la somme des réponses obtenues pour chacun d'eux), ni même la sommation linéaire avec seuil. C'est pourquoi les auteurs proposent un mécanisme neuronal non-linéaire pour la génération des contours illusoires. Nous reviendrons plus loin (section 3.3) sur ce modèle, qui rend compte des résultats obtenus avec les deux types de figures.

2.3.3 Réponses dans *V1*

Quelques années plus tard, une autre équipe reportait avoir observé des réponses de neurones de *V1* à des contours illusoires (Grosf et al. 1993). Cependant, le type particulier des stimuli utilisés ne permettait pas de généraliser (Davis et Driver 1994). Par ailleurs, les techniques d'imagerie cérébrale ont révélé une activité spécifiquement liée aux contours illusoires dans *V2*, mais rien d'aussi clair dans *V1* (Hirsch et al. 1995). En revanche, on a mis en évidence dès *V1* des corrélats de phénomènes qui semblent apparentés, comme la ségrégation des textures ou la perception d'un contour à partir de points en mouvement (Lamme et al. 1993). Il est donc difficile de conclure sur le stade cortical à partir duquel s'effectue la généralisation qui donne naissance aux contours illusoires.

Un élément de réponse se trouve dans une étude récente comparant systématiquement les réponses aux contours réels et illusoires dans les aires *V1* et *V2* du chat, à l'aide de techniques optiques (Sheth et al. 1996). Des réponses aux contours illusoires ("à terminaisons") ont été observées dans les deux aires. Qui plus est, lorsque l'on calcule

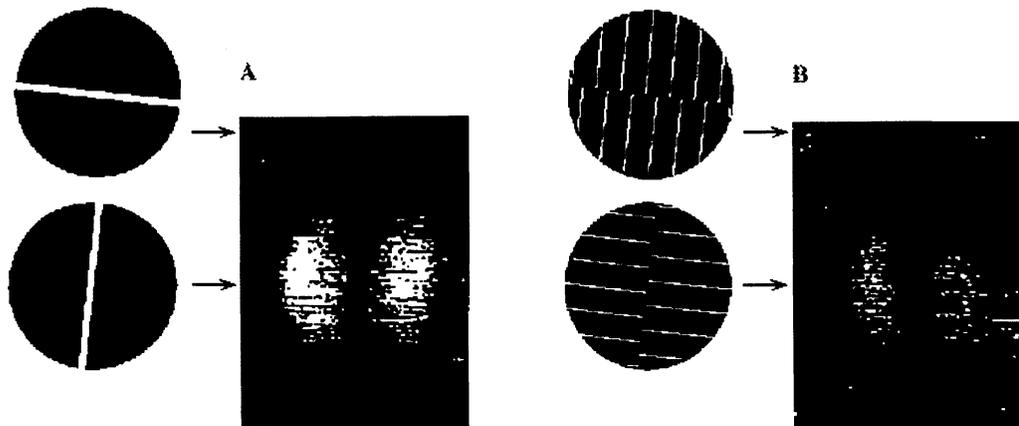


Figure 6: Dans cette figure et la suivante les 2 disques représentent le stimulus (barre ou grille) avec une orientation de 0° et 90° . Les lignes des fenêtres de résultats représentent les réponses du neurone (temps sur l'axe des abscisses) au stimulus tourné progressivement d'un angle variant de 0° à 180° (axe des ordonnées). On voit qu'un neurone de V2 peut répondre au contour virtuel créé par les terminaisons des traits de la grille si celui-ci correspond à son orientation préférentielle (B). Il y répond presque aussi bien qu'à une barre réelle (A). En revanche il ne répond pas à un contour virtuel orthogonal à son orientation. Cela implique qu'il ne répond pas non plus aux traits constituant la grille, qui correspondent pourtant à son orientation préférentielle. (D'après von der Heydt, Peterhans, 1989).

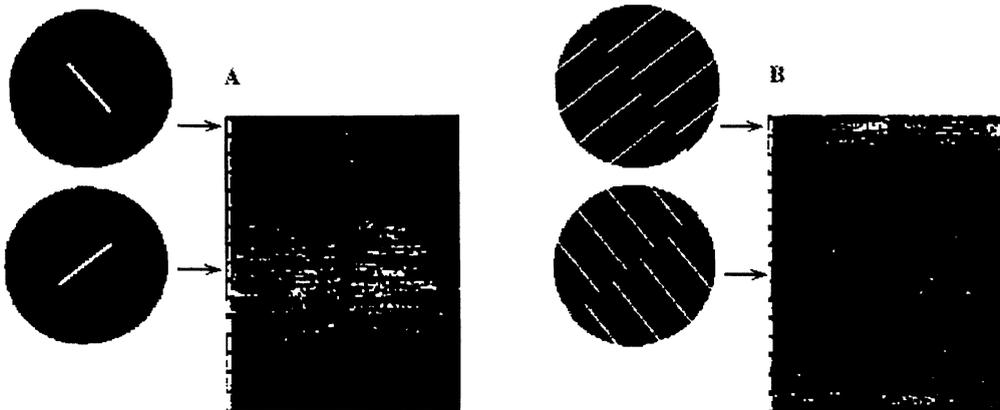


Figure 7: Dans l'aire V1 les neurones ne répondent qu'à l'orientation réelle des traits de la grille et non pas au contour virtuel créé par leurs terminaisons. (D'après von der Heydt, Peterhans, 1989).

la différence entre les orientations préférées par les neurones respectivement pour les contours réels et pour les contours illusoires, on constate que cette différence est cartographiée de façon continue et systématique dans V1 comme dans V2. La différence entre V1 et V2 réside dans la proportion supérieure de neurones de V2 répondant aux contours illusoires (60% contre 42%) et dans le fait que la réponse des neurones de V1 aux contours subjectifs est souvent masquée par leur réponse aux lignes inductrices, alors que celle des neurones de V2 est plus "pure". C'est un tel *masquage* qui expliquerait que les réponses dans V1 n'aient pas été précédemment observées. Il est par conséquent justifié de s'interroger d'abord sur V1 et de voir comment ce que l'on sait de son architecture fonctionnelle peut permettre de comprendre les mécanismes d'intégration (toujours au sens mathématique) en jeu.

2.3.4 La localisation problématique des contours subjectifs modaux

L'exploration du traitement des contours subjectifs dans le cortex visuel n'en est qu'à ses débuts (l'article pionnier de Von der Heydt, Peterhans et Baumgartner, dans V2, date de 1984). Cependant, les résultats convergent pour indiquer que ce traitement commence à un niveau assez précoce, ce qui contredit la théorie des contours "cognitifs". Il ne faut évidemment pas exclure l'effet d'une information "redescendant" des aires associatives vers les aires secondaires et primaires. Cependant, l'hypothèse la plus plausible, ainsi que le suggèrent Sheth et ses collaborateurs (1996), est celle d'une élaboration progressive de ces contours, débutant dès l'aire V1 et s'affinant ensuite pour aboutir à une représentation sans ambiguïté dans les aires ultérieures. Leurs résultats restent cependant à confirmer, et éventuellement à étendre aux contours subjectifs de type Kanizsa.

Si cette conception est exacte, ainsi que nous le supposerons par la suite, le mécanisme de génération des contours illusoires est vraisemblablement local. Mais il l'est dans un sens particulier. Il ne s'agit plus, comme par exemple dans le cas de la rétine, d'un niveau local d'analyse du signal de type ondelettes effectué par convolution du signal avec des profils récepteurs appropriés (de type dérivées de gaussiennes comme les laplaciens de D. Marr). Il s'agit d'un niveau *structural* de passage du local au global par intégration (toujours au sens mathématique). Nous devons pouvoir en rendre compte à partir des propriétés des neurones de $V1$ et de $V2$ et de leurs connexions. Nous proposerons des mécanismes pour $V1$, mais ils peuvent aussi bien être implémentés dans $V2$.

3 Quelques modèles de formation des contours subjectifs

3.1 Deux perspectives opposées

La plupart des modèles de formation des contours illusoires dans le système visuel s'inspirent des deux modèles les plus anciens (Grossberg et Mingolla 1985a, 1985b, 1987, von der Heydt et Peterhans 1989a). Or ceux-ci sont caractérisés par des principes opposés.

Pour le premier modèle, le contour illusoire prototypique est du type Kanizsa, et il est formé par interaction entre des bords (approximativement) colinéaires, le contour étant engendré dans leur direction commune. Pour expliquer les contours produits par des extrémités de ligne, Grossberg et Mingolla supposent que ces terminaisons induisent un bord élémentaire perpendiculaire à la ligne, ces éléments induits pouvant alors coopérer, entre eux et avec les bords réels. Il n'est pas besoin de discontinuités pour enclencher ce processus, car le phénomène des contours illusoires résulte des mécanismes "normaux" d'intégration des contours réels et de regroupement perceptif ("grouping"), plutôt que d'un processus général de prolongation sous occlusion.

A l'inverse, pour von der Heydt et Peterhans, ainsi que pour ceux qui s'inspirent de leur modèle (Finkel et Edelman 1989, Kellman et Shipley 1991), les contours illusoires résultent de l'interaction entre des *détecteurs de discontinuité* (cellules "end-stopped" ou à accord de distance, voir Heitger et al. 1992), et sont formés perpendiculairement à l'orientation des bords (figure 8). Les contours qui prolongent les bords sont alors un cas particulier de ce mécanisme (Peterhans et von der Heydt 1989).

3.2 L'insuffisance des modèles

Leshner et Mingolla (1993) se sont efforcés de comparer les deux familles de mécanismes. Ils ont présenté à des sujets des figures comportant des lignes (de nombre et de largeur variables) induisant un contour illusoire, capables de solliciter les deux types de

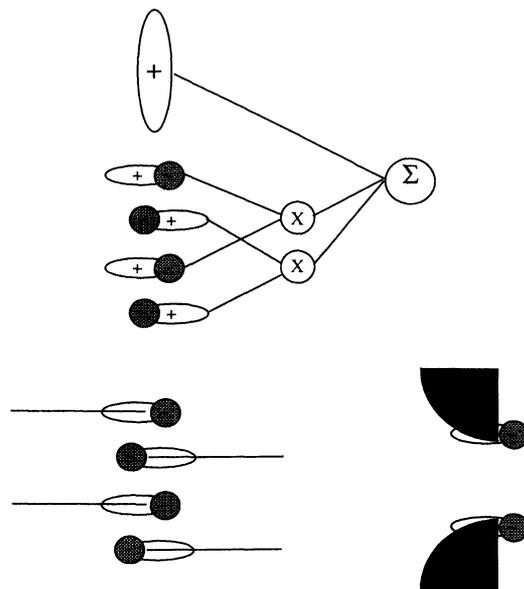


Figure 8: Le mécanisme de formation des contours illusoires de Peterhans et von der Heydt : les cellules à accord de distance détectent les discontinuités. Les réponses obtenues sont multipliées, par couples de cellules parallèles (ceci modélise la non-linéarité du processus) et les résultats de tous les couples sont sommés le long de la direction perpendiculaire commune. Les éventuels contours réels viennent s'y ajouter. La cellule détectrice du contour (notée sigma) décharge si la somme totale atteint ou dépasse son seuil. Ce mécanisme s'applique aussi bien aux contours "à terminaisons" qu'aux contours "à bords".

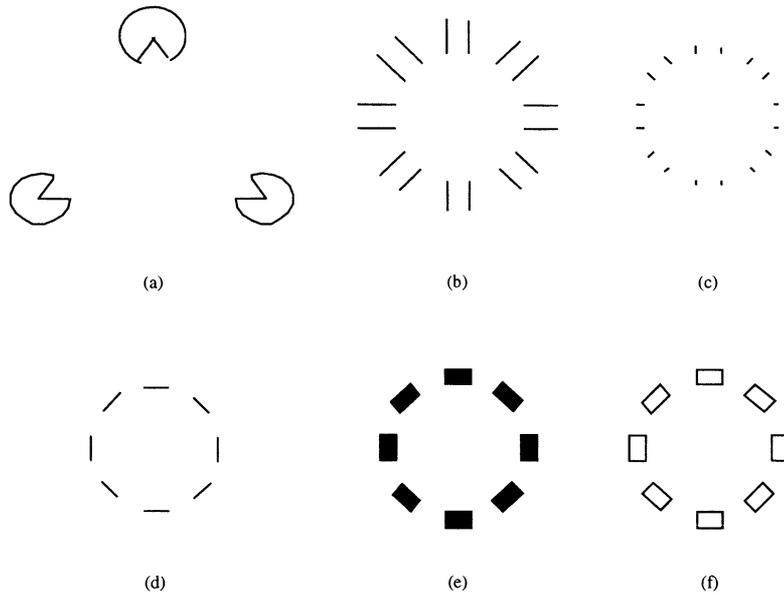


Figure 9: Illustration de la difficulté que des bords ont à générer des contours illusoires en l'absence de terminaisons de lignes orthogonales (d'après Kellman et Shipley 1991). (a) Contrairement à la figure 1, le triangle de Kanizsa n'est pas complété modalement. (b) et (c) Les lignes interrompues induisent un contour modal, à condition d'être assez longues. (d) et (e) Les bords correspondant aux terminaisons de (b) n'induisent pas de complétion modale, sauf à être élargis. (b) et (f) Les terminaisons ne possèdent plus la même fonction en présence de bords.

mécanismes candidats (regroupement parallèle ou perpendiculaire à la direction des inducteurs). Leurs résultats montrent que le second type de mécanisme n'est pas suffisant, contrairement aux principes du modèle de Peterhans et von der Heydt. Dans la figure 9, la comparaison des cas (b) et (f) montre que bords et terminaisons interagissent, de sorte que les mêmes discontinuités n'ont pas toujours le même effet (voir Kanizsa 1979). Un autre argument contre un mécanisme unique est que certains contours illusoires apparaissent en l'absence de discontinuités (Leshner et Mingolla, Shapley et Gordon 1987), voire entre deux simples segments colinéaires (Dresp 1993).

Pour autant, un modèle fondé sur la seule induction parallèle ne nous paraît pas satisfaisant, car les contours illusoires sont souvent beaucoup moins nets en l'absence d'induction perpendiculaire.

Absents du modèle de Grossberg, les indices d'occlusion (extrémités de ligne, coins, jonctions en T) semblent pourtant jouer un grand rôle dans les processus de complétion

de contour, que ce soit pour les déclencher ou pour les empêcher (Dresp 1993). Ces indices sont d'ailleurs couramment utilisés dans les théories de reconstruction des objets en traitement d'images (Hummel et Biederman 1992, Nitzberg, Mumford, Shiohata 1993, Caselles, Coll, Morel forthcoming). Il existe également des arguments mathématiques en faveur de l'utilisation par le système visuel de "détecteurs de singularités".

Enfin, un défaut commun à tous les modèles cités jusqu'ici est qu'ils sont d'abord conçus pour expliquer les contours droits. Leur adaptation aux contours courbes pose problème :

- Chez Peterhans et von der Heydt, il faudrait prendre en compte tous les couples de cellules approximativement parallèles, puis sommer les produits de leurs activités selon tous les contours possibles. Ceci nécessite un très grand nombre d'unités et un câblage sophistiqué, comme tous les modèles utilisant des détecteurs "à la Barlow".
- Cette critique vaut aussi pour le modèle de Grossberg et Mingolla, qui entend résoudre le problème des contours courbes en tolérant des alignements approximatifs. Ces alignements (réels ou illusoire) sont détectés par des cellules "dipôles", au large champ récepteur. Le risque d'explosion combinatoire guette également un tel mécanisme.

3.3 Deux modèles plausibles

S'il paraît probable, au vu des critiques précédentes, que le modèle de Peterhans et von der Heydt, et donc celui de Finkel et Edelman, sont encore un peu trop schématiques pour rendre compte de tous les cas de formation des contours illusoire, on ne peut pas être aussi affirmatif en ce qui concerne le modèle de Grossberg et Mingolla. Il est en effet suffisamment riche pour résister à bon nombre d'objections, et en même temps trop qualitatif pour pouvoir subir une critique précise : presque tous les phénomènes peuvent s'expliquer en jouant sur le rapport de force entre mécanismes de coopération et de compétition. Enfin, une étude psychophysique récente (Dresp et Grossberg 1997) est venue conforter certaines des thèses de Grossberg.

Un autre modèle intéressant est celui de Heitger et von der Heydt (1993). Il semble se situer en position intermédiaire entre les deux familles que nous avons distinguées, puisqu'il admet des regroupements aussi bien dans la direction des éléments orientés ("para grouping") que dans la direction perpendiculaire ("ortho grouping"). De plus, tous les mécanismes qu'il utilise sont "bottom-up", alors que dans les modèles de Grossberg et Mingolla, et de Finkel et Edelman, les boucles de rétroaction pourraient se révéler peu efficaces dans le traitement d'images naturelles complexes. Enfin, ce modèle fonctionne aussi bien avec les contours courbes qu'avec les contours droits (figure 10).

Heitger et von der Heydt traitent simultanément les contours sous occlusion et les contours illusoire. Le principe fondateur est la détection de certaines singularités ou

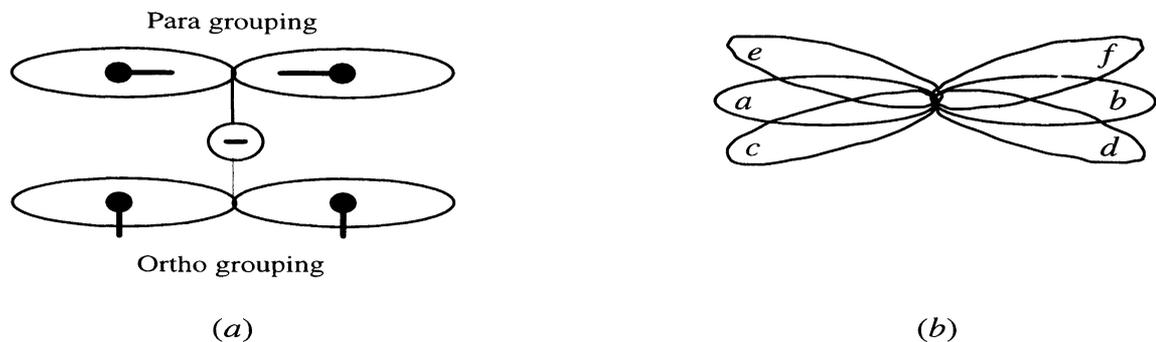


Figure 10: Le champ de regroupement de Heitger et von der Heydt génère localement un segment orienté lorsque ses deux lobes sont simultanément activés. (a) Para- et ortho-grouping (pour l'orthogrouping on tolère une orthogonalité approximative). (b) Le champ de regroupement prend en compte les alignements courbes. La contribution des chemins de courbure constante (ab , cd et ef) est double de celle des autres (ad , af , bc , be).

points-clés (Heitger et al. 1992), et leur appariement. Ce sont des cellules orientées, dotées de deux lobes de grande taille, comme les cellules dipôles de Grossberg et Mingolla, qui constituent ce champ de regroupement (“grouping field”). Le principe est le suivant : lorsque ses lobes contiennent tous les deux un point-clé, la cellule envoie un signal local de formation d’un contour subjectif (c’est-à-dire qu’elle crée un petit segment orienté). Ce signal vient s’ajouter aux sorties des détecteurs de contours réels de même localisation. Le tracé du contour est ensuite déterminé par les maxima locaux d’activation. Le champ de regroupement est, par sa forme, proche du champ d’association de Field, Hayes et Hess que nous exposerons à la section suivante ou du champ de coopération de Grossberg et Mingolla.

La principale question que soulève ce modèle concerne sa vraisemblance biologique. En effet, un même champ de regroupement doit contenir les deux extrémités inductrices d’un contour subjectif. Or certains contours illusoire, sans parler des contours sous occlusion, peuvent combler des vides importants. Ceci supposerait donc des champs récepteurs de très grande taille, qui n’ont pas, à notre connaissance, été observés dans V1. Le modèle semble davantage inspiré de V2, mais aucune contrepartie neuronale précise n’est proposée dans l’article cité. Il semble en tous cas que les auteurs aient, eux aussi, délaissé la question de l’échelle des processus proposés.

3.4 Modèles de contours virtuels à base d’interactions locales

L’hypothèse de détecteurs de configurations globales est insatisfaisante car ceux-ci devraient être très nombreux et couvrir de larges zones. De plus, les mécanismes proposés

pour la formation des contours illusoirs semblent trop souvent ad hoc. C'est pourquoi il y a sans doute place pour un modèle alternatif, qui fonctionnerait uniquement sur la base *d'inductions locales*. La spécificité de cette induction locale est décrite par le modèle du *champ d'association* (Field, Hayes, Hess 1993), qui privilégie les directions colinéaires au détriment des fortes courbures et pourrait être implémenté dans les connexions horizontales cortico-corticales. Un même mécanisme général de traitement des contours dans le système visuel serait alors responsable aussi bien de l'unification des contours "réels" (Tondut, Petitot 1997) que de l'extrapolation et des contours illusoirs. Nous allons y revenir.

La formation d'un contour subjectif pourrait ainsi s'expliquer par la rencontre de deux courants d'activation cellulaire dans V1 (ou V2). Supposons qu'un mécanisme détecteur de singularités (comme celui décrit par Heitger, von der Heydt 1992) crée à l'extrémité des bords inducteurs une activation dans la direction parallèle au bord (ou dans la direction perpendiculaire lorsqu'il s'agit de terminaisons de lignes). Alors cette activité peut se propager de proche en proche (avec un coefficient d'affaiblissement) via les connexions horizontales, dans les directions définies par le champ d'association. Les neurones activés par les "lignes de champ" issues de deux singularités se distinguent alors par leur activité plus élevée.⁵ Parmi ces neurones, les maxima locaux d'activation caractérisent, comme chez Heitger et von der Heydt, le tracé du contour subjectif (figure 11).

Signalons aussi, pour conclure cette partie introductive, la question de *l'échelle* dans la formation des contours subjectifs, question ignorée par la plupart des auteurs. Dans le cadre d'une hypothèse de séparation des échelles, le mécanisme de formation doit opérer à chacune des échelles du système visuel. Le tracé précis du contour est alors déterminé par les plus petites échelles. De ce point de vue, la figure 3 représente un cas délicat : les bords inducteurs sont proches et leur alignement peut être détecté par le mécanisme d'association via des connexions horizontales "directes". Cependant, cela ne suffit pas à expliquer la formation d'un contour illusoire. Celle-ci se constitue donc à des échelles plus petites, et résulte d'une cascade d'activations via les connexions horizontales. On ne peut pas comparer directement la portée angulaire du champ d'association (60° environ selon Field, Hayes et Hess 1993) et la plage d'apparition du contour illusoire de la figure 3 (jusqu'à 90° selon Kellman et Shipley 1991). Par la suite, tout en gardant ces remarques à l'esprit, nous nous placerons à une seule échelle, supposée petite.

4 Le champ d'association et l'intégration des contours réels

4.1 Les expériences cruciales de Field, Hayes et Hess

Venons en maintenant au champ d'association qui constitue, selon nous, l'une des grandes avancées récentes dans la compréhension des mécanismes corticaux d'intégra-

⁵Ce mécanisme correspond à la conception "traditionnelle" des connexions horizontales. On pourrait également imaginer un mécanisme de synchronisation des décharges.

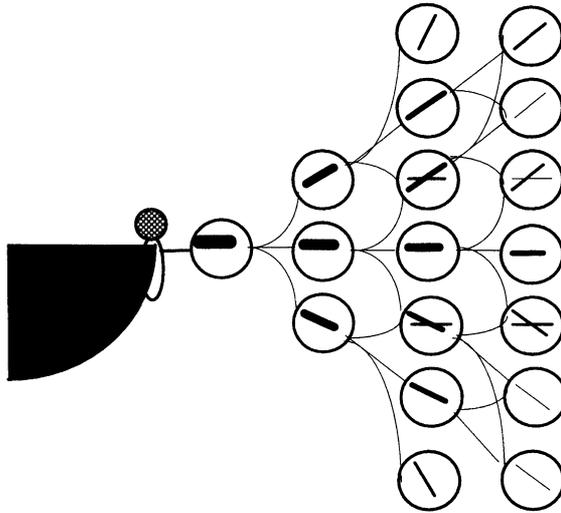


Figure 11: Modèle de propagation de l'activation neuronale dans $V1$. Les cercles symbolisent les positions des neurones, la direction des traits les orientations activées, leur épaisseur l'intensité de l'activation. Les liaisons entre neurones symbolisent les connexions horizontales.

tion des contours. David Field, Anthony Hayes et Robert Hess (1993) ont mis au point un protocole expérimental original.⁶ Il consiste à présenter brièvement (en général pendant une seconde) à des sujets une grille composée de 256 éléments orientés (patches de Gabor⁷) tous similaires.

L'intérêt d'utiliser des patches de Gabor, c'est-à-dire des éléments orientés "passe-bande" dans le domaine spatial, est qu'en sélectionnant une fréquence spatiale ils sélectionnent uniquement des cellules correspondant à une *échelle* bien définie. La taille du champ récepteur d'une cellule sélective pour la longueur d'onde λ est typiquement 2λ . Les segments de droite activent au contraire des cellules sensibles à différentes fréquences spatiales.

Une fois sur deux, la grille de patches de Gabor contient des éléments (12 par exemple) dont les centres sont alignés selon un chemin lisse γ , les autres éléments étant orientés aléatoirement. Dans l'autre moitié des cas, tous les éléments sont orientés au hasard. La tâche consiste pour le sujet à déterminer s'il détecte ou non l'alignement γ dans la grille présentée (méthode du choix forcé entre deux alternatives). Les résultats obtenus révèlent que les sujets perçoivent bien l'alignement si les éléments sont alignés

⁶Dans Tondut, Petitot (1997), nous analysons, outre ces expériences de Field, Hayes et Hess, d'autres expériences analogues: Polat et Sagi (1993), Gilbert et Westheimer (Kapadia et al., 1995, Gilbert et al. 1996).

⁷Ces patches sont analogues à des dérivées secondes $\frac{\partial^2}{\partial u^2} G_\sigma$ de gaussiennes d'échelle σ le long d'une direction u .

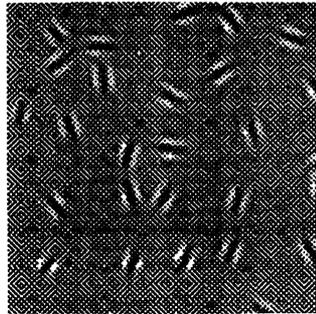


Figure 12: Partie d'une des grilles de patches de Gabor des expériences de Field, Hayes et Hess.

“tangentiellement” à γ et si la variation de la pente entre deux éléments consécutifs n'est pas trop grande ($\leq 30^\circ$) (cf. figure 13). Il s'agit là d'un phénomène de *pop-out* (de saillance perceptive) caractéristique.

Un point essentiel est que les éléments de la grille sont trop éloignés les uns des autres pour appartenir à un même champ récepteur dans $V1$:

«It is clear that this “association field” covers a considerably wider area than would be covered by the receptive field of a mammalian cortical cell.» (p. 185)

Or, spontanément, les sujets effectuent le regroupement de ces éléments. Un mécanisme automatique mettant en relation plusieurs champs récepteurs doit donc opérer. Il s'agit d'une *intégration de bas niveau*. Comme l'expliquent les auteurs :

«Recent computational studies have suggested that a useful segregation process for real scenes may be based on local (rather than global) integration. (...) The general theme of these algorithms is that the points along the length of a curved edge can be linked together according to a set of local rules that allow the edge to be seen as a whole, even though different components of the edge are detected by independent mechanisms.» (p. 174)

Le fait que le phénomène de grouping soit local et non pas global est tout à fait essentiel :

«In our stimuli, there does not exist any ‘global’ feature that allows the path to be segregated from the background. It is not possible to segregate the path by filtering along any particular dimension. Our results imply that the path segregation is based on local processes which group features locally.» (p. 191)

Les expériences montrent également deux autres phénomènes fondamentaux :

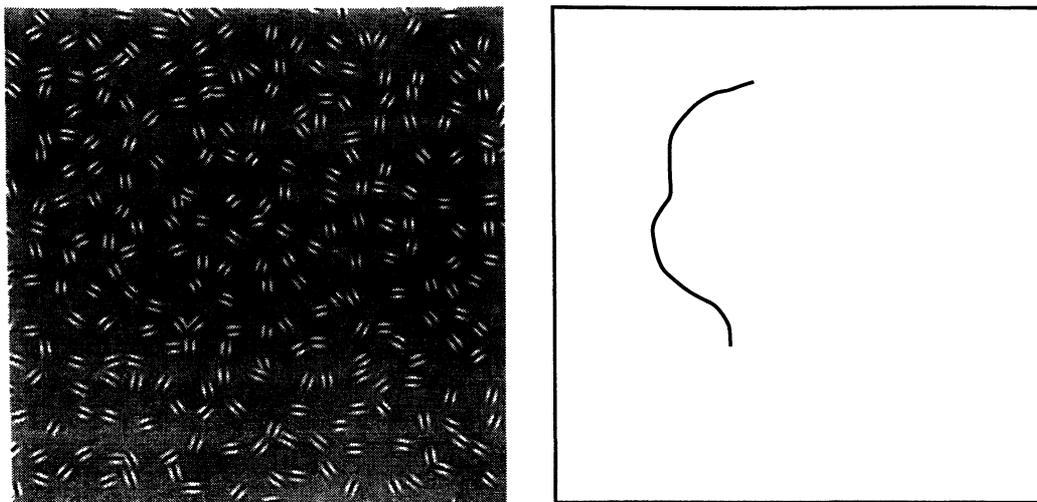


Figure 13: Dans un grille de patches de Gabor dont les directions sont apparemment aléatoires, le sujet peut observer le pop-out d'un groupe d'éléments si ceux-ci sont convenablement alignés (le chemin d'alignement est représenté dans la seconde figure).

- si la variation de la pente entre éléments consécutifs est trop grande alors le sujet ne perçoit pas d'alignement (cf. figure 14);
- il en va de même si l'orientation des éléments n'est pas tangente mais transverse (par exemple orthogonale) à la "courbe" γ parcourue par leurs centres (cf. figure 15).

Il n'y a donc plus pop-out (saillance détectée spontanément) et les chemins deviennent détectés de façon cognitive et inférentielle.

La mesure des variations du taux de détection en fonction des positions spatiales et des orientations relatives des éléments formant le contour a permis à Field, Hayes et Hess de conclure que la tendance des éléments à être perçus comme alignés découle de l'existence, autour de chaque élément, d'une région dans laquelle d'autres éléments tendent à être perçus comme groupés. Cette région, baptisée *champ d'association* est définie par des conditions conjointes de position et d'orientation. La forme du champ d'association est décrite dans les figures 16 et 17.

4.2 Interprétation théorique des expériences

Field, Hayes et Hess ont remarquablement interprété la nature géométrique profonde du champ d'association. D'abord, l'association n'est pas simplement

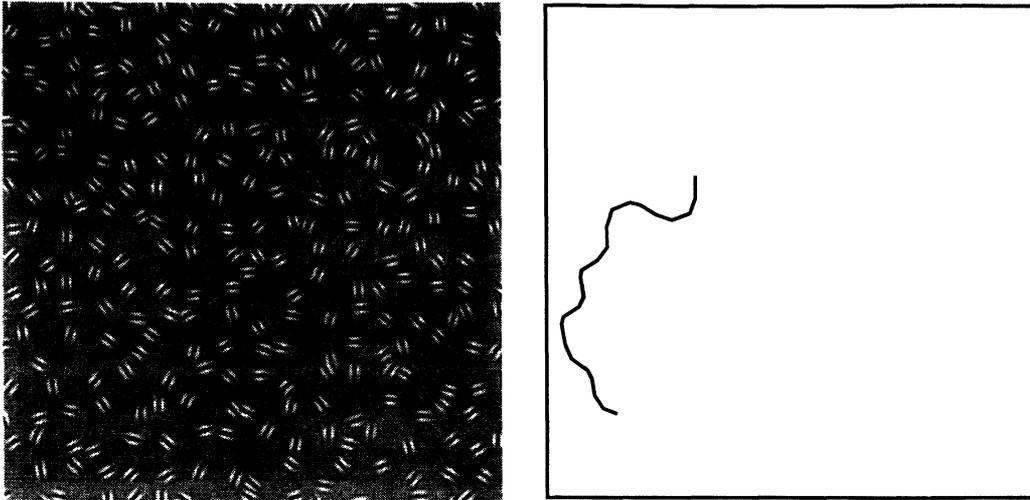


Figure 14: Si la variation de la pente entre éléments consécutifs est trop grande alors le sujet ne perçoit pas d'alignement.

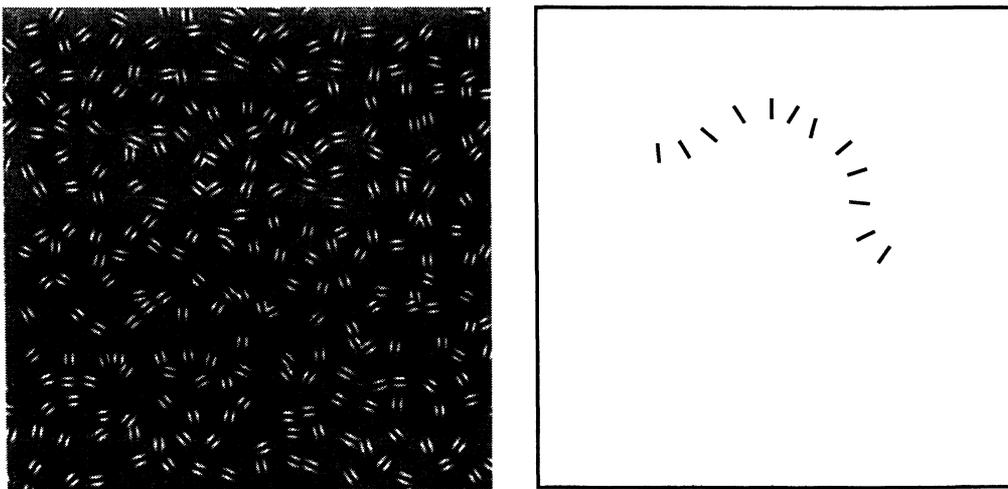


Figure 15: Si l'orientation des éléments n'est pas tangente mais transverse (par exemple orthogonale) à la "courbe" γ parcourue par leurs centres, alors le sujet ne perçoit pas non plus d'alignement.

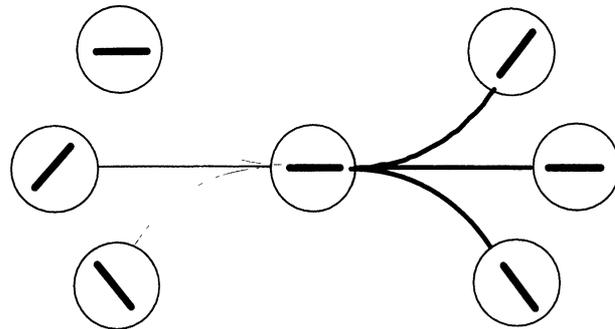


Figure 16: Schéma du champ d'association. Les éléments sont des couples $(a, p) = (\text{position}, \text{direction})$. Deux éléments (a_1, p_1) et (a_2, p_2) sont connectables (traits pleins) si on peut interpoler entre les positions a_1 et a_2 une courbe γ tangente en a_1 et a_2 à p_1 et p_2 . Sinon les deux éléments ne sont pas connectables (traits fins).

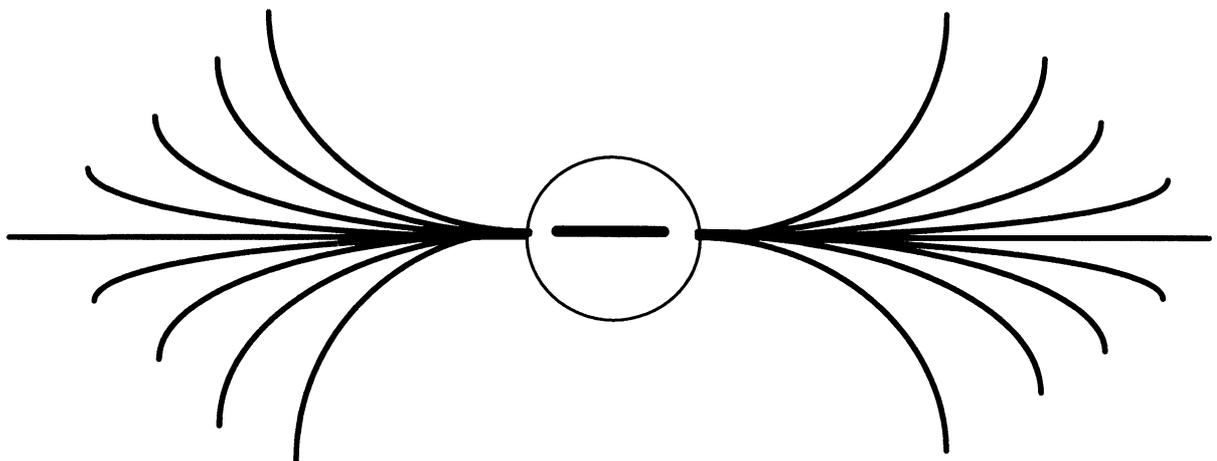


Figure 17: Les "lignes de champ" du champ d'association.

«a general spread of activation, linking together all types of features within the field.» (p. 185)

Elle manifeste une corrélation entre position et orientation:

«Elements are associated according to *joint constraints of position and orientation.*» (p. 187, nous soulignons)

Il s'agit là du point essentiel. Le phénomène de pop-out résulte du fait que les éléments sont alignés *de façon à être tangents à la courbe décrite par leurs centres* :

«There is a *unique link* between the relative positions of the elements and their relative orientations. (...) *The orientation of the elements is locked to the orientation of the path*; a *smooth curve* passing through the long axis can be drawn between any two successive elements.» (p. 181)

«The process that underlies this segregation shows a specific relation between position and orientation. Similar orientations are grouped together only when the alignment falls along particular axes.» (p. 189)

5 Structure de contact et intégrations des contours

Après avoir brièvement examiné différents modèles de formation des contours subjectifs dans le système visuel, nous constatons que les plus plausibles d'entre eux font intervenir un renforcement mutuel entre neurones selon des règles apparentées au champ d'association. Dans notre précédent travail (Tondut, Petitot 1997) nous avons donné du champ d'association une interprétation en termes *de structure de contact sur un fibré*. Nous nous proposons maintenant de rappeler cette interprétation géométrique et de l'utiliser pour étudier la forme des contours subjectifs. Nous comparerons alors les formes résultant des modèles biologiques avec les modèles d'extrapolation de contours proposés par les spécialistes de la vision artificielle.

5.1 Le fibré de contact et les hypercolonnes du cortex visuel primaire

5.1.1 Définition du fibré de contact

On peut idéaliser mathématiquement l'architecture fonctionnelle de la voie rétino-géniculocorticale. La structure rétinotopique et colonnaire du système des hypercolonnes d'orientation de l'aire $V1$ se trouve alors modélisée par la fibration $\pi : E \rightarrow M$ qui, au-dessus de chaque point a de la rétine M , place en fibre un exemplaire $C_a M \simeq \mathbb{P}^1$ de l'espace des directions du plan, espace dit *droite projective* et noté \mathbb{P}^1 . L'espace total E

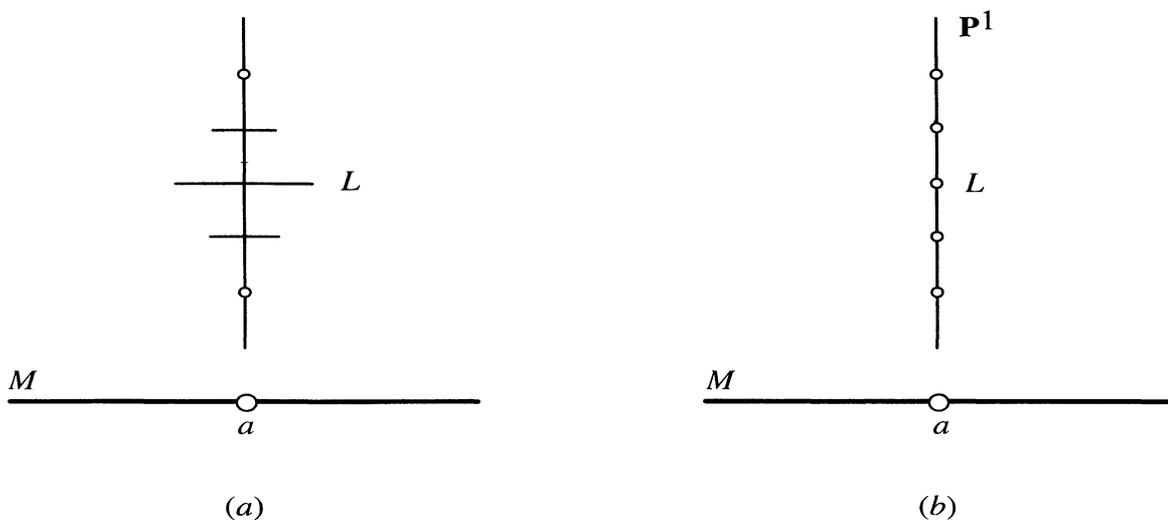


Figure 18: Le fibré E ayant pour base le plan rétinien M et pour fibre l'espace projectif \mathbb{P}^1 des droites de M . En (a) les éléments de la fibre au-dessus de a sont représentés comme des segments horizontaux tournants vus en perspective. En (b) ils sont représentés comme des points (la coordonnée de la fibre code l'angle θ de la direction p).

de ces fibres, recollées entre elles par des changements de coordonnées locales dans la base M , est appelé *fibré de contact* de M et est noté CM . Les points de E , autrement dit les couples (a, p) d'un point a de M et d'une direction p de C_aM , sont appelés les *éléments de contact* de M (cf. figure 18).

5.1.2 Confirmations neurophysiologiques : rétinotopie et connexions horizontales cortico-corticales

Cette fibration est attestée par un nombre considérable de résultats depuis les travaux pionniers de Hubel, Wiesel et Mountcastle, entre autres par ceux de Charles Gilbert. La figure 19 montre comment les orientations varient lorsqu'on se déplace dans une couche corticale. La figure 20 montre de même comment l'orientation varie lorsque l'on pénètre dans la couche. Si la pénétration est orthogonale (i.e. reste dans la même colonne) alors la direction de l'orientation et la position du champ récepteur ne varient pratiquement pas (redondance intracolumnaire). Si en revanche la pénétration est oblique elles varient fortement.

De nombreuses données neurophysiologiques s'interprètent très bien en termes d'im-

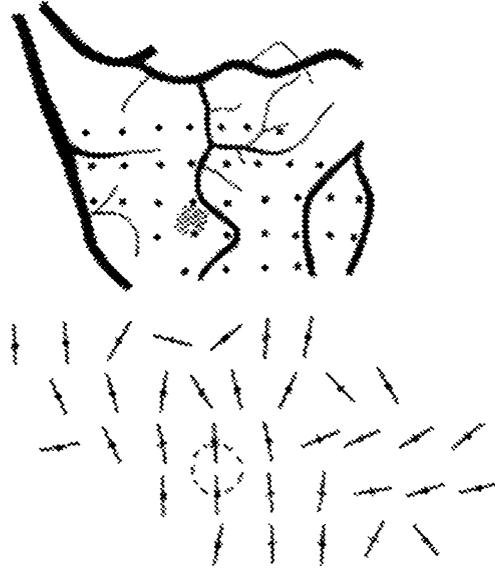


Figure 19: Orientations associées à diverses positions dans le cortex strié du chat. Les électrodes sont distantes d'environ 150μ . Les points de la figure (a) indiquent les positions et les segments de la figure (b) les orientations. (D'après Gilbert, Wiesel, 1989).

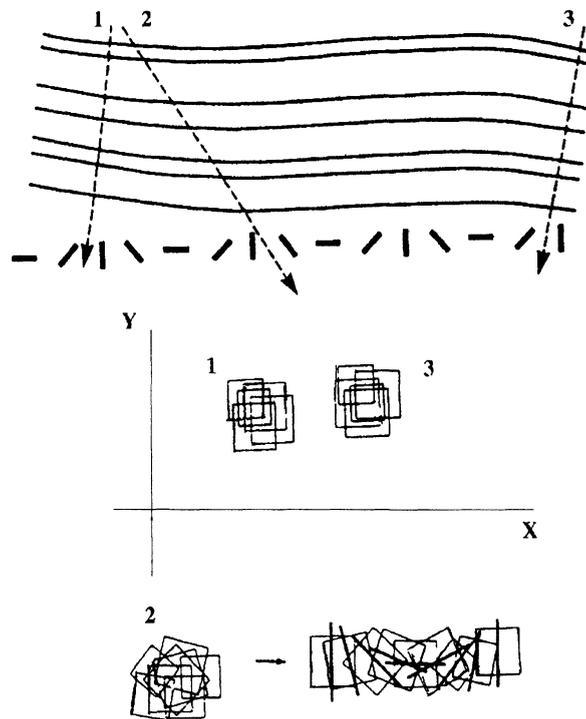


Figure 20: Relations entre les positions et les orientations dans les hypercolonnes. Le long des pénétrations “verticales” 1 et 3 les positions et les orientations sont invariantes. Le long d’une pénétration oblique 2 les positions sont invariantes mais l’orientation tourne. (D’après Gilbert , 1992).

plémentation du fibré de contact. D'abord évidemment la rétinotopie et un premier aspect de la trivialité locale (à petite échelle). La rétinotopie comme ensemble de "projections verticales ascendantes (feed forward)" dans la voie rétino-géniculo-corticale correspond très exactement au concept géométrique même de fibration. Il faut simplement faire attention aux différences de sens neurophysiologique VS géométrique des mêmes termes lexicaux. Les fibres nerveuses se "projettent" de la rétine vers le cortex au sens de connexions ascendantes. Elles font partie du "hardware" neuronal. Au contraire, les fibres géométriques sont des hypercolonnes qui se "projettent" sur des positions rétiniennes au sens de la projection d'une droite sur un point. Elles relèvent de l'architecture fonctionnelle.

Quant à la trivialité locale, il faut noter qu'en géométrie différentielle elle est introduite pour pouvoir traiter de fibrations globalement non triviales. Ici, elle est au contraire impliquée par l'architecture fonctionnelle elle-même. C'est la donnée neurophysiologique des champs récepteurs et de leurs recouvrements qui l'impose.

En plus des connexions "verticales" rétino-corticales, il existe aussi des connexions "horizontales" *cortico-corticales* de longue portée qui relient des cellules de même orientation dans des hypercolonnes éloignées. La figure 21 (tirée d'un travail de Daniel Ts'o, Charles Gilbert et Torsten Wiesel) en montre les conséquences pour la corrélation des colonnes d'orientation.

On trouve souvent affirmé dans la littérature que les connexions horizontales cortico-corticales "violent la rétinotopie". Par exemple Gilbert et Wiesel (1989) parlent d'une

«seeming violation of the principles of receptive field size and functional architecture.» (p. 2432)

Mais cela est inexact. Car au contraire *elles la confirment*. En effet, elles garantissent une trivialité à plus grande échelle et définissent même une connexion (au sens géométrique) sur le fibré de contact, c'est à dire une correspondance entre fibres (hypercolonnes) voisines. Au-delà de deux hypercolonnes (1.5 mm) les champs récepteurs moyens des hypercolonnes deviennent disjoints. Or les connexions horizontales peuvent mesurer jusqu'à 6-8 mm. Sans elles, des hypercolonnes voisines deviendraient indépendantes ce qui ferait perdre tout sens à la rétinotopie car elle n'existerait plus que pour l'observateur externe et n'aurait plus aucune réalité *pour le système lui-même*.

Ce rôle structural nécessaire des connexions horizontales cortico-corticales n'a pas été clairement perçu au départ. En 1986 Ts'o, Gilbert et Wiesel remarquaient :

«The role of the clustered horizontal connections is not known, but it has been proposed that they may serve to connect columns of the same orientation.» (p. 1160)

Et Gilbert et Wiesel proposaient même dans un papier de 1989 :

«It is from this relationship that this pattern of connections derive its functional role» (p. 2432)

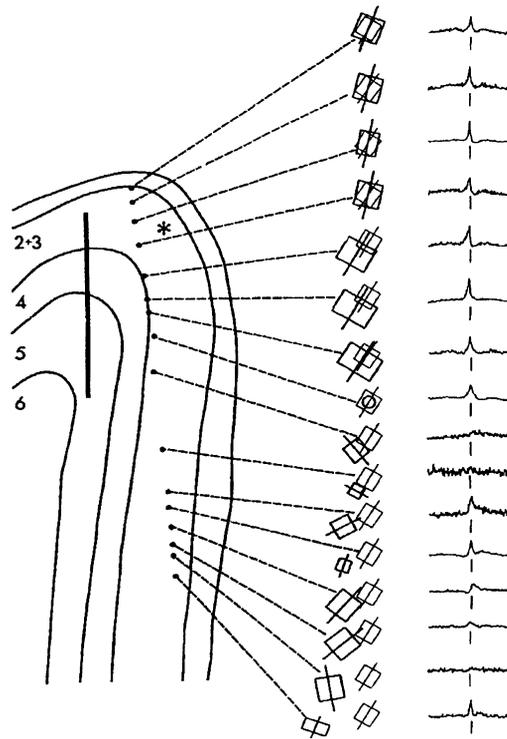


Figure 21: Corrélations entre cellules appartenant à des hypercolonnes différentes. On compare les orientations des cellules rencontrées lors d'une pénétration corticale avec celle d'une même cellule de référence (astérisque). En faisant des cross-corrélogrammes (colonne de droite), on constate que les cellules d'orientations voisines sont fortement corrélées (existence d'un pic dans le corrélogramme) et seulement elles. (D'après Ts'o, Gilbert, Wiesel 1986, p. 1163).

tout en affirmant encore :

«In order not to disrupt cortical columnar and retinotopic organization, it seemed entirely logical that the cortical connectivity would be fairly restricted in its extent along planes parallel to the cortical surface, with most of the connections running across the cortical layers, perpendicular to the cortical surface.» (p. 2432)

5.1.3 Différences entre la neurophysiologie et l'idéalisation géométrique

Mais il existe néanmoins des différences importantes entre les données neurophysiologiques et l'idéalisation géométrique de la fibration. Citons en trois.

- D'abord les champs récepteurs introduisent, par leur taille, une échelle. D'où la nécessité de développer une théorie des fibrations *multi-échelles*. Qui plus est, ils sont *adaptatifs* au sens où leur réponse est modulée par les stimuli. Comme le notent Yves Frégnac, Jean Lorenceau et leurs collègues (1996) ce sont des champs d'intégration dynamiques, des

«active filters which may continuously adapt and be updated as a function of global context and past experience.»

- Ensuite il existe une forte *redondance* des colonnes : en idéalisant, on peut dire qu'un "point" de la fibration (position rétinienne + orientation) correspond à une colonne tout entière. Ce "codage par population" est essentiel car il participe à l'adaptativité et permet de raffiner la résolution. Il permet aussi une réponse *oscillatoire* et donc des phénomènes de synchronisation et de "phase locking".
- Enfin, la contrainte dimensionnelle impose de réaliser l'implémentation d'une fibration tridimensionnelle dans des couches neuronales bidimensionnelles et cela conduit à "écraser en éventail" les fibres de la fibration. D'où une *distorsion* considérable de la rétinotopie et l'organisation des hypercolonnes en "pinwheels" centrées sur des points singuliers et séparées par des lignes de fractures (Das, Gilbert 1997).

Les considérations neurophysiologiques devraient ainsi conduire les mathématiciens à envisager des fibrations multi-échelles avec redondance et codage par population dont les fibres seraient des sortes "d'éclatements" (au sens géométrique).

5.1.4 Fibré de contact et espace des 1-jets

Le fibré de contact CM du plan rétinien M est de dimension 3 (2 pour la base M et 1 pour la fibre \mathbb{P}^1). Pour le décrire en termes de coordonnées locales on ne doit donc choisir qu'une coordonnée locale pour la fibre. Munissons par exemple M de coordonnées locales (x, y) en a et le plan tangent T_aM des coordonnées naturelles associées (ξ, ψ) . Alors, sur un ouvert ne contenant pas la droite "verticale" $\xi = 0$, une coordonnée locale de C_aM est $p = \frac{\psi}{\xi}$ (au voisinage de $\xi = 0$, on pourra prendre la coordonnée $p' = \frac{\xi}{\psi}$). Un élément de CM est donc repéré par les coordonnées (x, y, p) (ou (x, y, p')). On vérifie aisément que les changements de carte associés à ces coordonnées naturelles sur CM sont des difféomorphismes. Ainsi, CM est une variété différentiable de dimension 3.

Se donner ce que l'on appelle une *section* de ce fibré $\pi : E = CM \rightarrow M$ consiste alors à associer à chaque point a de la base M un élément $s(a)$ de la fibre C_aM au-dessus de a , i.e. une direction ou orientation. Les sections sont donc très exactement des champs de couples $(a, p) = (\text{position}, \text{direction})$ au sens de Field, Hayes et Hess (section 4.1). Un cas particulier fondamental de section, restreinte à une courbe γ tracée sur la variété de base M , est obtenu en choisissant, au-dessus de chaque point de γ , la direction *de la tangente* à γ en ce point.

Si l'on travaille localement, il est souvent plus commode d'interpréter le fibré de contact en termes *d'espaces de jets*. L'idée de jet généralise la notion classique de développement de Taylor et lui confère une signification géométrique intrinsèque. Plaçons-nous dans le cas le plus simple, celui des fonctions réelles sur \mathbb{R} . Le jet d'ordre 1 d'une telle fonction f au point x , noté $j^1f(x)$, est caractérisé par la donnée de l'abscisse du point x considéré, de la valeur de la fonction f en ce point $y = f(x)$, et de la valeur de sa dérivée $p = f'(x)$. Ce dernier nombre est la pente de la droite tangente au graphe de f en $(x, f(x))$. Si l'on considère $a = (x, y)$ comme point du plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, cette droite n'est autre qu'un élément de contact du plan au point a . Inversement, à tout élément de contact du plan en un point, on peut associer l'ensemble des fonctions dont le graphe est tangent à l'élément en ce point, c'est-à-dire un 1-jet de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en ce point.

L'identification précédente est purement locale, de sorte qu'elle s'étend aux variétés en recollant des cartes locales. Ainsi le fibré des éléments de contact peut être vu comme le fibré des 1-jets des courbes C^1 (i.e. une fois différentiables) tracées sur la variété. En effet, d'après le théorème des fonctions implicites, toute courbe γ est localement un graphe (sauf aux points singuliers à tangente verticale) et, en un point donné a , le 1-jet associé ne dépend pas du choix des coordonnées puisque la définition de la tangente est intrinsèque. On note ce 1-jet $j^1\gamma(a)$. Le fibré des 1-jets est désigné par J^1M (cf. figure 22).

J^1M est très proche de CM . En fait C_aM est le projectivisé de J_a^1M où les éléments de signe opposé p et $-p$ ont été identifiés et où on a ajouté un point à l'infini.

Les espaces de jets sont fondamentaux (en particulier en physique) car ils ramènent des calculs locaux (infinitésimaux) à des calculs *ponctuels*. La contrepartie de cet extraordinaire bénéfice est *l'augmentation de la dimension* (i.e. du nombre des variables) : au lieu de considérer le plan muni des coordonnées (x, y) , et de calculer $y' = \frac{dy}{dx}$, on se

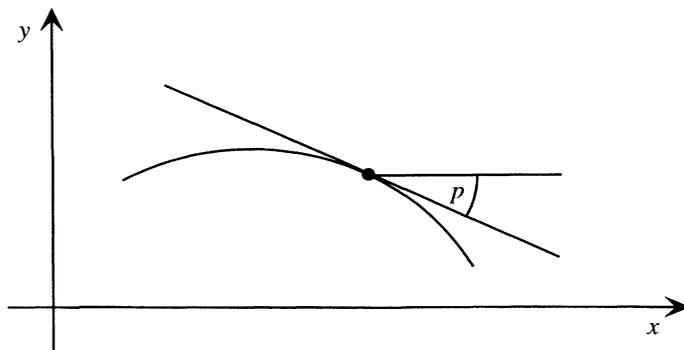


Figure 22: Un 1-jet est un couple $(a, p) = (\text{position}, \text{orientation})$ représentant la classe d'équivalence des courbes différentiables passant en a avec la tangente p .

place dans l'espace à trois dimensions (x, y, p) (qui est un espace de phases projectivisé) sur lequel on impose la relation $y' = p$ (l'idée remonte à Hamilton).

5.2 La structure de contact

Il existe une structure géométrique naturelle sur le fibré de contact d'une variété, appelée *structure de contact*. Nous l'explicitons en termes de jets pour ne pas trop compliquer les choses.

Soit γ une courbe C^∞ tracée sur la variété M . γ est une sous-variété de dimension 1 de M . Considérons l'application $j^1\gamma : \gamma \subset M \rightarrow J^1M$ qui associe à tout point a de γ le 1-jet $j^1\gamma(a)$ de γ en ce point. L'image de cette application est une courbe (une sous-variété de dimension 1) de J^1M . Cette courbe, que nous noterons encore $j^1\gamma$, est la "relevée" — dite *legendrienne* — de γ dans J^1M (on a la même construction dans CM). γ se déduit de $j^1\gamma$ par la projection structurale π de J^1M sur M . On retrouve ainsi la courbe γ à partir de l'ensemble de ses 1-jets, c'est-à-dire comme *enveloppe de ses tangentes* (cf. figure 23).

Dans l'espace J^1M , la courbe γ est représentée par $j^1\gamma$, de telle sorte que la direction de la tangente à la courbe, information *locale* dans M , devient dans l'espace des jets une information *ponctuelle*.

Etant donnée cette architecture fonctionnelle représentée par la fibration $\pi : J^1M \rightarrow M$, il devient nécessaire de pouvoir distinguer, parmi toutes les courbes gauches tracées dans l'espace 3-dimensionnel J^1M , celles, disons, "legendriennes" qui relèvent des courbes dans la base, de celles qui ne sont pas de tels relèvements. En effet, toutes les sous-variétés de dimension 1 de $J^1M \simeq \mathbb{R}^3$ ne sont évidemment pas, même localement, de la forme $j^1\gamma$: une courbe de J^1M localement définie par des équations $y = f(x)$, $p = g(x)$ ne sera de la forme $j^1\gamma$ que si $g(x) = f'(x)$. D'où l'idée de caractériser

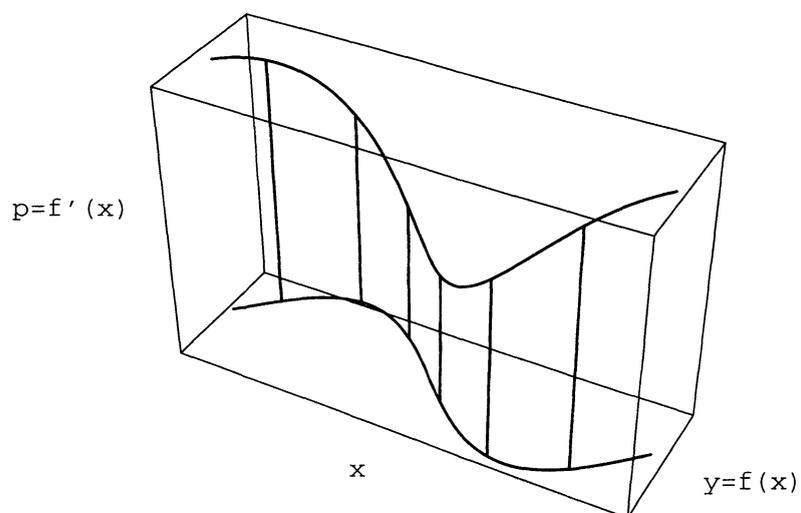


Figure 23: Relevée legendrienne dans l'espace des jets J^1M d'une courbe γ d'équation $y = f(x)$ dans la base M .

géométriquement celles des courbes de J^1M qui s'écrivent localement comme des 1-jets de courbes sur M .

Pour ce faire, on calcule le vecteur tangent d'une courbe du type $j^1\gamma$ en un point $X = (x, y, p)$ de J^1M . Comme γ peut toujours s'écrire localement comme le graphe d'une fonction $y = f(x)$ si l'on choisit correctement la coordonnée locale x , la relevée $j^1\gamma$ peut être paramétrée par x sous la forme : $X = (x, y, p) = (x, f(x), f'(x))$. Ceci permet de calculer le vecteur tangent V à $j^1\gamma$ en X . Ses composantes sont :

$$\left(\frac{dx}{dx} = 1, \frac{dy}{dx} = p = f'(x), \frac{dp}{dx} = p' = f''(x)\right).$$

Dans le fibré tangent TJ^1M à l'espace des 1-jets J^1M , fibré qui est une variété de dimension 6, les coordonnées complètes de V sont donc $V = (x, y, p; 1, p, p')$.

On constate alors (c'est la remarque fondamentale) que la forme très particulière de ce vecteur V fait *qu'il annule* la 1-forme différentielle $\omega = dy - p dx$ sur J^1M . En effet, d'après la formule générale $\omega(V) = \sum \omega_i V_i$ (où V_i et ω_i sont les composantes respectives de V et ω par rapport aux bases des fibrés tangent TJ^1M et cotangent T^*J^1M associées aux coordonnées locales (x, y, p)), on a $\omega(V) = -p \cdot 1 + p + 0 \cdot p' = p - p = 0$ puisque $\omega = -p dx + 1 \cdot dy + 0 \cdot dp$ et que dx (resp. dy, dp) appliquée à $V = (1, p, p')$ sélectionne la première (resp. 2ème, 3ème) composante 1 (resp. p, p'). Or, le noyau d'une forme différentielle sur un espace de dimension 3 est un plan. V appartient donc à un plan C_X , tangent en X à J^1M (i.e. $C_X \subset T_X J^1M$) (cf. figure 24).

Ainsi, les tangentes aux courbes de J^1M qui sont de la forme $j^1\gamma$ appartiennent au champ de plans $C : X \rightarrow C_X$. Les plans C_X sont appelés *plans de contact*. Leur champ est appelé *structure de contact* sur J^1M ou CM et la 1-forme différentielle ω dont il est le noyau est appelée *forme de contact*. Puisque les courbes de la forme $j^1\gamma$ sont tangentes en tout point à ce champ de plans, on dit que ce sont *des courbes intégrales* de la structure de contact (cf. figure 25).

Réciproquement, considérons une courbe Γ de J^1M et paramétrons-la sous la forme $\Gamma = \{(x, y, p) \mid y = f(x), p = g(x)\}$. Sur Γ , on a alors $\omega = (f' - g)dx$ (car $dy = f'dx$ et $p dx = g dx$). Supposons que cette courbe soit intégrale de la structure de contact, i.e. que $\omega = 0$ sur Γ . Alors $f' = g$ et Γ est donc bien de la forme $j^1\gamma$.

Résumons. La structure de contact est la structure géométrique qui permet de discriminer les "relevées" legendriennes de courbes planes parmi les autres courbes gauches de J^1M . Γ relève γ si, en chacun de ses points, la valeur de la troisième coordonnée p est égale à la pente de la tangente à γ . Or cette tangente n'est autre que la projection sur M de la tangente à Γ . Dès lors, en un point (x, y, p) , une courbe Γ issue d'un relèvement sera caractérisée par le fait que sa tangente en ce point a une projection sur le plan dont la direction est p . Ceci équivaut au fait que cette tangente appartient au plan vertical dont l'orientation horizontale est p . Ce plan n'est autre que le plan de contact au point $X = (x, y, p)$.

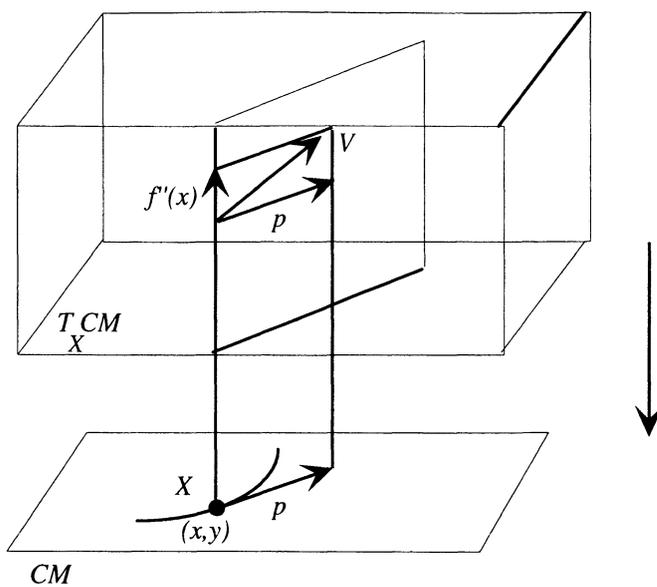


Figure 24: Schéma du relèvement legendrien d'une courbe de la base M dans le fibré de contact ou le fibré des 1-jets.

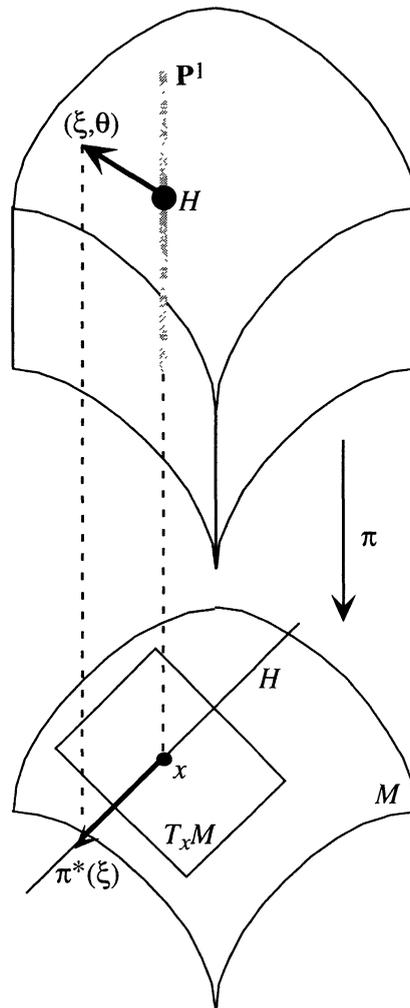


Figure 25: La structure de contact sur le fibré de contact ou le fibré des 1-jets d'une variété de base M . Soient $x \in M$ et H un hyperplan du plan tangent $T_x M$. H correspond à un point de la fibre $C_x M$ de CM au-dessus de x . Soit (ξ, θ) un vecteur tangent à CM en H . (ξ, θ) appartient au plan de contact $C_H M$ de CM en H ssi la projection $\pi_*(\xi)$ de la composante "horizontale" ξ est portée par H . Dans notre cas $M = \mathbb{R}^2$ et H est un point $X = (x, y, p)$.

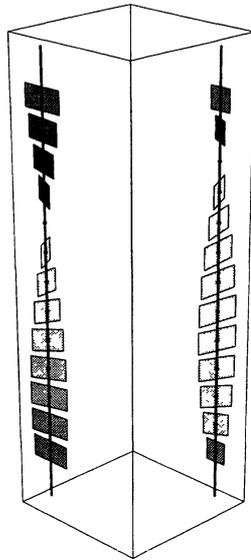


Figure 26: Le champ des plans de contact C_X “tourne” trop pour être intégrable.

5.3 La condition d’intégrabilité de Frobenius

Il faut souligner un point essentiel à propos de la structure de contact. Elle est définie comme champ de plans sur J^1M : à chaque 1-jet $X = (x, y, p) \in J^1M$ on associe un plan C_X de l’espace tangent $T_X J^1M$ et ce champ est le champ des noyaux d’une 1-forme $\omega = dy - p dx$ sur J^1M . L’exemple classique standard sur \mathbb{R}^3 (coordonnées (x, y, z)) est $\omega = x dy + dz$, qui redonne notre cas à travers la transformation $x \rightarrow -p, y \rightarrow x, z \rightarrow y$.

Il est alors naturel de se demander si le champ C_X est *lui-même* intégrable, autrement dit s’il existe des *surfaces* S de J^1M qui, en chacun de leur point X admette C_X comme plan tangent, i.e. telles que $T_X S = C_X$. Cela n’est pas du tout le cas et ne peut pas l’être. Le champ $X \rightarrow C_X$ est le prototype d’un champ *non* intégrable. On peut s’en convaincre intuitivement : le champ C_X se “vrille” trop pour que des surfaces intégrales puissent exister (cf. figure 26).

De façon plus technique, on remarque que si $V \in T_X J^1M$ est de composantes $V = (\xi, \eta, \pi)$, la condition d’annulation $\omega(V) = 0$ définit le plan $-p\xi + \eta = 0$ i.e. $\eta = p\xi$. Si l’on identifie J^1M à \mathbb{R}^3 , C_X devient le plan “vertical” au-dessus de la droite “horizontale” de pente p . Lorsque l’on se déplace dans la fibre J_a^1M , ce plan tourne avec p (sa pente est égale à la “hauteur” dans la fibre) comme le montre la figure 26 (où pour rendre le phénomène plus visible on a pris comme 3ème coordonnée non pas la tangente p mais l’angle $\text{Arctan}(p)$).

On démontre que cette non intégrabilité du champ des plans de contact C_X résulte de ce que la *condition de Frobenius* $\omega \wedge d\omega = 0$ (ou $d\omega(X, Y) = 0$ pour tous X et Y annulant ω) n’est pas satisfaite. Cette condition provient du théorème disant qu’une

condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité est que, si $\{X_1, X_2\}$ est une base (locale) du champ C_X , le crochet de Lie $[X_1, X_2]$ appartienne à C_X et que donc C_X soit une sous-algèbre de Lie de $T_X J^1 M$ (il est évident que la condition est nécessaire, le théorème de Frobenius montre qu'elle est suffisante). Or

$$\begin{aligned} d\omega &= - \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial p}{\partial p} dp \wedge dx \right) + d^2 y + 0 \\ &= -dp \wedge dx = dx \wedge dp . \end{aligned}$$

Donc $\omega \wedge d\omega = dx \wedge dp \wedge (-pdx + dy) = -dx \wedge dy \wedge dp$. Or cette 3-forme est la forme volume de $J^1 M$ et ne peut donc en aucun cas être nulle. Elle est même "maximalement" non nulle. On peut aussi remarquer que pour la base

$$\left\{ X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} = (1, p, 0), X_2 = \frac{\partial}{\partial p} = (0, 0, 1) \right\}$$

de C_X on a $[X_1, X_2] = -\frac{\partial}{\partial y} = (0, -1, 0)$ et que $(0, -1, 0) \notin C_X$ car pour ce vecteur $-p\xi + \eta = -0 + (-1) = -1 \neq 0$.

Mais même si le champ de plans C_X est "maximalement" non intégrable, il admet néanmoins des *courbes* intégrales qui sont précisément les relevées legendriennes $j^1 \gamma$ des courbes γ de la base M .

5.4 Symplectisation de la structure de contact de $J^1 M$

En fait, la structure de contact de $J^1 M$ appartient à ce que l'on appelle la *géométrie symplectique*. En effet elle peut être considérée comme l'image de la 1-forme canonique du fibré cotangent $T^* M$ une fois que l'on a *projectivisé* ce dernier au sens suivant. C'est ce que l'on appelle la "symplectisation" de la structure de contact.

En termes des coordonnées locales $(x, y, p; \xi, \eta, \pi)$ C_X est le plan d'équation $\eta = p\xi$. C'est, nous l'avons vu, le champ des noyaux de la 1-forme $\omega = -pdx + dy$. Mais ω n'est définie qu'à un facteur multiplicatif ($\neq 0$) près car il est évident que ω et $a\omega$ (avec $a \neq 0$) ont les mêmes noyaux. On peut donc considérer le fibré $\sigma : S \rightarrow J^1 M$ de base $J^1 M$, de fibre le groupe multiplicatif $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ et d'espace total S . On définit alors une 1-forme canonique θ sur S de la façon suivante. Soient $t = (x, y, p, a) = (X, a)$ un point de S et $\tau = (\xi, \eta, \pi, \alpha) = (V, \alpha) \in T_t S$ un vecteur tangent en t à S . t est la 1-forme $a\omega$ sur $J^1 M$. L'image directe $\sigma_* \tau$ de τ par la projection σ est un vecteur tangent $V \in T_X J^1 M$ en $X = (x, y, p) = \sigma(t)$ à $J^1 M$. On pose alors $\theta(\tau) = t(V) = a\omega(V)$. On a :

$$\begin{aligned} d\theta &= ad\omega + da \wedge \omega \\ &= adx \wedge dp + da \wedge (-pdx + dy) \\ &= adx \wedge dp + pdx \wedge da + da \wedge dy . \end{aligned}$$

Cette 2-forme est fermée et non dégénérée. C'est par conséquent une forme symplectique sur S . Elle est fermée puisqu'elle est même exacte. Elle est non dégénérée car si

$d\theta(\tau, \tau') = 0$ pour tout τ' alors $\tau = 0$. Soient en effet $\tau = (\xi, \eta, \pi, \alpha)$ et $\tau' = (\xi', \eta', \pi', \alpha')$. On a :

$$\begin{aligned} d\theta(\tau, \tau') &= a(\xi\pi' - \xi'\pi) + p(\xi\alpha' - \xi'\alpha) + \alpha\eta' - \alpha'\eta \\ &= -(a\pi + p\alpha)\xi' + \alpha\eta' + a\xi\pi' + (p\xi - \eta)\alpha' . \end{aligned}$$

L'annulation des coefficients de $\xi', \eta', \pi', \alpha'$ implique alors, vu que $a \neq 0$, la nullité de ξ, η, π, α . Donc $\tau = 0$.

5.5 Structures de contact et vision

Jusqu'à présent presque aucun spécialiste de la vision n'a évoqué les liens frappants existant entre les hypercolonnes d'orientation du cortex visuel et les notions géométriques de fibration, d'espace de jets et de structure de contact. Signalons toutefois deux exceptions notables, celles de Jan Koenderink et de William Hoffman.

Jan Koenderink (Koenderink, Van Doorn 1987) a beaucoup insisté sur l'importance du concept de jet pour les théories de la vision. Sans jets, il est très difficile de comprendre comment le système visuel pourrait extraire des traits géométriques comme la courbure d'une courbe. En effet,

«geometrical features become *multilocal* objects, i.e. in order to compute boundary curvature the processor would have to look at different positions simultaneously, whereas in the case of third order jets it could establish a format that provides the information by addressing a *single location*. Routines accessing a single location may aptly be called *points processors*, those accessing multiple locations *array processors*. The difference is crucial in the sense that point processors need no geometrical expertise at all, whereas array processors do (e.g. they have to know the environment or neighbours of a given location).» (p. 370)

Koenderink insiste aussi sur le fait que les (hyper)colonnes implémentent neurobiologiquement des espaces de jets :

«The modules (like “cortical columns” in the physiological domain . . .) of the sensorium are local approximations (*Nth order jets*) of the retinal illuminance that can be adressed as a *single datum* by the point processors.» (p. 374)

William Hoffman a quant à lui été l'un des pionniers de l'application de la géométrie différentielle et de la théorie des groupes de Lie à la vision. En particulier dans son important article de 1989 “The visual cortex is a contact bundle” il formule explicitement l'idée que les contours sont des relèvements de discontinuités du stimulus rétinien dans un fibré de contact rétinotopique implémenté dans les hypercolonnes corticales. Ce que les neurobiologistes appellent des “projections” rétine→cortex sont en fait de tels “path liftings” :

«A path on one manifold [the retina] is “lifted” via a fibering to another manifold [the cortex] in a coherent fashion.» (p. 145)

Lorsque les éléments linéaires implémentés par les hypercolonnes d'orientation matchent avec les éléments linéaires tangents au contour rétinien alors le contour se relève dans le fibré cortical.

Hoffman remarque également que les champs récepteurs rétiniens fournissent des cartes locales, les fonctions de transition entre les cartes étant implémentées par la connectivité fine de la rétine: cellules horizontales, bipolaires et ganglionnaires. Il considère aussi que les champs récepteurs directionnels des hypercolonnes implémentent une connexion sur le fibré. Cela est sans doute excessif car il faut envisager trois niveaux de structure :

- celui qui définit un fibré à une échelle donnée: ce sont les champs récepteurs;
- ceux qui garantissent la trivialité locale du fibré et, en plus, l'existence d'un transport parallèle : ce sont les connexions horizontales cortico-corticales à longue portée que l'on commençait à peine à étudier lorsque Hoffman écrivait son papier.

Dans un autre travail Hoffman (1985) évoque aussi le concept de fibration et conclut :

«fibrations (...) are certainly present and operative in the posterior perceptual system if one takes account of the presence of “orientation” micro-response fields and the columnar arrangement of cortex.» (p. 645)

6 Le champ d'association comme implémentation de la structure de contact

6.1 La géométrisation des expériences de Field, Hayes et Hess

Nous avons montré dans (Tondut, Petitot 1997) que le champ d'association peut être interprété comme la discrétisation de la structure de contact sur le fibré des éléments de contact.

- D'abord ce que Field, Hayes et Hess appellent les “joints constraints” ou le “unique link” entre les positions relatives a et les orientations relatives p des éléments correspond très précisément à la contrainte de relèvement $p = f'(x)$ (où $y = f(x)$ est l'équation du lieu γ des centres a des éléments (position) et p est l'orientation des éléments).

- Ensuite la condition sur l'angle de variation de la pente entre deux éléments consécutifs correspond à la *discrétisation* de cette contrainte. En effet, comme nous l'avons vu à la section 4.1, la fréquence des patches de Gabor détermine une échelle, et donc un pas spatial Δs . Soit Δp le pas de discrétisation pour les pentes. Si A et B sont les positions de deux éléments consécutifs, p_A et p_B leurs orientations respectives et θ la pente du segment AB , la version discrétisée (symétrique) de la contrainte $p = f'(x)$ réalisant le “locking” position-orientation est :

$$|p_A - tg\theta| + |p_B - tg\theta| \leq 2\Delta p . \quad (1)$$

On voit que lorsqu'on discrétise à une échelle donnée l'équation définissant la structure de contact, il en résulte tout naturellement une contrainte sur la *courbure* locale admissible. En conséquence, deux éléments consécutifs le long d'un chemin discrétisé devront avoir des orientations proches. Cela explique la seconde expérience de Field, Hayes et Hess (section 4.1 figure 14).

Il est très facile d'expliquer au moyen de la structure de contact la troisième expérience (section 4.1 figure 15). La figure 27(a) montre une courbe dans J^1M qui est une relevée legendrienne. La figure 27(b) correspond à la troisième expérience, c'est-à-dire au cas où l'on ajoute à $p = f'(x)$ une constante p_0 (ici un angle de $\pi/2$, les éléments sont donc orientés perpendiculairement à γ). Les figures 27(c) et 27(d) montrent deux autres exemples de courbes qui ne peuvent pas être des relevées, la première parce que p y est constant alors que f' ne l'est pas, la seconde parce que p “tourne” plus vite que f' . Dans aucun de ces trois derniers cas il ne peut y avoir un pop-out des chemins.

6.2 Condition d'intégrabilité, synchronisation et binding

Faisons ici une remarque méthodologique courte mais importante. Si l'on interprète les phénomènes de pop-out comme des phénomènes de *liage* (binding) par synchronisation,⁸ alors on peut dire que la condition d'intégrabilité est *la condition de possibilité géométrique* d'une synchronisation physiquement définie par l'architecture fonctionnelle du cortex visuel primaire.

6.3 Du champ d'association à la forme globale des contours subjectifs

6.3.1 Des contours réels aux contours subjectifs

Avec Dresch et Grossberg (1997) on peut faire l'hypothèse que les contours subjectifs résultent des *mêmes* mécanismes que ceux qui intègrent les contours réels. En conséquence, ils doivent être soumis aux mêmes contraintes, en particulier à la contrainte

⁸Cf. par exemple les travaux de référence Gray et Singer (1989) et Gray et al. (1989).

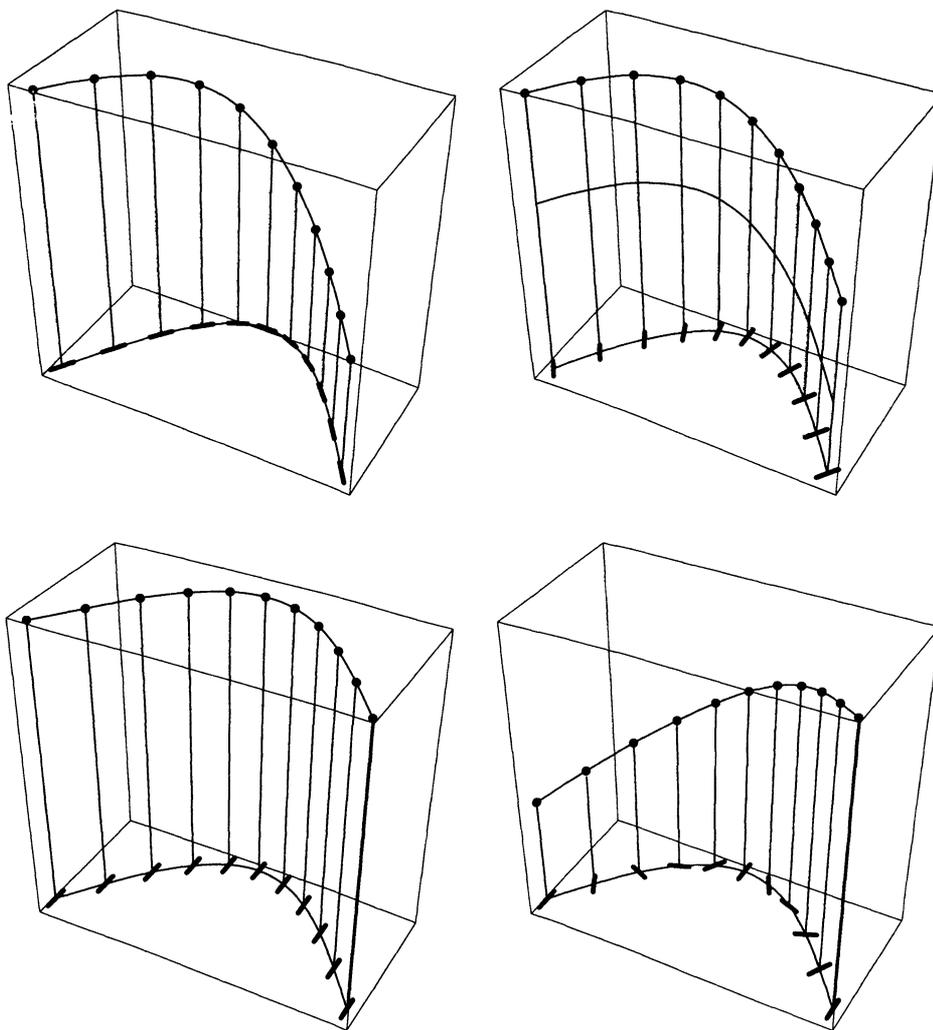


Figure 27: Le champ d'association comme condition d'intégrabilité. (a) La condition d'intégrabilité est satisfaite. En (b), (c) et (d) la condition n'est pas satisfaite. En (b) on ajoute un angle constant à celui de la tangente ($p = f' + p_0$). En (c) p est constant alors que f' ne l'est pas. En (d) p "tourne" plus vite que f' . (Les figures ont été normalisées à la même taille. Dans (b) on montre aussi la relevée de (a)).

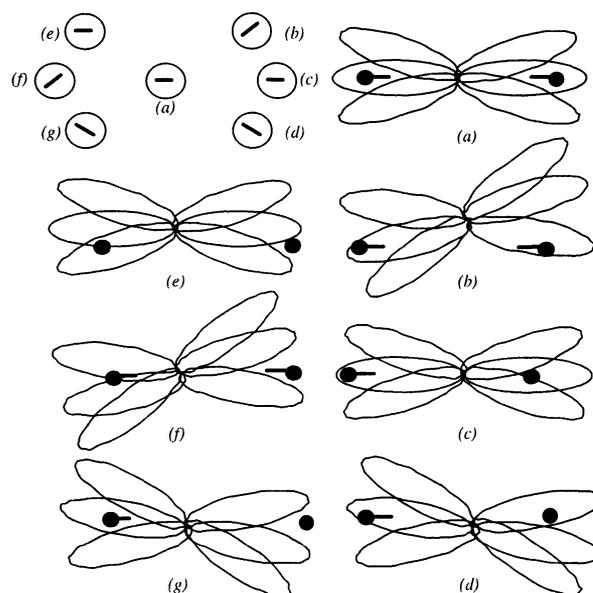


Figure 28: Champ de regroupement et champ d'association. On considère une cellule détectant l'orientation horizontale (a), activée par la présence dans son champ de regroupement de deux points-clés. On étudie les champs de regroupement de cellules voisines de (a), d'orientations et de positions diverses. Les cellules (b), (c) et (d) sont activées, contrairement aux cellules (e), (f) et (g). Ce résultat est conforme aux prévisions du champ d'association (on ne considère que des regroupements de type "para").

de courbure, ou, plus précisément, à la contrainte locale conjointe de position et d'orientation qu'exprime le champ d'association. On retrouve d'ailleurs cette contrainte dans les modèles de formation des contours subjectifs de Heitger et von der Heydt ou de Grossberg et Mingolla. Il faut cependant préciser comment des mécanismes de coopération au niveau global ont pour conséquence d'imposer au niveau local le respect des règles d'association. C'est manifeste chez Grossberg et Mingolla : au sein d'un même champ de coopération, les positions et orientations relatives des éléments orientés voisins sont conformes au champ d'association. Pour Heitger et von der Heydt, l'explication est donnée par la figure 28. Bien entendu, la forme globale du champ de coopération impose des contraintes supplémentaires, sur lesquelles nous reviendrons.

Notons que l'implémentation de cette règle est différente dans les trois modèles que nous avons retenus : grands champs récepteurs détectant les points-clés chez Heitger et von der Heydt, cellules dipôles de coopération chez Grossberg et Mingolla, connexions horizontales excitatrices pour notre schéma local.

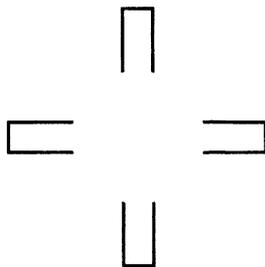


Figure 29: Le contour illusoire circulaire perçu à faible distance se transforme en carré lorsque l'on regarde la figure de loin. En effet, la courbure du contour projeté sur la rétine devient trop élevée, et un coin est créé à la place du contour lisse. A distance intermédiaire, la figure est bimodale. (D'après Ullman 1976).

6.3.2 Du local au global

Si l'on admet ces hypothèses, il devient naturel d'utiliser le formalisme géométrique introduit précédemment pour traiter de la forme globale des contours subjectifs modaux. Ceci suppose le retour à un cadre continu. On considère donc les contours comme des courbes tracées sur le plan euclidien M , muni des coordonnées (x, y) . On suppose, pour des raisons de simplicité, qu'un contour subjectif est extrapolé entre deux points A et B , où sont données les tangentes d'orientations θ_A et θ_B (conditions aux limites).⁹ L'orientation des tangentes peut être indifféremment la direction d'un bord inducteur, ou la direction orthogonale à une terminaison inductrice.

D'après ce qui précède, les contours subjectifs sont soumis à plusieurs contraintes du fait du champ d'association : ils doivent être continus, réguliers (C^1) et de courbure bornée. Cette dernière contrainte a une première conséquence : il existe des conditions initiales pour lesquelles aucune courbe répondant à ces critères ne peut exister. En effet, on peut montrer que toute courbe C^1 solution du problème possède au moins un point où le rayon de courbure est supérieur ou égal à

$$\rho = (r - R \cos \varphi)(1 - \cos \varphi)$$

où, si N_A et N_B sont les normales respectives à θ_A en A et à θ_B en B et si O est leur point d'intersection, on a $r = \text{distance}(O, NA)$, $R = \text{distance}(O, NB)$ (on suppose $r \leq R$) et $\varphi = \text{angle}(NA, NB)$. Ainsi, si K est la valeur maximale admissible pour la courbure, un contour lisse ne pourra pas exister si $\rho K \leq 1$. En revanche, un contour avec coin peut se former dans certaines conditions, comme en témoigne la figure 29.

Lorsque les conditions initiales permettent l'existence d'un contour compatible avec la contrainte locale d'association, celui-ci n'est en général pas unique : il existe une

⁹Selon nos conventions de notation, $a = (x, y)$ est un point général de M et A un point particulier.

infinité de courbes de courbure bornée, passant par deux points donnés et y admettant deux tangentes données. La question qui se pose alors est de savoir laquelle correspond au tracé du contour illusoire. Pour la définir, on a besoin d'une *contrainte géométrique supplémentaire*. On doit pouvoir l'exprimer dans le fibré de contact (ou fibré des 1-jets), puisque c'est cet espace qui est implémenté.

Nous allons donc nous consacrer maintenant à l'étude des différentes contraintes envisageables, de leur éventuelle signification biologique, et de leurs conséquences sur la forme des contours subjectifs. Nous reviendrons à cette occasion sur les modèles "biologiques" de formation des contours subjectifs, et nous comparerons leurs résultats avec les modèles d'extrapolation des contours utilisés en vision artificielle.

7 La forme globale des contours subjectifs

7.1 Les travaux pionniers de Shimon Ullman

Un des buts essentiels du traitement de l'image est la reconstruction de la structure tridimensionnelle d'une scène réelle à partir de ses projections bidimensionnelles. Ceci suppose de pouvoir reconstruire les objets, en particulier leurs parties masquées par des objets plus proches. D'où l'intérêt porté par les spécialistes au problème de l'extrapolation des contours des objets à partir de leurs parties visibles. Or le système visuel lui-même, comme nous l'avons vu, procède à ce type de reconstruction. Dans leur recherche du modèle de courbe idéal, les ingénieurs s'efforcent donc de s'inspirer des courbes perçues par les sujets humains, et éventuellement des processus de formation des contours à l'œuvre dans le système visuel, au fur et à mesure que ceux-ci sont révélés. C'est pourquoi ces travaux présentent un grand intérêt.

C'est à Ullman, dans son article de référence "Filling-in the gaps : the shape of subjective contours and a model for their generation" (1976), que l'on doit la première étude systématique de cette question. Ullman commence par remarquer que le problème de la forme globale des contours subjectifs modaux n'a pas encore (à l'époque où il écrit) été abordé :

«An important but hitherto neglected problem posed by the filling-in phenomena concerns the *shape* of the filled-in contours and trajectories.» (p. 1)

Se fondant sur des hypothèses physiologiquement plausibles, il prédit la forme des contours illusoires en utilisant *un principe variationnel sur la courbure* :

«It will be shown that a network with the local property of trying to keep the contours 'as straight as possible' can produce curves possessing the global property of minimizing total curvature.» (idem)

Plus précisément, il trouve que le contour serait formé de deux arcs de cercle raccordés de façon C^1 . Mais l'ensemble des courbes de ce type constitue une famille à cinq paramètres, et les conditions initiales n'en fixent que quatre. Il faut donc un critère supplémentaire pour sélectionner une unique courbe optimale. C'est là qu'intervient le principe de minimisation de la courbure totale (c'est-à-dire la quantité $\int_{\gamma} \kappa^2 ds$, où γ est le contour, κ la courbure locale et s l'abscisse curviligne).¹⁰ Ullman propose également un mécanisme neuronal pour la formation de ce contour. Enfin, il affirme que les quelques expériences de tracé de contour subjectif qu'il a menées sur des sujets confirment la validité de cette solution.

Parmi les hypothèses d'Ullman, celle qui distingue son modèle est l'hypothèse de localité (ou "d'extensibilité") : la prolongation d'un contour au-delà d'un point ne dépend que de l'orientation du contour en ce point, et non de la forme du reste du contour. Nous pensons que cette supposition n'est guère tenable du point de vue psychologique. Sur un plan plus mathématique, Brady, Grimson et Langridge (1980) contestent que la solution à laquelle aboutit Ullman puisse satisfaire tous ces critères, puisqu'ils sont mutuellement inconsistants. Ils renoncent donc à l'extensibilité et recherchent le contour qui minimise la courbure totale. Moyennant l'approximation de la courbure

$$\kappa = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}} \quad (2)$$

par $f''(x)$ lorsque les contours dévient peu de la droite d'équation $f'(x) = 0$, ils retombent sur la courbe classiquement utilisée dans les problèmes d'interpolation : la spline cubique. Dans les configurations symétriques, la solution est dégénérée et l'on obtient une parabole. C'est aussi à une parabole que Webb et Pervin (1984) aboutissent, sans chercher à minimiser la courbure, mais en généralisant l'hypothèse d'extensibilité : partant d'un contour extrapolé entre deux extrémités, si l'on déplace les conditions initiales le long de ce contour, on ne doit pas le modifier.

Cependant, les travaux plus récents (Mumford 1992, Nitzberg, Mumford et Shioita. 1993, Williams et Jacobs 1995) semblent s'accorder sur une famille de contours subjectifs, baptisés *elasticae*, présentés ci-dessous. Peu de mécanismes de formation ont été proposés. Nous allons montrer que les processus d'intégration locaux que nous avons introduits sont compatibles avec ce modèle de contours.

7.2 Modèles variationnels

Nous avons esquissé un mécanisme local de formation des contours subjectifs, dans lequel l'activité se propage, via les connexions horizontales cortico-corticales, selon les principes du champ d'association. Rappelons que, dans ce modèle simplifié et linéaire, un neurone activé induit l'activation des neurones voisins avec un amortissement. Par

¹⁰Notons que Sha'ashua et Ullman (1988) utilisent le même critère pour leur modèle de saillance perceptive. En revanche, personne ne semble s'être intéressé aux courbes minimisant $\int_{\gamma} |\kappa| ds$.

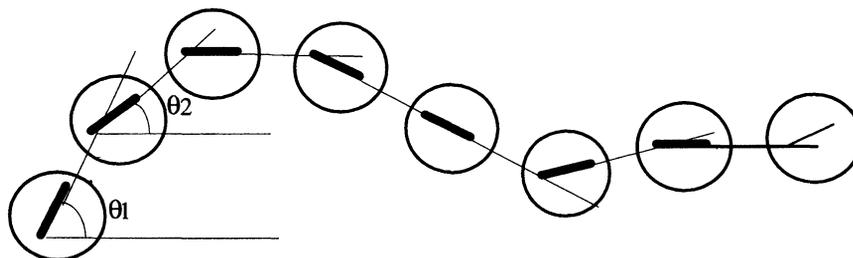


Figure 30: Un contour “neuronal” modélisé comme arc polygonal continu.

ailleurs, nous avons proposé une version “continue” du champ d’association, moins binaire que le schéma proposé par Field et ses collaborateurs et plus conforme à leurs résultats expérimentaux. En accord avec ce modèle, on supposera que *l’induction d’activité décroît* lorsque l’angle entre les orientations préférées du neurone inducteur et du neurone cible augmente, c’est à dire lorsque la courbure locale du contour correspondant augmente. Dans ce cadre continu, la contrainte de majoration de la courbure sur laquelle nous avons insisté apparaît naturellement : au-delà d’une certaine différence d’orientation, l’activité n’est pratiquement plus transmise, de sorte qu’il n’existe pas de contour présentant une aussi forte courbure.

Nous allons montrer que ces deux principes de transmission d’activité (amortissement constant et dépendance vis-à-vis de la courbure) peuvent, à condition de choisir une formulation mathématique adéquate, conduire à un *principe variationnel* régissant la forme des contours subjectifs. On suppose que l’activité induite des neurones voisins est égale à l’activité du neurone inducteur, à laquelle on soustrait un terme constant d’amortissement β , ainsi qu’un terme qui pénalise la courbure. Pour calculer ce dernier terme, on assimile le contour discrétisé, défini par un ensemble de neurones du type V1, à un arc polygonal continu γ (figure 30).

Un équivalent discret de la courbure totale $\int_{\gamma} \kappa^2 ds$ est alors la somme des carrés des variations angulaires successives $\sum_{k=1}^n (\theta_k - \theta_{k-1})^2$ car on a par définition $\kappa = \frac{d\theta}{ds}$. La pénalisation de la courbure sera choisie égale à ce terme multiplié par une constante α .

Ce principe de transmission d’activité permet l’interpolation entre deux extrémités inductrices. On suppose pour simplifier qu’il y a un seul neurone pour chaque valeur (discrétisée) de l’abscisse horizontale. Les seules sources d’activation (ou d’énergie, pour prendre une analogie physique) sont les deux extrémités inductrices. On suppose qu’elles sont identiques et égales à E_0 . Alors l’activation d’un neurone appartenant au contour est la somme des activations transmises (avec affaiblissement) à partir de ces deux sources. Cette activation est donc égale à $2E_0$ moins les “pertes en ligne”, pertes comportant deux termes :

- l’affaiblissement linéaire, égal, pour chacune des moitiés de contour issues des deux

extrémités, au nombre de neurones qui la composent multiplié par le paramètre constant β ;

- l'affaiblissement de courbure, égal, pour chacune des moitiés, à la somme des termes de courbure discrétisée associés aux paires de neurones successifs.

On néglige ici l'effet de l'activation transmise par d'autres neurones n'appartenant pas au contour considéré. Par exemple, on peut, comme Grossberg et Mingolla, considérer que des mécanismes de compétition locale empêchent l'activation de tels neurones. Notons par ailleurs que, du fait des simplifications adoptées, tous les neurones d'un même contour ont la même activation, que nous appellerons énergie du contour.

7.3 Remarques sur les modèles variationnels

Avant que d'en venir aux modèles explicites de contours subjectifs modaux comme solutions de problèmes variationnels et/ou d'équations différentielles, nous ferons deux remarques générales.

7.3.1 Remarque épistémologique

La première remarque est épistémologique. On entend souvent dire dans les milieux de sciences cognitives que les équations différentielles seraient trop compliquées pour pouvoir expliquer des processus perceptifs et que l'on ne voit d'ailleurs pas comment les neurones pourraient "savoir" comment interagir pour les intégrer. Outre le fait qu'il est invalidé par tous les travaux sur les réseaux de neurones et sur la vision artificielle fondés sur de tels modèles, un tel point de vue méconnaît profondément le rôle des mathématiques dans les sciences naturelles. L'argument est aussi naïf que celui des philosophes aristotéliens des époques de Newton et de Laplace qui se demandaient encore comment les planètes pouvaient "connaître" leurs distances relatives et "savoir" comment intégrer les équations différentielles du mouvement et/ou satisfaire au principe de moindre action qui les régit. Il n'est pas plus étonnant que le comportement de systèmes complexes de neurones puisse être régi par des équations différentielles que celui de systèmes physiques comme des ensembles de planètes, des particules élémentaires ou des fluides turbulents. Ces équations expriment des contraintes locales régulant des processus de propagation d'activités. Or l'on sait qu'elles sont en général dérivables de principes variationnels dont elles sont les équations d'Euler-Lagrange.

7.3.2 Remarque méthodologique

La seconde remarque est méthodologique. Etant donnée l'absence de connaissances fines sur les contours subjectifs modaux courbes, il est nécessaire d'investiguer *plusieurs* modèles de façon à pouvoir comparer leurs prédictions et les soumettre à une falsification expérimentale par les données empiriques. Ce n'est qu'ainsi que l'on pourra inférer

des conclusions sur les mécanismes neuronaux “fine grained” qui sont à l’œuvre dans l’intégration des contours.

Tous les modèles, qu’ils soient formulés dans la base M ou dans le fibré des 1-jets J^1M , devront satisfaire deux contraintes :

1. un principe “géodésique” de minimisation de longueur;
2. un principe d’architecture fonctionnelle imposant que l’induction d’activité décroisse lorsque l’écart entre les angles aux limites θ_A et θ_B croît.

Nous investiguerons en particulier trois classes de modèles :

1. les modèles de type “elasticae” où la contrainte 1 est réalisée par un principe géodésique dans M et la contrainte 2 par un principe de minimisation de courbure (toujours dans M);
2. les modèles de type “géodésiques legendriennes” où la contrainte 1 est formulée dans le fibré J^1M et la contrainte 2 correspond au choix d’une métrique de J^1M qui pénalise l’écart entre θ_A et θ_B ;
3. les modèles analogues dans le fibré en cercles sur M qui sont invariants par rotation.

7.4 Mécanisme local et elasticae

Comme premier modèle, commençons par passer à la version continue du modèle exposé plus haut. On peut toujours se ramener localement à un contour de la forme : $\gamma = \{(x, y = f(x)) \mid x \in [x_A = a, x_B = b]\}$. Les neurones deviennent ponctuels et en nombre infini. Dans le premier terme d’affaiblissement, le nombre de neurones correspond à la longueur du contour $\int_{\gamma} ds$. Dans le second, la somme des termes discrets pénalisant les changements d’orientation est remplacée par une intégrale, la courbure totale du contour $\int_{\gamma} \kappa^2 ds$.

Le contour sélectionné parmi tous les contours possibles est caractérisé par l’activation maximale des neurones qui le composent, donc par une énergie maximale. Ceci revient à dire que les termes d’affaiblissement doivent être *minimaux*. Dans la formulation continue, le contour interpolé est par conséquent solution du problème variationnel :

$$\min \left(\int_{\gamma} (\alpha \kappa^2 + \beta) ds \right) \quad (3)$$

avec les conditions initiales fixées aux extrémités :

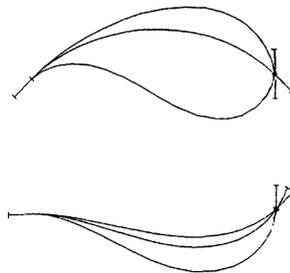


Figure 31: Quelques exemples d'elasticae obtenus pour diverses conditions initiales.

$$\begin{cases} f(x_A) = y_A, f'(x_A) = \tan \theta_A \\ f(x_B) = y_B, f'(x_B) = \tan \theta_B \end{cases} \quad (4)$$

On aboutit ainsi à un problème variationnel de forme relativement simple. En fait, c'est un problème bien connu des mathématiciens, mécaniciens et physiciens, puisqu'il apparaît naturellement en théorie des milieux élastiques. De plus, son étude est ancienne, puisqu'elle remonte à Euler. Ce problème a ensuite été redécouvert plusieurs fois, et récemment par les spécialistes du traitement d'image, qui cherchaient à reconstruire les contours sous occlusion (voir Horn 1981, Mumford 1992). Les courbes solutions de ce problème, baptisées *elasticae*, ne sont pas des courbes algébriques simples, mais, comme nous allons le voir en résumant certains travaux de David Mumford, on peut en donner une équation explicite à l'aide des fonctions elliptiques. Pour une étude géométrique détaillée, nous renvoyons à Bryant et Griffiths (1986) (cf. aussi la section 9.5). La figure 31 présente quelques exemples d'elasticae.

7.5 La théorie des elasticae de David Mumford

Dans une étude remarquable de 1992 "Elastica and Computer Vision", David Mumford a développé une explication *stochastique* du rôle des elasticae en vision. On suppose que la courbure $\kappa(s)$ de la courbe γ (paramétrée par sa longueur d'arc s) est un *bruit blanc*. Comme $\kappa(s) = \dot{\theta}(s)$ (où $\theta(s)$ est la pente de γ et $\dot{\theta}(s)$ la dérivée $\frac{d\theta(s)}{ds}$ de $\theta(s)$ par rapport à s), cela signifie que $\theta(s)$ est un *mouvement brownien*, autrement dit que, en chaque instant, le mouvement est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance σ . Si l'on suppose de plus que la longueur l de γ est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle $\lambda e^{-\lambda l}$ (l est donc constante pour $\lambda = 0$), alors la probabilité d'une courbe γ particulière est donnée par :

$$Pr(\gamma) = e^{-\int (\alpha \kappa^2 + \beta) ds} \quad (5)$$

avec $\alpha = \frac{1}{2\sigma^2}$ et $\beta = \lambda$. Ce sont par conséquent les elasticae qui sont les courbes les plus probables. Comme l'affirme Mumford (1992) :

«Thus we see that elastica have the interpretation of being the *mode* of the probability distribution underlying this stochastic process restricted to curves with prescribed boundary behavior, e.g., the maximum likelihood curve with which to reconstruct hidden contours.» (p. 496)

Les elasticae sont solutions d'une équation différentielle du second ordre en la courbure κ . On en trouvera une dérivation "à la main" dans l'article de Mumford. On part du fait bien connu (méthode du repère mobile, cf. plus bas sections 8.2.3 et 9.5.1) que si $t(s)$ et $n(s)$ sont respectivement la tangente et la normale à γ au point $a(s)$, alors

$$\begin{cases} \dot{a}(s) = t(s) \\ \dot{t}(s) = \kappa(s).n(s) \\ \dot{n}(s) = -\kappa(s).t(s) \end{cases} \quad (6)$$

On considère alors une déformation $a_\delta(s) = a(s) + \delta(s).n(s)$ de $a(s)$ (i.e. de γ). En dérivant et en explicitant la condition de préservation des longueurs on obtient une estimation au premier ordre de la courbure $\kappa_\delta(s)$ de $a_\delta(s)$:

$$\kappa_\delta(s) = \kappa(s) + \ddot{\delta}(s) + \delta(s)\kappa(s)^2 .$$

En recalculant l'intégrale $\int \kappa(s)^2 ds$, en développant au premier ordre et en faisant une intégration par parties en tenant compte de la condition $\int \delta(s)\kappa(s)ds = 0$ (exprimant que la longueur $\int ds$ reste constante), on obtient la contrainte :

$$\int (2\ddot{\kappa}(s) + \kappa(s)^3) \delta(s)ds = 0 \quad \text{si} \quad \int \delta(s)\kappa(s)ds = 0.$$

D'où l'équation différentielle :

$$2\ddot{\kappa}(s) + \kappa(s)^3 = \beta\kappa(s).$$

En multipliant par $\dot{\kappa}(s)$ et en intégrant, on obtient :

$$\dot{\kappa}(s)^2 + \frac{1}{4}\kappa(s)^4 = \frac{\beta}{2}\kappa(s)^2 + c \quad (7)$$

où c est une constante d'intégration.

La relation entre κ et s est donc donnée par une intégrale elliptique :

$$s = \int \frac{2d\kappa}{\sqrt{-\kappa^4 + 2\beta\kappa^2 + c}} . \quad (8)$$

Si E est la courbe elliptique d'équation :

$$v^2 = -u^4 + 2\beta u^2 + c ,$$

l'application $s \mapsto (\kappa(s), 2\dot{\kappa}(s))$ envoie l'elastica γ sur E . En utilisant la théorie classique des courbes elliptiques Mumford montre alors comment une elastica peut être paramétrée par des fonctions théta.

7.6 Intérêt des *elasticae*

Evidemment, faute de résultats empiriques suffisamment précis, on ne peut pas prétendre avoir ainsi prouvé que les contours subjectifs sont bien des *elasticae*. Les seules conclusions auxquelles on peut légitimement se risquer sont les suivantes :

1. Si les connexions horizontales au sein du cortex visuel jouent un rôle dans la formation des contours subjectifs, alors ces connexions sont de nature à imposer à ces contours des contraintes de faible longueur et de faible courbure.
2. Ces contraintes sont compatibles avec les résultats psychologiques.
3. Les *elasticae* sont les courbes qui minimisent les critères de longueur et de courbure totale, et sont certainement proches des contours subjectifs, étant entendu que ces derniers résultent de processus discrets.

Notons en outre qu'un travail de Williams et Jacobs (1995) propose une démarche, assez proche de celle Mumford, fondée sur un processus stochastique de marche aléatoire. Les fortes courbures sont alors pénalisées par une moindre probabilité d'être activées à un niveau fixe. Les courbes correspondant aux contours subjectifs sont caractérisées comme les plus probables parmi les trajectoires joignant les deux extrémités. Mais la plausibilité biologique d'un processus neuronal stochastique n'est pas évidente.

7.7 D'autres mécanismes de formation des contours

Les mécanismes proposés par Grossberg et Mingolla (1985a, 1985b, 1987) et par Heitger et von der Heydt (1993) (cf. section 3) intègrent implicitement les règles d'association, et les contours qu'ils engendrent sont par conséquent continus, lisses et de courbure bornée. Il est plus difficile de mettre en lumière les autres contraintes auxquelles ces modèles soumettent les contours : le modèle de Heitger et von der Heydt n'est formulé que qualitativement, sans équations, et celui de Grossberg et Mingolla est trop riche pour qu'on puisse calculer la forme des contours qui en résultent.

Toutefois, une analogie existe entre le modèle de Grossberg et Mingolla et celui de Williams et Jacobs. En effet, le renforcement qu'impose une cellule dipôle aux différents éléments orientés (champ de coopération) chez les premiers, est identique à la répartition des probabilités d'activation à partir d'un point source (champ stochastique) chez les seconds. Nous suggérons donc que, chez Grossberg et Mingolla, la contrainte imposée par le champ de coopération (ou champ de dipôles) tend à imposer une forme proche des *elasticae*. Ce rapprochement est d'ailleurs la preuve que des mécanismes purement locaux, comme ceux proposés par Williams et Jacobs, permettent d'obtenir à moindre frais les mêmes résultats que les intégrations globales du modèle de Grossberg et Mingolla.

8 Contours subjectifs et fibrés de contact

8.1 Des *elasticae* à l'optimalité dans l'espace des jets

Nous avons jusqu'ici considéré la forme des contours subjectifs en tant que courbes planes. Mais, comme nous l'avons rappelé plus haut, ce n'est pas le plan visuel qui est implémenté dans l'aire $V1$, mais son *fibré de contact*. La question se pose donc naturellement de savoir comment les courbes optimales peuvent être caractérisées dans cet espace.

Les relevées d'*elasticae* dans le fibré de contact ne sont guère faciles à définir (cf. plus bas section 8.6). Nous allons donc procéder en sens inverse et nous intéresser aux courbes solutions d'un *problème variationnel dans le fibré de contact*, en commençant par les fonctionnelles les plus simples. L'idée est de définir un critère "géodésique" donnant un nouveau sens à l'intuition de Ullman que les contours subjectifs doivent être "as straight as possible". Nous présentons deux familles de fonctionnelles, dont l'une est très naturelle mais analytiquement compliquée et dont l'autre se prête à une explicitation analytique complète. Nous verrons qu'en fait les projections de ces courbes sur la variété de base sont des courbes présentant de fortes analogies avec les *elasticae*.

Pour pouvoir définir des lagrangiens dans le fibré de contact (ou l'espace des 1-jets J^1M , ou tout autre fibré codant aussi dans sa fibre l'orientation des éléments, i.e. la pente des tangentes des courbes γ de la base M) il faut définir une *métrique*. Cette métrique doit refléter une propriété de l'architecture fonctionnelle définie par les connexions horizontales cortico-corticales, à savoir que, d'après la structure même du champ d'association, les connexions s'affaiblissent lorsque l'écart augmente entre les orientations aux limites θ_A et θ_B . Si θ est mesuré à partir de la direction AB , l'affaiblissement doit donc être nul pour $\theta = 0$ et diverger pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.

On se limitera, toujours pour des raisons de simplicité de notations, aux courbes γ du plan paramétrées par leur abscisse, sous la forme $(x, f(x))$ et on prendra pour axe des abscisses la droite AB . La relevée legendrienne dans le fibré des jets est alors $(x, y, p) = (x, f(x), f'(x))$. Par conséquent, la courbe relevée possède des variations le long de la troisième coordonnée p d'autant plus importantes que la courbe plane correspondante "oscille" beaucoup, c'est-à-dire change souvent d'orientation. Cette observation permet de comparer les solutions au problème d'interpolation dans le plan en comparant leurs relevées. En effet le déplacement élémentaire le long d'une courbe relevée est constitué de deux composantes :

- un déplacement "horizontal" dans le plan M de coordonnées (x, y) , correspondant à l'élément de longueur de la projection plane,
- un déplacement "vertical" suivant la coordonnée p , dont la longueur mesure les variations de l'orientation, donc (qualitativement) la "courbure" de la projection plane.

Comme nous venons de le voir, la condition $\theta_A = \theta_B$ doit favoriser optimalement l'établissement d'un contour subjectif (le segment AB), $\theta \neq 0$ doit être pénalisé et, à la limite, $\theta_A = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta_B = \frac{\pi}{2}$ doivent être interdits. $p = f' = \tan \theta$ est une bonne mesure pour cette condition et c'est pourquoi il semble justifié de commencer par tester la métrique *euclidienne* de J^1M .

Ainsi, le déplacement total dans l'espace des jets associe longueur et courbure de la courbe plane, comme l'énergie que minimise les *elasticae*. Les courbes relevées qui minimisent l'intégrale de ce déplacement se projettent donc selon des courbes proches des *elasticae*, ou qui minimisent en tous cas un critère équivalent. L'intégrale du déplacement sera prise entre les deux points (x_A, y_A, p_A) et (x_B, y_B, p_B) de l'espace des 1-jets J^1M correspondant aux conditions initiales dans le plan.

8.2 Les “géodésiques legendriennes” dans le fibré de contact

8.2.1 Les équations d'Euler-Lagrange et leur intégration au moyen d'intégrales elliptiques

Le déplacement élémentaire le long d'une courbe relevée est l'élément de longueur de cette courbe. On va s'intéresser aux courbes de longueur minimale dans l'espace des 1-jets, isomorphe à \mathbb{R}^3 muni de sa structure euclidienne canonique. Les courbes de longueur minimale sur une variété sont appelées des “géodésiques”, mais nous ne nous intéressons pas ici aux minima absolus (qui sont des droites, en général non legendriennes), mais aux courbes minimales *parmi celles qui sont des relevées legendriennes*, c'est-à-dire parmi celles qui sont intégrales de la structure de contact. C'est donc à un problème de *minimisation sous contrainte* que nous avons affaire. Ses solutions sont en quelque sorte des *géodésiques legendriennes*.

Ce problème variationnel se résout classiquement au moyen des équations d'Euler-Lagrange. Nous en rappelons brièvement le principe :¹¹

- pour rechercher les courbes qui minimisent une fonctionnelle, on considère comme des variables *indépendantes* la position et la vitesse le long de la courbe, c'est-à-dire que l'on se place dans le fibré tangent;
- pour les courbes minimales, la variation de la fonctionnelle lors d'un déplacement infinitésimal dans le fibré tangent s'annule, ce qui permet de caractériser ces courbes par une équation aux dérivées partielles.

Plus précisément, on se place dans le fibré tangent de $J^1M = \mathbb{R}^3$, espace de dimension 6 où les coordonnées sont $(x, y, p; \xi, \eta, \pi)$. La fonctionnelle à minimiser est la longueur $\int_{x_A}^{x_B} ds$ où, étant donné le choix de la métrique euclidienne, ds est la différentielle de longueur d'arc donnée par :

¹¹Pour une introduction plus complète, voir par exemple Bourguignon 1993.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dp^2.$$

Il faut minimiser l'intégrale $E = \int_{x_A}^{x_B} L(x)dx$, où le lagrangien L est donné, pour une courbe de la forme $(x, f(x), f'(x))$, par la formule $L(x)dx = ds$, soit :

$$L(x) = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \pi^2} = \sqrt{1 + f'(x)^2 + f''(x)^2}. \quad (9)$$

Les équations d'Euler-Lagrange non contraintes associées sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial \eta} \right) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial p} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial \pi} \right) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Mais on ne peut pas les appliquer comme telles car il faut tenir compte de la contrainte exprimant le fait que les courbes recherchées sont des intégrales de la structure de contact et satisfont par conséquent $p = f'(x)$, i.e. $p = \eta$. Cette contrainte — appelée “cinématique” — s'écrit sous la forme : $\Sigma = 0$, avec $\Sigma = p - \eta$. Si l'on préfère, on peut la remplacer par la contrainte intégrale $\Gamma = \int_{x_A}^{x_B} (p - \eta)^2 dx = 0$. Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) (L + \lambda \Sigma) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial \pi} \right) (L + \lambda \Sigma) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

où $\lambda(x)$ est une fonction, appelée *multiplicateur de Lagrange*. L'idée est que les équations d'Euler-Lagrange pour le lagrangien L sous la contrainte $\Sigma = 0$ sont les mêmes que les équations d'Euler-Lagrange sans contrainte pour le lagrangien $L + \lambda \Sigma$.

En substituant les expressions de L et de Σ dans les équations et en exprimant les variables y, p, η, π en fonction de x , il vient :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial L}{\partial \eta} - \lambda(x) \right] = 0 \\ \lambda(x) - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \pi} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

soit dans notre cas :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2+f''(x)^2}} - \lambda(x) \right] = 0 \\ \lambda(x) - \frac{d}{dx} \frac{f''(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2+f''(x)^2}} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Intégrons une fois la première équation différentielle, et éliminons $\lambda(x)$ avec la seconde. Il existe une constante A telle que :

$$\frac{\partial L}{\partial f'} = A + \lambda(x) = A + \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f''}, \quad (14)$$

soit :

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2 + f''(x)^2}} = A + \frac{d}{dx} \frac{f''(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2 + f''(x)^2}} . \quad (15)$$

On développe alors la dérivée totale :

$$\frac{dL}{dx} = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial f} f' + \frac{\partial L}{\partial f'} f'' + \frac{\partial L}{\partial f''} f''' = \frac{\partial L}{\partial f'} f'' + \frac{\partial L}{\partial f''} f''' .$$

Comme par ailleurs,

$$\frac{d}{dx} \left(f'' \frac{\partial L}{\partial f''} \right) = f''' \frac{\partial L}{\partial f''} + f'' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial f''} \right) = f''' \frac{\partial L}{\partial f''} + f'' \left(\frac{\partial L}{\partial f'} - A \right)$$

d'après (14) on a donc :

$$\frac{dL}{dx} = \frac{d}{dx} \left(f'' \frac{\partial L}{\partial f''} \right) + Af''$$

ou encore :

$$\frac{d}{dx} \left(L - f'' \frac{\partial L}{\partial f''} \right) = Af'' , \quad (16)$$

ce qui donne par intégration :

$$L - f'' \frac{\partial L}{\partial f''} = Af' + B . \quad (17)$$

Dans notre cas, il vient :

$$\frac{f'(x)f''(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2 + f''(x)^2}} = Af''(x) + \frac{d}{dx} \frac{f''(x)^2}{\sqrt{1 + f'(x)^2 + f''(x)^2}} - \frac{f''(x)f'''(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2 + f''(x)^2}} \quad (18)$$

et par intégration :

$$\sqrt{1 + f'(x)^2 + f''(x)^2} = Af'(x) + B + \frac{f''(x)^2}{\sqrt{1 + f'(x)^2 + f''(x)^2}} \quad (19)$$

ou encore, en multipliant les deux membres par $\sqrt{1 + f'(x)^2 + f''(x)^2}$:

$$1 + f'(x)^2 = (Af'(x) + B)\sqrt{1 + f'(x)^2 + f''(x)^2} . \quad (20)$$

Nous obtenons ainsi une équation différentielle du premier ordre en f' . Il n'est pas possible de l'intégrer exactement dans le cas général, mais on peut quand même s'en faire une idée. En élevant l'équation précédente au carré et en posant $g = f'$, on obtient l'équation :

$$(g')^2 = \frac{(1 + g^2)^2 - (1 + g^2)(Ag + B)^2}{(Ag + B)^2} \quad (21)$$

dont la solution est donnée par l'intégrale elliptique (exprimant x en fonction de g et non pas g en fonction de x) avec une constante C d'intégration :

$$x = C + \int_a^{g(x)} \frac{At + B}{\sqrt{(1 + t^2) [(1 + t^2) - (At + B)^2]}} dt . \quad (22)$$

Les solutions $f(x)$ des équations d'Euler-Lagrange pour les relevées géodésiques sont donc des intégrales de fonctions elliptiques associées aux courbes elliptiques d'équation :

$$v^2 = \frac{(1 + u^2) [(1 + u^2) - (Au + B)^2]}{(Au + B)^2} .$$

8.2.2 Intégration numérique dans le cas symétrique

Pour simplifier la résolution de l'équation on peut se situer dans le cas où f est *paire*, i.e. où il y a une *symétrie* $x \leftrightarrow -x$. Cette contrainte implique immédiatement $A = 0$, d'où, en posant $k = 1/B$, l'équation différentielle pour $g = f'$:

$$(g')^2 = (1 + g^2) [k^2 (1 + g^2) - 1] . \quad (23)$$

Le paramètre k est lié à la courbure. En fait (cf. plus bas), $k^2 - 1 = \kappa(0)^2$. Comme (si f est dérivable en 0) la symétrie impose $f'(0) = g(0) = 0$, on doit avoir $f''(0)^2 = g'(0)^2 = k^2 - 1 \geq 0$, et donc $|k| \geq 1$. On obtient ainsi

$$x = C + \int_0^{g(x)} \frac{1}{\sqrt{(1 + t^2) (1 + \frac{k^2}{k^2 - 1} t^2)}} dt , \quad (24)$$

qui est une intégrale elliptique bien connue de première espèce.¹²

La figure 32 montre comment la solution $g = f'$ évolue lorsque k varie de 1 à 1.65 par pas de 0.5. On voit la pente de la tangente aux extrémités $p_A = \tan \theta_A$ et $p_B = \tan \theta_B$ augmenter en module. La figure 33 montre l'évolution de l'intégrale f de g lorsque les tangentes au bord se redressent ainsi que celle des "géodésiques" legendriennes associées dans l'espace des 1-jets J^1M .

La figure 34 montre dans le plan de base M et dans le fibré J^1M comment la géodésique legendrienne correspondant à la valeur $k = 1.5$ s'insère entre l'arc de cercle, l'arc de parabole et la solution linéaire par morceaux. Le tableau suivant montre bien la minimisation de la longueur de ces courbes gauches :

¹²On remarquera que g est *périodique* à cause de la périodicité des fonctions elliptiques et possède des *pôles*.

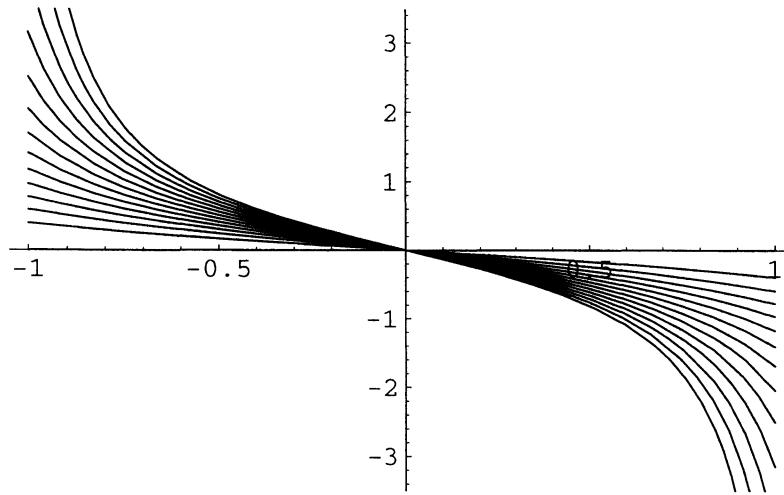


Figure 32: Evolution des solutions $g = f'$ lorsque le paramètre k varie de 1 à 1.65 par pas de 0.05.

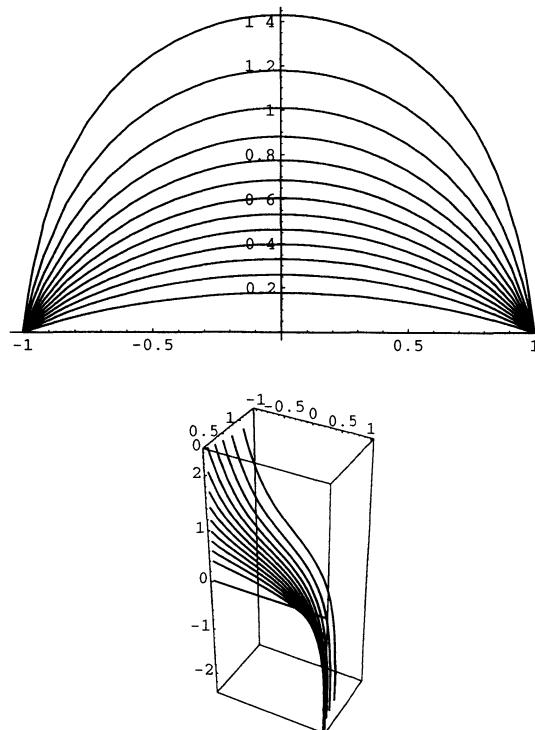


Figure 33: Evolution des courbes solutions f et de leurs relevées géodésiques pour des tangentes aux bords de plus en plus verticales.

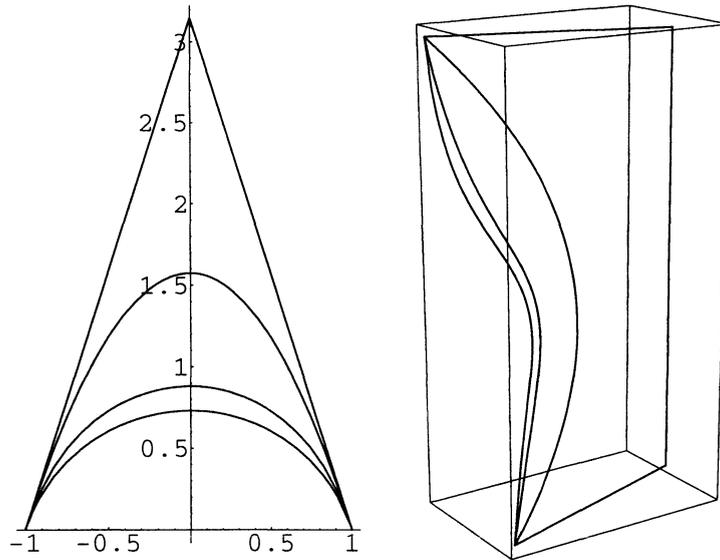


Figure 34: Dans cette configuration symétrique, la géodésique legendrienne est intermédiaire entre d'un côté l'arc de cercle et d'un autre côté la parabole et la solution linéaire par morceaux.

Type des courbes	Géodésique	Arc de cercle	Arc de parabole	Linéaire par morceaux
Longueur	7.02277	7.04481	7.50298	12.9054

8.2.3 Equation différentielle sur la courbure

Par comparaison avec les elasticae, on peut essayer d'obtenir une équation différentielle sur la courbure. Rappelons que, si s est la longueur d'arc et $a = (x, y = f)$ est un point sur la courbe, le vecteur tangent unitaire en a est donné par $t = \frac{da}{ds} = \dot{a} = \frac{(1, f')}{\sqrt{1+(f')^2}}$ (car $ds = \sqrt{1+(f')^2} dx$). Le vecteur normal unitaire n en a est donc donné par $n = \frac{(-f', 1)}{\sqrt{1+(f')^2}}$ et de la formule $\frac{dt}{ds} = \kappa n = \frac{(-f'f'', f'')}{(1+(f')^2)^2}$ on tire la courbure :

$$\kappa = \frac{f''}{(1+(f')^2)^{3/2}}. \quad (25)$$

Si $g = f'$, on obtient par conséquent le système d'équations :¹³

¹³On remarquera que, comme $g(0) = 0$, ces équations donnent $g'(0)^2 = k^2 - 1$ et donc la relation $\kappa(0)^2 = k^2 - 1$ évoquée plus haut.

$$\begin{cases} \kappa = \frac{g'}{(1+g^2)^{3/2}} \\ (g')^2 = (1+g^2) [k^2(1+g^2) - 1] . \end{cases} \quad (26)$$

Par élimination,¹⁴ on obtient l'équation bicarrée en $\dot{\kappa} = \frac{d\kappa}{ds}$:

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}^4 + \dot{\kappa}^2 (2\kappa + k^2) (2\kappa - k^2) (2\kappa^2 - k^2 (k^2 - 1)) + \\ + \kappa^2 (2\kappa + k^2)^2 (2\kappa - k^2)^2 (\kappa^2 - (k^2 - 1)) = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

dont les solutions sont:

$$\dot{\kappa}^2 = \frac{1}{2} \left[k^2 (k^2 - 1) - 2\kappa^2 \mp (k^2 - 1) \sqrt{(k^2 - 2\kappa)(k^2 + 2\kappa)} \right]. \quad (28)$$

Pour $k^2 = 2$, on obtient l'équation simplifiée :

$$\dot{\kappa}^2 = (1 - \kappa^2) \mp \sqrt{1 - \kappa^2} \quad (29)$$

que l'on pourra comparer à celle des elasticae donnée à la section 7.5 :

$$\dot{\kappa}^2 + \frac{1}{4}\kappa^4 = \frac{\beta}{2}\kappa^2 + c . \quad (30)$$

8.3 Les équations d'Euler-Lagrange en termes de longueur d'arc

On peut reformuler les calculs précédents de façon un peu plus intrinsèque en exprimant la 1-forme $\varphi = Ldx = L_0 ds$ en termes de longueur d'arc $ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$. Comme $f' = \tan \theta$ et $f'' = \dot{\theta} \sec^2 \theta$, $\kappa = \dot{\theta}$, on obtient

$$L_0 = \left(1 + \dot{\theta}^2 \sec^4 \theta \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Ce lagrangien montre que la brisure de symétrie que nous avons introduite est toute relative. Si en effet on change θ en $\vartheta = \theta + \theta_0$, on a $\dot{\theta} = \dot{\vartheta}$. On doit donc résoudre essentiellement la même équation.

Un calcul trivial donne alors :

$$\frac{\partial L_0}{\partial \theta} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{\theta}} \right) = - \frac{\sec^4 \theta}{\left(1 + \dot{\theta}^2 \sec^4 \theta \right)^{\frac{3}{2}}} \left(\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}^2 \tan \theta \right) . \quad (31)$$

¹⁴On remplace $(g')^2$ par sa valeur dans $\kappa^2 = \frac{k^2(1+g^2)-1}{(1+g^2)^2}$, puis on dérive κ et la seconde équation ce qui permet d'exprimer $\kappa' = \frac{d\kappa}{dx}$ et $\dot{\kappa} = \frac{d\kappa}{ds}$ en fonction de g . On obtient $\dot{\kappa} = \pm \frac{g[2-k^2(1+g^2)]}{(1+g^2)^2}$. Enfin on élimine g entre κ^2 et $\dot{\kappa}$.

On veut minimiser la longueur $\int_{s_A=0}^{s_B} L_0 ds$ avec les conditions aux limites $\theta(0) = \theta_A$, $\theta(s_B) = \theta_B$ et la contrainte intégrale $x_B = \int_0^{s_B} \cos \theta(s) ds = cste$ exprimant que les extrémités x_A et x_B sont fixes. On est par suite conduit à introduire un multiplicateur de Lagrange λ et à considérer l'équation d'Euler-Lagrange pour le lagrangien $L_1 = L_0 + \lambda \Sigma$ avec $\Sigma = \cos \theta$. On trouve :

$$\frac{\partial L_0}{\partial \theta} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{\theta}} \right) = \lambda \sin \theta \quad (32)$$

avec la contrainte au bord $\frac{\partial L_1}{\partial \dot{\theta}}(s_B) = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\theta}}(s_B) = 0$ venant du fait que la valeur en l'extrémité s_B n'est pas fixée.

Cette équation d'Euler-Lagrange admet une formulation intégrale qui se calcule de la même façon qu'à la section 8.2.1. On part de la dérivée totale :

$$\frac{dL_0}{ds} = \frac{\partial L_0}{\partial s} + \dot{\theta} \frac{\partial L_0}{\partial \theta} + \ddot{\theta} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\theta}} = \dot{\theta} \frac{\partial L_0}{\partial \theta} + \ddot{\theta} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\theta}}$$

et de la dérivée du produit :

$$\frac{d}{ds} \left(\dot{\theta} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\theta}} \right) = \dot{\theta} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{\theta}} \right) + \ddot{\theta} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\theta}}$$

Mais d'après l'équation (32) on a :

$$\dot{\theta} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{\theta}} \right) = \dot{\theta} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \theta} - \lambda \sin \theta \right)$$

et donc :

$$\frac{d}{ds} \left(\dot{\theta} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\theta}} \right) = \dot{\theta} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \theta} - \lambda \sin \theta \right) + \ddot{\theta} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\theta}}$$

Comme $\dot{\theta} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\theta}} + \ddot{\theta} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\theta}} = \frac{dL_0}{ds}$, on obtient en définitive :

$$\frac{d}{ds} \left(L_0 - \dot{\theta} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\theta}} \right) = \lambda \dot{\theta} \sin \theta = -\lambda \frac{d}{ds} (\cos \theta)$$

d'où, à une constante près,

$$L_0 - \dot{\theta} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\theta}} = -\lambda \cos \theta. \quad (33)$$

Les équations (32) et (33) impliquent l'équation différentielle :

$$\left[\frac{\partial L_0}{\partial \theta} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{\theta}} \right) \right]^2 + \left[L_0 - \dot{\theta} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\theta}} \right]^2 = \lambda^2$$

soit :

$$(1 + \kappa^2 \sec^4 \theta)^2 + \sec^8 \theta (\dot{\kappa} + 2\kappa^2 \tan \theta)^2 = \lambda^2 (1 + \kappa^2 \sec^4 \theta)^3. \quad (34)$$

8.4 Le modèle du fibré en cercles

On peut aussi appliquer les calculs précédents au cas, plus symétrique, de la fibration de fibre S^1 (cf. section 7.4) dont le fibré tangent a pour coordonnées locales $(x, y, \theta; \xi, \eta, \varphi)$ et dont la métrique est donnée par :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + d\theta^2.$$

On doit alors partir du lagrangien :

$$L(x) = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \varphi^2} = \sqrt{1 + f'(x)^2 + \frac{f''(x)^2}{(1 + f'(x)^2)}}. \quad (35)$$

En effet $\theta = \text{Arctan}(f')$ et donc $\varphi = \theta' = \frac{f''(x)}{1+f'(x)^2}$. La contrainte cinématique s'écrit maintenant $\Sigma = 0$, avec $\Sigma = \theta - \text{Arctan}(\eta)$, et les équations d'Euler-Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial L}{\partial \eta} + \lambda \frac{\partial \Sigma}{\partial \eta} \right] = 0 \\ \lambda \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \end{cases} \quad (36)$$

avec $\frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} = 1$ et $\frac{\partial \Sigma}{\partial \eta} = -\frac{1}{1+\eta^2}$. On obtient donc :

$$\frac{\partial L}{\partial f'} = A - \lambda \frac{\partial \Sigma}{\partial \eta} = A - \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \right)^{-1} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial \Sigma}{\partial \eta} \quad (37)$$

On développe alors la dérivée totale :

$$\frac{dL}{dx} = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial f'} f' + \frac{\partial L}{\partial f''} f'' + \frac{\partial L}{\partial \varphi} \varphi' = \frac{\partial L}{\partial f''} f'' + \frac{\partial L}{\partial \varphi} \varphi',$$

on écrit :

$$\frac{d}{dx} \left(\varphi \frac{\partial L}{\partial \varphi} \right) = \varphi' \frac{\partial L}{\partial \varphi} + \varphi \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi} \right) = \varphi' \frac{\partial L}{\partial \varphi} + \varphi \left(A - \frac{\partial L}{\partial f'} \right) \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \eta} \right)^{-1},$$

d'où :

$$\frac{dL}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\varphi \frac{\partial L}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial L}{\partial f''} f'' - \varphi \left(A - \frac{\partial L}{\partial f'} \right) \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \eta} \right)^{-1}.$$

Mais comme $\frac{\partial \Sigma}{\partial \eta} = -\frac{1}{1+\eta^2}$, $\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \eta} \right)^{-1} = -(1+\eta^2)$, on a $-\varphi \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \eta} \right)^{-1} = f''$ et donc :

$$\frac{d}{dx} \left(L - \varphi \frac{\partial L}{\partial \varphi} \right) = A f'' ,$$

équation à comparer à l'équation (16). L'intégration donne :

$$L - \varphi \frac{\partial L}{\partial \varphi} = A f' + B . \quad (38)$$

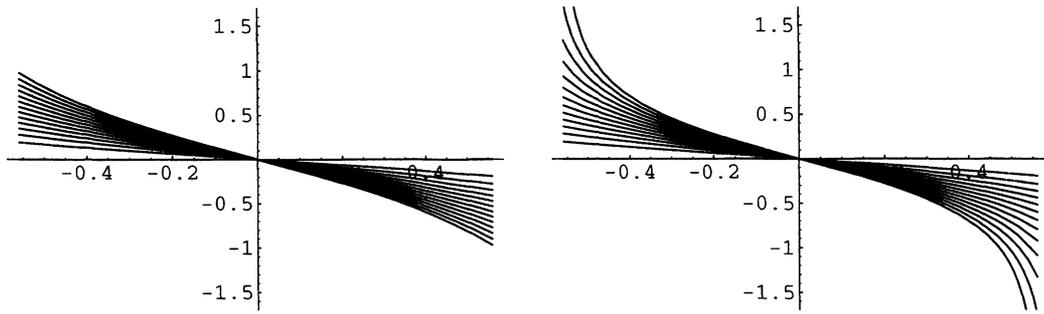


Figure 35: Comparaison des familles des solutions (en $g = f'$) des deux équations différentielles.

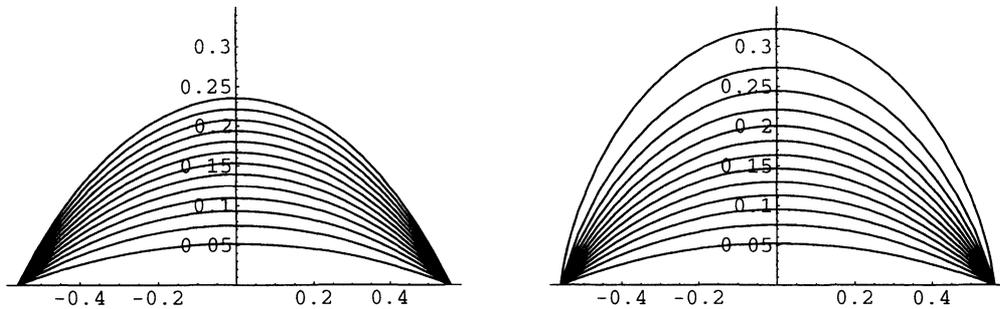


Figure 36: Comparaison des courbes intégrales des deux équations différentielles.

Un calcul analogue au précédent donne alors (avec $g = f'$) :

$$(g')^2 = \frac{(1 + g^2)^4 - (1 + g^2)^3 (Ag + B)^2}{(Ag + B)^2}, \quad (39)$$

équation à comparer à l'équation précédente (21). Dans le cas symétrique $A = 0$, on obtient (avec $k = 1/B$) :

$$(g')^2 = (1 + g^2)^3 [k^2 (1 + g^2) - 1] \quad (40)$$

à comparer à l'équation (23).

Les figures 35 et 36 comparent les solutions de cette équation (sur l'intervalle $(-0.56, 0.56)$ car des singularités apparaissent sur des intervalles plus grands) avec celles de l'équation (23). Quant à la figure 37 elle compare les solutions des deux équations pour les mêmes conditions aux bord $p_A = -p_B = 0.6495$. Le module k change d'une courbe à l'autre : il est de 1.4 pour la première (la plus haute) et de 1.32745 pour la seconde (la plus basse).

On voit que pour des conditions aux limites acceptables (i.e. des pentes pas trop accentuées) les solutions des deux équations sont voisines. Mais elles se séparent nettement

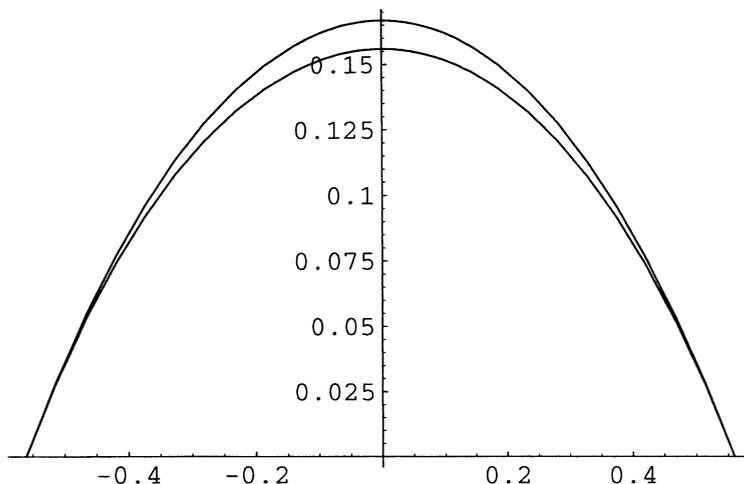


Figure 37: Comparaison des courbes intégrales des deux équations différentielles pour les mêmes conditions aux limites $p_A = -p_B = 0.6495$.

lorsque les pentes aux limites s'accroissent. Par exemple pour un module de $k = 2$ dans l'équation (40) on a $p_A = -p_B = 6.594$, ce qui correspond à un module de $k = 3.3423$ dans l'équation (23). La figure 38 montre la comparaison des deux solutions. On voit qu'elles divergent notablement et que celle de la première équation monte beaucoup plus haut que celle de la seconde.

Evidemment un départage empirique peut paraître sans espoir puisque ces conditions sont précisément celles pour lesquelles les contours subjectifs disparaissent. Mais il existe d'autres possibilités d'expérience. La *motricité* et le mouvement peuvent prendre le relai de la perception et l'on peut demander à des sujets de tracer manuellement des extrapolations. Il semble que dans ce cas le premier modèle soit nettement plus adéquat.

En ce qui concerne l'équation différentielle sur la courbure, elle est beaucoup plus simple dans le cas du fibré en cercles. On obtient en effet :

$$\begin{cases} \kappa^2 = \frac{(g')^2}{(1+g^2)^3} = \frac{(1+g^2)^3 [k^2(1+g^2)-1]}{(1+g^2)^3} = k^2(1+g^2) - 1 \\ \dot{\kappa} = k^2 g (1+g^2) \end{cases} \quad (41)$$

et l'élimination de g donne l'équation relativement simple :

$$\dot{\kappa}^2 k^2 = (\kappa^2 + 1 - k^2) (1 + \kappa^2)^2, \quad (42)$$

à comparer à l'équation (27).

Cette équation peut être intégrée explicitement. On obtient (C est une constante d'intégration) :

$$\kappa(s) = \mp \left[\frac{(e^{2s} - e^{2C})^2 (k^2 - 1)}{(e^{2s} - e^{2C})^2 - k^2 (e^{2s} + e^{2C})^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

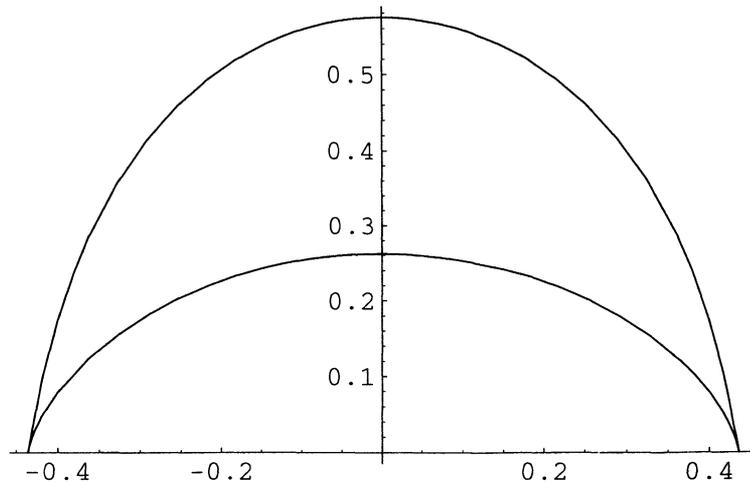


Figure 38: Comparaison des courbes intégrales des deux équations différentielles pour des orientations aux limites suffisamment “verticales”. On voit qu’elles se séparent nettement.

8.5 Les courbes de moindre énergie

L’intégration de l’équation différentielle des géodésiques legendriennes est rendue difficile par la présence de racines carrées. Cet obstacle disparaît lorsque l’on considère une autre fonctionnelle dont le lagrangien, couramment appelée “énergie”, est le carré de celui des géodésiques. Les courbes qui minimisent cette énergie n’ont pas d’interprétation géométrique aussi simple que les géodésiques legendriennes, mais elles en sont généralement proches et on peut les expliciter.

Le nouveau lagrangien s’écrit :

$$L(x) = \xi^2 + \eta^2 + \pi^2 = 1 + f'(x)^2 + f''(x)^2 . \quad (43)$$

Le problème variationnel sous contrainte admet le même système d’équations que précédemment, ce qui donne :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} [2f'(x) - \lambda(x)] = 0 \\ \lambda(x) - \frac{d}{dx} [2f''(x)] = 0 \end{cases} \quad (44)$$

En intégrant la première équation et en éliminant $\lambda(x)$, il vient pour une certaine constante d’intégration C :

$$f'(x) = \frac{1}{2}\lambda(x) + C = f'''(x) + C . \quad (45)$$

Cette équation différentielle du second ordre en f' s’intègre facilement. f est de la forme :

$$f(x) = Ae^x + Be^{-x} + Cx + D \quad (46)$$

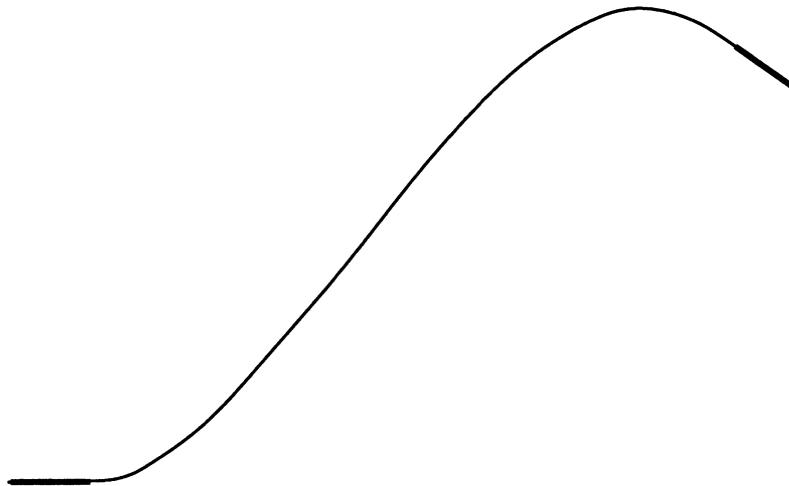


Figure 39: Un exemple de relevée d'énergie minimale.

où A, B, C, D sont des constantes d'intégration fixées par les conditions aux limites (puisque celles-ci imposent quatre équations indépendantes : valeurs de f et de f' en deux points). La figure 39 en donne un exemple.

Des courbes analogues sont évoquées par David Mumford dans son étude sur les *elasticae* où il utilise en dimension 3 le lagrangien :

$$L(x) = \gamma + \beta (1 + z f'(x)^2) + \alpha f''(x)^2.$$

8.6 Comparaison avec les *elasticae*

Nous avons vu que les géodésiques legendriennes satisfont une équation différentielle en la courbure κ qui est relativement complexe, en tout cas plus complexe que celle des *elasticae*. Mais, réciproquement, les *elasticae* sont solutions d'un problème variationnel qui, exprimé dans le fibré de contact CM ou le fibré des 1-jets J^1M , est à son tour nettement plus complexe que celui des "géodésiques".

La courbure locale d'une courbe plane d'équation $y = f(x)$ est donnée, nous l'avons vu, par $\kappa = \frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{3/2}}$. Si l'on note α le quotient $\frac{\alpha}{\beta}$ dans l'équation (3) (i.e. si l'on fait $\beta = 1$), les *elasticae* minimisent la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \int_{s_A}^{s_B} (1 + \alpha \kappa^2) ds &= \int_{x_A}^{x_B} \left(1 + \alpha \frac{f''(x)^2}{(1 + f'(x)^2)^3} \right) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \\ &= \int_{x_A}^{x_B} \left(\sqrt{1 + f'(x)^2} + \alpha \frac{f''(x)^2}{(1 + f'(x)^2)^{5/2}} \right) dx . \end{aligned} \tag{47}$$

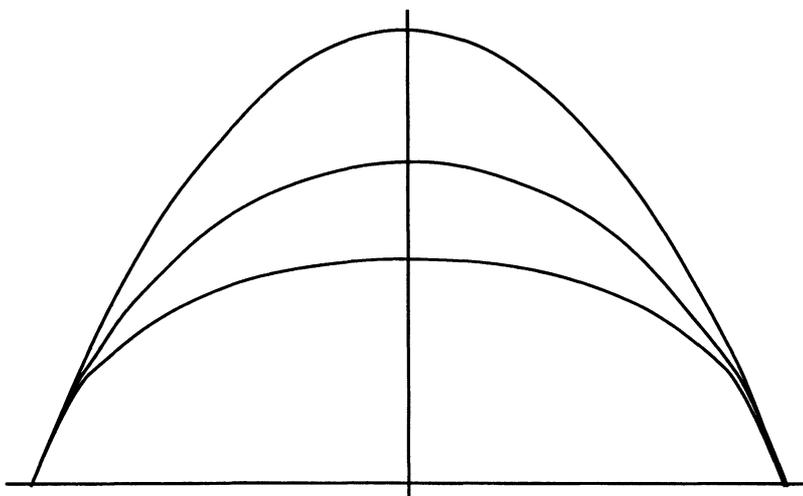


Figure 40: Comparaison de trois solutions variationnelles au problème d'interpolation. De haut en bas : 1. Elastica, calculé numériquement à l'aide de l'algorithme proposé par Nitzberg, Mumford et Shiota (1993). La courbe est relativement aplatie car on a plus fortement pénalisé la longueur que la courbure ($\alpha = 1/10$). 2. Projetée de la géodésique legendrienne dans l'espace des jets. 3. Projetée de la courbe d'énergie minimale dans l'espace des jets avec les mêmes conditions aux limites.

La relevée d'une elastica dans le fibré des 1-jets minimise ainsi une fonctionnelle d'action dont le lagrangien présente des analogies avec les lagrangiens de longueur et d'énergie étudiés ci-dessus. La figure 40 compare, dans un cas symétrique, les trois courbes obtenues en appliquant les trois modèles variationnels : elastica, projection d'une géodésique dans l'espace des jets et projection d'une courbe d'énergie minimale dans l'espace des jets.

Les elasticae sont compatibles avec certains mécanismes neuronaux plausibles de formation des contours illusoires. On peut également montrer que les "courbes" discrètes calculées par un réseau de neurones peuvent aussi bien approcher les courbes intégrales de longueur ou d'énergie minimale, à condition d'adapter l'expression des fonctions de transfert de l'activité. Dans les deux cas, l'isotropie du lagrangien implique de pénaliser identiquement le déplacement "horizontal" et le déplacement "vertical" lié à la courbure.

Notons enfin que rien ne garantit que ces courbes continues, pas plus d'ailleurs que les elasticae, respectent la majoration de courbure imposée par la discrétisation du problème (nous avons déjà insisté sur cette différence importante entre la structure de contact et sa version discrète, le champ d'association). Néanmoins, les lagrangiens associés aux trois familles de courbes font intervenir des termes de courbure (au sens étroit pour les elasticae, au sens large pour les autres). Les courbes minimales ne présentent donc pas

de zones de forte courbure.

9 Modèles “géodésiques” et groupes de Lie

9.1 Groupes de Lie, perception et kinesthésie

Il est possible de formuler les modèles variationnels comme celui des *elasticae* ou celui des géodésiques legendriennes de façon géométriquement plus profonde en utilisant la méthode du repère mobile d’Elie Cartan et la théorie des groupes de Lie. On aboutit ainsi à des descriptions sur le groupe de Lie G des déplacements du plan rétinien M . Cela est pertinent géométriquement car, comme on le sait depuis Felix Klein, c’est le groupe de ses transformations qui caractérise une géométrie et la géométrie euclidienne du plan est caractérisée par G .¹⁵ Mais cela est aussi pertinent neurophysiologiquement à un double titre :

- d’abord on peut penser que c’est le groupe G qui se trouve neuralemement implémenté si l’on tient compte à la fois des aires $V1$ et $V2$. En effet nous avons vu que lorsqu’un élément de contour d’orientation donnée est activé il en va de même *de sa direction orthogonale*;
- ensuite la géométrie de G est universelle pour les problèmes de contours. Elle idéalise géométriquement une architecture fonctionnelle qui, comme l’avaient déjà remarqué profondément Poincaré et Husserl au début de ce siècle, couple la perception avec le repérage spatial, autrement dit *avec le sens kinesthésique du mouvement*.¹⁶

Un autre intérêt de l’approfondissement théorique de la modélisation est d’introduire des méthodes géométriques modernes en théorie de la perception. En effet, il est frappant de constater l’écart existant entre la sophistication des expériences de psychophysique et de neurophysiologie et la naïveté des concepts géométriques utilisés pour en rendre compte.

9.2 Les repères mobiles d’Elie Cartan et le fibré principal du groupe des déplacements

Soit $(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ un repère orthonormé fixe R_0 du plan affine M (coordonnées (x, y)). Soit γ une courbe dans M . En chaque point $p = (x, y)$ de M ,¹⁷ on peut considérer un repère

¹⁵Nous ne tenons pas compte ici du fait que la géométrie du champ visuel est faiblement sphérique.

¹⁶Sur le “sens du mouvement”, cf. l’ouvrage fondamental d’Alain Berthoz (1997). En ce qui concerne la modélisation géométrique de l’eidétique phénoménologique husserlienne des relations entre perception visuelle et mouvements kinesthésiques, cf. Petitot (1999).

¹⁷Dans ce qui suit p désignera un point de M considéré comme origine d’un repère mobile, notation à ne pas confondre avec $p = f'(x)$ qui est la troisième composante de J^1M dans les sections précédentes.

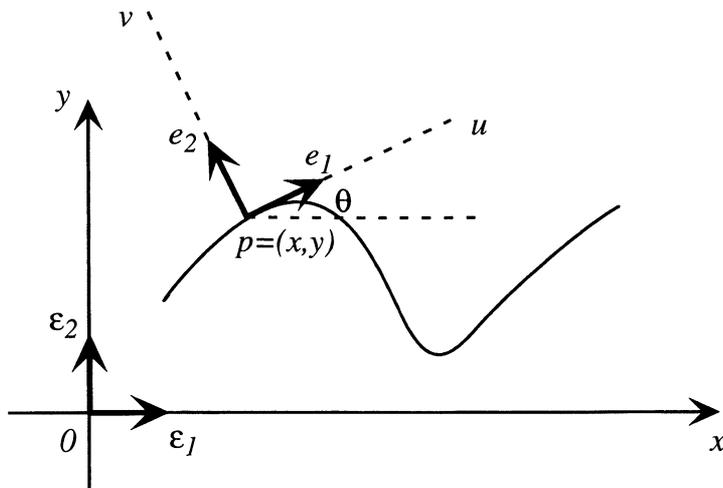


Figure 41: Le concept de repère mobile.

orthonormé mobile (dit aussi repère de Frénet) $R = (p, e_1, e_2) = (p, r_\theta)$ centré en p dont les vecteurs de base (e_1, e_2) sont les vecteurs unitaires respectivement tangent et normal à γ en p (coordonnées (u, v)) (cf. figure 41).¹⁸ r_θ est la rotation d'angle θ amenant R_0 sur R .

En termes des coordonnées (x, y, θ) on a donc :

$$\begin{cases} p = (x, y) \\ e_1 = (\cos \theta, \sin \theta) \\ e_2 = (-\sin \theta, \cos \theta) \end{cases} \quad (48)$$

Le repère mobile $R = (p, r_\theta)$ équivaut en fait à un *déplacement* du plan affine M . C'est une application affine de M dont l'action sur tout point a de M est donnée par :

$$R(a) = (p, r_\theta)(a) = p + r_\theta(a) . \quad (49)$$

Si $R = (p, r_\theta)$ et $S = (q, r_\varphi)$ sont deux tels déplacements, leur composition est donnée par le *produit semi-direct* :

$$S \circ R = (q, r_\varphi) \circ (p, r_\theta) = (q + r_\varphi(p), r_{\theta+\varphi}) . \quad (50)$$

Cette loi de groupe non commutative peut facilement s'exprimer comme une multiplication matricielle.¹⁹ On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ et l'on considère les formes complexes $p = x + iy$, $w = u + iv$, $r_\theta =$ (multiplication complexe

¹⁸On suppose que tous les repères ont une orientation positive. On notera $R R_p$ si la référence au point p est utile.

¹⁹Contrairement à ce qui se passe en dimension > 2 , le groupe des rotations est commutatif en dimension 2. C'est l'interaction translations-rotations dans le produit semi-direct qui rend le groupe affine non commutatif.

par) $e^{i\theta}$.²⁰ Il est alors trivial de vérifier que le déplacement $R = (p, r_\theta)$ de M s'identifie à la restriction aux vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ w \end{pmatrix}$ de l'application linéaire de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ dont la matrice est $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & e^{i\theta} \end{pmatrix}$, la loi de produit semi-direct des déplacements s'identifiant à la multiplication des matrices correspondantes. Il est également facile de vérifier que l'inverse g^{-1} de g est donné par la formule :

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -pe^{-i\theta} & e^{-i\theta} \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Le groupe des déplacements est donc identifiable au groupe de Lie tridimensionnel G des matrices g . Le stabilisateur de 0 (i.e. l'ensemble des g laissant l'origine invariante) est le sous-groupe $H = SO_2(\mathbb{R})$ des g tels que $p = 0$ (rotations planes pures sans translation), i.e. des g de la forme $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$. Le quotient G/H s'identifie à \mathbb{R}^2 (i.e. à la base M) et G est le produit semi-direct $H \times (G/H)$. Comme $H = SO_2(\mathbb{R})$, on trouve ainsi une fibration $\rho : G \rightarrow M = G/H$ ayant pour fibre un groupe opérant sur le cercle unité S^1 des orientations du plan. C'est ce que l'on appelle une structure de *fibré principal* sur le plan M . Au-dessus de chaque point p de M , il y a un exemplaire du groupe des rotations $SO_2(\mathbb{R})$. La fibration ρ opère sur la fibration $\pi : E \rightarrow M$ ayant pour fibre les orientations du plan (que celles-ci soient codées par \mathbb{P}^1 , S^1 ou \mathbb{R} à travers $\tan \theta$) : si $p \in M$, l'exemplaire de $SO_2(\mathbb{R})$ au-dessus de p opère sur la fibre $E_p = \pi^{-1}(p)$ en faisant tourner la direction. On dit que le fibré π est *associé* au fibré principal ρ .

9.3 Les représentations adjointe et co-adjointe

Un groupe de Lie G est par définition une variété différentiable munie d'une structure de groupe dont les opérations sont des applications différentiables. Il y existe des interactions subtiles entre les deux structures respectivement algébrique et différentiable.²¹

²⁰La multiplication complexe par $e^{i\theta}$ dans \mathbb{C} correspond dans \mathbb{R}^2 à la matrice de rotation $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Le lien avec la formule de Moivre $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ se fait à travers l'identification standard de i avec la matrice de Pauli $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

²¹Pour des précisions sur ce qui suit on pourra consulter tout ouvrage comprenant une introduction à la géométrie différentielle, à la théorie des formes différentielles sur les variétés et à la théorie des groupes de Lie. Les articles de l'Encyclopædia Universalis sur ces thèmes sont excellents. Personnellement, nous apprécions particulièrement les "bibles" de Vladimir Arnold (1976) et Ralph Abraham, Jerrold Marsden (1978), l'incontournable Spivak (1974) ainsi que l'ouvrage d'introduction à la conception d'Elie Cartan de Richard Sharpe (1997).

9.3.1 L'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G

D'abord la structure de groupe s'exprime infinitésimalement par une structure *d'algèbre de Lie* sur l'espace tangent $\mathfrak{g} = T_e G$ de G en l'origine e . Dans notre cas e est l'identité de M , $e = Id_M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $T_e G$ est l'espace vectoriel tridimensionnel des matrices "infinitésimales" $\delta h = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta q & i\delta\varphi \end{pmatrix}$.²² En effet, puisque $e^{i\delta\varphi} \simeq 1 + i\delta\varphi$ au premier ordre,

l'élément h correspondant à δq et $\delta\varphi$ s'écrit $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta q & e^{i\delta\varphi} \end{pmatrix} = e + \delta h$ au premier ordre.

On remarquera que, conformément à la structure de produit (semi-direct) de $G = H \times G/H$, l'espace vectoriel $\mathfrak{g} = \{\delta h\}$ se décompose en somme directe $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ avec $\mathfrak{h} = \{\delta h | \delta q = 0\}$ (rotations infinitésimales) et $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \{\delta h | \delta\varphi = 0\}$ (translations infinitésimales).

En plus de sa structure vectorielle, \mathfrak{g} possède une structure d'algèbre de Lie (qui n'est pas triviale car la loi de groupe de G n'est pas commutative). On la calcule de la façon suivante. Soient $\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$. On a $\delta h = \delta q \cdot \xi + \delta\varphi \cdot \tau$ ²³ et (ξ, τ) constitue une base de \mathfrak{g} .²⁴ Si l'on considère les commutateurs $[\delta k, \delta h] = \delta k \circ \delta h - \delta h \circ \delta k$, il est trivial de vérifier les relations de commutation :

$$\begin{cases} [\xi, \xi] = [\tau, \tau] = 0 \\ [\xi, \tau] = -i\xi \end{cases} \quad (52)$$

On vérifie également trivialement la relation caractéristique des crochets de Lie :

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 .$$

9.3.2 Translations, changements de repère et automorphismes intérieurs

Tout groupe de Lie G est "homogène", c'est-à-dire identique en chaque point, car il opère sur lui-même par *translations* à gauche et à droite. Soit $g \in G$, on lui associe la translation à gauche L_g sur G définie par $L_g : h \mapsto gh$. Si $g = (p, r_\theta)$ et $h = (q, r_\varphi)$, on a donc :

$$L_g(h) = (p + r_\theta(q), r_{\theta+\varphi}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p + e^{i\theta}q & e^{i(\theta+\varphi)} \end{pmatrix} \quad (53)$$

²²Pour ne pas trop alourdir la présentation et les notations, nous ferons comme certains physiciens et traiterons de façon intuitive les vecteurs tangents comme des perturbations infinitésimales du premier ordre (en utilisant la notation δ). Quand cela sera nécessaire nous reviendrons à leur traitement rigoureux comme vecteurs.

²³Pour désambigüiser certaines notations, nous utiliserons parfois des points (symbole "dot" de la multiplication matricielle) pour indiquer aussi la multiplication par des scalaires.

²⁴Plus précisément $(\xi, i\xi, \tau)$ constituent une base du \mathbb{R} -vectoriel \mathfrak{g} . Mais ξ constitue une \mathbb{C} -base de la partie correspondant à $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ (coordonnée complexe δq).

Les translations à gauche correspondent tout simplement à des *changements de repères* du plan affine M . Bien qu'inversibles, elles ne sont pas pour autant des automorphismes de G puisqu'elles ne préservent pas l'élément neutre e . Mais elles sont néanmoins compatibles avec la loi de produit puisque $L_f \circ L_g = L_{fg}$. Elles fournissent une *trivialisatıon globale canonique* du fibré tangent TG et beaucoup des propriétés géométriques des groupes de Lie découlent de cette propriété. En particulier en transportant par translations un repère de \mathfrak{g} on obtient un repère global (G -invariant) de G . Cela s'exprime en disant que G est une variété *parallélisable*.

Ces translations dans G (et pas dans M) sont essentielles car elles peuvent être interprétées *kinesthésiquement* (en particulier par les mouvements de l'oeil et de la tête). Le contrôle moteur de la vision permet en effet de changer de repère mobile (cf. Berthoz 1997).

L'application linéaire tangente $T_e L_g$ de L_g en e permet de transporter canoniquement la structure de $\mathfrak{g} = T_e G$ sur $T_g G$. On a $T_g G = \{g + \delta g\}$ avec $\delta g = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta p & ie^{i\theta} \delta \theta \end{pmatrix}$ au premier ordre.²⁵ Pour calculer $T_e L_g$, on écrit $L_g(e + \delta h) = g(e + \delta h) = g + g.\delta h = g + \delta g$, ce qui donne $\delta g = T_e L_g(\delta h) = g.\delta h$. D'où $T_e L_g = g$ (au sens de la multiplication des matrices).²⁶

On peut utiliser $T_e L_g$ pour transporter la base (ξ, τ) de \mathfrak{g} en une base (ξ_g, τ_g) de $T_g G$. On obtient $\xi_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}$ et $\tau_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & ie^{i\theta} \end{pmatrix}$. On remarquera que dans cette base le vecteur $\delta g = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta p & ie^{i\theta} \delta \theta \end{pmatrix}$ de $T_g L_g$ devient le vecteur de composantes $\delta g = (e^{-i\theta} \delta p, \delta \theta)$ (et non plus $(\delta p, \delta \theta)$).

Si $\delta h = (\delta q, \delta \varphi) \in \mathfrak{g}$, son transport par les $T_e L_g$ définit ainsi un *champ de vecteurs* sur G , $\delta g = g.\delta h = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{i\theta} \delta q & ie^{i\theta} \delta \varphi \end{pmatrix}$, qui est G -invariant par translations à gauche. Dans les bases G -invariantes (ξ_g, τ_g) ce champ est de composantes *constantes* $(\delta q, \delta \varphi)$.

On peut alors revenir de g en e au moyen de g^{-1} . Mais comme $L_{g^{-1}} \circ L_g = L_{g^{-1}g} = L_e = Id$, il faut utiliser les translations à droite $R_{g^{-1}}$ pour que ce soit intéressant. La composée

$$A_g = R_{g^{-1}} \circ L_g = L_g \circ R_{g^{-1}} : h \mapsto ghg^{-1}$$

est un automorphisme de G dit *automorphisme intérieur*. On obtient ainsi une *représentation* A de G dans son propre groupe d'automorphismes $AutG$:

$$\begin{aligned} A : G &\rightarrow AutG \\ g \in G &\mapsto A_g \in AutG . \end{aligned} \tag{54}$$

²⁵On notera la présence du coefficient $e^{i\theta}$ qui vient du fait que δg est un vecteur tangent en g . Lorsque $g = e$ (i.e. $\theta = 0$) ce coefficient disparaît.

²⁶Evidemment, $T_e L_g \neq g$ puisque ce sont des éléments d'ensembles différents. Mais $T_e L_g$ étant une application linéaire elle est décrite par une matrice et c'est celle-ci qui est égale à g . Cela est possible parce que G est un groupe de Lie de matrices.

Elle exprime la non commutativité de G (car si G est commutatif, on a évidemment $A_g = Id, \forall g \in G$). Dans notre cas,

$$A_g(h) = ghg^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p + e^{i\theta}q - e^{i\varphi}p & e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (55)$$

9.3.3 La représentation adjointe

La version infinitésimale de cette représentation A s'obtient en calculant l'application linéaire tangente $T_e A_g$ — traditionnellement notée Ad_g — de A_g en e . Ad_g est un automorphisme de l'algèbre de Lie de G , $T_e G = \mathfrak{g}$, et l'on obtient ainsi une représentation Ad — dite *représentation adjointe* — de G dans $Aut \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} Ad : G &\rightarrow Aut \mathfrak{g} \\ g \in G &\mapsto Ad_g = T_e A_g \in Aut \mathfrak{g}. \end{aligned} \quad (56)$$

Si $h = e + \delta h$, on trouve au premier ordre :

$$A_g(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p + e^{i\theta}\delta q - e^{i\delta\varphi}p & e^{i\delta\varphi} \end{pmatrix} \simeq e + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{i\theta}\delta q - ip\delta\varphi & i\delta\varphi \end{pmatrix}$$

et donc :

$$Ad_g(\delta h) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{i\theta}\delta q - ip\delta\varphi & i\delta\varphi \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Comme $Ad_g(\xi) = e^{i\theta}\xi$ et $Ad_g(\tau) = -ip\xi + \tau$, la matrice de Ad_g s'écrit dans la base (ξ, τ) de \mathfrak{g} :

$$Ad_g = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & -ip \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (58)$$

On vérifie facilement que si l'on prend maintenant l'application linéaire tangente de Ad en e , on réobtient les relations de commutation caractéristiques de \mathfrak{g} :

$$\begin{aligned} T_e Ad = ad : \mathfrak{g} &\rightarrow End \mathfrak{g} \\ \zeta &\mapsto ad_\zeta : \eta \mapsto ad_\zeta(\eta) = [\zeta, \eta]. \end{aligned} \quad (59)$$

On remarquera que, étant donnée l'antisymétrie du crochet de Lie, on a :

$$ad_\zeta(\eta) = [\zeta, \eta] = -[\eta, \zeta] = -ad_\eta(\zeta).$$

9.3.4 Les orbites de la représentation adjointe

Il est facile de calculer les orbites de la représentation adjointe, c'est-à-dire les sous-ensembles de \mathfrak{g} de la forme $Ad_g(\delta h)$ pour $\delta h = (\delta q, \delta\varphi)$ fixé et g variable. On remarque d'abord que Ad_g préserve la composante $\delta\varphi$ de δh et que donc les orbites sont nécessairement dans les plans de \mathfrak{g} d'équation $\delta\varphi = cste$. Trois cas sont alors possibles.

- Si $\delta\varphi \neq 0$, l'équation $e^{i\theta}\delta q - ip\delta\varphi = \delta s$ est toujours résoluble en p : on prend un quelconque et $p = -\frac{1}{i\delta\varphi}(\delta s - e^{i\theta}\delta q)$. L'orbite de δh est alors tout le plan $\delta\varphi = cste$.
- Si $\delta\varphi = 0$ mais $\delta q \neq 0$, alors l'orbite est l'ensemble des $e^{i\theta}\delta q$ pour θ variable, autrement dit un cercle.
- Si $\delta\varphi = 0$ et $\delta q = 0$ (i.e. $\delta h = 0$) alors l'orbite est ponctuelle et réduite à l'origine.²⁷

9.3.5 La représentation co-adjointe

On peut *dualiser* la construction précédente et construire ce que l'on appelle la *représentation co-adjointe* de G . On part de \mathfrak{g}^* l'espace vectoriel dual de \mathfrak{g} . Les éléments α de \mathfrak{g}^* sont donc par définition les formes linéaires sur \mathfrak{g} .²⁸ Si (p, θ) sont les coordonnées sur G considérées comme des applications de G dans \mathbb{C} ou \mathbb{R} , on leur associe les 1-formes différentielles sur G dp et $d\theta$. $dp(e)$ et $d\theta(e)$ constituent alors une base de \mathfrak{g}^* . On a par conséquent $\alpha = a.dp(e) + b.d\theta(e)$ et si $\delta h = \delta q.\xi + \delta\varphi.\tau$, alors, dans les bases duales (ξ, τ) et $(dp(e), d\theta(e))$, $\alpha(\delta h)$ s'écrit comme le produit intérieur :

$$\langle \alpha, \delta h \rangle = a.\delta q + b.\delta\varphi .$$

La représentation co-adjointe est définie de la façon suivante qui, bien qu'apparemment un peu complexe au niveau des notations, est cependant tout à fait naturelle :

$$\begin{aligned} Ad^* : G &\rightarrow Aut\mathfrak{g}^* \\ g \in G &\mapsto Ad_g^* \in Aut\mathfrak{g}^* \\ \alpha \in \mathfrak{g}^* &\mapsto Ad_g^*(\alpha) \in \mathfrak{g}^* \end{aligned} \tag{60}$$

$$Ad_g^*(\alpha) : \eta \in \mathfrak{g} \mapsto Ad_g^*(\alpha)(\eta) = \langle Ad_g^*(\alpha), \eta \rangle = \langle \alpha, Ad_g(\eta) \rangle .$$

Il s'agit donc simplement d'utiliser la dualité fournie par le produit intérieur $\langle \bullet, \bullet \rangle$ entre \mathfrak{g} et \mathfrak{g}^* pour réécrire par adjonction $\langle \alpha, Ad_g(\eta) \rangle$ sous la forme $\langle Ad_g^*(\alpha), \eta \rangle$. On constate ensuite que Ad^* possède le type d'une représentation de G dans $Aut\mathfrak{g}^*$ et l'on vérifie que c'est bien le cas.

Il est facile de calculer $Ad_g^*(\alpha)$ dans notre cas. Soient $\alpha = a.dp(e) + b.d\theta(e) \in \mathfrak{g}^*$ et $Ad_g^*(\alpha) = a'.dp(e) + b'.d\theta(e) \in \mathfrak{g}^*$. On obtient $a' = e^{i\theta}a$ et $b' = -ipa + b$. En traitant les

²⁷Soit N une sous-variété de dimension n d'une variété M de dimension m . On appelle *codimension* de N dans M la différence $m - n$. On voit que si c est le nombre de conditions définissant une orbite, celle-ci est de codimension c dans \mathfrak{g} .

²⁸Si l'on traite \mathfrak{g} comme \mathbb{R}^3 alors les formes sont \mathbb{R} -linéaires. Si on traite \mathfrak{g} comme $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ alors les formes sont \mathbb{C} -linéaires par rapport à la première composante.

éléments de \mathfrak{g}^* comme des co-vecteurs, c'est-à-dire. en écrivant $(a, b).Ad_g^* = (a', b')$ (où Ad_g^* dénote maintenant la matrice de Ad_g^*), on trouve

$$Ad_g^* = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & -ip \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (61)$$

En prenant l'application linéaire tangente à Ad^* en e , on construit ensuite une représentation de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} dans l'algèbre des endomorphismes de \mathfrak{g}^* , représentation qui permet de récupérer l'action de \mathfrak{g}^* sur les commutateurs de \mathfrak{g} :

$$\begin{aligned} ad^* : \mathfrak{g} = T_e G &\rightarrow End \mathfrak{g}^* = T_e (Aut \mathfrak{g}^*) \\ \delta h = \zeta \in \mathfrak{g} &\mapsto ad_\zeta^* \in End \mathfrak{g}^* \\ \alpha \in \mathfrak{g}^* &\mapsto ad_\zeta^*(\alpha) \in \mathfrak{g}^* \\ ad_\zeta^*(\alpha) : \eta \in \mathfrak{g} &\mapsto ad_\zeta^*(\alpha)(\eta) = \langle ad_\zeta^*(\alpha), \eta \rangle = \\ &\langle \alpha, ad_\zeta(\eta) \rangle = \langle \alpha, [\zeta, \eta] \rangle. \end{aligned} \quad (62)$$

Là encore on s'est borné à transformer par adjonction le produit intérieur $\langle \alpha, ad_\zeta(\eta) \rangle$ en $\langle ad_\zeta^*(\alpha), \eta \rangle$, à constater que ad^* possède le type d'une telle représentation de \mathfrak{g} dans $End \mathfrak{g}^*$ et à vérifier que c'est bien le cas. Comme plus haut, on remarquera que, en vertu de l'antisymétrie du crochet de Lie, on a :

$$ad_\zeta^*(\alpha)(\eta) = \langle \alpha, [\zeta, \eta] \rangle = -\langle \alpha, [\eta, \zeta] \rangle = -ad_\eta^*(\alpha)(\zeta).$$

9.3.6 Les orbites de la représentation co-adjointe

Les orbites de la représentation co-adjointe sont les sous-ensembles de \mathfrak{g}^* de la forme $Ad_g^*(\alpha)$ avec α fixe et g variable. Comme $Ad_g^*(\alpha) = a'.dp(e) + b'.d\theta(e)$ avec $a' = e^{i\theta}a$ et $b' = -ipa + b$, on voit que a' parcourt le *cercle* C_a centré sur l'origine et passant par a . Il y a deux cas :

- Si $a \neq 0$, l'équation en p : $b' = -ipa + b$ est toujours résoluble de façon unique ($p = i\frac{b'-b}{a}$). L'orbite de α est alors le *cylindre* de base le cercle C_a .
- Si $a = 0$, alors $a' = 0$ et $b' = b$ et α est un point fixe (orbite dégénérée). Tous les points de l'axe des b sont des points fixes de Ad^* .

9.4 Le formalisme d'Elie Cartan

9.4.1 La forme de Maurer-Cartan

Comme l'a profondément découvert Elie Cartan, la structure infinitésimale d'un groupe de Lie G (i.e. la structure de son algèbre de Lie \mathfrak{g}) se lit très facilement et de façon *universelle* sur ses 1-formes G -invariantes (par translations à gauche). Partons de l'expression générale $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & e^{i\theta} \end{pmatrix}$ d'un élément g de G . On peut considérer la différentielle

de g : $dg = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ dp & ie^{i\theta}d\theta \end{pmatrix}$ et l'interpréter comme *une 1-forme sur G à valeurs dans \mathfrak{g}* . Cela signifie que les composantes de dg sont des 1-formes sur G , mais que dg possède le type d'un élément de \mathfrak{g} . Autrement dit, si $\Omega^1(G)$ est l'espace vectoriel des 1-formes sur G , dg est un élément du produit tensoriel $\Omega^1(G) \otimes \mathfrak{g}$. On remarquera que dg calculée en g dans la base duale de la base (ξ_g, τ_g) est donnée par la formule :

$$dg(g) = dp(g) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\theta(g) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & ie^{i\theta} \end{pmatrix} = e^{-i\theta} dp(g) \otimes \xi_g + d\theta(g) \otimes \tau_g . \quad (63)$$

Si $g = e$, on obtient $dg(e) = dp(e) \otimes \xi + d\theta(e) \otimes \tau$ et donc, en tant qu'élément du produit tensoriel $\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$, $dg(e)$ est *l'identité* de \mathfrak{g} . Cela signifie que $dg(e)$ est une 1-forme sur \mathfrak{g} et s'applique donc à des vecteurs $\zeta \in \mathfrak{g}$. Mais comme elle est à valeurs dans \mathfrak{g} , on a $dg(e)(\zeta) \in \mathfrak{g}$. L'identité signifie que $dg(e)(\zeta) = \zeta$. Plus généralement, dans cette façon de voir les choses, g symbolise un élément *générique* de G , et par conséquent l'application identique de G , ce qui fait que dg peut s'interpréter comme *l'application identique du fibré tangent TG* .

Le problème est que dg n'est pas invariante par les translations à gauche L_g . C'est bien l'application identique de TG mais pas celle de TG globalement trivialisé par les L_g . En effet, une 1-forme sur G à valeurs dans \mathfrak{g} qui est G -invariante par translations à gauche doit avoir des composantes *constantes* dans les bases des T_g^*G duales des bases (G -invariantes) (ξ_g, τ_g) des espaces tangents T_gG . Or ce n'est pas le cas pour dg à cause du coefficient $e^{-i\theta}$ du terme $dp(g) \otimes \xi_g$ dans la formule (63).

L'idée de Cartan a alors été de translater $dg(e)$ de façon à obtenir une 1-forme sur G à valeurs dans \mathfrak{g} qui soit *par construction* invariante par les translations L_g . Soit $\Lambda_G : TG \rightarrow \mathfrak{g}$ cette 1-forme. On l'appelle la *forme de Maurer-Cartan*. Elle s'interprète très simplement géométriquement. En effet, on a par définition $\Lambda_G(g) = (T_g L_{g^{-1}})^* dg(e)$.²⁹ Si $\zeta \in T_g G$ est un vecteur tangent à G en g , $\Lambda_G(g)(\zeta) = T_g L_{g^{-1}}(\zeta)$, autrement dit, Λ_G transporte ζ dans \mathfrak{g} au moyen de la trivialisatation globale fournie par les translations à gauche L_g .

Dans notre cas, on vérifie que l'on a : $\Lambda_G(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-i\theta} dp & id\theta \end{pmatrix}$. Traditionnellement, on écrit Λ_G sous la forme compacte :

$$\Lambda_G = g^{-1} dg \quad (64)$$

où g^{-1} symbolise $(T_g L_{g^{-1}})^*$. Cela donne bien le même résultat puisque, au niveau des matrices,

$$g^{-1} dg = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -pe^{-i\theta} & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ dp & ie^{i\theta}d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-i\theta} dp & id\theta \end{pmatrix} .$$

Dans la suite nous noterons ω et ρ les 1-formes (à valeurs scalaires respectivement dans \mathbb{C} et \mathbb{R}) $e^{-i\theta} dp$ et $d\theta$. Avec ces notations, la 1-forme Λ_G (à valeurs vectorielles dans

²⁹On a $T_g L_{g^{-1}} = (T_e L_g)^{-1} : T_g G \rightarrow T_e G$ et donc par dualité $(T_g L_{g^{-1}})^* : T_e^* G = \mathfrak{g}^* \rightarrow T_g^* G$.

\mathfrak{g}) s'écrit :

$$\Lambda_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega & \rho \end{pmatrix} = \omega \otimes \xi + \rho \otimes \tau \quad (65)$$

où, rappelons-le, (ξ, τ) est la base naturelle de \mathfrak{g} .

9.4.2 Les équations de Maurer-Cartan

La structure d'algèbre de Lie de \mathfrak{g} peut se lire élégamment sur la forme de Maurer-Cartan Λ_G et elle est alors donnée par une *formule universelle*. Cette universalité fait tout l'intérêt du formalisme de Cartan. L'idée est de calculer la dérivée extérieure de Λ_G qui est une 2-forme vectorielle G -invariante à valeurs dans \mathfrak{g} . Pour ce faire, on calcule d'abord les dérivées extérieures des composantes ω et ρ . On obtient :³⁰

$$\begin{cases} d\omega = -ie^{-i\theta}d\theta \wedge dp + e^{-i\theta}d^2p = ie^{-i\theta}dp \wedge d\theta = i\omega \wedge \rho \\ d\rho = d^2\theta = 0 \end{cases}$$

et donc

$$d\Lambda_G = d\omega \otimes \xi + d\rho \otimes \tau = i(\omega \wedge \rho) \otimes \xi. \quad (66)$$

Mais l'espace $\Omega^1(G) \otimes \mathfrak{g}$ des 1-formes sur G à valeurs dans \mathfrak{g} est muni d'un *produit extérieur* qui fait interagir le produit extérieur des 1-formes et le crochet de Lie de \mathfrak{g} . En effet, soient $\varsigma = \mu \otimes \xi + \nu \otimes \tau$ et $\varsigma' = \mu' \otimes \xi + \nu' \otimes \tau$ deux éléments quelconques de $\Omega^1(G) \otimes \mathfrak{g}$. On a par définition :

$$[\varsigma, \varsigma'] = (\mu \wedge \mu') \otimes [\xi, \xi] + (\mu \wedge \nu') \otimes [\xi, \tau] + (\nu \wedge \mu') \otimes [\tau, \xi] + (\nu \wedge \nu') \otimes [\tau, \tau] \quad (67)$$

qui est une 2-forme vectorielle à valeurs dans \mathfrak{g} , i.e. un élément de $\Omega^2(G) \otimes \mathfrak{g}$. Comme $[\xi, \xi] = [\tau, \tau] = 0$, $[\tau, \xi] = -[\xi, \tau]$ et $[\xi, \tau] = -i\xi$, on obtient en définitive :

$$[\varsigma, \varsigma'] = ((\mu \wedge \nu') - (\nu \wedge \mu')) \otimes [\xi, \tau] = -i((\mu \wedge \nu') - (\nu \wedge \mu')) \otimes \xi. \quad (68)$$

Lorsque $\varsigma = \varsigma'$, on obtient donc — contrairement à ce qui se passe pour une 1-forme scalaire — : $[\varsigma, \varsigma] = -2i(\mu \wedge \nu) \otimes \xi$. En particulier $[\Lambda_G, \Lambda_G] = -2i(\omega \wedge \rho) \otimes \xi$. En comparant les expressions donnant $d\Lambda_G$ et $[\Lambda_G, \Lambda_G]$ on obtient les équations universelles de Maurer-Cartan qui encodent la géométrie de tout groupe de Lie G :

$$d\Lambda_G = -\frac{1}{2}[\Lambda_G, \Lambda_G]. \quad (69)$$

³⁰Rappelons que pour toute forme différentielle σ à valeurs *scalaires*, on a $d^2\sigma = 0$.

9.5 Les problèmes variationnels sur le groupe affine des déplacements du plan d'après Bryant et Griffiths

Insistons sur le fait que la structure du groupe affine des déplacements plans G , avec sa structure de fibré principal, ses représentations adjointe et co-adjointe, sa forme de Maurer-Cartan satisfaisant l'équation caractéristique (69) *est universelle et géométrise une architecture fonctionnelle neuralemement implémentée*. Il est donc naturel de chercher à reformuler nos modèles variationnels de contours subjectifs modaux dans ce cadre plus profond. Cela est tout à fait possible.

Dans un article remarquable "Reduction for constrained variational problems and $\int \frac{\kappa^2}{2} ds$ ", Robert Bryant et Phillip Griffiths ont en effet développé la théorie des problèmes variationnels sur les groupes de Lie et l'ont appliquée à la théorie des elasticae de David Mumford. Nous allons résumer leur approche et l'appliquer ensuite au modèle "géodésique".

9.5.1 Le système de Pfaff des relevées de Frénet dans le fibré principal G

Après avoir exprimé la géométrie de G à travers les équations de Maurer-Cartan, revenons aux courbes γ dans le plan rétinien M . En suivant le repère mobile R_p lorsque le point $p = (x, y)$ parcourt γ , on obtient une courbe $\tilde{\gamma}$ dans G qui relève γ et que nous appellerons son *relèvement de Frénet*. Dans la mesure où G est un fibré principal sur M de fibre $H = SO_2(\mathbb{R}) \simeq S^1$, on peut réinterpréter dans ce nouveau contexte les relèvements legendriens dans J^1M étudiés dans la section 5. Si γ est paramétrée par t , $\gamma : I = [0, 1] \rightarrow M$, $\tilde{\gamma}$ est aussi paramétrée par t . L'élément

$$t \mapsto p(t)$$

de longueur d'arc sur γ (et non pas sur $\tilde{\gamma}$ comme dans la section 5) est donné par $ds = \sigma(t)dt$ avec $\sigma(t) = \|p'(t)\|$. Par ailleurs, le repère de Frénet R_p est donné par le vecteur tangent unitaire $e_1(t) = \frac{p'(t)}{\sigma(t)} = (\cos \theta, \sin \theta)$ et le vecteur normal unitaire $e_2(t) = e_1(t)^\perp = (-\sin \theta, \cos \theta)$. Les différentielles de e_1 et e_2 sont par conséquent les 1-formes vectorielles sur M (à valeurs dans \mathbb{R}^2) :

$$\begin{cases} de_1 = (-\sin \theta d\theta, \cos \theta d\theta) = d\theta \otimes e_2 = \rho \otimes e_2 \\ de_2 = -(\cos \theta d\theta, \sin \theta d\theta) = -d\theta \otimes e_1 = -\rho \otimes e_1 \end{cases}$$

Par ailleurs, comme $\omega = e^{-i\theta} dp$ par définition, on a $dp = e^{i\theta} \omega = \omega_x \otimes e_1 + \omega_y \otimes e_2 = \omega_u \otimes e_1 + \omega_v \otimes e_2$ (où ω_u et ω_v sont les composantes de ω dans le repère mobile). Mais comme $dp = e^{i\theta} ds$, on a aussi $\omega = ds$, soit $\omega_u = ds$ et $\omega_v = 0$. D'où la réinterprétation de dg dans le repère mobile R de M :

$$\begin{cases} dp = \omega_u \otimes e_1 + \omega_v \otimes e_2 \\ de_1 = \rho \otimes e_2 \\ de_2 = -\rho \otimes e_1 \end{cases} \quad (70)$$

Ce système différentiel est lié à G et est donc *indépendant* de toute courbe γ particulière.

Mais par ailleurs, on sait que sur une courbe γ particulière on a, par définition de ds et de la courbure κ ,³¹ l'expression suivante pour la variation infinitésimale dR du repère mobile R :

$$\begin{cases} dp = ds \otimes e_1 = \sigma(t)dt \otimes e_1 \\ de_1 = ds\kappa(t) \otimes e_2 = \kappa(t)\sigma(t)dt \otimes e_2 \\ de_2 = -ds\kappa(t) \otimes e_1 = -\kappa(t)\sigma(t)dt \otimes e_1 \end{cases} \quad (71)$$

En comparant les deux expressions on voit que sur les courbes $\gamma(t)$ le système de Pfaff³² suivant est vérifié :

$$\Pi = \begin{cases} \omega_u - \sigma(t)dt = 0 \\ \omega_v = 0 \\ \rho - \kappa(t)\sigma(t)dt = 0 \end{cases} \quad (72)$$

De même que les relevées legendriennes dans J^1M étaient les courbes intégrales de la structure de contact, de même les relevées de Frénet dans G sont les courbes intégrales de Π . On remarquera que pour ces relevées on a, contrairement au cas général, $d\omega = i\omega \wedge \rho = 0$ car $d\omega_u = -\omega_v \wedge \rho = 0$ et $d\omega_v = \omega_u \wedge \rho = \sigma(t)dt \wedge \sigma(t)\kappa(t)dt = \sigma^2(t)\kappa(t)dt \wedge dt = 0$.

Le système de Pfaff Π est défini sur G mais dépend de t ainsi que des fonctions $\sigma(t)$ et $\kappa(t)$. Nous pouvons alors appliquer exactement la même stratégie que celle que nous avons appliquée pour le fibré de contact et le fibré des 1-jets J^1M , à savoir introduire des coordonnées supplémentaires $(\sigma, \kappa, t) \in \mathbb{R}_\sigma^+ \times \mathbb{R}_\kappa \times \mathbb{R}_t = Y$ ³³ et considérer que Π est en fait défini sur la variété produit direct $X = G \times Y$.³⁴ Sur X le système de Pfaff Π prend la forme :

$$\Pi = \begin{cases} \omega_u - \sigma dt = 0 \\ \omega_v = 0 \\ \rho - \kappa \sigma dt = 0 \end{cases} \quad (73)$$

Dans la mesure où $(\omega_u, \omega_v, \rho)$ sont les composantes de $\Lambda_G = \omega \otimes \xi + \rho \otimes \tau$, il consiste tout simplement en l'annulation de la 1-forme :

$$\mu = \Lambda_G - P dt \quad (74)$$

où $P = (\sigma, 0, \kappa\sigma)$. En fait, comme Λ_G est vue maintenant comme une 1-forme sur X à valeurs dans \mathfrak{g} , la cohérence des types impose qu'il en aille de même pour $\mu = \Lambda_G - P dt$. Il est donc naturel de considérer que P est un vecteur de \mathfrak{g} , nommément le vecteur :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sigma & \kappa\sigma \end{pmatrix} = \sigma \otimes \xi + \kappa\sigma \otimes \tau. \quad (75)$$

Si on note alors \mathfrak{A} le sous-espace de \mathfrak{g} constitué des P de cette forme, on peut redéfinir Y comme $\mathfrak{A} \times \mathbb{R}_t$ et considérer que Π devient en fait défini sur $X = G \times Y = G \times \mathfrak{A} \times \mathbb{R}_t$.

³¹Rappelons que $\kappa = d\theta/ds$ et que donc $\rho = d\theta = \kappa ds = \kappa\sigma dt$.

³²Un système de Pfaff est un système d'annulation de 1-formes.

³³Lorsque cela peut être utile, nous représentons en indice la coordonnée de l'exemplaire de \mathbb{R} considéré.

³⁴On prolonge trivialement une 1-forme sur G en une 1-forme sur X et on garde le même symbole.

9.5.2 La fonctionnelle du problème variationnel

On peut maintenant sélectionner certaines courbes γ de M en introduisant *un principe variationnel pour leurs relevées de Frénet*. Pour ce faire, on introduit évidemment un lagrangien L et l'on considère la 1-forme sur X donnée par $\varphi = Ldt$. Si $\Gamma : I \rightarrow X$ est une courbe dans X , on lui associe par conséquent "l'énergie" :

$$\Phi(\Gamma) = \int_I \Gamma^* \varphi \quad (76)$$

et l'on cherche les courbes Γ qui minimisent Φ , autrement qui sont des points critiques stables de $\Phi(\Gamma)$.

On analyse ainsi 3 niveaux différents de structure reliant la géométrie universelle de G à des familles particulières de courbes de M :

1. Le groupe de Lie G et les structures associées \mathfrak{g} , \mathfrak{g}^* , et Λ_G , ainsi que les représentations adjointe et coadjointe. Il s'agit là, répétons-le encore une fois, d'un cadre géométrique universel implémenté au moyen d'une architecture fonctionnelle.
2. Les trajectoires dans G qui sont les relevées de Frénet des courbes γ de la base M . Il s'agit du codage de stimuli particuliers dans ce cadre universel.
3. Enfin, pour les contours subjectifs modaux, celles parmi ces courbes qui sont solutions d'un problème variationnel. Il s'agit de l'interprétation variationnelle du problème de la complétion.

Dans notre cas, la 1-forme φ est donnée par :

$$\begin{aligned} \varphi &= \left(dp^2 + (\tan^2 \theta)' d\theta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= Ldt = \sigma \left(1 + \frac{\kappa^2}{\cos^4 \theta} \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= L_0 ds = \left(1 + \frac{\dot{\theta}^2}{\cos^4 \theta} \right)^{\frac{1}{2}} ds = \left(1 + \dot{\theta}^2 \sec^4 \theta \right)^{\frac{1}{2}} ds \\ &= L_1 dx = \left(1 + f'^2 + f''^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx. \end{aligned} \quad (77)$$

Rappelons (cf. section 8.3) que le lagrangien L_0 montre que l'on peut prendre f' et f'' comme variables même si cela brise la symétrie de rotation. Si l'angle θ subit un déphasage $\theta \rightarrow \theta + \theta_0$, $\dot{\theta}$ reste invariant. On résout donc essentiellement la même équation et l'on revient à la solution initiale en faisant $\theta \rightarrow \theta - \theta_0$. Rappelons aussi que le terme principal de l'équation d'Euler-Lagrange pour L_0 est donné par la formule (31) :

$$\frac{\partial L_0}{\partial \theta} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{\theta}} \right) = - \frac{\sec^4 \theta}{\left(1 + \dot{\theta}^2 \sec^4 \theta \right)^{\frac{3}{2}}} \left(\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}^2 \tan \theta \right). \quad (78)$$

9.5.3 Les équations d'Euler-Lagrange

Expliquons maintenant la façon dont Bryant et Griffiths formulent dans ce contexte géométrique général des groupes de Lie les équations d'Euler-Lagrange. Pour calculer celles-ci on introduit d'abord les multiplicateurs de Lagrange correspondant à la contrainte cinématique définie par le système de Pfaff Π (i.e. $\mu = \Lambda_G - Pdt = 0$). On considère par conséquent la 1-forme sur $Z = X \times \mathbb{R}^3$:

$$\psi = \varphi + \lambda_1 (\omega_u - \sigma dt) + \lambda_2 \omega_v + \lambda_3 (\rho - \kappa \sigma dt). \quad (79)$$

La bonne interprétation géométrique des multiplicateurs de Lagrange consiste à identifier λ à un vecteur de \mathfrak{g}^* et les éléments $(x, \lambda) \in Z = X \times \mathbb{R}^3$ aux 1-formes $\psi = \varphi + \langle \lambda, \mu \rangle = \varphi + \langle \lambda, \Lambda_G - Pdt \rangle$. Dans une telle écriture, $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ est de type \mathfrak{g}^* , $\langle \lambda, \xi \rangle$ est le produit intérieur résultant de la contraction dans $\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ et est donc de type \mathbb{R} . Comme $\varphi \in \Omega^1(X)$ (1-forme scalaire sur X) et $\mu \in \Omega^1(X) \otimes \mathfrak{g}$ (1-forme vectorielle sur X à valeurs dans \mathfrak{g}), le type de ψ est bien cohérent :³⁵

$$\begin{aligned} \psi : [\Omega^1(X) + \langle \mathfrak{g}^*, \Omega^1(X) \otimes \mathfrak{g} \rangle] &= [\Omega^1(X)] + [\Omega^1(X) \otimes \langle \mathfrak{g}^*, \mathfrak{g} \rangle] = \\ &= [\Omega^1(X)] + [\Omega^1(X) \otimes \mathbb{R}] = [\Omega^1(X)]. \end{aligned}$$

Sur une relevée de Frénet, la contrainte cinématique μ s'annule et l'on a $\psi = \varphi$.

On calcule ensuite la 2-forme $\Psi = d\psi \in \Omega^2(X)$ en utilisant les équations de Maurer-Cartan (69). On obtient (avec $\varphi = Ldt$) :

$$\begin{aligned} \Psi &= dL \wedge dt + \langle d\lambda, \mu \rangle + \langle \lambda, d\mu \rangle \quad (80) \\ &= dL \wedge dt + \langle d\lambda, \mu \rangle + \langle \lambda, d\Lambda_G \rangle - \langle \lambda, dP \wedge dt \rangle \\ &= dL \wedge dt + \langle d\lambda, \mu \rangle - \frac{1}{2} \langle \lambda, [\Lambda_G, \Lambda_G] \rangle - \langle \lambda, dP \wedge dt \rangle. \end{aligned}$$

Le checking des types donne bien $\Omega^2(X)$ pour tous les termes. En effet :

$$\begin{aligned} dL \wedge dt : [\Omega^1(X) \wedge \Omega^1(X)] &= [\Omega^2(X)], \\ \langle d\lambda, \mu \rangle : [\langle \Omega^1(X) \otimes \mathfrak{g}^*, \Omega^1(X) \otimes \mathfrak{g} \rangle] &= [(\Omega^1(X) \wedge \Omega^1(X)) \otimes \langle \mathfrak{g}^*, \mathfrak{g} \rangle] = \\ &= [\Omega^2(X) \otimes \mathbb{R}] = [\Omega^2(X)], \\ \langle \lambda, d\mu \rangle : [\langle \mathfrak{g}^*, \Omega^2(X) \otimes \mathfrak{g} \rangle] &= [\Omega^2(X) \otimes \langle \mathfrak{g}^*, \mathfrak{g} \rangle] = [\Omega^2(X) \otimes \mathbb{R}] = [\Omega^2(X)]. \end{aligned}$$

Explicitement, on obtient les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{\partial L}{\partial \theta} \rho \wedge dt + \frac{\partial L}{\partial \sigma} d\sigma \wedge dt + \frac{\partial L}{\partial \kappa} d\kappa \wedge dt + \\ & d\lambda_1 \wedge (\omega_u - \sigma dt) - \lambda_1 \omega_v \wedge \rho - \lambda_1 d\sigma \wedge dt + \\ & d\lambda_2 \wedge \omega_v + \lambda_2 \omega_u \wedge \rho + \\ & d\lambda_3 \wedge (\rho - \kappa \sigma dt) - \lambda_3 \sigma d\kappa \wedge dt - \lambda_3 \kappa d\sigma \wedge dt \end{aligned} \quad (81)$$

³⁵Nous notons $[E]$ le type d'une expression E . Dans les checkings de types, les opérations algébriques doivent être interprétées symboliquement et l'on a par exemple $T + T = T$ si T est le type de certains objets munis d'une addition.

Pour obtenir les points critiques de la fonctionnelle $\Phi(\Gamma)$ on exprime alors que les contractions de Ψ par les vecteurs tangents appropriés de Z s'annulent. Cela signifie que l'on considère les composantes Ψ_i ($i = 1, \dots, 8$) de Ψ par rapport aux huit 1-formes $d\lambda_1, d\lambda_2, d\lambda_3, d\sigma, d\kappa, \rho, \omega_u, \omega_v$ et que l'on annule les 1-formes qui sont leurs coefficients. Comme les Ψ_i sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_1 = d\lambda_1 \wedge (\omega_u - \sigma dt) \\ \Psi_2 = d\lambda_2 \wedge \omega_v \\ \Psi_3 = d\lambda_3 \wedge (\rho - \kappa \sigma dt) \\ \Psi_4 = \frac{\partial L}{\partial \sigma} d\sigma \wedge dt - \lambda_1 d\sigma \wedge dt - \lambda_3 \kappa d\sigma \wedge dt \\ \Psi_5 = \frac{\partial L}{\partial \kappa} d\kappa \wedge dt - \lambda_3 \sigma d\kappa \wedge dt \\ \Psi_6 = -\frac{\partial L}{\partial \theta} dt \wedge \rho - \lambda_1 \omega_v \wedge \rho + \lambda_2 \omega_u \wedge \rho + d\lambda_3 \wedge \rho \\ \Psi_7 = d\lambda_1 \wedge \omega_v - \lambda_2 \rho \wedge \omega_u \\ \Psi_8 = d\lambda_2 \wedge \omega_v + \lambda_1 \rho \wedge \omega_u \end{array} \right.$$

on obtient ainsi le système différentiel de Bryant-Griffiths :

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \omega_u - \sigma dt = 0 \\ (ii) \quad \omega_v = 0 \\ (iii) \quad \rho - \kappa \sigma dt = 0 \\ (iv) \quad \frac{\partial L}{\partial \sigma} dt - \lambda_1 dt - \lambda_3 \kappa dt = 0 \\ (v) \quad \frac{\partial L}{\partial \kappa} dt - \lambda_3 \sigma dt = 0 \\ (vi) \quad -\frac{\partial L}{\partial \theta} dt - \lambda_1 \omega_v + \lambda_2 \omega_u + d\lambda_3 = 0 \\ (vii) \quad d\lambda_1 - \lambda_2 \rho = 0 \\ (viii) \quad d\lambda_2 + \lambda_1 \rho = 0 \end{array} \right. \quad (82)$$

- Les trois premières équations (i), (ii) et (iii) ne font que redonner le système de Pfaff II (9.5.1). Ce sont les équations de structure le long d'une relevée de Frénet.
- Les équations (iv) et (v) permettent de calculer les multiplicateurs λ_1 et λ_3 . On trouve $\lambda_3 = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial L}{\partial \kappa}$ et $\lambda_1 = \frac{\partial L}{\partial \sigma} - \frac{\kappa}{\sigma} \frac{\partial L}{\partial \kappa}$.
- Quant aux deux dernières équations (vii) et (viii), elles impliquent $\lambda_1 d\lambda_1 + \lambda_2 d\lambda_2 = 0$, autrement dit la loi de conservation $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = c^2$ ou

$$(\lambda_1, \lambda_2) = \tilde{\lambda} e^{i\varphi} = (\tilde{\lambda} \cos \varphi, \tilde{\lambda} \sin \varphi)$$

pour une certaine constante $\tilde{\lambda}$. Cela signifie que, en ce qui concerne la composante $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, les solutions sont incluses dans les orbites de la représentation co-adjointe.

- C'est l'équation (vi) $-\frac{\partial L}{\partial \theta} dt - \lambda_1 \omega_v + \lambda_2 \omega_u + d\lambda_3 = 0$ qui est donc la plus importante. Elle permet de calculer λ_2 et représente la véritable équation d'Euler-Lagrange du système. Elle s'appelle d'ailleurs l'équation d'Euler.

Compte tenu des équations (i) et (ii), l'équation d'Euler s'écrit :

$$-\frac{\partial L}{\partial \theta} dt + \lambda_2 \sigma dt + d\lambda_3 = 0 .$$

Mais comme $\lambda_3 = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial L}{\partial \kappa}$, elle devient :

$$d\lambda_3 = -\frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial L}{\partial \kappa} d\sigma + \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \kappa \partial \theta} d\theta + \frac{\partial^2 L}{\partial \kappa \partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial^2 L}{\partial \kappa^2} d\kappa \right]. \quad (83)$$

D'où en définitive, puisque $d\theta = \rho = \kappa \sigma dt$,

$$\lambda_2 \sigma dt - \frac{\partial L}{\partial \theta} dt - \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial L}{\partial \kappa} d\sigma + \kappa \frac{\partial^2 L}{\partial \kappa \partial \theta} dt + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 L}{\partial \kappa \partial \sigma} d\sigma + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 L}{\partial \kappa^2} d\kappa = 0. \quad (84)$$

Dans notre cas, $L = \sigma (1 + \kappa^2 \sec^4 \theta)^{\frac{1}{2}}$ et le calcul donne :³⁶

$$\begin{cases} \lambda_1 = (1 + \kappa^2 \sec^4 \theta)^{-\frac{1}{2}} \\ \lambda_3 = \kappa \sec^4 \theta (1 + \kappa^2 \sec^4 \theta)^{-\frac{1}{2}} \\ \lambda_2 = -\sec^4 \theta (1 + \kappa^2 \sec^4 \theta)^{-\frac{3}{2}} (\dot{\kappa} + 2\kappa^2 \tan \theta). \end{cases} \quad (85)$$

En termes de L_0 ($\varphi = Ldt = L_0 ds$ et $L = L_0 \sigma$), les multiplicateurs de Lagrange s'expriment simplement par :

$$\begin{cases} \lambda_1 = L_0 - \kappa \frac{\partial L_0}{\partial \kappa} \\ \lambda_2 = \frac{\partial L_0}{\partial \theta} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \kappa} \right) \\ \lambda_3 = \frac{\partial L_0}{\partial \kappa}. \end{cases}$$

On remarquera que $\lambda_2 = \tilde{\lambda} \sin \varphi$ redonne les équations (31) et (78) avec $\varphi = \theta$.

La loi de conservation $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \tilde{\lambda}^2$ fournit alors l'équation différentielle :

$$(1 + \kappa^2 \sec^4 \theta)^2 + \sec^8 \theta (\dot{\kappa} + 2\kappa^2 \tan \theta)^2 = \tilde{\lambda}^2 (1 + \kappa^2 \sec^4 \theta)^3. \quad (86)$$

qui n'est rien d'autre que l'équation (34) obtenue précédemment (avec $\lambda = \tilde{\lambda}$).

9.5.4 L'interprétation géométrique des équations d'Euler-Lagrange

Bryant et Griffiths donnent l'interprétation géométrique suivante de leur système d'équations. De façon générale, si α et β sont deux 1-formes sur une variété X et si ξ est un vecteur tangent, la contraction (produit intérieur) $i_\xi(\alpha \wedge \beta)$ de la 2-forme $\alpha \wedge \beta$ par ξ est la 1-forme définie par :

$$i_\xi(\alpha \wedge \beta) = i_\xi(\alpha) \wedge \beta - \alpha \wedge i_\xi(\beta) = i_\xi(\alpha)\beta - i_\xi(\beta)\alpha. \quad (87)$$

Il s'agit bien d'une 1-forme car $i_\xi(\alpha) = \alpha(\xi)$ et $i_\xi(\beta) = \beta(\xi)$ sont des scalaires (i.e. des 0-formes).

³⁶On remarquera que, étant donnée la forme très particulière de L_0 , on a $\lambda_1 = L_0 - \dot{\theta} \frac{\partial L_0}{\partial \theta} = \frac{1}{L_0}$.

- Considérons d'abord des vecteurs ξ tangents à X le long du facteur \mathfrak{A} , autrement dit (puisque \mathfrak{A} est un espace vectoriel et est donc partout identique à son espace tangent) des $\xi \in \mathfrak{A}$, et calculons la 1-forme $i_\xi(\Psi)$. D'après la formule (87), $i_\xi(dL \wedge dt) = dL(\xi)dt - dt(\xi)dL = dL(\xi)dt$ car $dt(\xi) = 0$ puisque $\xi \in \mathfrak{A}$ n'a pas de composante le long du facteur \mathbb{R}_t de X . Il en va de même pour $i_\xi(dP \wedge dt) = dP(\xi)dt$. Comme $dP(\xi) = \xi$, on obtient donc $i_\xi(dP \wedge dt) = \xi dt$ et $i_\xi(\langle \lambda, dP \wedge dt \rangle) = \lambda(\xi)dt$. Les deux autres termes de $i_\xi(\Psi)$ sont nuls car ξ n'a aucune composante le long des facteurs de Z sur lesquels les 2-formes correspondantes sont définies. Comme on a toujours $dt \neq 0$ (condition de transversalité), on obtient en définitive $dL(\xi) - \langle \lambda, \xi \rangle = 0, \forall \xi \in \mathfrak{A}$.
- Considérons maintenant des vecteurs ξ tangents à X le long du facteur G et calculons $i_\xi(\Psi)$. Le terme $i_\xi(\frac{\partial L}{\partial \theta} d\theta \wedge dt + \frac{\partial L}{\partial \sigma} d\sigma \wedge dt + \frac{\partial L}{\partial \kappa} d\kappa \wedge dt)$ donne 0 pour son second terme $d\sigma(\xi)dt - dt(\xi)d\sigma$ car ξ n'a pas de composante le long de \mathfrak{A} . Il en va de même pour son troisième terme $d\kappa(\xi)dt - dt(\xi)d\kappa$. Il ne reste donc que le premier terme $i_\xi(\frac{\partial L}{\partial \theta} d\theta \wedge dt) = \frac{\partial L}{\partial \theta}(d\theta(\xi)dt - dt(\xi)d\theta)$. Comme $dt(\xi) = 0$ (transversalité de t), il reste en définitive $\frac{\partial L}{\partial \theta} d\theta(\xi)dt = \frac{\partial L}{\partial \theta} \rho(\xi)dt$.
- Par ailleurs la contribution de $-\langle \lambda, dP \wedge dt \rangle$ est nulle car ξ n'a pas de composante le long de \mathfrak{A} .
- Pour le terme $\langle d\lambda, \mu \rangle$ on a (puisque $\mu = \Lambda_G - Pdt$)

$$i_\xi(\langle d\lambda, \mu \rangle) = \langle d\lambda(\xi), \Lambda_G \rangle - \langle d\lambda, \Lambda_G(\xi) \rangle - \langle d\lambda(\xi), Pdt \rangle + \langle d\lambda, Pdt(\xi) \rangle .$$

Comme $dt(\xi) = 0$ et comme $d\lambda$ ne concerne que la composante \mathfrak{g}^* de Z et que ξ est sans composante le long de \mathfrak{g}^* , il ne reste que le terme $-\langle d\lambda, \Lambda_G(\xi) \rangle$ qui est lui-même égal à $-\langle d\lambda, \xi \rangle$ car, par construction, $\Lambda_G(\xi) = \xi$ (cf. section 9.4.1).

- Enfin le terme $-\frac{1}{2} \langle \lambda, [\Lambda_G, \Lambda_G] \rangle$ donne $i_\xi(-\frac{1}{2} \langle \lambda, [\Lambda_G, \Lambda_G] \rangle) = \langle \lambda, i_\xi(-\frac{1}{2} [\Lambda_G, \Lambda_G]) \rangle$. Mais comme, si ξ, η sont deux éléments de \mathfrak{g} vus comme champs G -invariants par translations à gauche on a $-\frac{1}{2} [\Lambda_G, \Lambda_G](\xi, \eta) = d\Lambda_G(\xi, \eta) = -[\xi, \eta]$, on obtient en termes de 1-formes : $i_\xi(-\frac{1}{2} [\Lambda_G, \Lambda_G]) = -\frac{1}{2} [\Lambda_G, \Lambda_G](\xi, \bullet) = -[\xi, \bullet] = -[\xi, \Lambda_G]$. Cela peut s'exprimer en termes de représentation co-adjointe (cf. section 9.3) car $\langle \lambda, -[\xi, \Lambda_G] \rangle = -ad_\xi^* \lambda(\Lambda_G)$. Et comme sur les courbes qui nous intéressent, à savoir les relevées de Frénet, on a $\Lambda_G = Pdt$, on obtient $-ad_\xi^* \lambda(P) dt$, résultat qui peut à son tour s'écrire sous la forme $\langle -ad_P^* \lambda dt, \xi \rangle$ car ici $P = \xi$.

On obtient ainsi en définitive le système :

$$\begin{cases} (i) & \mu = \Lambda_G - Pdt = 0 \\ (ii) & dL(\xi) - \langle \lambda, \xi \rangle = 0, \forall \xi \in \mathfrak{A}. \\ (iii) & -\frac{\partial L}{\partial \theta} \rho(\xi)dt + \langle d\lambda, \xi \rangle + \langle ad_P^* \lambda dt, \xi \rangle dt = 0, \forall \xi \in \mathfrak{g}. \end{cases} \quad (88)$$

Rappelons que λ est identifié au covecteur $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de \mathfrak{g}^* et que, $\rho = d\theta$ donnant la troisième composante des vecteurs de \mathfrak{g} , on a en fait $-\frac{\partial L}{\partial \theta} \rho(\xi) dt = \langle (0, 0, -\frac{\partial L}{\partial \theta} dt), \xi \rangle$.³⁷ L'équation (iii) peut donc s'écrire sous la forme :

$$(iii)' \quad (0, 0, -\frac{\partial L}{\partial \theta} dt) \cdot + d\lambda + ad_P^* \lambda dt = 0 .$$

Mais comme pour $P = \begin{pmatrix} \sigma \\ 0 \\ \kappa\sigma \end{pmatrix}$, on a $ad_P^* \lambda = \begin{pmatrix} 0 & \kappa\sigma & 0 \\ -\kappa\sigma & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, l'équation (iii)' devient :

$$(iii)'' \quad (d\lambda_1, d\lambda_2, d\lambda_3) + (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \begin{pmatrix} 0 & \kappa\sigma & 0 \\ -\kappa\sigma & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dt + (0, 0, -\frac{\partial L}{\partial \theta} dt) = 0 .$$

L'équation (i) redonne les trois premières équations (i), (ii), (iii) du système (82), l'équation (ii) redonne les équations (iv) et (v) permettant de calculer les multiplicateurs de Lagrange λ_1 et λ_3 , les deux premières composantes de (iii)'' redonne les équations (vii) et (viii) de la loi de conservation exprimant que λ reste dans les orbites de la représentation co-adjointe de G , et enfin la troisième composante de (iii)'' redonne l'équation d'Euler (vi) qui permet de calculer le multiplicateur λ_2 .

9.5.5 Retour sur les modèles du fibré en cercle et des elasticae

Ce formalisme peut facilement être appliqué à d'autres lagrangiens.

- Pour le modèle du fibré en cercles issu du lagrangien de la section 8.4,

$$L = (dx^2 + dy^2 + d\theta^2)^{\frac{1}{2}} = \sigma (1 + \kappa^2)^{\frac{1}{2}}$$

et l'on obtient les équations :

$$\begin{cases} \lambda_1 = (1 + \kappa^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \lambda_3 = \kappa (1 + \kappa^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \lambda_2 = -\dot{\kappa} (1 + \kappa^2)^{-\frac{3}{2}} \end{cases} \quad (89)$$

La loi de conservation fournit alors l'équation différentielle :

$$(\dot{\kappa})^2 + (1 + \kappa^2)^2 = \tilde{\lambda}^2 (1 + \kappa^2)^3 \quad (90)$$

qui n'est rien d'autre que l'équation (42) avec $\tilde{\lambda} = \frac{1}{k}$.

- Pour les elasticae, le lagrangien général est $L = (\alpha\kappa^2 + \beta)\sigma$. On a donc $\frac{\partial L}{\partial \sigma} = \alpha\kappa^2 + \beta$, $\frac{\partial L}{\partial \kappa} = 2\alpha\kappa\sigma$, $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$. L'équation (v) $\frac{\partial L}{\partial \kappa} - \lambda_3\sigma = 0$ donne $\lambda_3 = 2\alpha\kappa$, l'équation (iv) donne $(\alpha\kappa^2 + \beta) - \lambda_3\kappa - \lambda_1 = 0$, soit $\lambda_1 = -\alpha\kappa^2 + \beta$. Enfin

³⁷Les vecteurs de \mathfrak{g} sont des vecteurs de dimension 3 qui sont représentés sous la forme de matrices 2×2 . Suivant le contexte on les notera comme des vecteurs colonnes ou comme des matrices. Idem pour les covecteurs de \mathfrak{g}^* .

l'équation d'Euler donne $2\alpha d\kappa + \lambda_2 ds = 0$, soit $\lambda_2 = -2\alpha\dot{\kappa}$. D'où en définitive le système :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\alpha\kappa^2 + \beta \\ \lambda_3 = \lambda_3 = 2\alpha\kappa \\ \lambda_2 = -2\alpha\dot{\kappa} \end{cases}$$

La loi de conservation $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = c^2$ donne pour κ l'équation :

$$4\alpha^2\dot{\kappa}^2 + \alpha^2\kappa^4 = 2\alpha\beta\kappa^2 + c^2 - \beta^2 \quad (91)$$

qui n'est rien d'autre que l'équation (7) pour $\alpha = \frac{1}{2}$.

10 Conclusion

Nous avons présenté plusieurs modèles de contours subjectifs, les uns résultant de mécanismes neuronaux plausibles, les autres déduits de considérations plus mathématiques. Un point commun à la majorité d'entre eux est d'optimiser des critères qui concilient faible longueur et faible courbure. Préciser comment interviennent ces deux contraintes signifierait connaître le processus de formation des contours subjectifs. Les contours illusoire sont en effet un phénomène psychologique exceptionnel puisqu'ils nous donnent directement le résultat d'un calcul cortical de bas niveau. Seules des études psychophysiques très précises sur la *forme* de ces contours permettraient une meilleure compréhension de leur genèse neuronale.

Ce n'est certes pas facile, dans la mesure où seuls les contours modaux peuvent faire l'objet de mesures, et que ceux-ci ne surviennent que dans des conditions de faible écart de distance ou d'orientation entre les deux extrémités. Or, dans ces conditions, les contours pronostiqués par toutes les théories sont très proches, donc difficiles à départager. Mais on peut néanmoins proposer quelques idées d'expériences.

Une première idée (que nous mettons au point avec Jacques Ninio) serait de repérer dans des séries de configurations à la Kanizsa (variant en position, taille, taille des inducteurs, orientation) la position exacte du contour virtuel en y calant l'extrémité d'un segment orthogonal, ou un petit segment parallèle, ou une graduation, ou les deux (cf. figure 42).

L'inconvénient de ce genre de protocole est que le repère (par exemple la cellule end-stopped correspondant à l'extrémité du segment orthogonal) active un élément de contour virtuel orthogonal qui interfère avec le contour virtuel mesuré. Une autre possibilité serait d'utiliser les techniques de "subthreshold summation" développées par Birgitta Dresp et Claude Bonnet (1991, 1993, 1995). Elles reposent sur le fait que le seuil de détection d'un petit segment sub-liminaire parallèle au contour virtuel s'abaisse brutalement quand le segment se superpose exactement au contour :

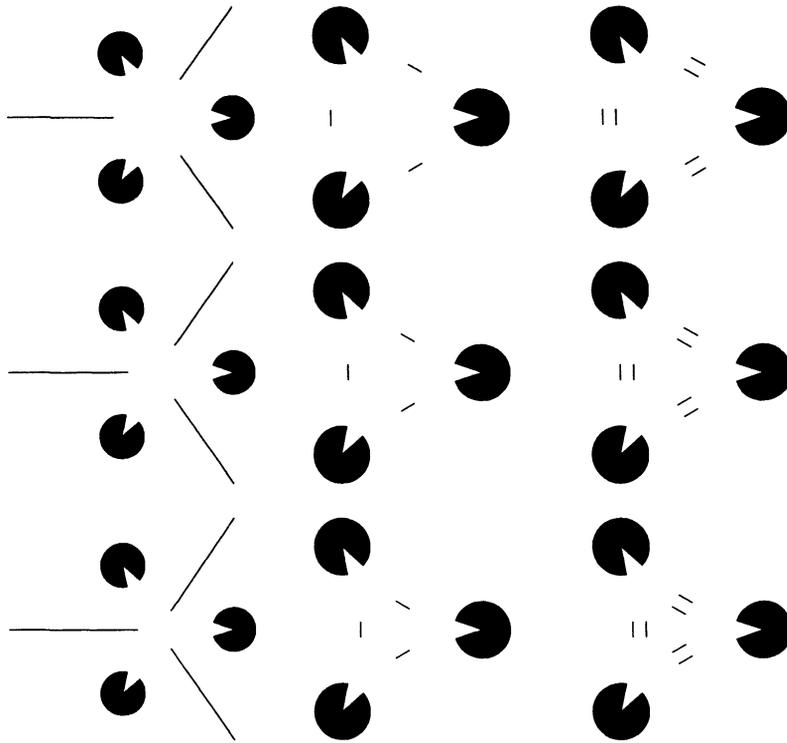


Figure 42: Protocole de mesure de l'extremum d'un contour illusoire modal courbe. La configuration peut varier de taille et d'orientation, ainsi que le nombre et la taille des inducteurs. Il s'agit de positionner un repère sur l'extremum. Ce repère peut être l'extrémité d'un segment orthogonal, un petit segment parallèle, une graduation ou les deux.

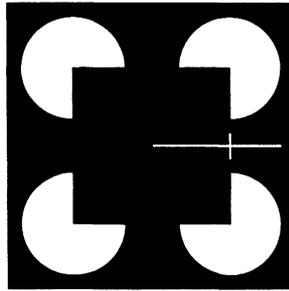


Figure 43: La configuration inductrice des expériences de Birgitta Dresp. On déplace le petit segment vertical de gauche (position -) à droite (position +) et on mesure son seuil de détection. (D'après Dresp, Bonnet 1993, p. 762).

«When both lines are strictly superimposed, the neural response to these stimuli add together and a lower contrast is needed for a threshold response.»
(Dresp, Bonnet, 1995, p. 1071)

L'interprétation la plus plausible est qu'il y a une activité additive dans le cortex et que le contour illusoire préactive les neurones détectant le segment (cf. figures 43 et 44).

Toutefois cette méthode possède aussi certaines limites. Mais quoi qu'il en soit, il est certain que des résultats quantitatifs fins et précis sur la position des extrema des contours virtuels modaux serait du plus haut intérêt pour mieux comprendre, en sélectionnant un modèle, quels sont les mécanismes géométriques d'intégration neurale implémentés.

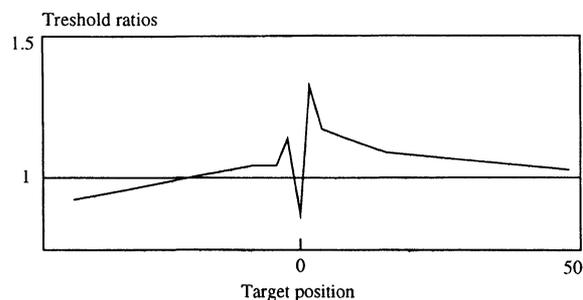


Figure 44: Courbe typique de réponse. On voit que lorsque le segment est juste sur le contour virtuel son seuil de détection s'abaisse brusquement. On notera aussi que le seuil de détection est légèrement supérieur lorsque le segment est à l'extérieur du carré de Kanizsa. (D'après Dresch, Bonnet 1993, p. 763).

Bibliographie

ABRAHAM R., MARSDEN J. (1978), *Foundations of Mechanics*, Benjamin/Cummings, Reading.

ARNOLD V. (1976), *Méthodes mathématiques de la Mécanique classique*, Ed. Mir, Moscou.

BEREST P. (1995), *Calcul des Variations, Application à la Mécanique et à la Physique*, Cours de l'Ecole Polytechnique, Paris.

BERTHOZ A. (1997), *Le Sens du Mouvement*, Odile Jacob, Paris.

BONHOEFFER T., GRINVALD A. (1991), Iso-orientation domains in cat visual cortex are arranged in pinwheel-like patterns, *Nature*, vol. 353, pp. 429-431.

BORN R.T., TOOTELL R.B. (1990), Spatial frequency tuning of single units in macaque supragranular striate cortex, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, vol. 88, pp. 7066-7070.

BOURGUIGNON J.P. (1993), *Calcul variationnel*, Cours de l'Ecole Polytechnique, Paris.

BRADY M., GRIMSON W.E.L., LANGRIDGE D. (1980), Shape encoding and subjective contours, *Proceedings of the AAAI*, Stanford University, pp. 15-17.

BRYANT R., GRIFFITHS P. (1986), Reduction for constrained variational problems and $\int \frac{\kappa^2}{2} ds$, *American Journal of Mathematics*, vol. 108, pp. 525-570.

BUSER P., IMBERT M. (1987), *Vision*, Hermann.

CASELLES V., COLL T., MOREL J-M. (forthcoming), *A Kanizsa Programme*.

DAS A., GILBERT C.D. (1995), Long range horizontal connections and their role in cortical reorganization revealed by optical recording of cat primary visual cortex, *Nature*, vol. 375, pp. 780-784.

- DAS A., GILBERT C.D. (1997), Distorsions of visuotopic map match orientation singularities in primary visual cortex, *Nature*, vol. 387, pp. 594-598.
- DAVIS G., DRIVER J. (1994), Parallel detection of Kanizsa subjective figures in the human visual system, *Nature*, vol. 371, pp. 791-793.
- DRESP B., BONNET C. (1991), Psychophysical evidence for low level processing of illusory contours and surfaces in the Kanizsa square, *Vision Research*, vol. 31, pp. 1813-1817.
- DRESP B., BONNET C. (1993), Psychophysical measures of illusory form perception : further evidence for local mechanisms, *Vision Research*, vol. 33, n° 5/6, pp. 759-766.
- DRESP B., BONNET C. (1995), Subthreshold summation with illusory contours, *Vision Research*, vol. 35, pp. 1071-1078.
- DRESP B., GROSSBERG S. (1997), Contour integration across polarities and spatial gaps : from local contrast filtering to global grouping, *Vision Research*, vol. 37, n° 7, pp. 913-924.
- FIELD D.J. (1987), Relations between the statistics of natural images and the response properties of cortical cells, *Journal of the Optical Society of America, A*, vol. 4, n° 12, pp. 2379-2394.
- FIELD D.J., HAYES A., HESS R.F. (1993), Contour integration by the human visual system : evidence for a local "association field", *Vision Research*, vol. 33, n° 2, pp. 173-193.
- FINKEL L.H., EDELMAN G.M. (1989), Integration of distributed cortical systems by reentry : a computer simulation of interactive functionally segregated visual areas, *Journal of Neuroscience*, vol 9, n° 9, pp 3188-3208.
- FLORACK L.M.J., TER HAAR ROMENY B.M., KOENDERINK J.J., VIERGEVER M.A. (1992), Scale and the differential structure of images, *Image and Vision Computing*, vol. 10, n° 6, pp. 376-388.
- FREGNAC Y., BRINGUIER V., CHAVANE F., GLAESER L., LORENCEAU J. (1996), An intracellular study of space and time representation in primary visual cortical receptive fields, *Journal of Physiology*, vol. 90, pp. 189-197.
- GAMKRELIDZE R.V. (Ed.) (1991), Geometry 1, *Encyclopædia of Mathematical Sciences*, Springer Verlag, Berlin.
- GILBERT C.D. (1992), Horizontal integration and cortical dynamics, *Neuron*, vol. 9, pp. 1-13.
- GILBERT C.D. (1994), Circuitry, architecture and functional dynamics of visual cortex, in *Higher order processing in the visual system*, Ciba Foundation Symposium 184, pp. 35-62.
- GILBERT C.D., DAS A., ITO M., KAPADIA M., WESTHEIMER G. (1996), Spatial integration and cortical dynamics, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, vol. 93, pp. 615-622.
- GILBERT C.D., WIESEL T.N. (1989), Columnar specificity of intrinsic horizontal and corticocortical connections in cat visual cortex, *Journal of Neuroscience*, vol. 9, n° 7, pp. 2432-2442.

GRAY C.M., SINGER W. (1989), Stimulus-specific neuronal oscillations in orientation columns of cat visual cortex, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, vol. 86, pp. 1698-1702.

GRAY C.M., KÖNIG P., ENGEL A.K., SINGER W. (1989), Oscillatory responses in cat visual cortex exhibit inter-columnar synchronization which reflects global stimulus properties, *Nature*, vol. 338, pp. 334-337.

GRINVALD A., LIEKE E.E., FROSTIG R.D., HILDESHEIM R. (1994), Cortical point-spread function and long-range lateral interactions revealed by real-time optical imaging of macaque monkey primary visual cortex, *Journal of Neuroscience*, vol. 14, n° 5, pp. 2545-2568.

GROSOFF D.H., SHAPLEY R.M., HAWKEN M.J. (1993), Macaque V1 neurons can signal "illusory" contours, *Nature*, vol. 365, pp. 550-552.

GROSSBERG S., MINGOLLA E. (1985a), Neural dynamics of form perception : boundary completion, illusory figures and neon color spreading, *Psychological Review*, vol. 92, pp. 173-211.

GROSSBERG S., MINGOLLA E. (1985b), Neural dynamics of perceptual grouping : textures, boundaries and emergent segmentation, *Perception and Psychophysics*, vol. 38, pp. 141-171.

GROSSBERG S., MINGOLLA E. (1987), The role of illusory contours in visual segmentation, in *The Perception of Illusory Contours*, in Petry S. et Meyer G.E. eds, Springer, pp. 116-125.

HEITGER F., ROSENTHALER L., VON DER HEYDT R., PETERHANS E., KÜBLER O. (1992), Simulation of neural contour mechanisms : from simple to end-stopped cells, *Vision Research*, vol. 32, n° 5, pp. 963-981.

HEITGER F., VON DER HEYDT R. (1993), A computational model of neural contour processing : figure-ground segregation and illusory contours, *Proc. 4th Int. Conf. Comp. Vis., IEEE*, pp. 32-40.

HIRSCH J., DELAPAZ R.L., RELKIN N.R., VICTOR J., KIM K., LI T., BORDEN P., RUBIN N., SHAPLEY R. (1995), Illusory contours activate specific regions in human visual cortex : Evidence from functional magnetic resonance imaging, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, vol. 92, pp. 6469-6473.

HOFFMAN W.C. (1985), Some reasons why algebraic topology is important in neuropsychology : perceptual and cognitive systems as fibrations, *International Journal of Man-Machine Studies*, vol. 22, pp. 613-650.

HOFFMAN W.C. (1989), The visual cortex is a contact bundle, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 32, pp. 137-167.

HOFFMAN W.C. (1994a), Conformal structures in perceptual psychology, *Spatial Vision*, vol. 8, n° 1, pp. 19-31.

HOFFMAN W.C. (1994b), Equivariant dynamical systems : a formal model for the generation of arbitrary shapes, *Proceedings of the NATO Conference on "Shape in Picture"*, Springer Verlag, Berlin.

HORN B.K.P. (1983), The curves of least energy, *ACM Transactions on Mathematical Software*, vol. 9, n° 4, pp. 441-460.

HUBEL D.H. (1988), *Eye, Brain and Vision*, Scientific American Library.

- HUMMEL H.E., BIEDERMAN I. (1992), Dynamic binding in a neural network for shape recognition, *Psychological Review*, vol. 99, n° 3, pp. 480-517.
- KANIZSA G. (1979), *Organization in Vision : Essays on Visual Perception*, Praeger. Trad. française *La Grammaire du Voir*, Diderot Editeur, Paris.
- KAPADIA M.K., ITO M., GILBERT C.D., WESTHEIMER G. (1995), Improvement in visual sensitivity by changes in local context : parallel studies in human observers and in V1 of alert monkeys, *Neuron*, vol. 15, pp. 843-856.
- KELLMAN P.J., SHIPLEY T.F. (1991), A theory of visual interpolation in object perception, *Cognitive Psychology*, vol. 23, pp. 141-221.
- KOENDERINK J.J. (1984a), Simultaneous order in nervous nets from a functional standpoint, *Biological Cybernetics*, vol. 50, pp. 35-41.
- KOENDERINK J.J. (1984b), The structure of images, *Biological Cybernetics*, vol. 50, pp. 363-370.
- KOENDERINK J.J. (1988), Operational significance of receptive field assemblies, *Biological Cybernetics*, vol. 58, pp. 163-171.
- KOENDERINK J.J. (1990), The brain as a geometry engine, *Psychological Research*, vol. 52, pp. 122-127.
- KOENDERINK J.J., RICHARDS W.A. (1988), Two-dimensional curvature operators, *Journal of the Optical Society of America*, vol. 5, n° 7, pp. 1136-1141.
- KOENDERINK J.J., VAN DOORN A.J. (1987), Representation of local geometry in the visual system, *Biological Cybernetics*, vol. 55, pp. 367-375.
- KOVACS I., JULESZ B. (1993), A closed curve is much more than an incomplete one : effect of closure in figure-ground segmentation, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, vol. 90, pp. 7495-7497.
- LAMME A.F., VAN DIJK B.W., SPEKREIJSE H. (1993), Contour from motion occurs in primary visual cortex, *Nature*, vol. 363, pp. 541-543.
- LESHER G.W., MINGOLLA E. (1993), The role of edges and line-ends in illusory contour formation, *Vision Research*, vol. 33, n° 16, pp. 2253-2270.
- MARR D. (1982), *Vision*, Freeman.
- MUMFORD D. (1992), Elastica and computer vision, in *Algebraic Geometry and Applications*, C. Bajaj ed., Springer Verlag, Berlin.
- NINIO J. (1996), *L'Empreinte des Sens*, Odile Jacob.
- NITZBERG M., MUMFORD D., SHIOTA T. (1993), Filtering, segmentation and depth, *Lecture Notes in Computer Science*, n° 662, Springer Verlag, Berlin.
- PETERHANS E., VON DER HEYDT R. (1989), Mechanisms of contour perception in monkey visual cortex. II. Contours bridging gaps, *Journal of Neuroscience*, vol. 9, n° 5, pp. 1749-1763.
- PETERHANS E., VON DER HEYDT R. (1991), Subjective contours. Bridging the gap between psychophysics and psychology, *Trends in Neuroscience*, vol. 14, n° 3, pp. 112-119.
- PETITOT J. (1990), Le physique, le morphologique, le symbolique : remarques sur la vision, *Revue de Synthèse*, n° 1-2, pp. 139-183.
- PETITOT J. (1992), *Physique du Sens*, Editions du CNRS, Paris.

PETITOT J. (1995), Sheaf mereology and Husserl's morphological ontology, *Int. J. Human-Computer Studies*, vol. 43, pp. 741-763.

PETITOT J. (1999), Morphological Eidetics for a Phenomenology of Perception, *Naturalizing Phenomenology: Issues in Contemporary Phenomenology and Cognitive Science*, (J. Petitot, F. J. Varela, J.-M. Roy, B. Pachoud, eds.), Stanford University Press.

PETRY S., GANNON R. (1987), Time motion and objectedness in illusory contours, in *The Perception of Illusory Contours*, Petry S. et Meyer G.E. eds, Springer.

PETRY S. et MEYER G.E. eds. (1987), *The Perception of Illusory Contours*, Springer.

POLAT U., SAGID D. (1993), Lateral interactions between spatial channels : suppression and facilitation revealed by lateral masking experiment, *Vision Research*, vol. 33, n° 7, pp. 993-999.

ROCK I. (1987), A problem solving approach of illusory contours, in *The Perception of Illusory Contours*, Petry S. et Meyer G.E. eds, Springer, pp. 62-70.

SHAPLEY R., GORDON J. (1987), The existence of interpolated illusory contours depends on contrast and spatial separation, in *The Perception of Illusory Contours*, Petry S. et Meyer G.E. eds, Springer, pp. 109-115.

SHARPE R. (1997), *Differential Geometry*, Springer, New-York.

SHETH B.R., SHARMA J., RAO C., SUR M. (1996), Orientation maps of subjective contours in visual cortex, *Nature*, vol. 274, pp. 2110-2115.

SHIPLEY T.F., KELLMAN P.J. (1992a), Perception of partly occluded objects and illusory figures : evidence for an identity hypothesis, *Journal of Experimental Psychology*, vol. 18, n° 1, pp. 106-120.

SHIPLEY T.F., KELLMAN P.J. (1992b), Strength of visual interpolation depends on the ratio of physically specified to total edge length, *Perception and Psychophysics*, vol. 52, pp. 97-106.

SPELLMAN L., DRESP B. (1995), Phenomena of illusory form : can we bridge the gap between levels of explanation ?, *Perception*, vol. 24, pp. 1333-1364.

SPIVAK M. (1974), *A Comprehensive Treatise on Differential Geometry*, Publish or Perish, Boston, Mass.

STEMMLER M., USHER M., NIEBUR E. (1995) Lateral interactions in primary visual cortex : a model bridging physiology and psychophysics, *Science*, vol. 269, p. 1877-1880.

TONDUT Y., PETITOT J. (1997), *Géométrie de contact et Champ d'association dans le cortex visuel*, Rapport n° 9725, CREA, Ecole Polytechnique, Paris.

TS'O D., GILBERT C.D., WIESEL T.N. (1986), Relationships between horizontal interactions and functional architecture in cat striate cortex as revealed by cross-correlation analysis, *Journal of Neuroscience*, vol. 6, n° 4, pp. 1160-1170.

ULLMAN S. (1976), Filling in the gaps : the shape of subjective contours and a model for their generation, *Biological Cybernetics*, vol. 25, pp. 1-6.

VON DER HEYDT R., PETERHANS E. (1989a), Mechanisms of contour perception in monkey visual cortex. I. Lines of pattern discontinuity, *Journal of Neuroscience*,

vol. 9, n° 5, pp. 1731-1748.

VON DER HEYDT R., PETERHANS E. (1989b), Cortical contour mechanisms and geometrical illusions, in *Neural mechanisms of visual perception*, Lam D.M. et Gilbert C.D. eds, Portfolio Publishing Company, pp. 158-170.

VON DER HEYDT R., PETERHANS E., BAUMGARTNER G. (1984), Illusory contours and cortical neuron responses, *Science*, vol. 224, pp. 1260-1262.

WEBB J.A., PERVIN E. (1984), The shape of subjective contours, *Proceedings of the IAAA*, pp. 340-343.

WILLIAMS L.R., JACOBS D.W. (1995), Stochastic completion fields : a neural model of illusory contour shape and salience, *Proc. Intern. Conf. Comp. Vis.*, n° 5, pp. 408-415.

ZEKI S. (1993), *A Vision of the Brain*, Blackwell Scientific Publications.

ZUCKER S.W., DAVID C., DOBBINS A., IVERSON L. (1988), The organization of curve detection : coarse tangent fields and fine spline covering, *Proc. 2nd Intern. Conf. Comp. Vis.*, IEEE.