

CLAUDE LE CONTE DE POLY-BARBUT

Treillis de Cayley des groupes de Coxeter finis. Constructions par récurrence et décompositions sur des quotients

Mathématiques et sciences humaines, tome 140 (1997), p. 11-33

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1997__140__11_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**TREILLIS DE CAYLEY DES GROUPES DE COXETER FINIS.
CONSTRUCTIONS PAR RÉCURRENCE ET DÉCOMPOSITIONS SUR DES QUOTIENTS**

Claude LE CONTE de POLY-BARBUT¹

RÉSUMÉ — *Cet article, offert à André Lentin lors du colloque du 23 février 1996 organisé en son honneur, a pour objet de montrer que le treillis étiqueté obtenu à partir de l'ordre faible sur un Coxeter fini (W,S) , et le groupe lui-même, peuvent être construits à partir d'un sous-groupe parabolique quelconque W_J , du quotient associé W^J et d'une fonction de $W^J \times J$ dans $S \cup \emptyset$.*

Cette méthode permet en particulier la construction par récurrence des groupes et treillis des quatre familles infinies de Coxeter finis irréductibles et la procédure inverse, la réduction de toute décomposition des éléments du groupe.

SUMMARY — Cayley lattices of finite Coxeter groups. Recursive constructions and reductions.

This article, dedicated to André Lentin on the occasion of the meeting (23.02.96) organized in his honor, aims to show that the labelled lattice obtained from the weak order on a finite Coxeter system (W,S) as well as the group itself can be constructed starting from an arbitrary parabolic subgroup W_J , the associated quotient W^J and a function from $W^J \times J$ to $S \cup \emptyset$.

This method permits the recursive construction of groups and lattices in the four infinite families of irreducible finite Coxeter groups ; the reverse procedure leads to a reduction algorithm for expressions of elements of the group as products of generators.

Ce travail, baptisé dans un premier temps "arêtes de poissons" commencé sous la patiente mais ferme conduite de mon cher maître, que nous célébrons ici, a pour objet de confronter les structures de groupe et de treillis obtenu à partir de l'ordre dit faible, des groupes de Coxeter finis, et plus précisément de montrer (et donner à voir par les figures de la quatrième partie) que le treillis étiqueté et donc le groupe, peuvent être construits à partir d'un sous-groupe parabolique, d'un "quotient", et d'une fonction. Ce résultat est du même ordre que celui de Deodhar [4] pour l'ordre dit fort, ou ordre de Bruhat, des Coxeter. Ainsi, pour l'exemple le plus fréquemment cité de groupe de Coxeter, le groupe des permutations de n éléments avec, pour système générateur, les $n - 1$ transpositions d'éléments adjacents, le treillis associé (le permutoèdre [7]) peut s'obtenir à partir d'un permutoèdre "plus petit", d'un "quotient" et d'une fonction ; et, par récurrence à partir du permutoèdre à deux éléments.

Par un processus inverse on associe à toute décomposition d'un élément quelconque du groupe, en produit d'éléments du système générateur, une décomposition en produit d'éléments de quotients successifs puis, par réduction sur chaque quotient, on en déduit une décomposition réduite.

Des calculs sont faits pour tous les Coxeter irréductibles finis sauf pour E_8 qui a $2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$ éléments.

¹ Centre d'Analyse et de Mathématiques Sociales, École des Hautes Études en Sciences Sociales.

I. RAPPEL DE QUELQUES NOTIONS DE BASE

Un système de Coxeter (W, S) dont l'opération est notée multiplicativement et d'élément neutre e est défini par un système générateur S du groupe W et des relations entre générateurs vérifiant les conditions 1) et 2) :

1) tout élément s de S est d'ordre 2 :

$$\forall s \in S, s^2 = e$$

2) pour $s, s' \in S$ soit $m(s, s')$ l'ordre de ss' (si $m(s, s')$ est fini, c'est le plus petit entier tel que $(ss')^{m(s, s')} = e$). Soit I l'ensemble des couples de S tels que $m(s, s')$ soit fini.

L'ensemble S et les relations $(ss')^{m(s, s')} = e$ pour (s, s') dans I forment une *présentation* du groupe W (cf. Bourbaki p.12). En d'autres termes W est quotient du groupe libre engendré par S , par l'équivalence définie par la donnée des $m(s, s')$. En particulier, S est un système générateur minimal.

L'exemple le plus fréquemment cité est celui du groupe symétrique, ou groupe des permutations de n éléments avec, pour système générateur les $n - 1$ transpositions d'éléments adjacents :

$$S = \{(1,2), (2,3), \dots, (n-1, n)\}$$

avec $m((i, i+1), (j, j+1)) = 2$ si $|i - j| > 1$
 et $m((i, i+1), (j, j+1)) = 3$ si $|i - j| = 1$

Le produit direct de deux groupes de Coxeter est un groupe de Coxeter, et un groupe de Coxeter est dit *irréductible* s'il n'est pas isomorphe à un produit direct de groupes de Coxeter.

Il n'existe que quatre familles infinies de groupes de Coxeter finis irréductibles (dont la famille A_n des groupes symétriques) et six groupes isolés. Nous étudierons la plupart d'entre eux dans la dernière partie.

— La *longueur* $l(w)$ d'un élément w de W est le plus petit entier r tel que w soit le produit de r éléments de S .

Si $w = s_1 \dots s_r$ avec $l(w) = r$

$s_1 \dots s_r$ est dite *décomposition réduite* de w .

— $l(w) = l(w^{-1})$ car si $s_1 \dots s_r$ est une décomposition réduite de w , $s_r \dots s_1$ est une décomposition réduite de w^{-1} .

— $l(w w') \leq l(w) + l(w')$:

si $s_1 \dots s_r$ est décomposition réduite de w et $s'_1 \dots s'_t$ une décomposition réduite de w' ,

$s_1 \dots s_r s'_1 \dots s'_t$ est égal à ww' mais n'est pas forcément une décomposition réduite.

— $\forall s \in S$ et $\forall w \in W$ $l(sw) = l(w) \pm 1$

— Un *segment* d'un produit $s_1 \dots s_r$ d'éléments de S est un produit d'éléments consécutifs $s_i s_{i+1} \dots s_{i+j}$ de la suite s_1, s_2, \dots, s_r et *tout segment d'une décomposition réduite est une décomposition réduite*.

Dans le cas fini, W admet un seul élément de longueur maximum, noté w_0 . Cet élément est d'ordre 2 car $l(w_0) = l(w_0^{-1})$ et peut être caractérisé par :

$$\forall s \in S \quad l(sw_0) = l(w_0) - 1$$

on a également :

$$l(w_0 s) = l(w_0 s^{-1}) = l(s w_0) = l(w_0) - 1 .$$

et :

$$\forall w \in W : l(w w_0) = l(w_0 w) = l(w_0) - l(w) .$$

LA CONDITION D'ÉCHANGE

On désigne sous ce nom l'assertion :

Soient $w \in W$ et $s \in S$ tels que $l(s w) < l(w)$.

Pour toute décomposition réduite $s_1 \dots s_r$ de w il existe un entier j tel que :

$$1 \geq j \geq r \text{ et } s s_1 \dots s_{j-1} = s_1 \dots s_{j-1} s_j \text{ (Bourbaki, p.15).}$$

Cette condition d'échange est fondamentale car elle caractérise les groupes de Coxeter :

THÉORÈME (Bourbaki p. 17). Pour que (W, S) soit un système de Coxeter il faut et il suffit qu'il satisfasse à la condition d'échange.

En appliquant plusieurs fois la condition d'échange on obtient : *de toute décomposition non réduite $s_1 \dots s_r$ d'un élément w on peut extraire une décomposition réduite $s_{j(1)} \dots s_{j(k)}$ où $j(1), \dots, j(k)$ est une suite croissante d'entiers compris entre 1 et r .*

LE GRAPHE DE CAYLEY DE (W, S)

C'est le graphe dont les sommets sont les éléments de W et les arêtes les couples (w, w') tels que $w' = sw$ pour un élément s de S .

(On remarque que l'on a également $sw' = w$ et que le graphe de Cayley des Coxeter n'est pas orienté).

On appellera *graphe étiqueté* le graphe de Cayley dont chaque arête (w, sw) est étiqueté par s .

Ce graphe de Cayley à gauche admet un dual : le graphe de Cayley à droite dont les sommets sont également les éléments de W et les arêtes les couples (w, w') tels que $w' = ws$.

LES ORDRES FAIBLES SUR W

Sur W l'ordre faible à gauche $<_L$ est défini par :

$$w_1 <_L w_2 \Leftrightarrow \exists s_1, \dots, s_r \in S : \\ w_2 = s_r \dots s_1 w_1$$

et

$$l(s_i \dots s_1 w_1) = l(w_1) + i \quad \forall i, 1 \leq i \leq r$$

la relation de couverture \prec de cet ordre :

$$w_1 \prec w_2 \Leftrightarrow \exists s \text{ et } w_2 = sw_1 \text{ avec } l(w_2) = l(w_1) + 1$$

coïncide avec le graphe de Cayley à gauche orienté par les longueurs croissantes. L'ordre faible à gauche est la fermeture transitive du graphe de Cayley à gauche orienté par les longueurs ; *le diagramme* de Hasse ou graphe de couverture de $<_L$ coïncide donc avec le graphe de Cayley à gauche orienté.

Les arêtes du diagramme peuvent être étiquetées comme dans le graphe de Cayley. Dualement l'ordre faible à droite $<_R$ est défini par :

$$w_1 <_R w_2 \Rightarrow \exists s_1 \dots s_r \in S \\ w_2 = w_1 s_1 \dots s_r \quad \text{et} \quad l(w_1 s_1 \dots s_i) = l(w) + i \quad \forall i, 1 \leq i \leq r.$$

L'application $w \rightarrow w^{-1}$ est un *isomorphisme* entre $(w_1 <_L)$ et $(w_1 <_R)$.

Résultat important dû à Bjorner [1] : $(W, <_L)$ est un demi treillis et, dans le cas fini, c'est un treillis.

Dans la suite nous entendrons, sauf précision, par ordre sur W l'ordre faible à gauche mais tout résultat sur $<_L$ est transférable en un résultat sur $<_R$ en raison de l'isomorphisme.

LES INTERVALLES DANS L'ORDRE FAIBLE

Dans l'ensemble ordonné $(W, <_L)$ l'étude des intervalles se ramène entièrement à celle des intervalles de minimum e (Bourbaki remarque p.10 et Bjorner et Wachs [2]) :

Soit $w_1 < w_2$ et $[w_1, w_2]$ l'intervalle de minimum w_1 et de maximum w_2 . La translation à droite $T_{w_1^{-1}}$ qui à tout élément w de $[w_1, w_2]$ fait correspondre $w w_1^{-1}$ est un isomorphisme de $[w_1, w_2]$ dans $[e, w_2 w_1^{-1}]$. L'étiquetage des arêtes reste inchangé dans la translation.

Dans l'étude des groupes de Coxeter, les ensembles W^s où

$$W^s = \{w \in W, l(ws) = l(w) + 1\}$$

jouent un rôle important. W^s est dit quotient de W par le sous-groupe $\langle e, s \rangle$. Cet ensemble peut être aussi défini par :

$$w \in W^s \Leftrightarrow s \not\leq w.$$

De plus, la translation à droite par s est une bijection entre W^s et $W^s s$ et $W^s \cup W^s s = W$. [Bourbaki].

Ce qui permet de déduire que W^s est une partie commençante pour l'ordre faible, et :
— *La translation à droite par s est un isomorphisme pour l'ordre faible entre la partie finissante $W^s s = \{w, w \geq s\}$ et la partie commençante $W^s = \{w, w \not\geq s\}$ qui forment une partition de W .*

Dans le cas fini, pour tout élément s de S , W^s et $W^s s$ sont deux intervalles isomorphes qui forment une partition de W . $W^s s$ est l'intervalle $[s, w_0]$ et W^s l'intervalle $[e, w_0 s]$ et l'étiquetage des arêtes est inchangé dans l'isomorphisme.

LEMME. (Bourbaki). Si $w \in W^s$ et $s'w \notin W^s$ alors $s'w = ws$

Pour toute partie J de S on note de la façon habituelle W_J le sous groupe de W engendré par J (et appelé sous groupe parabolique de W) et W^J le sous ensemble défini par :

$$W^J = \{w, w \in W \text{ et } l(ws) = l(w) + 1, \forall s \in J\}$$

soit encore

$$W^J = \bigcap_{s \in J} W^s$$

Chaque *classe de Lagrange* à gauche wW^J admet un seul élément de longueur minimale et W^J est également l'ensemble de ces représentants de longueur minimale des classes de Lagrange. W^J est encore appelé *quotient de W par J* .

W^J est une partie commençante, et un intervalle dans le cas fini [2].

Dans le treillis, les éléments s de S sont les atomes et pour toute partie de J de S le sous-groupe parabolique W_J est, dans le cas fini, l'intervalle entre e et le supremum des atomes qui constituent J [10] W_J est également un groupe de Coxeter :

$$W_J = \left[e, \bigvee_{s_i \in J} s_i \right]$$

le maximum w_J de W_J est donc : $w_J = \bigvee_{s_i \in J} s_i$

DÉCOMPOSITION DE W SUR W^J ET W_J

Tout élément de W se décompose de façon unique sur $W^J \times W_J$.

$$\forall w \in W, \exists u, v \text{ unique, } u \in W^J \text{ et } v \in W_J$$

$$(A) \quad w = uv \quad \text{et} \quad l(w) = l(u) + l(v)$$

Le lemme (Bourbaki) cité dans le paragraphe précédent :

$$w \in W^s \text{ et } s'w \notin W^s \Rightarrow s'w = ws$$

se généralise à $W^J = \bigcap_{s \in J} W^s$:

$$(B) \quad w \in W^J \text{ et } s'w \notin W^J \Rightarrow \exists s \in J \text{ et } s'w = ws.$$

En outre $s'w \notin W^J \Rightarrow s'w > w$ car W^J est une partie commençante.

Ce résultat est à la base de la construction de Deodhar [6] sur l'ordre fort ou ordre de Bruhat des groupes de Coxeter et nous l'utilisons ici de façon très proche pour reconstruire le graphe de Cayley orienté de W (donc également l'ordre faible) à partir des restrictions du graphe de Cayley au sous groupe W_J et à la partie commençante W^J .

II. DÉCOMPOSITION ET RECONSTRUCTION

PARTITION Π^J DE W EN CLASSES W^J_ν

LEMME. Les classes W^J_ν , $\nu \in W_J$ forment une partition notée Π^J de W en classes isomorphes à W^J , pour l'ordre étiqueté. L'isomorphisme se traduit par l'identité des arêtes en correspondance. Dans le cas fini, il s'agit d'une partition en intervalles isomorphes.

La translation à droite par ν^{-1} est un isomorphisme entre W^J_ν et W^J car $u_1\nu < u_2\nu \Leftrightarrow u_1 < u_2$ en raison de la propriété (A) et si $u_1\nu$ est adjacent à $u_2\nu$ (ce que l'on notera par $u_1\nu \prec u_2\nu$) c'est que l'on a : $u_2 = su_1$ et $l(u_2) = l(u_1 + 1)$. Donc l'arête $[u_1, u_2]$ est étiquetée s comme son image $[u_1\nu, su_1\nu = u_2\nu]$ par l'isomorphisme.

Entre les deux classes quelconques W^J_ν et $W^J_{\nu'}$ la translation à droite par $\nu^{-1}\nu'$ est un isomorphisme. Toujours d'après (A) les classes W^J_ν , $\nu \in W_J$ forment une partition de W .

COROLLAIRE. Dans le cas fini les classes W^J_ν sont des intervalles isomorphes, avec même étiquetage, qui recouvrent W . $W^J_{w_j} = [w_j, w_0]$ et $W^J_\nu = [\nu, w_0 w_j \nu]$. En particulier $W^J = [e, w_0 w_j]$.

En effet w_j , maximum du sous groupe parabolique W_J , qui est un groupe de Coxeter est une involution : $w_j = w_j^{-1}$

PARTITION Π_J DE W EN CLASSES uW_J

Toujours d'après la propriété (A), u est l'élément de longueur minimum de la classe de Lagrange à gauche uW_J .

Soit $J' = \{s', s' \in S \text{ et } s'u \notin W^J\}$.

D'après (B), $\forall s' \in J', \exists s \in J \text{ et } s'u = us$, donc

$$s'u \in uW_J \text{ et } : s'u \notin W^J \Leftrightarrow s'u \in uW^J.$$

(C) Les éléments adjacents à tout élément u de W^J sont donc, soit dans W^J soit dans uW_J .

Si $|S| = n$, $\forall u \in W^J$:

$$n = |\{s, su \in W^J\}| + |\{s, su \in uW_J\}|$$

LEMME. Tout élément adjacent à un élément $w = uv$, $u \in W^J$, $\nu \in W_J$ est soit dans uW_J soit dans W^J_ν .

DÉMONSTRATION. Les éléments adjacents à uv dans W^J_v se déduisent par l'isomorphisme entre W^J_v et W^J . Ce sont les éléments su avec $su \in W^J$, dont le nombre est $|\{s, su \in W^J\}|$.

Les éléments adjacents à uv dans uW_J :

$v \in W_J$ et $\forall s \in J$, sv est adjacent à v dans le sous groupe W_J engendré par J . D'autre part, $\forall s' \in S$ tel que $s'u \notin W^J$, i.e. $\forall s' \in S$ $s'u = us$, pour un élément $s \in J$: $s'uv = usv$ avec $sv \in W_J$ et $s'uv \in uW_J$.

Autrement dit $s'uv$ est adjacent à uv dans uW_J . On obtient ainsi $|\{s', s'u \in uW_J\}|$ voisins de uv dans uW_J et d'après (C) on a épuisé ainsi les n voisins de uv . Donc :

Tout voisin de $w = uv$ avec $u \in W^J$ et $v \in W_J$ est soit voisin de w dans uW^J soit voisin de w dans W^J_v .

L'adjacence dans une classe de Lagrange uW_J se réduit à :

uv_1 adjacent à $uv_2 \Leftrightarrow v_2 = sv_1$ et $\exists s' \in S : s'u = us$. Toute arête étiquetée par ce même s , entre deux éléments v et $v' = sv$, se transforme, dans la translation à gauche $W_J \rightarrow uW_J$ (qui n'est pas un isomorphisme) en arête étiquetée s' entre les éléments uv et uv' de W_J .

Cette transformation de certaines arêtes de W_J en arêtes des classes uW_J est résumée par la fonction suivante :

LA FONCTION f

Soit f l'application de $W^J \times J$ dans $S \cup \emptyset$ définie par :

$$(u,s) \in W^J \times J, f_u(s) = s' \Leftrightarrow \exists s' \in S \text{ et } s'u = us$$

$$f_u(s) = \emptyset \Leftrightarrow \hat{e} s' \in S \text{ tel que } s'u = us.$$

Chaque classe de Lagrange uW_J est une sous copie de W_J , pour l'ordre étiqueté, en ce sens que toute arête étiquetée s entre v et sv dans W_J donne naissance dans uW_J (par la translation à gauche par u) à une arête étiquetée $f_u(s)$, entre uv et usv , si $f_u(s) \neq \emptyset$ et à une "absence" d'arête si $f_u(s) = \emptyset$.

Connaître la fonction f et W_J suffit pour construire l'ordre étiqueté de chaque classe uW_J et l'ordre étiqueté W^J permet de construire l'ordre étiqueté sur chaque classe W^J_v , par copie identique.

EN CONCLUSION. Les ordres étiquetés sur W^J et W_J ainsi que la fonction f suffisent, pour construire l'ordre faible étiqueté sur W .

INTERVALLES ISOMOPHES AUX SOUS GROUPES PARABOLIQUES

LEMME. L'intervalle entre tout élément w et le supremum des éléments qui couvrent w est isomorphe au sous groupe parabolique engendré par les éléments de S qui étiquettent les arêtes entre w et les éléments qui couvrent w .

Soient $w_l = s_l w, \dots, w_r = s_r w$ l'ensemble des éléments qui couvrent w pour l'ordre \leq_L et $w' = \bigvee_{1 \leq i \leq r} w_i$

L'intervalle $I' = [w, w']$ est isomorphe à l'intervalle $I = [e, w'w^{-1}]$. Les atomes s_1, \dots, s_r appartiennent à I et $\bigvee_{1 \leq i \leq r} s_i \leq w'w^{-1}$.

Le translaté à droite de I par w est I' et, $\forall j \in \{1, \dots, r\}$ $s_j w \leq (\bigvee_{1 \leq i \leq r} s_i) w \leq w'w^{-1}$ et $(\bigvee_{1 \leq i \leq r} s_i) w = w'w^{-1}$

L'intervalle $\left[e, \bigvee_{1 \leq i \leq r} s_i \right]$ est le sous groupe parabolique engendré $J = \{s_1, \dots, s_r\}$ (cf. [10]) et $\left[w, \bigvee_{1 \leq i \leq r} s_i w \right]$ est isomorphe à W_J .

En fait I' est la classe de Lagrange à droite $W_J w$.

COROLLAIRE 1. Toute classe de Lagrange à droite $W_J w$ est isomorphe au sous groupe parabolique W_J pour l'ordre à gauche, avec même étiquetage des arêtes. Dualement les classes de Lagrange à gauche $u W_J$ sont isomorphes au sous groupe parabolique W_J pour \leq_R .

COROLLAIRE 2. Pour tout $J \subset S$ W peut être partitionné en intervalles isomorphes à W_J .

Le même raisonnement s'applique en ne considérant qu'une partie des éléments qui couvrent w : pour tout ensemble J d'éléments de S , et tout w tel que; $\forall s_i \in J, s_i w$ couvre w , l'intervalle $\left[w, \bigvee_{s_i \in J} s_i w \right]$ est isomorphe à W_J .

Dans le cas fini Π^J est une partition de W en $|W_J|$ intervalles isomorphes et Π_J est une partition de W en $|W^J| = |W| / |W_J|$ classes qui sont des sous copies du sous groupe parabolique W_J . Π^J et Π_J sont des partitions transversales : une classe de Π^J et une classe de Π_J ont un seul élément commun, l'élément uv où v est l'élément minimum de la classe de Π^J ($v \in W_J$) et u est l'élément de longueur minimale de la classe de Π_J ($u \in W^J$).

Dans le cas fini les treillis de Coxeter sont semi distributifs [10] :

$$x \vee y = x \vee z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = x \vee y = x \vee z$$

$$\text{et } x \wedge y = x \wedge z \Rightarrow x \wedge (y \vee z) = x \wedge y = x \wedge z$$

et sont partitionnables en 2^n intervalles dont les minimum sont les \vee d'atomes (ou maximum des sous groupes paraboliques) et les maximum sont des \wedge de coatomies [10].

CONSTRUCTION SIMULTANÉE DU QUOTIENT W^J (AVEC \langle_L) ET DE LA FONCTION f

Pour chaque $u \in W^J$ l'ensemble S est partitionné en trois classes :

$$S_1 = \{s \in S, su \langle u\} \quad (su \in W^J \quad \forall s \in S_1)$$

$$S_2 = \{s, su \notin W^J\} \quad (\forall s \in S_2, u \langle su, su \in u W_J \text{ et } f_u(J) = S_2)$$

$$S_3 = \{s, u \langle su \text{ et } su \in W^J\}$$

La construction (cf. figure ci-dessous) part de l'élément neutre e pour lequel $S_1 = \emptyset, S_2 = J, S_3 = S - J$ et $f_e(s) = s, \forall s \in J$. Elle se fait par niveaux de hauteurs croissantes dans l'ordre faible (qui est un ordre gradué sur W^J , comme sur W) selon les deux règles suivantes :

1) $\forall s_1 \in S_2$ (avec $f_u(s'_1) = s_1$) et $\forall s_2 \in S_3$, soit p le plus petit entier tel que $(s_1 s_2)^p = e$ ($p = m(s_1, s_2)$). Si p est pair on construit la chaîne d'éléments de W^J étiquetée par les éléments successifs de S :

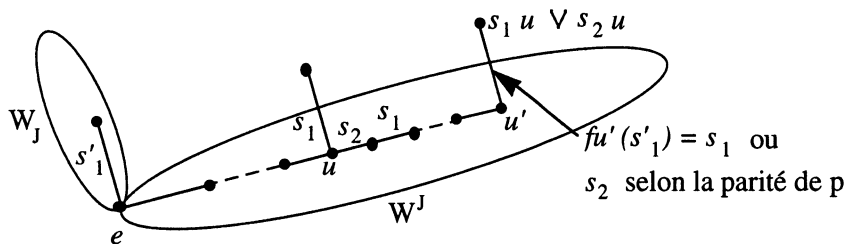
$u \langle s_2 u \langle s_1 s_2 u \langle s_2 s_1 s_2 u \langle \dots (s_1 s_2)^{p/2} \langle s_2 (s_1 s_2)^{p/2} u = u'$ et on note $f_{u'}(s'_1) = s_1$ ($s_1 u' = s_1 u \vee s_2 u$)

si p est impair la chaîne est :

$$u \langle s_2 u \langle s_1 s_2 u \langle \dots \langle (s_1 s_2)^{\frac{p-1}{2}} u = u'$$

et $f_{u'}(s'_1) = s_2$ ($s_2 u' = s_1 u \vee s_2 u$)

si p n'est pas fini la chaîne infinie $u \langle s_2 u \langle s_1 s_2 u \langle \dots$ est dans W^J et pour chaque élément u'' de cette chaîne $f_{u''}(s'_1) = \emptyset$.



2) $\forall s_1 s_2 \in S_3$, on construit l'intervalle $I = [u, s_1 u \vee s_2 u]$ entièrement contenu dans W^J et isomorphe, pour l'ordre faible, au sous-groupe parabolique diédral de W engendré par s_1 et s_2 .(cf. figure ci-dessous).

— si p est pair I est union des deux chaînes :

$$u \prec_{s_2} u \prec_{s_1} s_2 u \prec \dots \prec (s_2 s_1)^{p/2} u$$

$$\text{et } u \prec_{s_1} u \prec_{s_2} s_1 u \prec \dots \prec (s_1 s_2)^{p/2} u$$

$$\text{avec } (s_2 s_1)^{p/2} u = (s_1 s_2)^{p/2} u = s_1 u \vee s_2 u$$

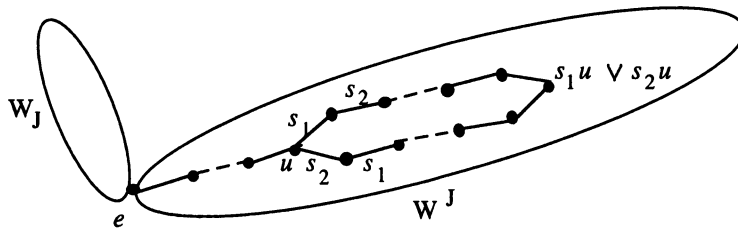
— si p est impair I est union des deux chaînes

$$u \prec_{s_1} u \prec_{s_2} s_1 u \prec \dots \prec_{s_1} (s_2 s_1)^{\frac{p-1}{2}} u$$

$$\text{et } u \prec_{s_2} u \prec_{s_1} s_2 u \prec \dots \prec_{s_2} (s_1 s_2)^{\frac{p-1}{2}} u$$

$$\text{et } s_1 (s_2 s_1)^{\frac{p-1}{2}} u = s_2 (s_1 s_2)^{\frac{p-1}{2}} u = s_1 u \vee s_2 u$$

si p n'est pas fini les deux chaînes infinies construites sur le même modèle sont dans W^J .



Si la construction selon ces deux règles est définie depuis e jusqu'à la hauteur m dans W^J tous les éléments du niveau $m+1$ sont connus ainsi que, pour chacun, leur S_1 et S_2 donc également leur S_3 et les règles 1°) et 2°) s'appliquent au niveau $m+1$.

N.B. Si $u \in W^J$ soit $S_3(u)$ l'ensemble S_3 de la partition attachée à u . Si $\bigvee_{s_i \in S_3(u)} s_i u = w$

existe, alors w est dans W^J et $[u, w]$ est isomorphe à $W_{S_3(u)}$ car si w' est la projection de

$$\bigvee_{s_i \in S_3(u)} s_i u = w \text{ sur } W^J \text{ alors } s_i u < w', \forall s_i \in S_3(u) \text{ et } l'(w) < l(w') \Rightarrow w = w'.$$

III. DÉCOMPOSITION RÉDUITE D'UN ÉLÉMENT w À PARTIR D'UNE DÉCOMPOSITION QUELCONQUE, PAR PROJECTIONS SUR DES QUOTIENTS SUCCESSIFS ET RÉDUCTIONS SUR CES QUOTIENTS

À partir d'une décomposition quelconque de w on peut obtenir une décomposition de u et v de la façon suivante :

soit $w = s_r \dots s_1$ une décomposition de w . On sait qu'il existe u et v unique $u \in W^J$ et $v \in W_J$ tels que $w = uv$ où u est la "projection" de w sur W^J et v est la projection de w sur W_J .

Soit $s_{n_t}, s_{n_{t-1}} \dots s_{n_1}$ la sous-suite de $s_r \dots s_1$ construite de la façon suivante :

s_{n_1} est l'élément de plus petit indice tel que : $s_{n_1} \in W^J$

s_{n_i} est l'élément de plus petit indice tel que : $s_{n_i} s_{n_{i-1}} \dots s_{n_1} \in W^J$.

Soit s_{n_t} l'élément de plus grand indice obtenu par cette construction alors :

$$u = s_{n_t} s_{n_{t-1}} \dots s_{n_1}$$

est une décomposition de u .

Notons I_i la séquence d'éléments de S qui sépare s_{n_i} de $s_{n_{i+1}}$ dans la décomposition $s_r \dots s_1$ et I_0 l'extrémité "à droite" :

$$s_r \dots s_1 = I_t s_{n_t} I_{t-1} s_{n_{t-1}} \dots I_1 s_{n_1} I_0 .$$

v est obtenu à partir de $I_t I_{t-1} \dots I_0$ en remplaçant chaque élément s de I_i par son image réciproque dans $f s_{n_i} s_{n_{i-1}} \dots s_{n_1}$, soit encore par l'unique s' de J tel que :

$$s s_{n_i} \dots s_{n_1} = s_{n_i} \dots s_{n_1} s' .$$

La séquence obtenue ainsi est une décomposition de v .

La connaissance de W^J , et f suffit pour utiliser cet algorithme.

Si l'on sait réduire les expressions dans W^J et W_J on en déduit une réduction de u et v donc de w .

Ces réductions sont du même type que celles de Fokko du Cloux [4].

Si on se donne un ordre $1, 2, \dots, n$ sur les générateurs (que nous identifierons avec ces éléments $1, 2, \dots, n$) et si on note $[m]$, l'ensemble des entiers inférieurs ou égaux à m , les projections successives (par l'algorithme précédent)

de $w = s_r \dots s_1$ sur $W^{[n-1]}$ et $W_{[n-1]}$, soit $w = u_{n-1} v_{n-1}$

de v_{n-1} sur $W^{[n-2]}$ et $W_{[n-2]}$, soit $w = u_{n-1} u_{n-2} v_{n-2}$

⋮
⋮
⋮

de v_2 sur W^1 et W_1 , donne une décomposition unique de $v = u_{n-1} u_{n-2} \dots u_1 v_1$ (où v_1 est soit e , soit 1 et $l(v) = l(u_{n-1}) + \dots + l(u_1) + l(v_1)$) sur le produit direct des quotients successifs $W^{n-1} \dots W^1$. Il suffit de savoir réduire sur les quotients W^{n-1}, \dots, W^1 pour en déduire une décomposition réduite de w . C'est chose aisée pour les familles étudiées.

IV. CALCULS ET DESSINS

Graphe de Coxeter

A tout groupe de Coxeter (W, S) est associé son *graphe de Coxeter* qui contient toutes les données : les sommets du graphe sont les éléments de S et entre deux sommets s_i et s_j , il n'y a pas d'arête si $m(s_i, s_j) = 2$, une arête non étiquetée si $m(s_i, s_j) = 3$ et une arête étiquetée $m(s_i, s_j)$ si $m(s_i, s_j) > 3$.

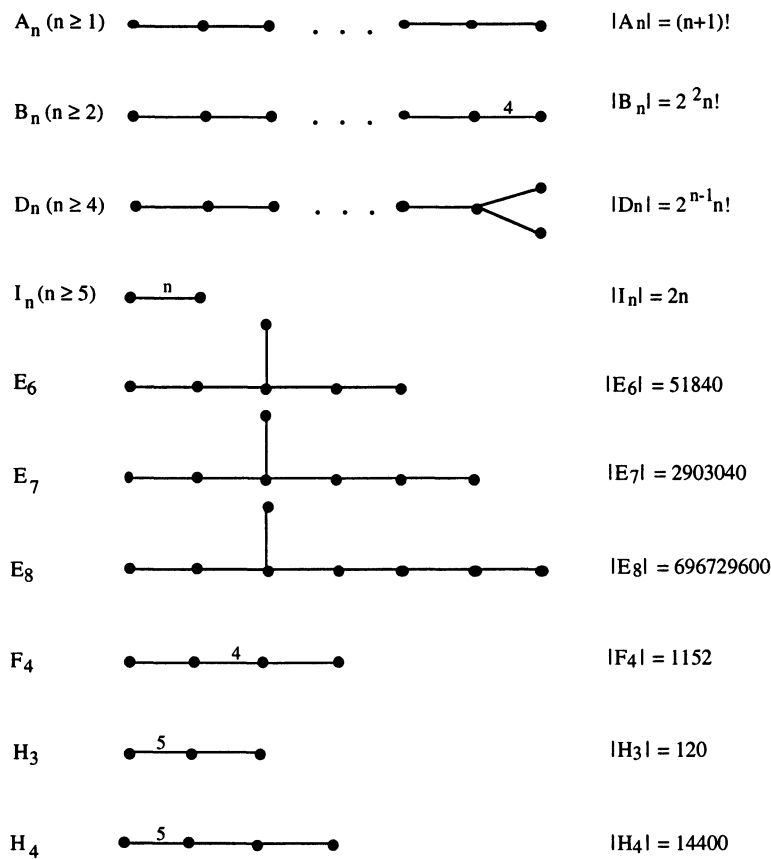
La liste ci-dessous est celle de tous les groupes de Coxeter finis irréductibles avec leurs graphes de Coxeter : les quatre familles infinies A_n (groupes symétriques), B_n , D_n , I_n (groupes diédraux) et les six groupes isolés E_6 , E_7 , E_8 , F_4 , H_3 et H_4 .

Tout autre groupe de Coxeter fini est produit direct de groupes irréductibles et son graphe de Coxeter est une union disjointe des graphes des irréductibles dont il est le produit.

Nous donnons ci-dessous les tables de f et le dessin des quotients (pour J bien choisis) pour les trois familles A_n B_n D_n ce qui permet de construire n'importe quel treillis d'un Coxeter d'une de ces familles, par récurrence.

La famille I_n des diédraux ne figure pas dans les tableaux et figures suivantes, parce que trop simple : le treillis d'un groupe I_n est un polygone à $2n$ sommets.

Les treillis étiquetés sont construits par quotient² et fonction f pour A_3 et A_4 (figure 1) à côté d'une représentation "classique" du permutoèdre A_3 , et pour B_3 (figure 2). Pour H_3 , à côté de la figure due à A. Lentin, nous donnons celle construite par quotient et fonction f (figure 5).



Les graphes de Coxeter des Coxeter finis irréductibles

Les autres figures sont des quotients avec fonction f figurant sur les sommets.

Figure 2 : à partir de F_4/B_3 (avec f) et B_3 , il est possible de construire F_4 .

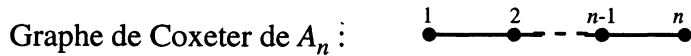
² N.B. Sur toutes les figures prenant en compte la fonction f , le symbole \emptyset est remplacé par un point.

Les données de la figure 3 permettent de construire D_4 à partir du cube et D_5 à partir de A_4 puis (figure 4) E_6 à partir de D_5 et E_7 à partir de E_6 .

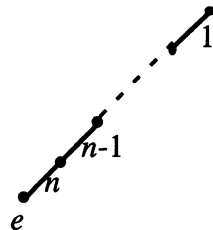
Enfin la figure 6 permet de construire H_4 à partir de H_3 .

Tous les éléments sont donc donnés pour construire n'importe quel treillis étiqueté et groupe de Coxeter fini, sauf pour E_8 qui a $2^{14} 3^5 5^2 7$ éléments : il reste à construire le quotient E_8/E , qui a 240 éléments et la fonction f associée.

A_n : le quotient W^J et la fonction f pour $J = \{1, 2, \dots, n-1\}$.



Quotient $W^J = \{e, n, (n-1)n, (n-2)(n-1)n, \dots, 1 2 \dots n\}$.

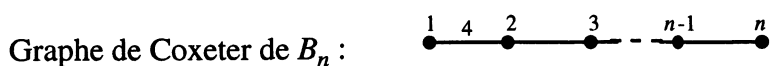


Ordre faible à gauche, étiqueté sur W^J

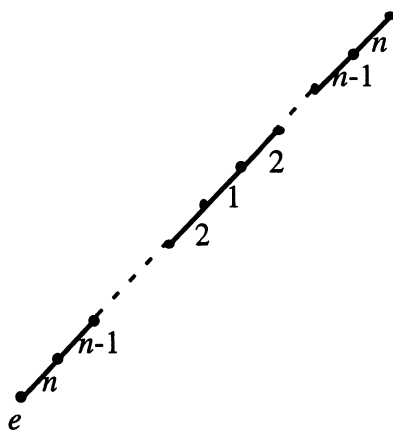
Tableau de la fonction f de $W^J \times J$ dans $S \cup \emptyset$ pour $J = \{1, 2, \dots, n-1\}$

$W^J \backslash J$	1	2	3	$n-3$	$n-2$	$n-1$
n	1	2	3	$n-3$	$n-2$	\emptyset
$(n-1)n$	1	2	3	$n-3$	\emptyset	n
$(n-2)(n-1)n$	1	2	3	\emptyset	$n-1$	n
$(n-3)(n-2)(n-1)n$	1	2	3	$n-2$	$n-1$	n
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$4.5 \dots n$	1	2	\emptyset	$n-2$	$n-1$	n
$3.4 \dots n$	1	\emptyset	4	$n-2$	$n-1$	n
$2.3 \dots n$	\emptyset	3	4	$n-2$	$n-1$	n
$1.2 \dots n$	2	3	4	$n-2$	$n-1$	n

B_n : le quotient W^J et la fonction f pour $J = \{1, 2, \dots, n-1\}$.



Quotient $W^J = \{e, n, (n-1)n, \dots, 1\ 2\dots(n-1)n, 2\ 1\ 2\dots(n-1)n, \dots, n(n-1)\dots 2\ 1\ 2\ \dots n\}$.

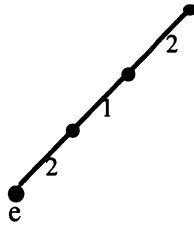


Ordre faible à gauche, étiqueté sur W^J

Tableau de la fonction f de $W^J \times J$ dans $S \cup \emptyset$.
pour $J = \{1, 2, \dots, n-1\}$ et $n > 2$

$W^J \backslash J$	1	2	3	$n-3$	$n-2$	$n-1$
n	1	2	3	$n-3$	$n-2$	\emptyset
$(n-1)n$	1	2	3	$n-3$	\emptyset	n
$(n-2)(n-1)n$	1	2	3	\emptyset	$n-1$	n
.
.
.
4. ... n	1	2	\emptyset	$n-2$	$n-1$	n
3.4. ... n	1	\emptyset	4	$n-2$	$n-1$	n
2.3. ... n	\emptyset	3	4	$n-2$	$n-1$	n
1.2. ... n	\emptyset	3	4	$n-2$	$n-1$	n
2.1.2. ... n	1	\emptyset	4	$n-2$	$n-1$	n
3.2.1.2. ... n	1	2	\emptyset	$n-2$	$n-1$	n
.
.
.
$(n-1)\dots 2.1.2. \dots n$	1	2	3	.	$n-2$	\emptyset	n
$n(n-1)\dots 2.1.2. \dots n$	1	2	3	.	$n-2$	$n-1$	n

Pour $n = 2$ W est un groupe diédral, $W^J = \{e, 2, 12, 212\}$



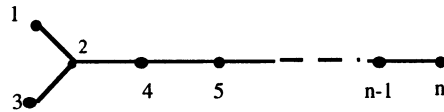
Ordre faible à gauche étiqueté W^J

et f :

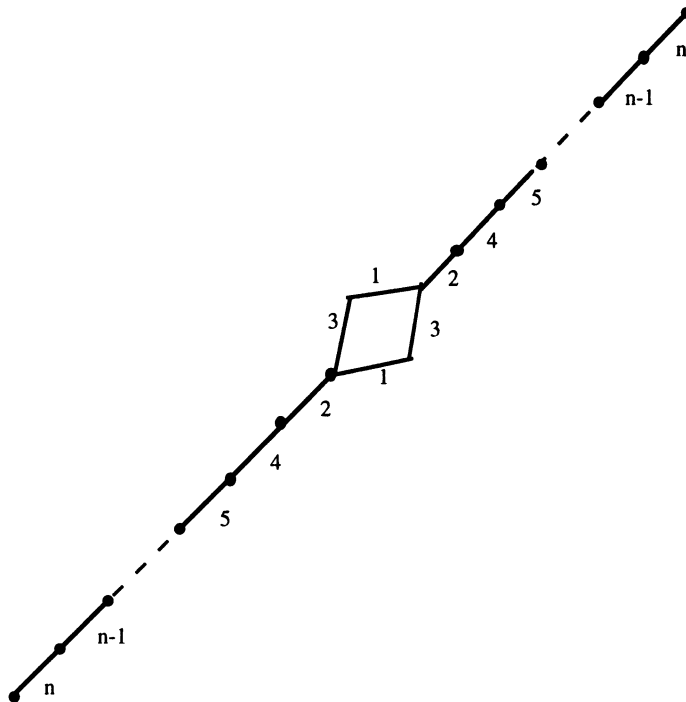
	1
2	\emptyset
21	\emptyset
212	1

D_n : le quotient W^J et la fonction f pour $J = \{1, 2, \dots, n-1\}$

Graphe de Coxeter de D_n :



Quotient : $W^J = \{e, n, (n-1)n, (n-2)(n-1)n, \dots, 4 5 \dots n, 2 4 5 \dots n, 3 2 4 5 \dots n, 1 2 4 5 \dots n, 1 3 2 4 5 \dots n, 3 1 2 4 5 \dots n, 2 1 3 2 4 5 \dots n, 4 2 1 3 2 4 5 \dots n, 5 4 2 1 3 2 4 5 \dots n, \dots, n(n-1) \dots 5 4 2 1 3 2 4 5 \dots n\}$



Ordre faible à gauche étiqueté sur W^J

Tableau de la fonction f de $W^J \times J$ dans $SU \emptyset$
 pour $J = \{1, 2, \dots, n-1\}$ et $n > 3$
 pour $n \leq 3$ c'est la fonction de f de A_n qui convient

$W^J \backslash J$	1	2	3	4	5	$n-3$	$n-2$	$n-1$
n	1	2	3	4	5	$n-3$	$n-2$	\emptyset
$(n-1)n$	1	2	3	4	5	$n-3$	\emptyset	n
$(n-2)(n-1)n$	1	2	3	4	5	\emptyset	$n-1$	n
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	
$56 \dots n$	1	2	3	\emptyset	6	$n-2$	$n-1$	n
$456 \dots n$	1	\emptyset	3	5	6	$n-2$	$n-1$	n
$2456 \dots n$	\emptyset	4	\emptyset	5	6	$n-2$	$n-1$	n
$12456 \dots n$	2	4	\emptyset	5	6	$n-2$	$n-1$	n
$32456 \dots n$	\emptyset	4	2	5	6	$n-2$	$n-1$	n
$312456 \dots n$	\emptyset	4	\emptyset	5	6	$n-2$	$n-1$	n
$= 132456 \dots n$	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	
$2312456 \dots n$	3	\emptyset	1	5	6	$n-2$	$n-1$	n
$4231245 \dots n$	3	2	1	\emptyset	6	$n-2$	$n-1$	n
$54231245 \dots n$	3	2	1	4	\emptyset	$n-2$	$n-1$	n
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	
$(n-2) \dots 54231245 \dots n$	3	2	1	4	5	$n-3$	\emptyset	n
$(n-1)(n-2) \dots 54231245 \dots n$	3	2	1	4	5	$n-3$	$n-2$	\emptyset
$n(n-1)(n-2) \dots 54231245 \dots n$	3	2	1	4	5	$n-3$	$n-2$	$n-1$

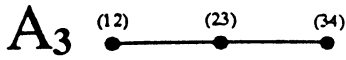
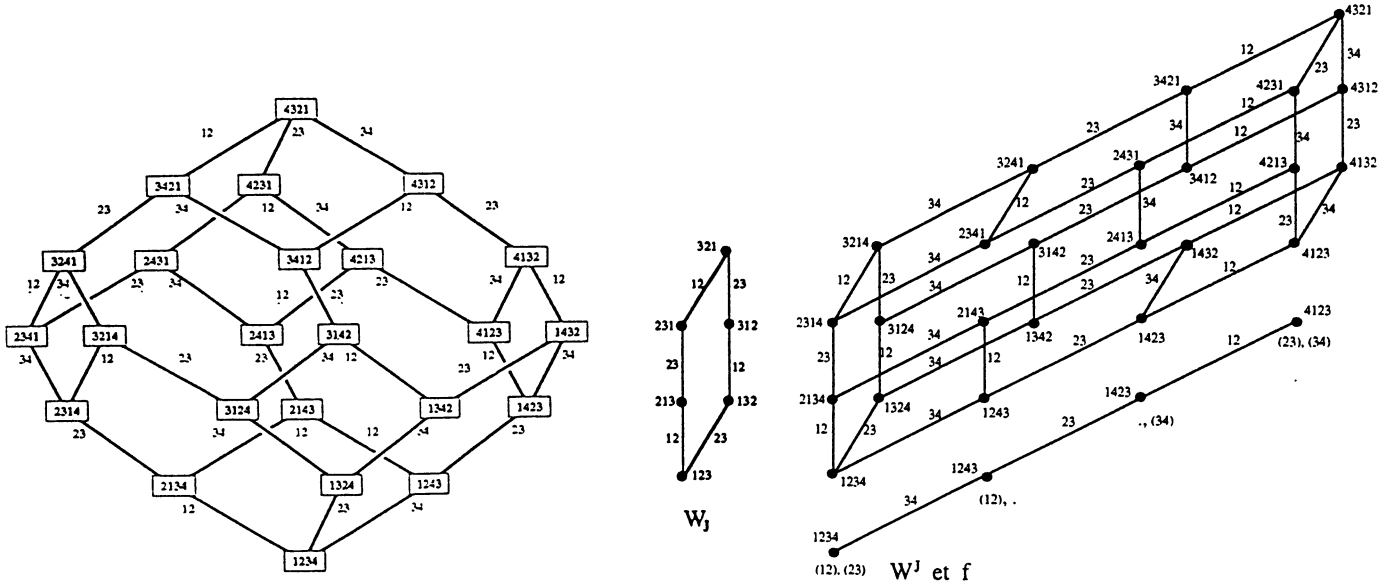
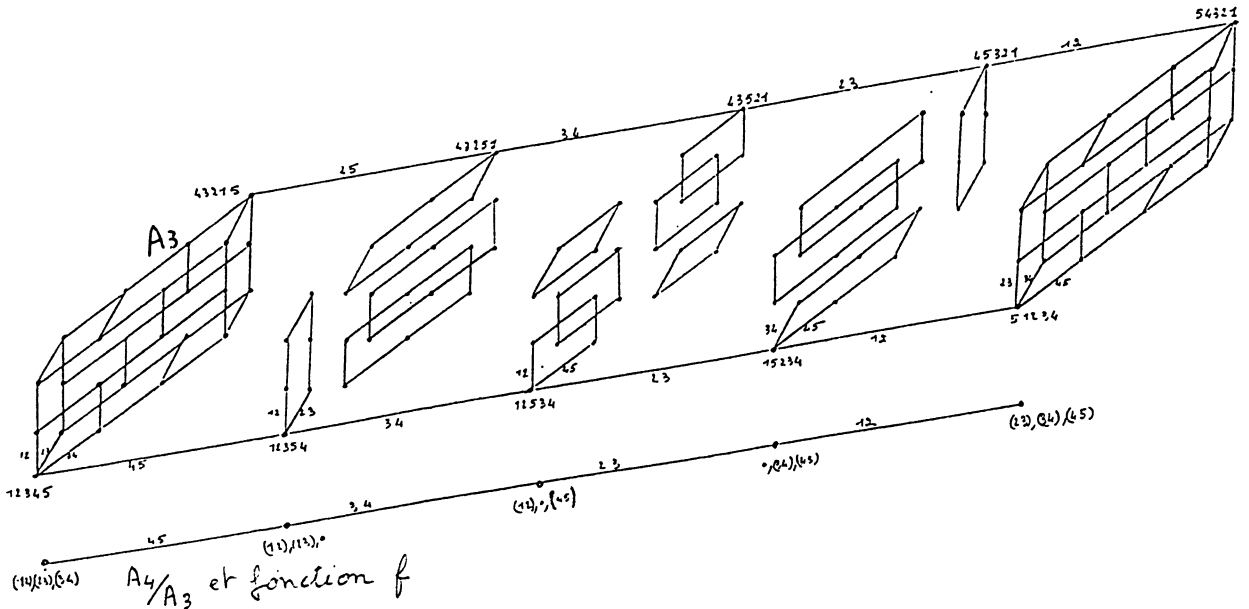
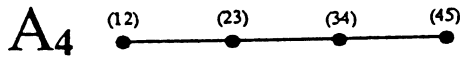


Figure 1

Deux représentations du permutoèdre A_3



A_3 construit à partir de $W_J = A_2$, $W^J = A_3/A_2$ et de la fonction f



A_4 construit à partir de A_3 , A_4/A_3 et de la fonction f (seules deux copies du quotient A_4/A_3 sont tracées)

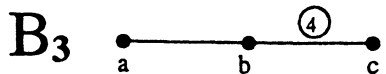
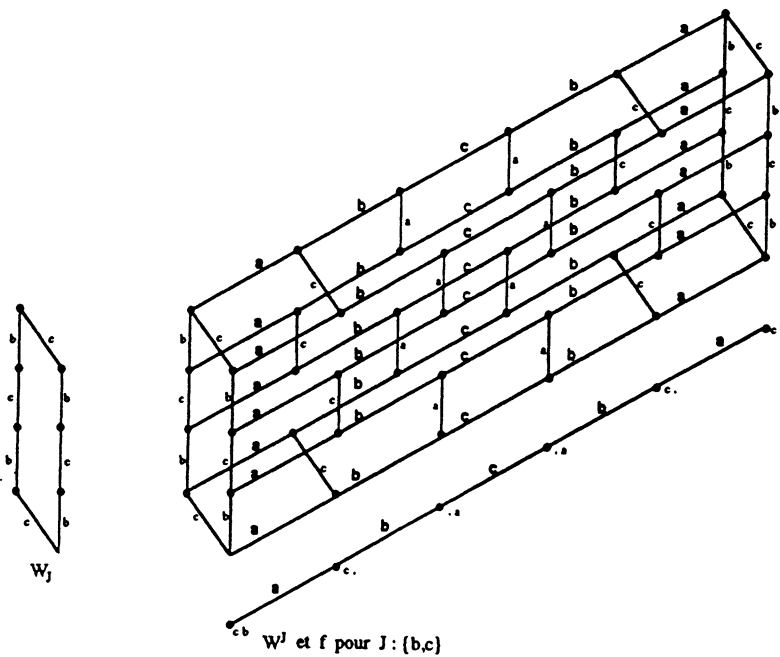
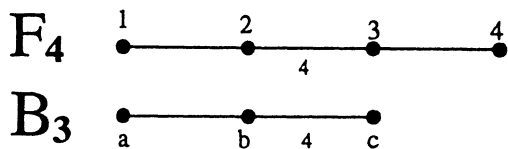


Figure 2



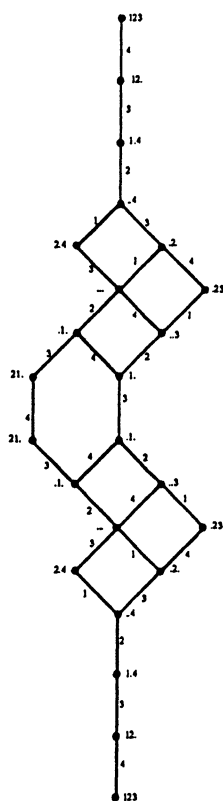
B_3 construit à partir de $J = \{b, c\}$



$|F_4| = 1152$

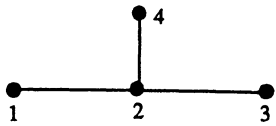
$|F_4 / B_3| = 24$

$|B_3| = 58$



Quotient F_4 / B_3 et fonction de f

D_4



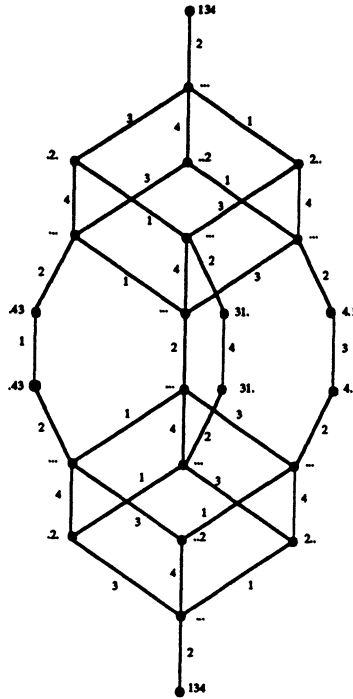
$|D_4| = 192$

Figure 3

Cube

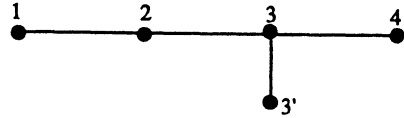


$|cube| = 8$



Quotient $D_4/cube$ et fonction f

D_5



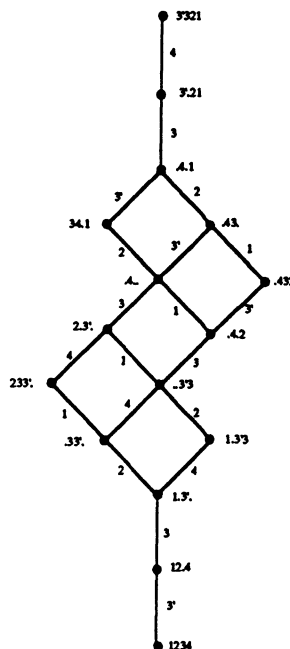
$|D_5| = 1920$

$|D_5 / A_4| = 16$

A_4



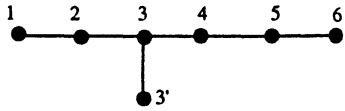
$|A_4| = 120$



Quotient D_5/A_4 et fonction f

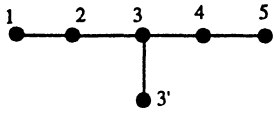
Figure 4

E_7

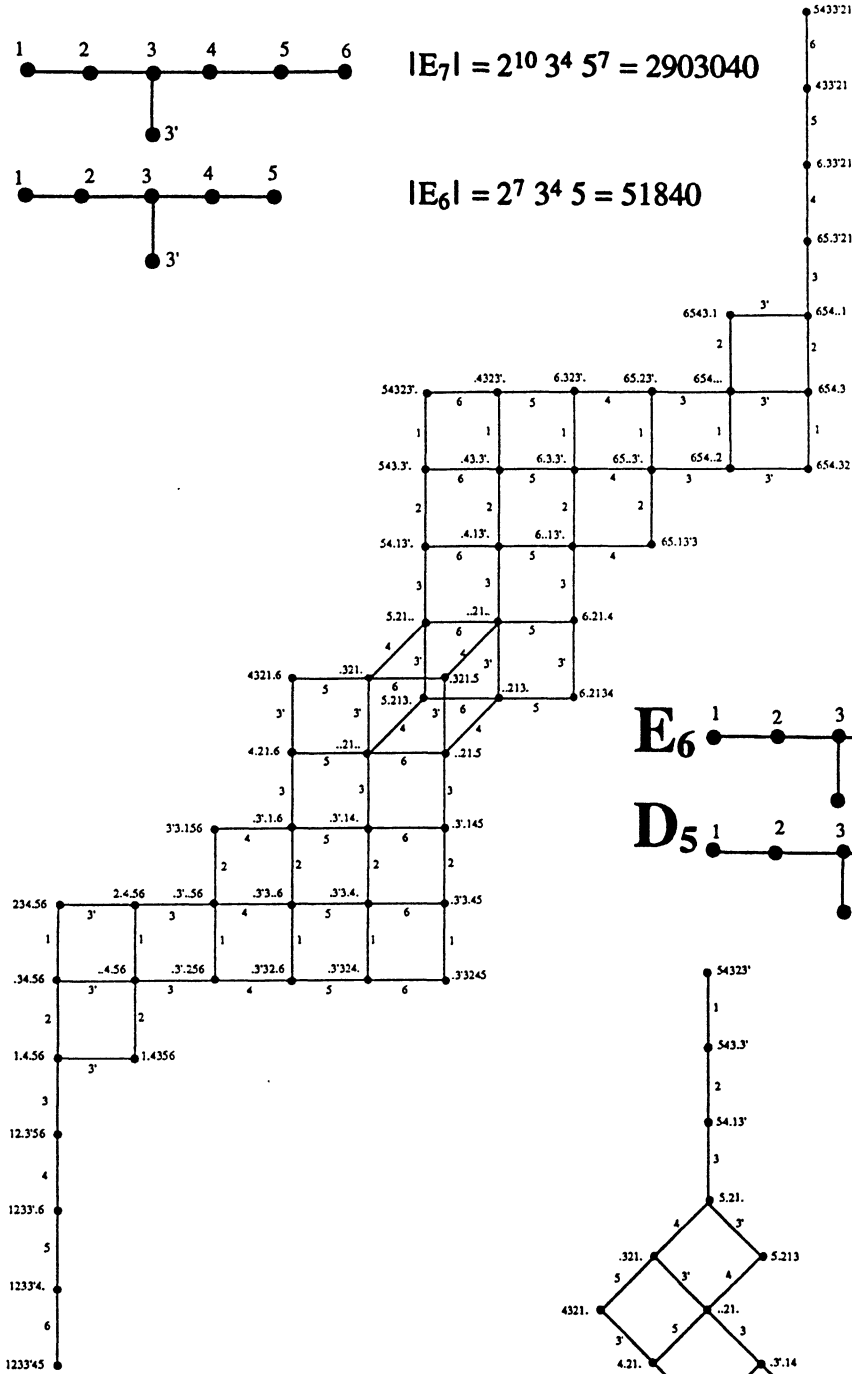


$|E_7| = 2^{10} 3^4 5^7 = 2903040$

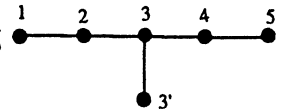
E_6



$|E_6| = 2^7 3^4 5 = 51840$

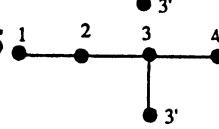


E_6



$|E_6| = 51840$

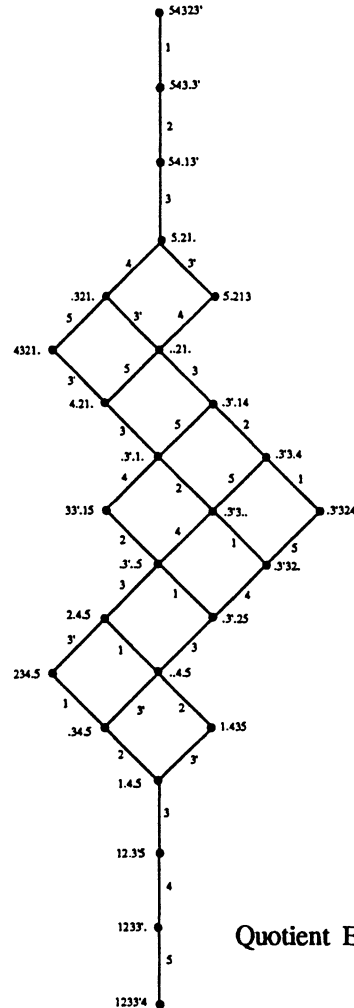
D_5



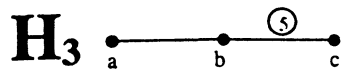
$|D_5| = 1920$

$|E_6 / D_5| = 27$

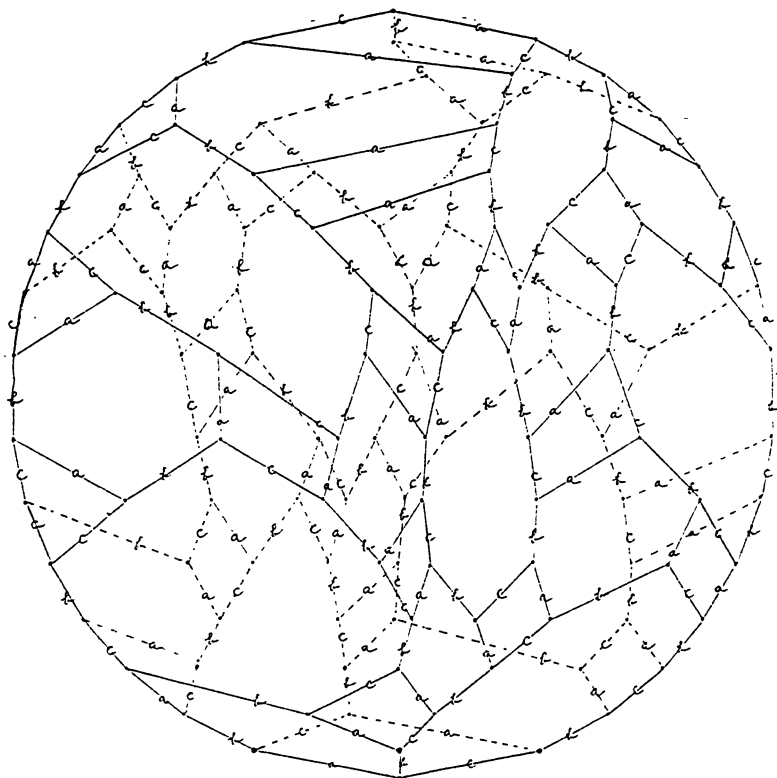
Quotient E_7 / E_6 et fonction f



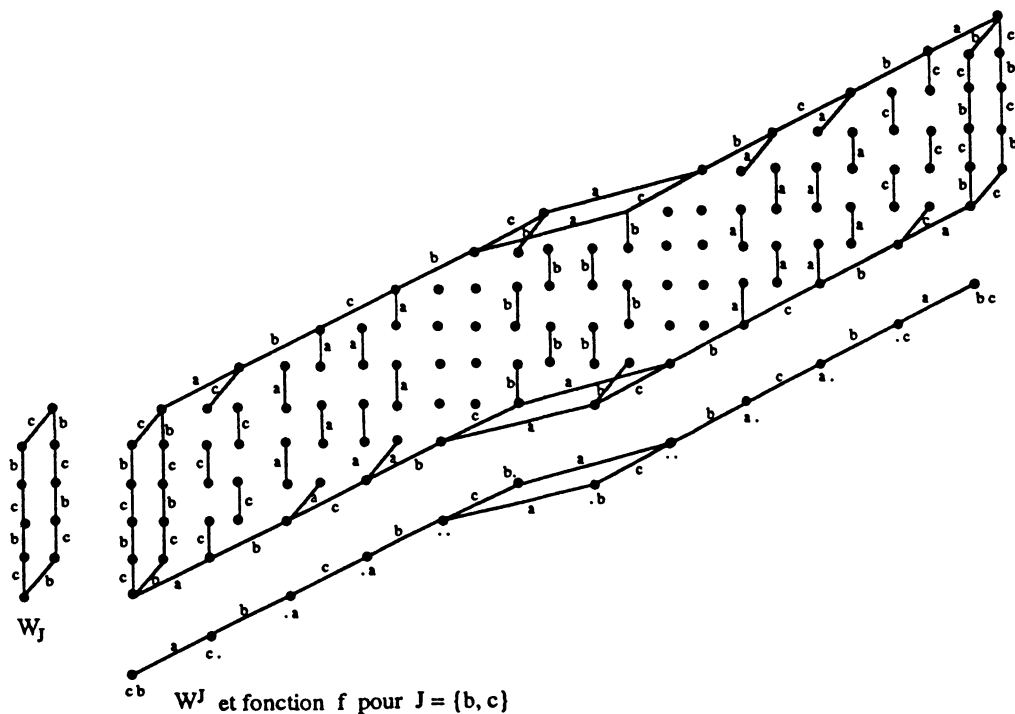
Quotient E_6 / D_5 et fonction f



Deux représentations de H_3

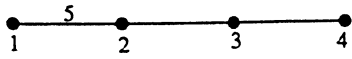


Le bel H_3 construit par André Lentin



H_3 construit à partir de W_J pour $J = \{b, c\}$, $W^J = H_3 / W_J$ et la fonction f
(seules deux copies du quotient W^J sont tracées)

H_4



$|H_4| = 14400$

$|H_3| = 120$

H_3

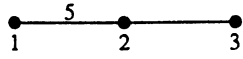
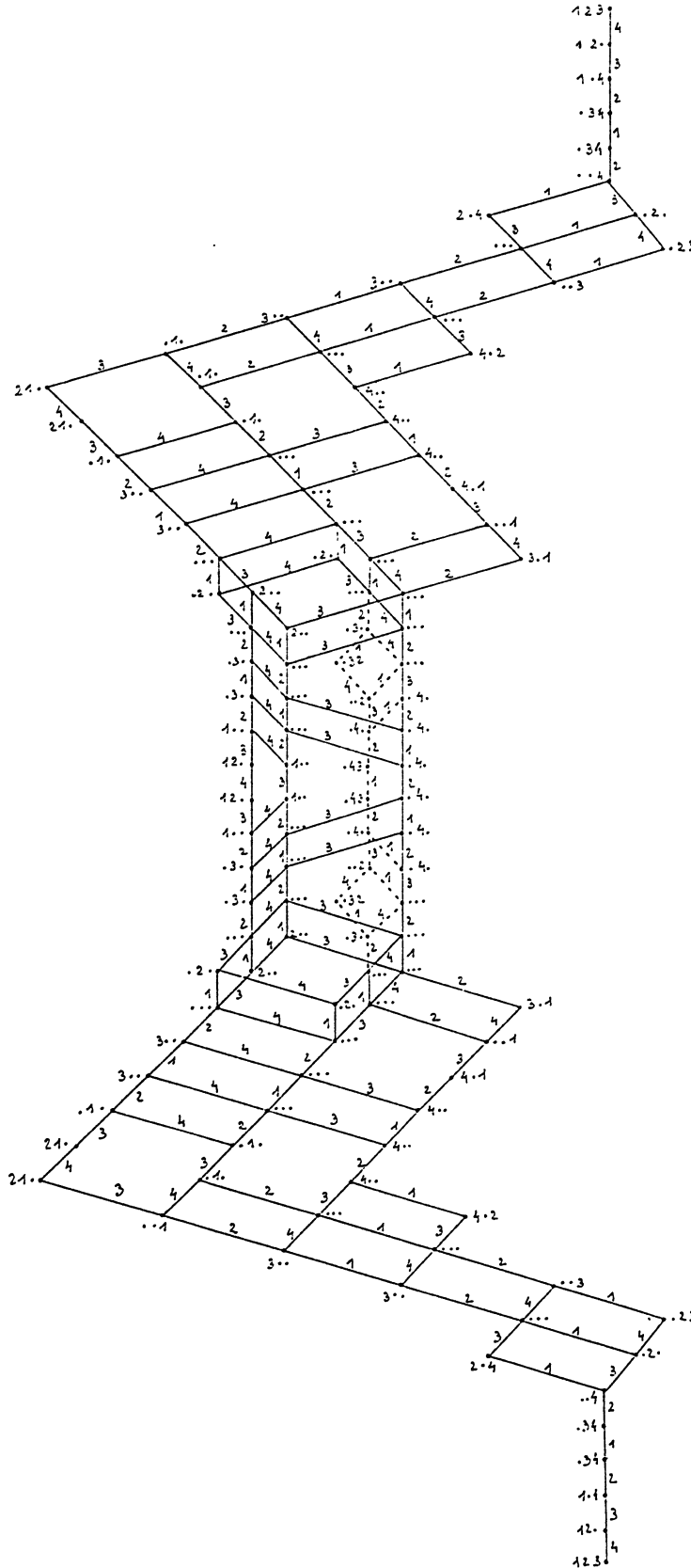


Figure 6

Quotient H_4 / H_3 et fonction f



BIBLIOGRAPHIE

- [1] BJÖRNER, A., "Orderings of Coxeter groups", *Contemp. Math.*, vol.34, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1984, 175-195.
- [2] BJÖRNER, A. and WACHS M., *Generalized quotients in Coxeter groups*, trans. of the Amer. Math. Soc., 308, 1, juillet 1988.
- [3] BOURBAKI, N., *Groupes et algèbres de Lie*, chap. 4,5,6, éléments de mathématiques, fasc. 34, Hermann, Paris, 1968.
- [4] CLOUX FOKKO (du), *A transducer approach to Coxeter group*, Lyon, Institut de Mathématiques et Informatique, Université de Lyon I, Preprint.
- [5] COXETER, H.S.M., *Regular polytopes*, 3e édition, Dover, New-York, 1973.
- [6] DEODHAR, V., "A splitting criterion for the Bruhat orderings on Coxeter group", *Communications in algebra*, 15(9), 1889-1894, 1987.
- [7] GUILBAUD, G.Th. et ROSENSTIEHL, P., "Analyse algébrique d'un scrutin", *Math. Sci. hum.*, 4, 1963, 9-33.
- [8] HUMPHREYS, J.E., *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [9] LE CONTE de POLY-BARBUT, C., "Le diagramme du treillis permutoèdre est intersection des diagrammes de deux produits directs d'ordres totaux", *Math. Inf. Sci. hum.*, 112, 1990, 49-53.
- [10] LE CONTE de POLY-BARBUT, C., "Sur les treillis de Coxeter finis", *Math. Inf. Sci. hum.*, 125, 1994, p. 41-57.