MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

JEAN DIATTA

Dissimilarités multivoies et généralisations d'hypergraphes sans triangles

Mathématiques et sciences humaines, tome 138 (1997), p. 57-73

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1997__138__57_0>

Math. Inf. Sci. hum., (35[e] année, n°138, *1997*, pp.57- 73)

DISSIMILARITÉS MULTIVOIES ET GÉNÉRALISATIONS D'HYPERGRAPHES SANS TRIANGLES

Jean DIATTA[1]

RÉSUMÉ — *Les dissimilarités multivoies sont une généralisation naturelle des dissimilarités usuelles deux voies. Dans ce papier, des classes de dissimilarités multivoies sont étudiées, ainsi que des modèles de passage d'un nombre de voies donné à un autre nombre de voies. Une application à la spécification de systèmes classifiants a conduit à une bijection entre une classe de dissimilarités multivoies et une famille de systèmes stratifiés de classification.*

SUMMARY — Multiway dissimilarities and generalizations of hypergraphs with no triangles
Multiway dissimilarities naturally generalize the usual two-way dissimilarities. In this paper, particular classes of multiway dissimilarities are studied as well as some models for deriving from a dissimilarity of a given number of ways, one of a greater or a lower number of ways. An application to clustering systems specification has led to a one-to-one correspondence between a class of multiway dissimilarities and a family of stratified clustering systems.

1. INTRODUCTION

Longtemps après Hedrick [13] qui a étudié les déterminants de tableaux à trois entrées vers les années 1899, le domaine du multivoies a intéressé, sous diverses approches, de nombreux auteurs ces dernières années. Citons, par exemple, Leutola et Nieminen [17], Nieminen [18], Coppi et Bolasco [8] (actes d'un colloque organisé sur le thème du multivoies), Leibovici [16], Batbedat [5], Bennani [6], Joly et Le Calvé [15], et Daws [9].

Dans ce papier, nous abordons le domaine du multivoies dans le contexte des dissimilarités. Pour fixer les idées, nous considérerons, sauf mention contraire, les dissimilarités λ-voies, λ étant un entier supérieur à 2. Une dissimilarité λ-voies sur un ensemble fini non vide I est une application définie sur I^λ, à valeurs réelles non négatives, nulle sur tout λ-uplet d'éléments confondus, croissante par rapport à l'inclusion des ensembles des composantes des λ-uplets, et symétrique.

[1] Laboratoire de Biomathématiques, Université d'Aix-Marseille II, 27 boulevard Jean Moulin, 13385 Marseille cedex 5.

Nous avons considéré quelques modèles de passage d'une λ-voies à une $(\lambda - 1)$-voies ou une $(\lambda + 1)$-voies lorsque cela a un sens. Nous avons aussi généralisé certaines classes de dissimilarités 2-voies telles que les ultramétriques et les quasi-ultramétriques [10]. Une application à la spécification de systèmes de classification nous a conduits à considérer des hypergraphes sans simplexe. Un hypergraphe sans λ-simplexe est un hypergraphe tel que toute intersection de $(\lambda + 1)$ de ses arêtes se réduit en l'intersection de λ d'entre ces arêtes. Autrement dit, c'est un hypergraphe pour lequel il n'existe pas $(\lambda + 1)$ arêtes $H_1, \ldots, H_{\lambda+1}$ et $(\lambda + 1)$ sommets $i_1, \ldots, i_{\lambda+1}$ tels que $i_\alpha \in H_\beta$ si et seulement si $\alpha \neq \beta$. Ceci est une généralisation naturelle des hypergraphes sans triangles [1], [2], [4] , [7]. Nous désignons par λ-quasi-hiérarchie sur un ensemble fini non vide I un hypergraphe sur I, sans λ-simplexe, contenant I, stable par intersections non vides, et dont les éléments minimaux (au sens de l'inclusion) recouvrent I. Cette dernière propriété est communément satisfaite par les systèmes usuels de classification, alors que les deux qui la précèdent sont caractéristiques des structures de fermetures (voir [11], [19]). Notre résultat principal est la bijection entre les quasi-ultramétriques λ-voies (ou λ-quasi-ultramétriques tout simplement) et les λ-quasi-hiérarchies indicées.

Une technique utilisée en psychologie cognitive pour collecter des données est la méthode du libre classement. Cette méthode est citée dans [9] où l'auteur montre, sur un exemple, l'intérêt de la prise en compte des dissimilarités multivoies dans le traitement de telles données. Cela présente une bonne motivation pour l'étude aussi bien des dissimilarités multivoies que des extensions des modèles classiques d'analyse de données portant sur des tableaux à deux entrées. Nous reviendrons, au paragraphe suivant, sur cette méthode et sur l'exemple proposé par Daws [9]. D'autres sources d'exemples d'application peuvent être trouvées dans [6].

Le papier est organisé comme suit. Le paragraphe 2 est consacré aux liens entre les dissimilarités λ-voies et $(\lambda + 1)$-voies. Quelques classes de dissimilarités multivoies sont considérées dans le paragraphe 3. Dans le paragraphe 4 nous dégageons un lien entre les dissimilarités multivoies et les hypergraphes sans simplexe. Plus précisément, nous établissons une bijection entre les λ-quasi-ultramétriques et les λ-quasi-hiérarchies indicées. Nous concluons le papier par une discussion.

2. LIENS ENTRE DISSIMILARITÉS λ-VOIES ET $(\lambda + 1)$-VOIES

Commençons par adopter quelques conventions de notation. Toutes les dissimilarités et tous les hypergraphes considérés dans ce qui suit sont définis sur un ensemble fixé I fini, non vide et de cardinalité n. Les *caractères majuscules grecs* seront exclusivement utilisés pour désigner des ensembles d'indices. Par exemple, Λ désignera toujours l'ensemble d'indices $\{1, \ldots, \lambda\}$. Pour un ensemble d'indices, disons Λ, $\Lambda_{\widehat{\alpha}}$ désignera l'ensemble Λ privé de l'élément α. La suite $i_{\alpha_1}, \ldots, i_{\alpha_\eta}$, indexée par $\Omega = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\eta\}$, sera notée i^Ω. Nous désignerons le mot $i_{\alpha_1} \ldots i_{\alpha_\eta}$ par i_Ω. L'*ensemble des composantes* d'un λ-uplet $(i_1, \ldots, i_\lambda)$ est l'ensemble des i_α (deux-à-deux distincts), $\alpha = 1, \ldots, \lambda$.

DÉFINITION 1. Une application $d : I^\lambda \to \mathbb{R}_+$ est une *dissimilarité λ-voies* sur I si :

1) $d(i, \ldots, i) = 0$;
2) $d(j_1, \ldots, j_\lambda) \leq d(i_1, \ldots, i_\lambda)$ pour tout $\{j_1, \ldots, j_\lambda\} \subseteq \{i_1, \ldots, i_\lambda\}$;
3) $d(i_1, \ldots, i_\lambda) = d\left(i_{P_\lambda(1)}, \ldots, i_{P_\lambda(\lambda)}\right)$ pour toute permutation P_λ sur Λ.

REMARQUE 1. *a) La notation ensembliste employée dans l'axiome* 2) *ci-dessus autorise les répétitions d'éléments.*

b) De par les axiomes 2) *et* 3) *ci-dessus, une dissimilarité λ-voies prend la même valeur sur tous les λ-uplets de même ensemble de composantes.*

Comme dans le cas usuel 2-voies, des contraintes supplémentaires peuvent être imposées, conduisant à des classes de dissimilarités presque naturelles. Ainsi, une dissimilarité λ-voies d sera dite *semi-propre* si $d(i_1, \ldots, i_\lambda) = 0$ implique que $d\left(i^{\Lambda\widehat{\alpha}}, j\right) \leq d\left(i^{\Lambda\widehat{\beta}}, j\right)$ pour tous $\alpha, \beta \in \Lambda$ et $j \in I$ (cette inégalité est en fait équivalente à une égalité) ; elle sera dite *propre* si $d(i_1, \ldots, i_\lambda) = 0$ implique que $i_1 = \cdots = i_\lambda$.

Les notions de diamètre, de boules et d'intersections de boules, considérées dans [10], se généralisent naturellement. Pour une dissimilarité λ-voies d donnée, *le diamètre* d'un sous-ensemble J de I est $diam_d(J) = \max\{d(i_1, \ldots, i_\lambda) : i_1, \ldots, i_\lambda \in J\}$; *la boule fermée* de centre $\{i_1, \ldots, i_{\lambda-1}\}$ et de rayon r est $B(i_1 \ldots i_{\lambda-1}, r) = \{j \in I : d(i_1, \ldots i_{\lambda-1}, j) \leq r\}$; l'ensemble $B_{i_1 \ldots i_\lambda} = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} B\left(i_{\Lambda\widehat{\alpha}}, d(i_1, \ldots, i_\lambda)\right)$ (ou $B^d_{i_1 \ldots i_\lambda}$ s'il y a éventualité de confusion) est une λ-*boule* ; le système de toutes les λ-boules de I est noté $\mathcal{B}^\lambda_d$.

Revenons sur la méthode du libre classement. Il s'agit, en général, d'une population de N individus auxquels est présenté un ensemble de n objets. Il est alors demandé à chacun de ces individus de construire (librement) une (et une seule) partition des objets. Les données de libre classement ainsi obtenues peuvent alors être utilisées pour dégager, selon les objectifs du chercheur, des similarités entre les individus ou entre les objets. Dans ce dernier cas, les données sont classiquement réduites à un tableau de dissimilarités 2-voies obtenu en comptant, pour chaque paire d'objets, le nombre d'individus qui n'ont pas placé ces deux objets ensemble.

Daws [9] illustre, sur un exemple, comment le fait de réduire les données à un tableau de dissimilarités 2-voies induit une perte d'information quant à la manière dont les individus ont classé les objets. Il présente, en effet, deux groupes d'individus ayant classé un ensemble de quatre objets de deux manières bien différentes, alors que ces deux groupes de classements conduisent au même tableau de dissimilarités 2-voies. Ainsi toute analyse, notamment toute classification automatique, fondée uniquement sur ce tableau de dissimilarités conduirait à des résultats identiques pour les deux groupes.

Une alternative proposée par Daws consiste alors à considérer, pour chaque triplet d'objets (non nécessairement distincts), le nombre d'individus qui n'ont pas placé ces objets ensemble. Il en résulte alors un tableau de dissimilarités 3-voies qui, pour cet exemple que nous présentons ci-après, reflète clairement les différences de classements des objets par les deux groupes.

Il porte sur deux groupes constitués de 18 individus chacun, auxquels il a été demandé de partitionner un ensemble de 4 objets codés A, B, C et D. Le tableau indique, pour chacun des deux groupes, la fréquence (nombre d'occurrences) de chacune des 15 (nombre de Bell) partitions possibles des quatre objets. La notation AB-C-D signifie que A et B sont placés ensemble tandis que C et D constituent chacun une classe singulière. Les données de libre classement concernant chaque groupe d'individus seront réduites à une mesure de dissimilarités 3-voies sur l'ensemble des objets. Les mesures de dissimilarités 2-voies seront ainsi directement lues sur les triplets d'objets dont au moins deux sont identiques.

Groupe 1		Groupe 2	
Partitions	Fréquences	Partitions	Fréquences
ABCD	0	ABCD	0
ABC-D	5	ABC-D	1
ABD-C	0	ABD-C	0
ACD-B	0	ACD-B	0
A-BCD	1	A-BCD	2
AB-CD	0	AB-CD	1
AC-BD	1	AC-BD	2
AD-BC	0	AD-BC	0
AB-C-D	1	AB-C-D	4
AC-B-D	0	AC-B-D	3
AD-B-C	0	AD-B-C	0
A-BC-D	1	A-BC-D	4
A-BD-C	2	A-BD-C	0
A-B-CD	2	A-B-CD	0
A-B-C-D	5	A-B-C-D	1

Les tables δ_1 et δ_2 ci-dessous représentent respectivement les dissimilarités 3-voies calculées, sur l'ensemble des 4 objets, à partir des données des groupes 1 et 2. Ces tables se lisent de la manière suivante. Une case du triangle inférieur, diagonale principale comprise, porte la valeur de la dissimilarité sur le triplet constitué de l'indice gauche de la ligne correspondante et des deux indices de la colonne correspondante. Une case du triangle supérieur, diagonale principale non comprise, porte la valeur de la dissimilarité sur le triplet constitué de l'indice haut de la colonne correspondante et des deux indices de la ligne correspondante.

δ_1 :

	A	B	C	D	
A	0	18	18	18	D
B	12	0	13	18	A
C	12	11	0	17	B
D	18	14	15	0	
	A	B	C	D	

δ_2 :

	A	B	C	D	
A	0	18	18	18	D
B	12	0	17	18	A
C	12	11	0	16	B
D	18	14	15	0	
	A	B	C	D	

On pourra remarquer que les triangles inférieurs des deux tables sont identiques. Ces triangles inférieurs représentent, en fait, les dissimilarités 2-voies résultant respectivement des données de libre classement des deux groupes d'individus.

2.1. *Restriction canonique d'une dissimilarité* $(\lambda + 1)$*-voies*

Soit $d_{\lambda+1}$ une dissimilarité $(\lambda + 1)$-voies. Considérons l'application d_λ définie sur I^λ, à valeurs réelles non négatives, par

$$d_\lambda (i_1, \dots, i_\lambda) = d_{\lambda+1} (i_1, \dots, i_\lambda, i_\alpha)$$

pour tout α tel que $1 \leq \alpha \leq \lambda$.

Il est immédiat de voir que l'application d_λ ainsi définie est une dissimilarité λ-voies, la remarque 1 garantissant qu'elle est bien définie. Il devient donc clair qu'à toute dissimilarité λ-voies d_λ peut être associée une dissimilarité η-voies d_η, $2 \leq \eta \leq \lambda$, par la formule

$$d_\eta (i_1, \dots, i_\eta) = d_\lambda \left(i_1, \dots, i_\eta, i_{\alpha_1}, \dots, i_{\alpha_{\lambda-\eta}}\right)$$

pour tous $1 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_{\lambda-\eta} \leq \eta$.
La dissimilarité d_η ainsi définie sera appelée la *restriction canonique* η-voies de d_λ.

Voici, sur quatre points, un exemple de dissimilarité 3-voies d_3 et sa restriction canonique 2-voies d_2.

d_3 :

	i	j	k	l	
i	0	8	9	3	l
j	1	0	7	8	i
k	2	4	0	10	j
l	3	5	6	0	
	i	j	k	l	

d_2 :

	i	j	k	l
i	0			
j	1	0		
k	2	4	0	
l	3	5	6	0

PROPOSITION 1. *Soient $d_{\lambda+1}$ une dissimilarité $(\lambda + 1)$-voies et d_λ sa restriction canonique à λ voies. Alors pour tous $i_1, \dots, i_\lambda \in I$ et pour tout $\alpha \in \Lambda$: $B^{d_{\lambda+1}}_{i_1 \dots i_\lambda i_\alpha} \subseteq B^{d_\lambda}_{i_1 \dots i_\lambda}$.*

PREUVE. Soient $i_1, \dots, i_\lambda, j \in I$ et $\alpha \in \Lambda$. Nous avons $j \in B^{d_{\lambda+1}}_{i_1 \dots i_\lambda i_\alpha}$ si et seulement si

$$\max_{\beta \in \Lambda} d_{\lambda+1} \left(i^{\Lambda\widehat{\beta}}, i_\alpha, j\right) \leq d_{\lambda+1} (i_1, \dots, i_\lambda, i_\alpha).$$

Or pour tout $\beta \in \Lambda$, $d_\lambda \left(i^{\Lambda\widehat{\beta}}, j\right) \leq d_{\lambda+1} \left(i^{\Lambda\widehat{\beta}}, i_\alpha, j\right)$ et $d_\lambda (i_1, \dots, i_\lambda) = d_{\lambda+1} (i_1, \dots, i_\lambda, i_\alpha)$.
Il en résulte donc que $\max_{\beta \in \Lambda} d_\lambda \left(i^{\Lambda\widehat{\beta}}, j\right) \leq d_\lambda (i_1, \dots, i_\lambda)$, i.e., $j \in B^{d_\lambda}_{i_1 \dots i_\lambda}$. □

Notons que cette restriction canonique n'est pas le seul moyen qui permette de passer d'un nombre de voies donné à un nombre de voies plus petit (voir [6] , [9] , [15]).

Inversement, toute dissimilarité λ-voies d_λ, avec $2 \leq \lambda \leq n-2$, peut être prolongée en une dissimilarité $(\lambda+1)$-voies. Donc toute dissimilarité η-voies d_η, $2 \leq \eta \leq n-2$, peut être prolongée en une dissimilarité λ-voies d_λ avec $\eta \leq \lambda \leq n-1$. Dans ce cas aussi, il existe un certain nombre de modèles dont nous ne présenterons que deux.

2.2. *Prolongement de type somme* ($\sum$)

Étant donnée une dissimilarité λ-voies d_λ, nous lui associons l'application $d_{\lambda+1}$ définie sur $I^{\lambda+1}$, à valeurs réelles non négatives, par

$$d_{\lambda+1}(i_1,\ldots,i_{\lambda+1}) = \sum_{\alpha\in\{1,\ldots,\lambda+1\}} d_\lambda\left(i^{\Lambda\widehat{\alpha}}\right).$$

Il s'agit là de la somme des valeurs prises par d_λ sur chacun des λ-uplets d'éléments d'indices distincts parmi $i_1,\ldots,i_{\lambda+1}$. On démontre, sans difficulté, que l'application $d_{\lambda+1}$ ainsi définie est une dissimilarité $(\lambda+1)$-voies.

Voici la dissimilarité 3-voies, d_3', obtenue par transformation de type somme à partir de la 2-voies d_2 de l'exemple précédent.

d_2 :

	i	j	k	l
i	0			
j	1	0		
k	2	4	0	
l	3	5	6	0

d_3' :

	i	j	k	l	
i	0	9	11	6	l
j	2	0	7	9	i
k	4	8	0	15	j
l	6	10	12	0	
	i	j	k	l	

Une formule générale permet d'exprimer, en fonction d'une dissimilarité η-voies donnée d_η, la dissimilarité λ-voies d_λ, $2 \leq \eta \leq \lambda$, issue de d_η par prolongements successifs de type somme. Pour cela, il suffit d'exprimer d_λ en fonction de $d_{\lambda-1}$, faire de même pour $d_{\lambda-1}$ en fonction de $d_{\lambda-2}$, et ainsi de suite jusqu'à obtenir l'expression de d_λ en fonction de d_η. Il en résulte que

$$d_\lambda(i_1,\ldots,i_\lambda) = (\lambda-\eta)! \sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_\eta\in\Lambda \\ \alpha_1<\cdots<\alpha_\eta}} d_\eta\left(i_{\alpha_1},\ldots,i_{\alpha_\eta}\right).$$

Pour $\eta = 2$ et $\lambda = 3$, cette formule s'écrit : $d_3(i,j,k) = d_2(i,j) + d_2(i,k) + d_2(j,k)$; d'où le nom du type périmètre que certains auteurs [6] , [15] confèrent à cette transformation de type somme dans le cas particulier où $\lambda = 3$.

2.3. *Prolongement du Max*

Il s'agit de construire, à partir d'une dissimilarité λ-voies d_λ, une application $d_{\lambda+1}$ définie pour tous $i_1, \ldots, i_{\lambda+1} \in I$ par

$$d_{\lambda+1}\left(i_1, \ldots, i_{\lambda+1}\right) = \max_{\alpha \in \Omega} d_\lambda\left(i^{\Omega_{\widehat{\alpha}}}\right)$$

où $\Omega = \{1, \ldots, \lambda+1\}$. Il est clair que $d_{\lambda+1}$ ainsi définie est une dissimilarité $(\lambda+1)$-voies. Nous dirons que $d_{\lambda+1}$ est le *max-prolongement* $(\lambda+1)$-voies de d_λ. La dissimilarité d_3'' ci-dessous est le max-prolongement de d_2.

d_2 :

	i	j	k	l
i	0			
j	1	0		
k	2	4	0	
l	3	5	6	0

d_3'' :

	i	j	k	l	
i	0	5	6	3	l
j	1	0	4	5	i
k	2	4	0	6	j
l	3	5	6	0	
	i	j	k	l	

La proposition suivante fait le lien entre les λ-boules d'une dissimilarité λ-voies et certaines $(\lambda+1)$-boules de son max-prolongement. Commençons par remarquer que toute dissimilarité λ-voies est la restriction canonique de son max-prolongement $(\lambda+1)$-voies.

PROPOSITION 2. *Soient d_λ une dissimilarité λ-voies et $d_{\lambda+1}$ son max-prolongement $(\lambda+1)$-voies. Alors pour tous $i_1, \ldots i_\lambda \in I$: $B^{d_\lambda}_{i_1 \ldots i_\lambda} = B^{d_{\lambda+1}}_{i_1 \ldots i_\lambda i_\beta}$ pour tout $\beta = 1, \ldots, \lambda$.*

PREUVE. L'inclusion $B^{d_{\lambda+1}}_{i_1 \ldots i_\lambda i_\beta} \subseteq B^{d_\lambda}_{i_1 \ldots i_\lambda}$ résulte de la proposition 1, compte tenu du fait que d_λ est la restriction canonique de son max-prolongement $d_{\lambda+1}$.
Inversement, considérons $j \in B^{d_\lambda}_{i_1 \ldots i_\lambda}$. Alors remarquons, en vertu de l'axiome 2 de la définition 1, que pour tout $\alpha \in \Lambda$ et pour tout $\gamma \in \Lambda_{\widehat{\alpha}}$, il existe $\eta \in \Lambda$ tel que

$$d_\lambda\left(i^{(\Lambda_{\widehat{\alpha}})_{\widehat{\gamma}}}, i_\beta, j\right) \leq d_\lambda\left(i^{\Lambda_{\widehat{\eta}}}, j\right).$$

Il en résulte que pour tout $\alpha \in \Lambda$:

$$\max_{\gamma \in \Lambda_{\widehat{\alpha}}} d_\lambda\left(i^{(\Lambda_{\widehat{\alpha}})_{\widehat{\gamma}}}, i_\beta, j\right) \leq \max_{\eta \in \Lambda} d_\lambda\left(i^{\Lambda_{\widehat{\eta}}}, j\right).$$

Par conséquent, nous pouvons écrire que le maximum de

$$\max_{\alpha \in \Lambda}\left[\max\left\{\max_{\gamma \in \Lambda_{\widehat{\alpha}}} d_\lambda\left(i^{(\Lambda_{\widehat{\alpha}})_{\widehat{\gamma}}}, i_\beta, j\right), d_\lambda\left(i^{\Lambda_{\widehat{\alpha}}}, j\right), d_\lambda\left(i^{\Lambda_{\widehat{\alpha}}}, i_\beta\right)\right\}\right]$$

et de

$$\max\left[\max_{\alpha \in \Lambda} d_\lambda\left(i^{\Lambda_{\widehat{\alpha}}}, j\right), d_\lambda\left(i_1, \ldots, i_\lambda\right)\right]$$

est inférieur ou égal à

$$\max\left[\max_{\alpha\in\Lambda} d_\lambda\left(i^{\widehat{\Lambda_\alpha}}, i_\beta\right), d_\lambda(i_1,\ldots,i_\lambda)\right].$$

Cette inégalité, réécrite en termes de $d_{\lambda+1}$, équivaut à l'appartenance de j à $B^{d_{\lambda+1}}_{i_1\ldots i_\lambda i_\beta}$. □

PROPOSITION 3. *Soient d_λ et $d_{\lambda+1}$ comme dans la proposition précédente. Soient $i_1,\ldots,$ $i_{\lambda+1}$ dans I tels que $d_\lambda(i_1,\ldots,i_\lambda) = \max_{\alpha\in\Omega=\{1,\ldots,\lambda+1\}} d_\lambda\left(i^{\widehat{\Omega_\alpha}}\right)$. Alors $B^{d_{\lambda+1}}_{i_1\ldots i_{\lambda+1}} \subseteq B^{d_{\lambda+1}}_{i_1\ldots i_\lambda i_\beta}$ pour tout $\beta\in\Lambda=\{1,\ldots,\lambda\}$.*

PREUVE. Soient d_λ, $d_{\lambda+1}$ et $i_1,\ldots,i_{\lambda+1}$ satisfaisant aux conditions de la proposition. Soient $j\in B^{d_{\lambda+1}}_{i_1\ldots i_{\lambda+1}}$ et $\beta\in\Lambda$. Alors

$$d_{\lambda+1}(i_1,\ldots,i_\lambda,j) \le d_{\lambda+1}(i_1,\ldots,i_{\lambda+1}) = d_{\lambda+1}(i_1,\ldots,i_\lambda,i_\beta).$$

De plus, pour tout $\alpha\in\Lambda$: $d_{\lambda+1}\left(i^{\widehat{\Lambda_\alpha}}, i_\beta, j\right) \le d_{\lambda+1}(i_1,\ldots,i_\lambda,j)$ par définition des dissimilarités multivoies. Par conséquent $j\in B^{d_{\lambda+1}}_{i_1\ldots i_\lambda i_\beta}$. □

3. CLASSES DE DISSIMILARITÉS MULTIVOIES

3.1. *Les λ-quasi-ultramétriques*

Une dissimilarité λ-voies d satisfait à la *λ-condition d'inclusion* si pour tous $i_1,\ldots,i_\lambda\in I$, $B_{j_1\ldots j_\lambda}\subseteq B_{i_1\ldots i_\lambda}$ pour tous $j_1,\ldots,j_\lambda\in B_{i_1\ldots i_\lambda}$; eu égard à cette condition, nous dirons qu'un sous-ensemble J de I vérifie la *λ-propriété d'inclusion* si $B_{i_1\ldots i_\lambda}\subseteq J$ pour tous $i_1,\ldots,i_\lambda\in J$. Une dissimilarité λ-voies d satisfait à la *λ-condition du diamètre* si toute λ-boule $B_{i_1\ldots i_\lambda}$ est de diamètre $d(i_1,\ldots,i_\lambda)$; elle est dite *λ-quasi-ultramétrique* si elle satisfait à la fois aux λ-conditions d'inclusion et du diamètre.

REMARQUE 2. *Toute dissimilarité satisfaisant à la λ-condition d'inclusion est semi-propre.*

Nous avons vu, proposition 2, que lorsqu'une dissimilarité $d_{\lambda+1}$ est le max-prolongement $(\lambda+1)$-voies d'une dissimilarité λ-voies d_λ, alors les λ-boules relatives à d_λ sont égales à certaines $(\lambda+1)$-boules relatives à $d_{\lambda+1}$. La proposition suivante nous permettra de faire le lien entre toutes les $(\lambda+1)$-boules relatives à une telle $d_{\lambda+1}$ et certaines λ-boules relatives à sa primitive d_λ.

PROPOSITION 4. *Soient d_λ une dissimilarité λ-voies satisfaisant à la λ-condition du diamètre et $d_{\lambda+1}$ son max-prolongement $(\lambda+1)$-voies. Soient $i_1,\ldots,i_{\lambda+1}$ des éléments de I tels que $d_\lambda(i_1,\ldots,i_\lambda) = \max_{\alpha\in\Omega=\{1,\ldots,\lambda+1\}} d_\lambda\left(i^{\widehat{\Omega_\alpha}}\right)$. Alors $B^{d_{\lambda+1}}_{i_1\ldots i_{\lambda+1}} = B^{d_\lambda}_{i_1\ldots i_\lambda}$.*

PREUVE. Nous savons, d'après la proposition précédente, que $B^{d_{\lambda+1}}_{i_1\ldots i_{\lambda+1}} \subseteq B^{d_{\lambda+1}}_{i_1\ldots i_\lambda i_\beta}$ pour tout $\beta \in \Lambda$. De plus, $B^{d_{\lambda+1}}_{i_1\ldots i_\lambda i_\beta} = B^{d_\lambda}_{i_1\ldots i_\lambda}$ pour tout $\beta \in \Lambda$ (proposition 2). Il nous suffit donc de prouver l'inclusion $B^{d_{\lambda+1}}_{i_1\ldots i_\lambda i_\beta} \subseteq B^{d_{\lambda+1}}_{i_1\ldots i_{\lambda+1}}$. Notons que, d'après ce qui précède, tout point de $B^{d_{\lambda+1}}_{i_1\ldots i_{\lambda+1}}$, particulièrement $i_{\lambda+1}$, est aussi un point de $B^{d_\lambda}_{i_1\ldots i_\lambda}$. Soient $\beta \in \Lambda$ et $j \in B^{d_{\lambda+1}}_{i_1\ldots i_\lambda i_\beta}$. Alors

$$d_{\lambda+1}(i_1,\ldots,i_\lambda,j) \leq d_{\lambda+1}(i_1,\ldots,i_\lambda,i_\beta) = d_{\lambda+1}(i_1,\ldots,i_{\lambda+1}).$$

De même $j \in B^{d_\lambda}_{i_1\ldots i_\lambda}$, i.e., $\max_{\alpha\in\Lambda} d_\lambda\left(i^{\widehat{\Lambda_\alpha}}, j\right) \leq d_\lambda(i_1,\ldots,i_\lambda)$, et nous savons par hypothèse que

$$\max_{\alpha\in\Lambda} d_\lambda\left(i^{\widehat{\Lambda_\alpha}}, i_{\lambda+1}\right) \leq d_\lambda(i_1,\ldots,i_\lambda).$$

De plus, d_λ satisfaisant à la λ-condition du diamètre, nous avons

$$\max_{\gamma\in\widehat{\Lambda_\alpha}} d_\lambda\left(i^{(\widehat{\Lambda_\alpha})\widehat{\gamma}}, i_{\lambda+1}, j\right) \leq d_\lambda(i_1,\ldots,i_\lambda)$$

pour tout $\alpha \in \Lambda$. Il résulte donc de ces trois dernières inégalités que

$$\max_{\alpha\in\Lambda} d_{\lambda+1}\left(i^{\widehat{\Lambda_\alpha}}, i_{\lambda+1}, j\right) \leq d_\lambda(i_1,\ldots,i_\lambda) = d_{\lambda+1}(i_1,\ldots,i_{\lambda+1}).$$

Par conséquent $j \in B^{d_{\lambda+1}}_{i_1\ldots i_{\lambda+1}}$, et la proposition est démontrée. □

Il s'ensuit que le max-prolongement $(\lambda+1)$-voies de toute λ-quasi-ultramétrique est une $(\lambda+1)$-quasi-ultramétrique.

3.2. *Dissimilarités ultramétriques multivoies*

Notre approche des dissimilarités ultramétriques multivoies s'appuie sur la correspondance entre ces dites ultramétriques et les relations d'équivalence multi-aires (voir [17]), à l'instar de la correspondance entre les dissimilarités ultramétriques 2-voies et les relations d'équivalence binaires *via* les dendrogrammes hiérarchiques (voir [14]).

Une dissimilarité d est *ultramétrique* λ*-voies* si pour tous $i_1,\ldots,i_{\lambda+1} \in I$:

$$d(i_1,\ldots,i_\lambda) \leq \max\{d(i_1,i_3\ldots,i_{\lambda+1}), d(i_2,\ldots,i_{\lambda+1})\}.$$

Cela est équivalent à dire que les λ plus grandes valeurs parmi

$$d(i_1,\ldots,i_\lambda),\ldots,d(i_1,\ldots,i_{\alpha-1},i_{\alpha+1},\ldots,i_{\lambda+1}),\ldots,d(i_2,\ldots,i_{\lambda+1})$$

sont égales. Les propriétés classiques bien connues des ultramétriques se prolongent sans difficulté. Il est en effet aisé de vérifier que la restriction canonique de toute ultramétrique λ-voies est une ultramétrique $(\lambda-1)$-voies. De plus, nous avons :

THÉORÈME 1. *Toute ultramétrique λ-voies est le max-prolongement de sa restriction canonique $(\lambda-1)$-voies.*

PREUVE. Soient d_λ une dissimilarité λ-voies et $d_{\lambda-1}$ sa restriction canonique $(\lambda-1)$-voies. Alors pour tous $i_1,\ldots,i_\lambda \in I$ et pour tout $\alpha \in \Lambda = \{1,\ldots,\lambda\}$, $d_{\lambda-1}\left(i^{\widehat{\Lambda_\alpha}}\right) \leq d_\lambda(i_1,\ldots,i_\lambda)$. D'où $\max_{\alpha\in\Lambda} d_{\lambda-1}\left(i^{\widehat{\Lambda_\alpha}}\right) \leq d_\lambda(i_1,\ldots,i_\lambda)$. Or d_λ étant ultramétrique, nous avons

$$d_\lambda(i_1,\ldots,i_\lambda) \leq \max\{d_\lambda(i_1,i_3,\ldots,i_\lambda,i_\lambda), d_\lambda(i_2,\ldots,i_\lambda,i_\lambda)\}.$$

Le membre de droite de cette inégalité étant égal à

$$\max\{d_{\lambda-1}(i_1,i_3,\ldots,i_\lambda), d_{\lambda-1}(i_2,\ldots,i_\lambda)\},$$

il s'ensuit que $d_\lambda(i_1,\ldots,i_\lambda) \leq \max_{\alpha\in\Lambda} d_{\lambda-1}\left(i^{\widehat{\Lambda_\alpha}}\right)$. Par conséquent d_λ est le max-prolongement de $d_{\lambda-1}$. □

Les conséquences suivantes peuvent être tirées de ce résultat. Rappelons qu'il a été prouvé dans [9] que toute ultramétrique 2-voies est une quasi-ultramétrique, et qu'une dissimilarité d est ultramétrique ssi les 2-boules B^d_{ij} coïncident avec les boules $B(i,d(i,j))$ et $B(j,d(i,j))$. Alors, étant donné que la restriction canonique de toute ultramétrique est aussi ultramétrique, et compte tenu de ce théorème et de la proposition 4, nous avons

COROLLAIRE. *Soit d une ultramétrique λ-voies sur I. Alors pour tous $i_1,\ldots,i_\lambda \in I$: $B^d_{i_1\ldots i_\lambda} = B(i_\alpha, d_2(i_\alpha,i_\beta))$ où d_2 est la restriction canonique 2-voies de d, et où i_α, i_β sont tels que $d_2(i_\alpha,i_\beta) = \max_{1\leq\gamma<\eta\leq\lambda} d_2(i_\gamma,i_\eta)$.*

Ainsi les λ-boules relatives à une ultramétrique λ-voies d forment une hiérarchie, celle-ci coïncidant avec la hiérarchie correspondant avec la restriction canonique 2-voies de d.

4. SPÉCIFICATION D'HYPERGRAPHES SANS SIMPLEXE

4.1. *Les λ-quasi-hiérarchies*

Dans ce paragraphe, nous introduisons une extension formelle des quasi-hiérarchies [10] en des λ-quasi-hiérarchies, où λ est un entier supérieur à 2. Cette extension consiste précisément en un prolongement de l'axiome fondamental des quasi-hiérarchies, à savoir la non-existence de triangles. Rappelons qu'un triangle dans un hypergraphe est un cycle de la forme $i_2H_1i_3H_2i_1H_3i_2$ avec $i_\alpha \notin H_\alpha$. Nous généralisons donc cette condition en considérant les hypergraphes sans simplexe. Un hypergraphe est sans λ-simplexe s'il ne possède pas $(\lambda+1)$ arêtes $H_1,\ldots,H_{\lambda+1}$ et $(\lambda+1)$ sommets $i_1,\ldots,i_{\lambda+1}$ tels que $i_\alpha \in H_\beta$ si et seulement si $\alpha \neq \beta$. Ceci est équivalent à dire que toute intersection de $(\lambda+1)$ arêtes se réduit en l'intersection de λ d'entre ces arêtes. Donc toute intersection de plus de λ arêtes se réduit en celle d'au plus λ, ce qui, conformément à la terminologie de Golumbic et Jamison [12], s'interprète en disant que les hypergraphes sans λ-simplexe ont un nombre fort de Helly inférieur ou égal à λ. Notons que toutes $(\lambda + 1)$ arêtes formant un λ-simplexe dans un hypergraphe sont nécessairement de cardinalité supérieure ou égale à λ.

EXEMPLE 1. Soit l'hypergraphe $\mathcal{H}$ dont l'ensemble des sommets est $I = \{1, 2, 3, 4\}$, et ayant pour arêtes les ensembles $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 4\}$, et $\{2, 3, 4\}$.

Il est facile de vérifier qu'il est sans 3-simplexe. Mais si nous lui ajoutons l'arête $\{1, 2, 4\}$, alors il en résulte un hypergraphe dont les 4 arêtes de cardinalité 3 forment un 3-simplexe. En effet, l'intersection globale de ces 4 arêtes est (vide) différente de toutes leurs intersections trois-à-trois (pas vides).

Pour tous $(\lambda + 1)$ sous-ensembles non vides $H_1, \ldots, H_{\lambda+1}$ de I, posons:

$$Med_\lambda (H_1, \ldots H_{\lambda+1}) = \bigcup_{\alpha=1}^{\lambda+1} \left(\bigcap_{\substack{\beta \in \{1,\ldots,\lambda+1\} \\ \beta \neq \alpha}} H_\beta \right).$$

Il est alors clair qu'un hypergraphe est sans λ-simplexe si et seulement si pour tout $(\lambda + 1)$-uplet d'arêtes $(H_1, \ldots, H_{\lambda+1})$ il existe $\alpha \in \{1, \ldots, \lambda + 1\}$ tel que $Med_\lambda (H_1, \ldots H_{\lambda+1}) \subseteq H_\alpha$. Cela constitue un prolongement naturel de la condition médinclus de Batbedat [3], [4]. Si nous ajoutons l'ensemble vide à un hypergraphe $\mathcal{H}$ sans λ-simplexe, alors le système $\mathcal{H}_0$ ainsi obtenu est un demi-treillis de largeur au plus λ (voir [19]). Partant de ces hypergraphes sans simplexe, nous définissons les λ-quasi-hiérarchies de la manière suivante.

DÉFINITION 2. Un système non vide $\mathcal{H}$ de sous-ensembles non vides de I est une λ-quasi-hiérarchie sur I, $1 \leq \lambda \leq n - 1$, si et seulement si :

1) $I \in \mathcal{H}$;
2) pour tous $H_1, H_2 \in \mathcal{H} : H_1 \cap H_2 \in \mathcal{H} \cup \{\emptyset\}$;
3) pour tout $H \in \mathcal{H} : \cup \{H' \in \mathcal{H} / H' \subset H\} \in \{\emptyset, H\}$;
4) pour tous $H_1, \ldots, H_{\lambda+1} \in \mathcal{H} : \bigcap_{\alpha=1}^{\lambda+1} H_\alpha = \bigcap_{\alpha \in J} H_\alpha$ où $J \subseteq \{1, \ldots, \lambda + 1\}$ avec $|J| = \lambda$.

EXEMPLE 2. Reprenons l'hypergraphe $\mathcal{H}$ de l'exemple précédent. Il ne satisfait à aucun des axiomes 1), 2) et 3) ci-dessus. On obtient une quasi-hiérarchie sur $I = \{1, 2, 3, 4\}$, en ajoutant à $\mathcal{H}$ tous les singletons, la paire $\{3, 4\}$ et I lui même.

Signalons que les 1-quasi-hiérarchies sont des chaînes (suites emboîtées de classes), et que les 2-quasi-hiérarchies ne sont rien d'autres que les quasi-hiérarchies étudiées dans [10]. Il est clair que pour tout entier λ tel que $1 \leq \lambda \leq n - 2$, toute λ-quasi-hiérarchie est aussi une $(\lambda + 1)$-quasi-hiérarchie ; de sorte que pour tous entiers η, λ tels que $1 \leq \eta < \lambda \leq n-1$, toute η-quasi-hiérarchie est une λ-quasi-hiérarchie. Les propriétés suivantes sont utiles pour la suite.

PROPOSITION 5. *Soit $\mathcal{H}$ une λ-quasi-hiérarchie. Alors :*

1) *pour tous $i_1, i_2, \ldots, i_\lambda \in I$, il existe une plus petite classe de $\mathcal{H}$ contenant $i_1, i_2, \ldots, i_\lambda$, et que nous notons $H_{i_1 \ldots i_\lambda}$;*

2) $\mathcal{H} = \left\{ H_{i_1 \ldots i_\lambda} : (i_1, \ldots, i_\lambda) \in I^\lambda \right\}$ *;*

3) *H est minimal dans $\mathcal{H}$ si et seulement si $H = H_{\underbrace{i \ldots i}_{\lambda}}$.*

PREUVE. La première assertion résulte du fait que $(I, \mathcal{H})$ est un espace de fermeture (axiomes 1) et 2) de la définition 2).

Montrons la deuxième assertion. Clairement, l'ensemble des $H_{i_1 \ldots i_\lambda}$ pour $i_1, \ldots, i_\lambda \in I$ est inclus dans $\mathcal{H}$. Inversement, considérons une classe H dans $\mathcal{H}$. Supposons qu'il n'existe pas $i_1, \ldots, i_\lambda \in H$ tels que $H = H_{i_1 \ldots i_\lambda}$. Alors $|H| > \lambda$. Soient $i_1, \ldots, i_\lambda \in H$ tels que $H_{i_1 \ldots i_\lambda}$ soit de cardinalité maximale dans l'ensemble $\mathcal{H}_H^{i_1 \ldots i_\lambda} = \{H_{i_1 \ldots i_\lambda} : i_1, \ldots, i_\lambda \in H\}$. Il va de soi que $H_{i_1 \ldots i_\lambda} \subseteq H$. Supposons cette inclusion stricte et considérons $i_{\lambda+1} \in H - H_{i_1 \ldots i_\lambda}$. Supposons que $i_1 \in H_{i_2 \ldots i_{\lambda+1}}$. Alors $H_{i_1 \ldots i_\lambda} \subseteq H_{i_2 \ldots i_{\lambda+1}}$, et par la maximalité de la cardinalité de $H_{i_1 \ldots i_\lambda}$, nous avons $H_{i_1 \ldots i_\lambda} = H_{i_2 \ldots i_{\lambda+1}}$; ce qui est impossible de par le choix de $i_{\lambda+1}$. Donc $i_1 \notin H_{i_2 \ldots i_{\lambda+1}}$. De la même manière : pour $\alpha = 2, \ldots, \lambda$, $i_\alpha \notin H_{i_1 \ldots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1} \ldots i_{\lambda+1}}$; ce qui est en contradiction avec l'axiome 4) de la définition 2. Par conséquent $H = H_{i_1 \ldots i_\lambda}$.

Montrons la troisième assertion. Il est clair que toute classe minimale H est égale à $H_{i \ldots i}$ pour tout $i \in H$. Soit, inversement, une classe de la forme $H_{i \ldots i}$. Si $H_{i \ldots i}$ n'est pas minimale, alors il existe, d'après l'axiome 3) de la définition 2, une classe H' telle que $i \in H' \subset H_{i \ldots i}$; ce qui contredit le fait que $H_{i \ldots i}$ soit la plus petite classe contenant i. Par conséquent $H_{i \ldots i}$ est minimale. □

Il ressort de la deuxième assertion de la proposition précédente que les λ-quasi-hiérarchies possèdent au plus $\sum_{k=1}^{\lambda} \binom{n}{k}$ classes distinctes. Les hypergraphes pour lesquels cette borne est atteinte sont des géométries convexes au sens de Edelman et Jamison [11].

Soient $\mathcal{H}$ une λ-quasi-hiérarchie sur I et f une application sur $\mathcal{H}$, à valeurs réelles non négatives. Le couple $(\mathcal{H}, f)$ est une *λ-quasi-hiérarchie indicée* sur I si f est strictement croissante et nulle sur les éléments minimaux (au sens de l'inclusion) de $\mathcal{H}$. L'indice ainsi défini associe un niveau à chaque classe de $\mathcal{H}$, permettant ainsi d'exprimer des relations quantitatives entre ces classes.

4.2. *Classes associées à une dissimilarité multivoies*

Soit d une dissimilarité λ-voies. Un sous-ensemble non vide H de I est une *d-λ-classe faible* si et seulement si $B_{i_1 \ldots i_\lambda} \subseteq H$ pour tous $i_1, \ldots, i_\lambda \in H$. De cette définition résulte immédiatement que toute d-λ-classe faible H est de la forme $B_{i_1 \ldots i_\lambda}$, pour tout λ-uplet $(i_1, \ldots i_\lambda)$ réalisant le diamètre de H selon d. Il est alors facile de voir que l'ensemble $\mathcal{F}_d^\lambda$ des d-λ-classes faibles coïncide avec l'ensemble des λ-boules vérifiant la λ-propriété d'inclusion. De plus, comme nous le verrons dans la proposition subséquente au lemme suivant, cela est d'autant plus intéressant que $\mathcal{F}_d^\lambda$ constitue une λ-quasi-hiérarchie, dès que d est semi-propre.

LEMME. *Soit d une dissimilarité λ-voies. Alors pour tous $i_1, \ldots, i_\lambda, i_{\lambda+1} \in I$:*
$(i_\alpha \notin B_{i_{\Lambda_\alpha} \frown i_{\lambda+1}} \ \forall \alpha \in \Lambda) \Rightarrow (i_{\lambda+1} \in B_{i_1 \ldots i_\lambda})$.

La preuve est immédiate. □

PROPOSITION 6. *Si d est une dissimilarité λ-voies semi-propre, alors $\left(\mathcal{F}_d^\lambda, diam_d\right)$ est une λ-quasi-hiérarchie indicée. Dans ce cas $\mathcal{F}_d^\lambda$ est la λ-quasi-hiérarchie associée à la dissimilarité d.*

PREUVE. Il est clair que $I \in \mathcal{F}_d^\lambda$ et que $\mathcal{F}_d^\lambda$ est stable par intersections non vides. De plus, les $B_{i \ldots i}$ sont, de par le caractère semi-propre de d, les éléments minimaux de $\mathcal{F}_d^\lambda$, et ils recouvrent naturellement I. Supposons qu'il existe $(\lambda+1)$ d-λ-classes faibles $H_1, \ldots, H_{\lambda+1}$ et $(\lambda+1)$ éléments $i_1, \ldots, i_{\lambda+1} \in I$ tels que $i_\alpha \in H_\beta$ si et seulement si $\alpha \neq \beta$, avec $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, \lambda+1\}$. Alors pour tout $\alpha = 1, \ldots, \lambda$: $i_\alpha \notin B_{i_{\Lambda_\alpha} \frown i_{\lambda+1}}$ et $i_{\lambda+1} \notin B_{i_1 \ldots i_\lambda}$. Cela est impossible, d'après le lemme précédent. Par conséquent $\mathcal{F}_d^\lambda$ est une λ-quasi-hiérarchie sur I. Enfin, $diam_d$ est clairement un indice sur $\mathcal{F}_d^\lambda$. □

Nous présentons, pour λ fixé, un algorithme dune complexité de l'ordre de $O\left(n^{2\lambda+1}\right)$ construisant la λ-quasi-hiérarchie associée à une dissimilarité semi-propre λ-voies donnée. Notons que même si la dissimilarité d n'est pas semi-propre, l'algorithme que nous proposons construit toujours l'hypergraphe sans λ-simplexe des d-λ-classes faibles de I. Cet algorithme consiste à construire, pour chaque λ-uplet $(i_1, \ldots, i_\lambda)$ d'éléments de I, une suite $(A_\gamma(i_1, \ldots, i_\lambda))_{\gamma \geq 0}$ d'ensembles qui croît vers la plus petite d-λ-classes faible contenant $i_1, \ldots, i_\lambda$. Supposons donnée une dissimilarité semi-propre λ-voies d sur I.

1) construire les λ-boules ;
2) pour tout λ-uplet $(i_1, \ldots, i_\lambda) \in I^\lambda$ faire :
  $\gamma := 0$;
  $A_0(i_1, \ldots, i_\lambda) := \bigcup_{j_1, \ldots, j_\lambda \in B_{i_1 \ldots i_\lambda}} B_{j_1 \ldots j_\lambda}$;
  répéter
  $\gamma := \gamma + 1$;
  $A_\gamma(i_1, \ldots, i_\lambda) := \bigcup_{j_1, \ldots, j_\lambda \in A_{\gamma-1}(i_1, \ldots, i_\lambda)} B_{j_1 \ldots j_\lambda}$ où les $B_{j_1 \ldots j_\lambda}$ sont les boules construite en 1) ;
  jusqu'à $A_\gamma(i_1, \ldots, i_\lambda) = A_{\gamma-1}(i_1, \ldots, i_\lambda)$;
  $A_\infty(i_1, \ldots, i_\lambda) := A_\gamma(i_1, \ldots, i_\lambda)$;
$\{A_\infty(i_1, \ldots, i_\lambda) : i_1, \ldots, i_\lambda \in I\}$ est la λ-quasi-hiérarchie associée à d.

Il est facile de voir que cet algorithme construit les d-λ-classes faibles de I. En effet, pour tout λ-uplet $(i_1, \ldots, i_\lambda)$, la suite $(A_\gamma(i_1, \ldots, i_\lambda))_{\gamma \geq 0}$ est croissante et majorée par la plus petite d-λ-classe faible $\langle i_1, \ldots, i_\lambda \rangle$ contenant $i_1, \ldots, i_\lambda$, i.e., $A_\infty(i_1, \ldots, i_\lambda) \subseteq \langle i_1, \ldots, i_\lambda \rangle$. Or $A_\infty(i_1, \ldots, i_\lambda)$ est, par construction, une d-λ-classe faible. Par conséquent $A_\infty(i_1, \ldots, i_\lambda) = \langle i_1, \ldots, i_\lambda \rangle$.

Quant à la complexité de l'algorithme, nous l'estimons en considérant le nombre d'opérations nécessaires à la construction d'une part, des $\sum_{k=1}^{\lambda} \binom{n}{k}$ λ-boules, et d'autre part, des plus petites d-λ-classes faibles contenant respectivement chaque sous-ensemble non vide de I de moins de $(\lambda + 1)$ éléments.

4.3. *Correspondance entre λ-quasi-hiérarchies indicées et λ-quasi-ultramétriques*

Nous en arrivons au résultat principal de ce papier, à savoir la bijection entre les λ-quasi-hiérarchies indicées et les λ-quasi-ultramétriques. Avant de démontrer cette correspondance, il convient d'observer les propriétés simples mais utiles ci-dessous.

PROPOSITION 7. *Soit d une dissimilarité λ-voies. Alors :*
1) *d satisfait à la λ-condition d'inclusion si et seulement si $\mathcal{F}_d^\lambda = \mathcal{B}_d^\lambda$;*
2) *si d satisfait à la λ-condition d'inclusion, alors $B_{i_1 \ldots i_\lambda}$ est la plus petite d-λ-classe faible de I contenant $i_1, \ldots, i_\lambda$, et les $B_{i \ldots i}$ sont les éléments minimaux de $\mathcal{B}_d^\lambda$.*

THÉORÈME 2. *Si d est une dissimilarité λ-voies satisfaisant à la λ-condition d'inclusion, alors $\left(\mathcal{B}_d^\lambda, diam_d\right)$ est une λ-quasi-hiérarchie indicée. Réciproquement, si $(\mathcal{H}, f)$ est une λ-quasi-hiérarchie indicée, alors il existe une unique λ-quasi-ultramétrique δ sur I telle que $\left(\mathcal{B}_\delta^\lambda, diam_\delta\right) = (\mathcal{H}, f)$; δ est défini, pour tous $i_1, \ldots, i_\lambda \in I$, par : $\delta(i_1, \ldots, i_\lambda) = f(H_{i_1 \ldots i_\lambda})$.*

PREUVE. La proposition directe est une conséquence des deux propositions précédentes, sachant que la λ-condition d'inclusion induit le caractère semi-propre (Remarque 2).

Pour la réciproque, considérons une λ-quasi-hiérarchie indicée $(\mathcal{H}, f)$ sur I. L'application δ définie sur I^λ par $\delta(i_1, \ldots, i_\lambda) = f(H_{i_1 \ldots i_\lambda})$ pour tous $i_1, \ldots, i_\lambda \in I$, est une dissimilarité λ-voies. En effet $\delta(i, \ldots, i) = f(H_{i \ldots i}) = 0$ pour tout $i \in I$. De plus:

$$\delta(i_1, \ldots, i_\lambda) = f(H_{i_1 \ldots i_\lambda}) = f\left(H_{i_{P_\lambda(1)} \ldots i_{P_\lambda(\lambda)}}\right) = \delta\left(i_{P_\lambda(1)}, \ldots, i_{P_\lambda(\lambda)}\right)$$

pour toute permutation P_λ sur Λ. Enfin $H_{j_1 \ldots j_\lambda} \subseteq H_{i_1 \ldots i_\lambda}$ pour tout $\{j_1, \ldots, j_\lambda\} \subseteq \{i_1, \ldots, i_\lambda\}$, de sorte que $\delta(j_1, \ldots, j_\lambda) \leq \delta(i_1, \ldots, i_\lambda)$ pour tout $\{j_1, \ldots, j_\lambda\} \subseteq \{i_1, \ldots, i_\lambda\}$. Nous stipulons de plus que, pour tout $(i_1, \ldots, i_\lambda) \in I^\lambda$, $H_{i_1 \ldots i_\lambda}$ est une δ-λ-classe faible de I. Cela est en effet évident si $H_{i_1 \ldots i_\lambda} = I$. Supposons que $H_{i_1 \ldots i_\lambda} \neq I$ pour $i_1, \ldots, i_\lambda$ fixés dans I, et considérons $j_1, \ldots, j_\lambda \in H_{i_1 \ldots i_\lambda}$ et $k \notin H_{i_1 \ldots i_\lambda}$. Alors $k \notin H_{j_1 \ldots j_\lambda} \subseteq H_{i_1 \ldots i_\lambda}$, et il en résulte que $H_{j_1 \ldots j_\lambda} \neq H_{j_{\Lambda_\alpha}^{\frown} k}$ pour tout $\alpha \in \Lambda$. Ainsi, par la non-existence de

λ-simplexe, il existe $\alpha \in \Lambda$ tel que $j_\alpha \in H_{j_{\widehat{\Lambda_\alpha}}k}$, de sorte que $H_{j_1 \dots j_\lambda} \subset H_{j_{\widehat{\Lambda_\alpha}}k}$. Il en résulte que $\delta(j_1, \dots, j_\lambda) = f(H_{j_1 \dots j_\lambda}) < f\left(H_{j_{\widehat{\Lambda_\alpha}}k}\right) = \delta\left(j^{\widehat{\Lambda_\alpha}}, k\right)$, i.e., $k \notin B^\delta_{j_1 \dots j_\lambda}$. Donc $B^\delta_{j_1 \dots j_\lambda} \subseteq H_{i_1 \dots i_\lambda}$, et cela prouve que $H_{i_1 \dots i_\lambda}$ est une δ-λ-classe faible. Nous en déduisons que $B^\delta_{i_1 \dots i_\lambda} \subseteq H_{i_1 \dots i_\lambda}$ pour tous $i_1, \dots, i_\lambda \in I$.

Pour prouver la λ-quasi-ultramétricité de δ, il nous suffit donc de démontrer, d'une part, que $H_{i_1 \dots i_\lambda} \subseteq B^\delta_{i_1 \dots i_\lambda}$ pour tous $i_1, \dots, i_\lambda \in I$, et d'autre part, que $diam_\delta\left(B^\delta_{i_1 \dots i_\lambda}\right) = \delta(i_1, \dots, i_\lambda)$, pour tous $i_1, \dots, i_\lambda \in I$. Cela présente l'avantage d'établir, du même coup, l'égalité
$\left(\mathcal{B}^\lambda_\delta, diam_\delta\right) = (\mathcal{H}, f)$. Soit, à cet effet, $j \in H_{i_1 \dots i_\lambda}$ avec $i_1, \dots, i_\lambda$ quelconques mais fixés dans I. Alors, pour tout $\alpha \in \Lambda$: $H_{i_{\widehat{\Lambda_\alpha}}j} \subseteq H_{i_1 \dots i_\lambda}$; d'où $\max\limits_{\alpha \in \Lambda} \delta\left(i^{\widehat{\Lambda_\alpha}}, j\right) \le \delta(i_1, \dots, i_\lambda)$, i.e., $j \in B^\delta_{i_1 \dots i_\lambda}$; donc $H_{i_1 \dots i_\lambda} \subseteq B^\delta_{i_1 \dots i_\lambda}$. De plus, si $j_1, \dots, j_\lambda \in B^\delta_{i_1 \dots i_\lambda} = H_{i_1 \dots i_\lambda}$, alors $H_{j_1 \dots j_\lambda} \subseteq H_{i_1 \dots i_\lambda}$, de sorte que $\delta(j_1, \dots, j_\lambda) \le \delta(i_1, \dots, i_\lambda)$.
Donc $diam_\delta\left(B^\delta_{i_1 \dots i_\lambda}\right) = \delta(i_1, \dots, i_\lambda)$.

Il ne reste plus qu'à prouver l'unicité de δ pour terminer la démonstration du théorème. Supposons, pour cela, qu'il existe une λ-quasi-ultramétrique δ' telle que $\left(\mathcal{B}^\lambda_{\delta'}, diam_{\delta'}\right) = (\mathcal{H}, f)$. Alors $B^{\delta'}_{i_1 \dots i_\lambda}$ étant la plus petite classe de $\mathcal{B}^\lambda_{\delta'}$, contenant $i_1, \dots, i_\lambda$, nous avons $B^{\delta'}_{i_1 \dots i_\lambda} = H_{i_1 \dots i_\lambda}$ pour tous $i_1, \dots, i_\lambda \in I$. D'où $\delta'(i_1, \dots, i_\lambda) = diam_{\delta'}\left(B^{\delta'}_{i_1 \dots i_\lambda}\right) = f(H_{i_1 \dots i_\lambda}) = \delta(i_1, \dots, i_\lambda)$ pour tous $i_1, \dots, i_\lambda \in I$. Par conséquent $\delta' = \delta$, et le théorème est entièrement démontré. □

En conséquence de ce théorème, nous déduisons que l'application $d \longmapsto \left(\mathcal{B}^\lambda_d, diam_d\right)$ est une bijection entre l'ensemble des dissimilarités λ-quasi-ultramétriques et l'ensemble des λ-quasi-hiérarchies indicées. Si d_λ est une dissimilarité λ-quasi-ultramétrique et $d_{\lambda+1}$ son max-prolongement, alors la λ-quasi-hiérarchie correspondant à d_λ est la même que la $(\lambda+1)$-quasi-hiérarchie correspondant à $d_{\lambda+1}$.

5. DISCUSSION

Des contraintes supplémentaires pourraient être imposées pour définir les semi-distances et distances multivoies. Mais cela requiert une attention particulière puisque les axiomes spécifiant ces objets sont encore variables à travers la littérature.

En effet, Batbedat [5] généralise l'inégalité triangulaire proposée par Joly et Le Calvé [15], et qui est la suivante pour une dissimilarité λ-voies d et pour tous $i_1, \dots, i_{\lambda+1} \in I$:

$$d(i_1, \dots, i_{\alpha-1}, i_{\alpha+1}, \dots, i_{\lambda+1}) \le d(i_1, \dots, i_\lambda) + d(i_2, \dots, i_{\lambda+1})$$

pour tout $\alpha = 2, \dots, \lambda$.
En lieu et place de cette inégalité triangulaire généralisée, d'autres auteurs proposent l'inégalité $(\lambda+1)$-aire suivante:

$$d\left(i_1,\ldots,i_\lambda\right) \leq \sum_{\alpha=1}^{\lambda} d\left(i^{\Lambda\widehat{\alpha}}, i_{\lambda+1}\right)$$

pour tous $i_1,\ldots,i_{\lambda+1} \in I$.
Dans le cas particulier des dissimilarités 3-voies, on retrouve aussi l'inégalité suivante :

$$2d\left(i,j,k\right) \leq d\left(i,j\right) + d\left(i,k\right) + d\left(j,k\right).$$

Il se pose donc la question de savoir laquelle de ces inégalités est plus appropriée pour donner à la notion de semi-distance/distance multivoies le même sens mathématique que son analogue 2-voies.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANSTEE R. P., "Properties of (0-1)-matrices with no triangles", *J. Comb. Theory,* A 29 (1980), 186-198.

[2] BANDELT H.-J. et DRESS A. W. M., "Weak hierarchies associated with similarity measures: an additive clustering technique", *Bull. Math. Biology,* 51 (1989), 113-166.

[3] BATBEDAT A., "Les dissimilarités médas ou arbas", *Stat. Anal. Données,* 14 (1988), 1-18.

[4] BATBEDAT A., *Les approches pyramidales dans la classification arborée,* Paris, Masson, 1990.

[5] BATBEDAT A., *Les dendrogrammes des dissimilarités symétriques n-voies. Comment situer les graphes symétriques n-voies,* Rapport technique de l'Université de Montpellier II, France, 1993.

[6] BENNANI M., *Analyses métriques à trois voies,* Thèse de doctorat de l'Université de Haute Bretagne, Rennes II, France, 1993.

[7] BERGE C., *Graphes et hypergraphes,* Paris, Dunod, 1970.

[8] COPPI R. et BOLASCO S., *Multiway data analysis,* Amsterdam, North-Holland, 1989.

[9] DAWS J. T. , "The analysis of free-sorting data : beyond pairwise cooccurrences", *J. Classification,* 13 (1996), 57-80.

[10] DIATTA J. et FICHET B., "From Apresjan hierarchies and Bandelt-Dress weak hierarchies to quasi-hierarchies", in E. Diday et al., editeurs, *New approaches in Classification and Data Analysis,* Springer-Verlag, 1994, 111-118.

[11] EDELMAN P. H. et JAMISON R. E., "The theory of convex geometries", *Geometriae Dedicata,* 19 (1985), 247-270.

[12] GOLUMBIC M. C. et JAMISON R. E., "The intersection graphs of paths in a tree", *J. Comb. Theory,* B 38 (1985), 8-22.

[13] HEDRICK E., "On three dimensional determinants", *Annals of Math.,* (1899).

[14] JARDINE N. et SIBSON R., *Mathematical taxonomy,* New York, Wiley, 1971.

[15] JOLY S. et Le CALVÉ G., "Tree-way distances", *J. Classification,* 12 (1995), 191-205.

[16] LEIBOVICI D., "Décomposition en valeurs singulières d'un tableau à k entrées: ATP-kmodes, AFC de k variables", in *XXV-es Journées de Statistique de Vannes,* France, 1993.

[17] LEUTOLA K. et NIEMINEN J., "Relations, coverings, hypergraphs and matroids", *Czech. Math. J.,* 33 (1983), 509-518.

[18] NIEMINEN J., "Cluster analysis, t-ary relations, chaining and convexities of graphs", *J. Combin. Inf. Syst. Sci.,* 10 (1985), 79-89.

[19] Van De VEL M. L. J., *Theory of convex structures,* Amsterdam, North-Holland, 1993.