

JEAN-MARC BERNARD

CAMILO CHARRON

L'analyse implicative bayésienne, une méthode pour l'étude des dépendances orientées. I : données binaires

Mathématiques et sciences humaines, tome 134 (1996), p. 5-38

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1996__134__5_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

L'ANALYSE IMPLICATIVE BAYÉSIENNE, UNE MÉTHODE POUR L'ÉTUDE DES DÉPENDANCES ORIENTÉES. I : DONNÉES BINAIRES *

Jean-Marc BERNARD¹, Camilo CHARRON²

RÉSUMÉ — *La réussite à l'épreuve A implique-t-elle, approximativement, la réussite à l'épreuve B ? Parmi les indices descriptifs proposés pour mesurer de telles dépendances orientées, nous considérons l'indice H de Loevinger, qui s'exprime simplement en termes des taux de liaison entre modalités. A partir de cet indice, nous définissons les notions de quasi-implication, de quasi-équivalence et de quasi-indépendance dans un tableau de contingence 2 × 2. Cependant, les méthodes inductives correspondantes, parce que fondées sur des raisonnements asymptotiques, ne fournissent pas d'énoncé valide, ni pour les données de faible taille, ni, paradoxalement, pour les cas où le modèle logique est presque parfaitement vérifié. L'approche bayésienne de l'inférence évite ces difficultés et conduit à des énoncés sur la grandeur des quasi-implication et autres relations de ce type. La méthode proposée, l'Analyse Implicative Bayésienne (AIB), constituée de ces deux volets (descriptif et inductif), est illustrée sur une expérience de Psychologie du Développement relative à la construction du nombre chez l'enfant.*

SUMMARY — Bayesian Implicative Analysis, a method for the study of oriented dependencies. I : Binary data.

Does success to test A imply, approximately, success to test B ? Among the descriptive indices that were proposed to measure such oriented dependencies, we focus on Loevinger's H which has a simple expression in terms of the association rates between modalities. From this index, we define the notions of quasi-implication, quasi-equivalence and quasi-independence for a 2 by 2 contingency table. However, the corresponding existing inferential frequentist methods, because they are based on asymptotic considerations, do not provide valid statements, neither for small datasets, nor, paradoxically, for cases in which the implication is descriptively almost verified. The Bayesian approach to inference avoids these difficulties and provides inductive statements about the size of quasi-implications and other types of "quasi-" relations. The proposed method, the Bayesian Implicative Analysis, composed of these two aspects (descriptive and inductive), is illustrated on an experiment from Developmental Psychology about number construction in children.

* Les auteurs tiennent à remercier Henry Rouanet pour ses remarques et suggestions qui les ont conduits à clarifier et affiner certains arguments au coeur de cet article, ainsi que Bruno Lecoutre et Denis Corroyer pour leurs commentaires.

¹Laboratoire de Psychologie Cognitive, CNRS ER 125, Université Paris 8, 2 rue de la Liberté, 93526 Saint-Denis Cedex.

²LaPsyDEE, CNRS URA 1353, Université Paris 5.

1. INTRODUCTION

L'étude développementale des enfants révèle des dépendances entre les acquisitions cognitives successives. Le psychologue cherche à mettre en évidence ces dépendances : s'il est possible de montrer que la réussite à l'épreuve A implique la réussite à l'épreuve B , il pourra avancer l'hypothèse que les processus cognitifs mis en jeu dans l'épreuve B sont nécessaires à ceux intervenant dans l'épreuve A . Ce problème de la mise en évidence de dépendances orientées se rencontre dans de nombreux autres domaines de recherche : didactique, détermination d'échelles de mesure en psychologie, évaluation de facteurs de risque en épidémiologie, exploitation des bases de données, pour n'en citer que quelques-uns.

Prenons l'exemple, baptisé "Fractions-1", d'une expérience sur la construction du nombre chez l'enfant, dans laquelle deux des épreuves consistent à déterminer une quantité par l'intermédiaire d'une fraction qui peut exprimer, soit un rapport partie-partie (A), soit un rapport partie-tout (B). Nous reviendrons de façon plus détaillée sur cette expérience à la section 5 (les épreuves A et B y sont désignées respectivement par QRPP et QRPT). Le tableau 1 donne les résultats conjoints à ces deux épreuves pour les 165 élèves de l'expérience.

Tableau 1: Exemple "Fractions-1". Effectifs observés pour le croisement des deux variables binaires A (rapport Partie-Partie) et B (rapport Partie-Tout); a et b désignent la réussite, a' et b' l'échec.

		Partie-Tout	
		b	b'
Partie-	a	36	3
Partie	a'	36	90

Parmi les 39 élèves qui réussissent l'épreuve A , 36 (soit 92.3%) réussissent aussi l'épreuve B , alors que dans l'ensemble la réussite à B n'est pas majoritaire (43.6%). Ainsi on peut dire que, sur cet ensemble d'élèves, en général, la réussite à A implique la réussite à B . Aux trois exceptions près des élèves de la case ab' , il y a implication de a vers b . Par contre, la réciproque de cette implication est loin d'être vérifiée : sur 72 sujets qui réussissent à B , seuls 36 (soit 50.0%) réussissent à A . Ainsi on a descriptivement une *quasi-implication* de a vers b , mais non de b vers a ; cette dissymétrie tient à ce que l'épreuve A est plus difficile que l'épreuve B .

Dans la suite de cet article, le terme "implication", sans précision, sera à prendre dans un sens large; lorsqu'il sera nécessaire de préciser, nous distinguerons la "quasi-implication" (en bref "q-implication"), notée " \longrightarrow ", de l'"implication stricte" de la logique formelle, notée " \implies ".

Conclure à une q-implication $a \longrightarrow b$, c'est bien entendu conclure à une dépendance entre A et B , mais plus précisément à une dépendance *dans une certaine direction*, celle de l'implication stricte $a \implies b$. Nous considérerons également ici la recherche d'une conclusion de quasi-équivalence (en bref *q-equivalence*) entre a et b — qu'on notera $a \longleftrightarrow b$, c'est-à-dire à une dépendance dans la direction de l'équivalence stricte $a \iff b$. De façon générale, cet article sera ainsi centré sur l'étude des dépendances orientées entre variables binaires.

Dans un prochain article (Bernard, Charron, sous presse), nous étudierons la dépendance orientée entre deux variables A et B ayant un nombre quelconque de

modalités, avec le problème de la mesure de l'adéquation des données à un modèle logique caractérisé par un ensemble d'implications.

A partir des observations du tableau 1, comment (i) décrire et quantifier la relation de q -implication, et (ii) inférer sur cette relation dans la population dont les 165 élèves observés sont issus ?

Pour l'étude des dépendances orientées, les indices usuels d'écart à l'indépendance dans un tableau de contingence $A \times B$, descriptifs (e.g. ϕ ou ϕ^2) ou inductifs (e.g. χ^2), sont inadaptés en raison de leur caractère global et, surtout, de leur symétrie en A et B . De ce fait des méthodes statistiques spécifiques sont requises.

Le problème de la quasi-implication entre variables binaires a déjà été abordé dans cette revue sous l'appellation d'"implication partielle" (Luxenburger, 1991) ou sous celle d'"implication statistique" (Gras, Larher, 1993 ; Lerman, Gras, Rostam, 1981). Mais ces travaux, qui ont constitué un des points de départ du notre, n'abordent chacun qu'un aspect du problème : descriptif pour les premiers, inductif pour les seconds. En particulier, l'approche de Gras & Larher (1993) ne conduit qu'à une conclusion de rejet de l'hypothèse d'indépendance dans la direction d'une implication, mais ne permet pas véritablement de quantifier le degré de quasi-implication. L'indice d'"intensité d'implication" proposé par ces auteurs est, malgré ce que son nom suggère, un indice composite qui mélange les composantes descriptive (degré de quasi-implication) et inductive (l'effectif des données). De ce fait, il ne permet pas de distinguer le cas d'un faible écart à l'indépendance avec des données nombreuses, de celui où, malgré un effectif plus faible, les données militent vraiment pour une quasi-implication (voir Charron, 1996).

Conformément à la ligne générale tracée par Rouanet, Bernard & Le Roux (1990), l'approche que nous proposons intègre les deux aspects descriptif et inductif en procédant selon deux étapes : l'étape descriptive permet de dégager une propriété d'intérêt des données observées ; l'étape inductive considère les données comme un échantillon d'une population plus vaste et vise à généraliser cette propriété à la population.

Parmi les indices descriptifs proposés pour mesurer la grandeur de liaisons orientées, nous considérerons ici uniquement l'indice H de Loevinger (1947, 1948). Il est courant d'utiliser cet indice pour l'analyse d'une quasi-implication, mais nous étendrons également son usage pour l'obtention d'une conclusion de quasi-équivalence ou de quasi-indépendance. La généralisation de cet indice pour des variables non binaires conduit à l'indice "*Del*" (Hildebrand, Laing & Rosenthal, 1977), dont un autre cas particulier est l'indice "*Kappa*" (Cohen, 1960). Ces autres indices seront abordés dans Bernard & Charron (sous presse).

Les méthodes inductives correspondantes proposées dans la littérature ont été développées dans le cadre de l'*inférence fréquentiste* (tests d'hypothèses, intervalles de confiance), et se heurtent aux difficultés inhérentes à ce cadre (voir e.g. Rouanet *et al.*, 1991). Une de ces difficultés, qui n'est pas que technique, est celle de se débarrasser des *paramètres parasites*, avec deux angles d'attaque possibles : développer des méthodes approchées fondées sur des résultats asymptotiques (Copas & Loeber, 1990 ; Fleiss, 1981 ; Hildebrand *et al.* 1977), ou réduire l'espace des paramètres (ou celui des échantillons) en procédant à des tests conditionnels (Copas & Loeber, 1990 ; Gras, Larher, 1993 ; Lerman, Gras, Rostam, 1981). Cependant, aucune de ces approches n'est pleinement satisfaisante. La première fournit des approximations qui sont d'autant plus mauvaises que les données sont peu nombreuses et/ou extrêmes. Dans la seconde, les difficultés résident dans le risque d'arbitraire du choix de tel ou tel conditionnement.

Ces difficultés n'existent pas, en revanche, dans l'approche bayésienne de l'inférence statistique. Au niveau théorique, cette approche permet en effet d'inférer sur n'importe quel indice d'intérêt, en fournissant, comme résultat final, une distribution de probabilité relative à la valeur de l'indice dans la population parente. Cette possibilité générale d'inférence, qu'offre l'approche bayésienne, s'est longtemps heurtée aux difficultés techniques posées par les calculs bayésiens. Mais l'explosion récente des moyens informatiques généraux et le développement d'outils algorithmiques spécifiques d'approximation, notamment par échantillonnage dans la distribution bayésienne, permettent désormais sa mise en oeuvre pratique.

En résumé, le propos du présent article est double : (i) proposer, sur la base de l'indice H , des indices descriptifs mesurant la grandeur d'une quasi-implication, d'une quasi-équivalence ou d'une quasi-indépendance entre deux variables binaires ; (ii) proposer une méthode générale d'inférence bayésienne pour l'analyse inductive relative à ces indices. L'ensemble de ces deux volets constitue la base de ce que nous appelons l'*Analyse Implicative Bayésienne* (en bref *AIB*), méthode dont les bases ont déjà été dégagées dans Charron (1996).

La suite de cet article est organisée comme suit. La section 2 rappelle les définitions d'indices usuels associés à un tableau de contingence et en particulier un tableau 2×2 . La section 3 présente le volet descriptif de l'analyse implicative, et la section 4, son volet inductif, avec la comparaison de l'approche bayésienne et de l'approche fréquentiste. La section 5 montre une application de l'*AIB* à des données relevant de la psychologie du développement. La section 6 évoque la mise en oeuvre informatique de l'*AIB*. Enfin, la section 7 conclut sur les points essentiels et les avantages de la méthode proposée.

2. DEFINITIONS ET NOTATIONS

Nous donnerons tout d'abord les définitions et notations d'un certain nombre de statistiques associées à un tableau de contingence, ainsi que quelques résultats qui leur sont relatifs. Ces définitions et notations sont, pour la plupart, reprises de Rouanet & Le Roux (1993)³.

2.1. Cas général : tableau de contingence quelconque

Etant données deux variables catégorisées A et B comprenant chacune un nombre quelconque de modalités, on note a (resp. b) une modalité quelconque de A (resp. B). On parlera de "*variables homologues*" lorsqu'il existe une correspondance bijective entre A et B privilégiée méthodologiquement et reflétée par l'ordre d'énumération de leurs modalités respectives : a_1 correspond à b_1 , a_2 à b_2 , etc..

Les effectifs observés sur un groupe de n observations sont notés $n_{AB} = (n_{ab})_{(a,b) \in A \times B}$ et les fréquences conjointes correspondantes f_{AB} , avec $f_{ab} = n_{ab}/n$. On note f_a et f_b les fréquences marginales⁴ : $f_a = \sum_{b \in B} f_{ab}$ et $f_b = \sum_{a \in A} f_{ab}$.

³Nous adoptons notamment les notations duales des *mesures* (indices en bas) et des *variables* (indices en haut). La distinction fondamentale entre ces deux types d'objets statistiques, rappelée par ces notations, tient à ce que, lorsqu'on regroupe plusieurs catégories, les mesures s'ajoutent alors que les variables se moyennent.

⁴Nous considérerons tout au long de cet article qu'aucune des fréquences marginales n'est nulle.

On appelle fréquences-produits⁵ $f_A f_B = (f_a f_b)_{(a,b) \in A \times B}$. Il y a *indépendance locale* entre a et b lorsque la fréquence conjointe f_{ab} est égale à la fréquence-produit correspondante $f_a f_b$. L'écart à l'indépendance pour les modalités a et b est défini comme $f_{ab} - f_a f_b$. Si on rapporte cet écart à la fréquence-produit $f_a f_b$, on obtient le *taux de liaison* entre a et b :

$$t^{ab} = \frac{f_{ab} - f_a f_b}{f_a f_b} \quad (1)$$

Le taux de liaison est un indice symétrique : $t^{ab} = t^{ba}$. Son signe indique s'il y a attraction ($t^{ab} > 0$), indépendance locale ($t^{ab} = 0$), ou répulsion ($t^{ab} < 0$), entre les modalités a et b . Le protocole des taux de liaison, $t^{AB} = (t^{ab})_{(a,b) \in A \times B}$, pondéré par les fréquences-produits $f_A f_B$, est un objet essentiel pour l'analyse d'un tableau de contingence en général (Rouanet, Le Roux, 1993), et s'avérera être un objet-clé dans les développements qui vont suivre. La propriété suivante sera particulièrement importante : $\forall ab, t^{ab} \geq -1$, avec $t^{ab} = -1 \iff f_{ab} = 0$. Le protocole pondéré des taux de liaison est centré (*i.e.* de moyenne pondérée nulle), et, plus précisément, doublement centré, *i.e.* centré à la fois en lignes et en colonnes. Le carré-moyen de contingence ϕ^2 n'est autre que la variance de ce protocole :

$$\phi^2 = \text{Var}(t^{AB}, f_A f_B) = \sum_{(a,b) \in A \times B} f_a f_b (t^{ab})^2 \quad (2)$$

Le ϕ^2 est un indice global d'importance de liaison dans un tableau de contingence. Il est nul dans le cas de l'indépendance globale entre A et B (qu'on notera $A \perp\!\!\!\perp B$), c'est-à-dire lorsqu'il y a indépendance locale entre toutes les paires possibles de modalités a et b .

2.2. Cas particulier d'un tableau 2×2

Pour le cas d'une variable binaire, A_2 , on note a et a' ses deux modalités ; on désignera la réussite par a et l'échec par a' lorsque la notion d'échec/réussite est pertinente.

Pour un tableau $A_2 \times B_2$ (deux variables A et B binaires), le coefficient de contingence ϕ (dont le carré est le ϕ^2) est le coefficient de corrélation linéaire entre les variables A et B , obtenu par exemple en codant a et b par la valeur 1, et a' et b' par la valeur 0 (tout autre codage numérique respectant les ordres $a > a'$ et $b > b'$ conduit à la même valeur pour ϕ) :

$$\phi = \frac{f_{ab} f_{a'b'} - f_{ab'} f_{a'b}}{\sqrt{f_a f_{a'} f_b f_{b'}}} \quad (3)$$

De plus les taux de liaison des quatre cases du tableau sont liés entre eux. Ces relations mutuelles sont évidentes lorsqu'on exprime les quatre taux de liaison en fonction de ϕ et des fréquences marginales :

$$t^{AB} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & b & b' \\ a & \phi \sqrt{\frac{f_{a'} f_{b'}}{f_a f_b}} & -\phi \sqrt{\frac{f_{a'} f_b}{f_a f_{b'}}} \\ a' & -\phi \sqrt{\frac{f_a f_{b'}}{f_{a'} f_b}} & \phi \sqrt{\frac{f_a f_b}{f_{a'} f_{b'}}} \end{array} \end{array} \quad (4)$$

⁵Nous évitons pour celles-ci le terme de "fréquences théoriques" dont l'usage est courant mais qui donne trop à penser que la seule théorie possible est celle de l'indépendance entre A et B .

De ces relations, il ressort tout d'abord que si un des taux de liaison est nul, alors ϕ est nul et donc les trois autres taux de liaison le sont aussi : dans un tableau 2×2 , l'indépendance locale équivaut à l'indépendance globale. Il ressort également que les taux de liaison de deux cases diamétralement opposées sont nécessairement de même signe, signe déterminé par celui de ϕ ; c'est une conséquence de la propriété de "double-centrage". Lorsque ϕ et, en conséquence, t^{ab} et $t^{a'b'}$, sont positifs (resp. négatifs), on parlera de *liaison positive* (resp. *négative*)⁶. Enfin, le coefficient ϕ^2 est égal aux deux produits-croisés des taux de liaison⁷ :

$$\phi^2 = t^{ab}t^{a'b'} = t^{a'b}t^{ab'} \quad (5)$$

Remarque : Les statistiques que nous venons de définir (f_{AB} , t^{AB} , ϕ , ϕ^2) sont descriptives, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent que des fréquences conjointes f_{AB} et non de l'effectif total n . Chacune peut aussi bien être calculée sur un échantillon de données que sur la population. Lorsque nous aborderons l'étape inductive, nous aurons besoin de considérer simultanément les données observées et la population, et il y aura alors lieu de distinguer les statistiques calculées sur les données observées, désignées en général par des lettres latines (e.g. f pour les fréquences) de leurs équivalents dans la population désignées en général par des lettres grecques (e.g. φ pour les fréquences).

3. ANALYSE DESCRIPTIVE DES IMPLICATIONS POUR UN TABLEAU 2×2

Revenons sur l'exemple "Fractions-1" (cf. tableau 1). On se demande si, sur la base de ces données, il est possible de conclure que la réussite à l'épreuve A implique, en général, la réussite à l'épreuve B : $a \longrightarrow b$? Nous étudierons ici l'aspect descriptif de ce type de problème. Cette étape descriptive peut être envisagée comme la réponse à la question : "Si les données observées constituaient l'ensemble de la population d'intérêt, qu'aurait-on envie de conclure?". Cette étape ne fait intervenir que les fréquences conjointes (ou des indices dérivés d'elles). Les fréquences conjointes et marginales pour l'exemple "Fractions-1" sont données dans le tableau 2.

Tableau 2: Exemple "Fractions-1". Fréquences conjointes et marginales.

	b	b'	
a	$f_{ab} = 0.218$	$f_{ab'} = 0.018$	$f_a = 0.236$
a'	$f_{a'b} = 0.218$	$f_{a'b'} = 0.546$	$f_{a'} = 0.764$
	$f_b = 0.436$	$f_{b'} = 0.564$	

3.1. Indice descriptif d'implication pour un tableau 2×2 : l'indice H de Loevinger

Si on raisonne dans un cadre logique, l'implication stricte " $a \implies b$ " exprime l'impossibilité d'observer conjointement a et b' , soit une fréquence $f_{ab'} = 0$. Ainsi " $a \implies b$ " constitue un modèle dans lequel la case ab' est "interdite" : on dira que la case ab' constitue une *case d'erreur* pour le modèle logique $a \implies b$. Dans la pratique, il est rare d'observer une parfaite conformité avec un modèle aussi fort, d'où l'idée de proposer un indice descriptif mesurant la grandeur de la q-implication de a vers b .

⁶Qualifier une liaison de "positive" ou de "négative" est relatif aux ordres d'énumération des modalités de A et B choisis, et n'a de sens véritable que si les variables binaires A_2 et B_2 sont homologues.

⁷Les équations (4) et (5) sont, à notre connaissance, peu classiques.

Puisque dans le cas de l'implication stricte " $a \implies b$ " on a $f_{ab'} = 0$, un indice acceptable de grandeur d'une q-implication doit mesurer la petitesse de $f_{ab'}$. Cependant le seul fait que la fréquence $f_{ab'}$ soit petite n'est pas suffisant pour conclure à la q-implication $a \longrightarrow b$. En effet, si f_{ab} est également petite, alors la conclusion doit seulement être que la modalité a est rare ; d'où la nécessité d'évaluer la rareté de ab' en la rapportant à celle de a , puis symétriquement en la rapportant à celle de b' . Par ce raisonnement, on aboutit à l'indice H_{ab} de Loevinger (1947, 1948),

$$H_{ab} = 1 - \frac{f_{ab'}}{f_a f_{b'}} \quad (6)$$

défini de façon à ce que sa valeur maximale, 1, corresponde au cas de l'implication stricte⁸.

A titre d'exemple, pour les données "Fractions-1" (cf. tableau 2) et l'étude de la q-implication " $a \longrightarrow b$ ", on trouve ainsi : $H_{ab} = 1 - 0.018 / (0.236 \times 0.564) = 0.864$.

3.2. Propriétés de l'indice H

Indice H et taux de liaison.

A la comparaison des équations (1) et (6), on constate que l'indice H n'est autre que l'opposé du taux de liaison de la case d'erreur ab' :

$$H_{ab} = -t^{ab'}. \quad (7)$$

De ce fait, les propriétés de l'indice H se déduisent directement de celles des taux de liaison.

Valeurs possibles de H .

L'indice H_{ab} peut valoir de $-\infty$ à 1 ; une valeur négative correspond à une attraction entre a et b' , ce qui va à l'opposé d'une q-implication de a vers b ; la valeur 0 correspond à une indépendance locale entre a et b' ; une valeur positive correspond à une répulsion entre les modalités a et b' et donc à un écart à l'indépendance dans la direction de l'implication de a vers b ; la valeur maximale, 1, est obtenue pour une répulsion maximum entre a et b' , c'est-à-dire pour $t^{ab'} = -1$ soit encore $f_{ab'} = 0$, qui correspond au cas de l'implication stricte $a \implies b$.

Pour pouvoir parler d'une quasi-implication $a \longrightarrow b$, il ne suffit pas que H_{ab} soit positif, mais il faut aussi qu'il soit suffisamment proche de 1 ; c'est le cas dans notre exemple où on a trouvé $H_{ab} = 0.864$. La définition de critères précis pour qu'un écart orienté à l'indépendance puisse être qualifié de quasi-implication sera discutée plus loin.

Implication contraposée.

Les deux implications strictes, $a \implies b$ et sa contraposée $b' \implies a'$ sont logiquement équivalentes. A-t-on une équivalence analogue au niveau des q-implications, c'est-à-dire des indices H associés ? Du fait de (7) et de la symétrie du taux de liaison, on a :

$$H_{ab} = -t^{ab'} = -t^{b'a} = H_{b'a'}. \quad (8)$$

⁸ Cet indice a été initialement proposé en psychométrie pour mesurer l'*homogénéité* entre deux épreuves, d'où la notation H . Dans sa définition initiale, l'indice de Loevinger est un indice symétrique qui vaut, selon nos notations, H_{ab} si $f_b \geq f_a$ et H_{ba} sinon, d'où son autre définition symétrique en tant que ϕ/ϕ_{max} . Néanmoins, dans ce texte, nous parlerons de l'"indice de Loevinger" pour désigner l'indice dissymétrique défini par (6).

Ainsi la grandeur de la q-implication $a \longrightarrow b$ est la même que celle de la q-implication contraposée $b' \longrightarrow a'$, toutes deux valant l'opposé du taux de liaison de la case d'erreur associée ab' .

Plus généralement, chacun des quatre indices de Loevinger associé à une des cases d'erreur possibles de $A \times B$ correspond à la mesure d'une des q-implications du tableau 3. Le tableau 4 donne, pour l'exemple "Fractions-1", l'opposé du taux de liaison de chaque modalité composée de $A \times B$; chacune de ces valeurs est l'indice H pour la q-implication correspondante du tableau 3. Dans la case ab' on retrouve l'indice relatif à la q-implication $a \longrightarrow b$, $H_{ab} = 0.864$, c'est-à-dire celle pour laquelle la case ab' est une case d'erreur.

Tableau 3: Q-implications correspondant aux quatre cases d'erreur possibles d'un tableau 2×2 .

	b	b'
a	$a \longrightarrow b' \text{ i.e. } b \longrightarrow a'$	$a \longrightarrow b \text{ i.e. } b' \longrightarrow a'$
a'	$a' \longrightarrow b' \text{ i.e. } b \longrightarrow a$	$a' \longrightarrow b \text{ i.e. } b' \longrightarrow a$

Tableau 4: Exemple "Fractions-1". Opposés des taux de liaison $-t^{ab}$ (indices H).

	b	b'
a	-1.115	0.864
a'	0.345	-0.267

Non symétrie de H .

Comme on le voit dans le tableau 3, les deux q-implications $a \longrightarrow b$ et $b \longrightarrow a$ correspondent respectivement aux cases d'erreur ab' et $a'b$, et ainsi les indices H qui leurs sont associés sont respectivement $H_{ab} = -t^{ab'}$ et $H_{ba} = -t^{a'b}$. En conséquence, l'indice H n'est pas symétrique : en général, on a $H_{ab} \neq H_{ba}$. A partir de (4), on montre que ces deux indices ne sont égaux que dans le cas particulier où $f_a = f_b$ (et donc aussi $f_{a'} = f_{b'}$) :

$$H_{ab} = H_{ba} \quad \text{ssi} \quad f_a = f_b \quad (9)$$

Par contre ces deux indices sont nécessairement de même signe, le signe de ϕ . Plus précisément, on peut facilement déduire de (4) les inégalités du tableau 5.

Tableau 5: Inégalités entre H_{ab} et H_{ba} selon le signe de ϕ et le sens de l'écart entre f_a et f_b .

	$f_a > f_b$	$f_b > f_a$
$\phi > 0$	$H_{ba} > H_{ab} > 0$	$H_{ab} > H_{ba} > 0$
$\phi < 0$	$H_{ba} < H_{ab} < 0$	$H_{ab} < H_{ba} < 0$

De plus, l'équation (5), qui exprime ϕ comme la moyenne géométrique de deux indices H , implique en particulier que le coefficient ϕ est nécessairement intermédiaire entre H_{ab} et H_{ba} . Ceci permet de bien comprendre le caractère local de l'indice H : un indice ϕ positif témoigne d'une liaison positive entre A et B mais ne permet pas de distinguer le cas où H_{ab} et H_{ba} sont proches, du cas où l'un est élevé et l'autre petit.

3.3. Relations orientées de degré h : relations \xrightarrow{h} , \xleftarrow{h} et \perp

Quasi-implication de degré h .

L'énoncé $H_{ab} > 0$ indique un écart à l'indépendance allant dans la direction de l'implication $a \implies b$, mais, comme on l'a dit, est insuffisant pour conclure à une quasi-implication. Pour répondre à cet objectif, introduisons une valeur-repère h ($0 \leq h \leq 1$)

pour H_{ab} ; lorsque H_{ab} est supérieur à h , on parlera de *quasi-implication de degré h* , ce qu'on notera :

$$a \xrightarrow{h} b \text{ ssi } H_{ab} \geq h$$

C'est pour les valeurs-repères h les plus élevées que le qualificatif "quasi" prend son sens le plus fort. Le cas extrême est celui de l'implication stricte obtenu pour $h = 1$: $(a \xrightarrow{1} b) \iff (a \implies b)$.

Pour $h = 0$, la relation $\xrightarrow{0}$ est symétrique, puisque H_{ab} et H_{ba} sont toujours de même signe. Pour toute valeur $h > 0$, par contre, la relation \xrightarrow{h} ne l'est pas.

Quasi-équivalence de degré h .

On parlera de *quasi-équivalence (ou q-équivalence) de degré h* , $a \xleftrightarrow{h} b$, lorsque les deux q-implications réciproques sont vérifiées au même degré :

$$a \xleftrightarrow{h} b \text{ ssi } a \xrightarrow{h} b \text{ et } b \xrightarrow{h} a$$

A nouveau le cas extrême $h = 1$ correspond à l'équivalence stricte : $(a \xleftrightarrow{1} b) \iff (a \iff b)$. Cette relation est évidemment symétrique.

Quasi-indépendance de degré h .

Lorsqu'aucune q-implication de degré h ne peut être déclarée (pour aucun couple de modalités de $A \times B$), la conclusion est celle d'une *quasi-indépendance (ou q-indépendance) de degré h* entre les variables A et B , $A \overset{h}{\perp} B$; cette relation symétrique est définie par :

$$A \overset{h}{\perp} B \text{ ssi } \forall (a, b) \in A \times B, \quad H_{ab} < h \quad (10)$$

Puisque la valeur-repère h est positive, la condition $H_{ab} < h$ est toujours automatiquement vérifiée pour les indices H_{ab} négatifs d'un tableau 2×2 ; la contrainte exprimée par cette définition porte donc en fait sur les deux indices H du tableau qui sont positifs⁹.

A l'opposé des deux relations précédentes, c'est pour les valeurs de h les plus faibles que le qualificatif "quasi" prend son sens le plus fort. Nous étendrons cette définition pour $h = 0$ en incluant le cas d'égalité ($H_{ab} = h = 0$), de façon à ce que le cas extrême de q-indépendance, corresponde à l'indépendance stricte : $(A \overset{0}{\perp} B) \iff (A \perp\!\!\!\perp B)$.

Relations de degré h et indice ϕ .

Les relations \xleftrightarrow{h} et $\overset{h}{\perp}$ sont symétriques. Par ailleurs, sur la base de l'indice ϕ , on peut définir les notions symétriques de "liaison notable entre a et b " et de "liaison négligeable entre A et B ". Quel lien existe-t-il entre ces deux sortes de conclusions symétriques ?

⁹Soulignons que les trois types de conclusions qui viennent d'être définies ($a \xrightarrow{h} b$, $a \xleftrightarrow{h} b$ et $A \overset{h}{\perp} B$) s'obtiennent sur la seule base des deux indices H positifs d'un tableau.

L'équation (5) qui relie le ϕ^2 aux taux de liaison fournit la réponse à cette question puisqu'on en déduit que :

$$\begin{aligned} a \xleftrightarrow{h} b &\implies \phi \geq h \\ A \perp^h B &\implies |\phi| < h. \end{aligned} \quad (11)$$

Par contre les assertions réciproques ne sont pas vraies. Considérons par exemple le cas $\phi > 0$; l'énoncé $\phi \geq h$ entraîne seulement qu'une des q-implications \xrightarrow{h} entre a et b est vérifiée, mais non nécessairement les deux, et l'énoncé $\phi < h$ implique seulement qu'une de celles-ci n'est pas vérifiée. Ceci traduit le fait déjà souligné que, ϕ étant une moyenne géométrique des indices H_{ab} et H_{ba} , sa valeur n'indique pas si ces indices sont proches ou éloignés l'un de l'autre¹⁰. Ainsi, les notions que nous introduisons ici de q-équivalence et de q-indépendance de degré h sont plus fortes que celles, plus usuelles, de liaison notable et de liaison négligeable basées sur le ϕ .

Non transitivité des relations de degré h .

Les relations \xrightarrow{h} et \xleftarrow{h} ne sont pas transitives hors du cas extrême $h = 1$; la relation \perp^h n'est jamais transitive.

3.4. Valeurs-repères h pour H_{ab}

La spécification de valeurs-repères pour l'indice H peut être abordée selon deux optiques. Celles-ci se distinguent par le *point de référence* qu'on y privilégie.

Dans la première optique, le point de référence privilégié est celui de l'indépendance entre A et B , *i.e.* $H_{ab} = 0$, la problématique étant alors de qualifier l'écart à l'indépendance : écart négligeable si H_{ab} est proche de 0, écart notable dans la direction de $a \implies b$ s'il en est suffisamment éloigné. Cette distinction peut être opérationnalisée par le choix de deux valeurs-repères h_{neg} et h_{not} pour H_{ab} délimitant respectivement les régions "proche de 0" et "suffisamment éloigné de 0". Cette optique est celle qu'on retrouve dans le contexte plus général de l'étude de l'importance des effets (l'indépendance étant assimilable à l'"absence d'effet"). Dans ce contexte, Corroyer & Rouanet (1994) ont discuté la définition de valeurs-repères pour l'indice ϕ . Or les inégalités (11) obligent à choisir pour H_{ab} des valeurs-repères également acceptables pour ϕ . Des valeurs-repères pour H_{ab} cohérentes avec les critères proposés par ces auteurs sont : $h_{neg} = 0.20$ et $h_{not} = 0.40$.

Dans la seconde optique, qui est ici la notre, le point de référence privilégié est celui de l'implication stricte, *i.e.* $H_{ab} = 1$, et la problématique est alors de qualifier l'écart à l'implication : on aura quasi-implication lorsque cet écart est suffisamment petit, c'est-à-dire lorsque H_{ab} est suffisamment proche de 1, et absence de quasi-implication lorsqu'il en sera trop éloigné. Ici aussi on peut opérationnaliser cette distinction par le choix de deux valeurs-repères h_{quasi} et h_{tend} . Relativement à ce choix, les conclusions autorisées seront alors les suivantes :

$$\begin{aligned} H < h_{tend} & \quad \text{absence de q-implication} \\ h_{tend} \leq H < h_{quasi} & \quad \text{tendance à la q-implication} \\ H \geq h_{quasi} & \quad \text{q-implication} \end{aligned} \quad (12)$$

¹⁰Une pratique répandue consiste à quantifier la q-équivalence à partir de l'utilisation conjointe du ϕ et de l'indice H_{ab} seul : on conclut à la q-équivalence lorsque les deux indices sont proches de 1 (voir *e.g.* Bideaud, Lautrey, 1983). Comme on le voit ici, cette procédure n'est pas injustifiée, mais la symétrie de la conclusion cherchée nous fait préférer l'utilisation conjointe de H_{ab} et de H_{ba} .

Il est raisonnable de requérir que la conclusion de q-implication (H_{ab} suffisamment proche de 1) nécessite d'avoir au minimum aussi l'énoncé " H_{ab} suffisamment éloigné de 0". De même la conclusion d'"écart négligeable" de la première optique doit être plus forte que celle d'"absence d'implication" de la seconde. Ces remarques conduisent aux contraintes $h_{quasi} \geq h_{not}$ et $h_{tend} \geq h_{neg}$ et nous conduisent à suggérer les valeurs-repères suivantes :

$$\begin{aligned} h_{tend} &= 0.40 \\ h_{quasi} &= 0.60 \end{aligned} \tag{13}$$

Ces valeurs-repères sont, comme les précédentes, données à titre indicatif (en particulier rien n'impose que h_{tend} soit égal à h_{not} comme nous en avons fait le choix ici) ; on pourra, dans tel contexte particulier, choisir d'autres valeurs-repères jugées plus pertinentes, à condition bien-entendu de respecter la contrainte : $0 < h_{tend} < h_{quasi} < 1$.

Alternativement, pour ne pas créer de frontière nécessairement en partie arbitraire, et pour avoir davantage de finesse dans les conclusions, on pourra aussi se référer à une grille de valeurs-repères, par exemple : 0.20, 0.40, 0.60, 0.80. Cette stratégie présente aussi l'avantage de ne pas avoir à privilégier *a priori* une optique particulière ; ce seront alors les données qui, par leur proximité à un des deux points de référence, feront pencher pour l'une ou pour l'autre.

3.5. Carte descriptive des relations de q-implication

L'analyse implicative globale d'un tableau 2×2 consiste à étudier dans leur ensemble toutes les implications possibles entre modalités ; cette analyse globale est donc fondée sur l'examen conjoint des quatre indices H associés au tableau. On ne commente en termes d'implication que les cases correspondant à des indices H positifs ; si la liaison est positive ($\phi > 0$), il s'agit des cases ab' et $a'b$; si elle est négative ($\phi < 0$), il s'agit des cases ab et $a'b'$.

Une manière synthétique de présenter la structure implicative observée consiste à situer les données sur la *carte descriptive* qui représente l'ensemble des valeurs conjointes possibles des indices H d'un tableau 2×2 (figure 1). Dans cette figure, l'axe vertical indique la qualité et le degré de la liaison de la modalité a vers la variable B , l'axe horizontal ceux de la liaison de a' vers B . Le quart supérieur gauche de la figure correspond au cas $\phi > 0$; les ordonnées donnent la valeur de H_{ab} et les abscisses celle de $H_{a'b'}$; le point extrême, en haut à gauche, correspond à l'équivalence stricte $a \iff b$ et les deux segments qui en sont issus aux implications strictes $a \implies b$ (segment horizontal) et $a' \implies b'$ (segment vertical). Le quart inférieur droit de la figure se lit de façon similaire mais concerne le cas $\phi < 0$. avec en ordonnées la valeur de $H_{a'b}$ et en abscisses celle de $H_{ab'}$; ici le point extrême, en bas à droite, correspond à $a \iff b'$ et les deux segments qui en sont issus à $a \implies b'$ (segment horizontal) et à $a' \implies b$ (segment vertical).

Pour chacune des deux parties de la figure, l'origine des graduations est le point central qui correspond au cas d'indépendance stricte $A \perp\!\!\!\perp B$. Autour de ce point, on trouve les deux zones (selon que $\phi > 0$ ou que $\phi < 0$) où on peut conclure à la q-indépendance. Les autres régions intérieures de cette figure correspondent aux cas de q-implications ou de q-équivalences à divers degrés. Sur cette carte, on a fait figurer le point observé pour les données "Fractions-1" : situé dans le quart supérieur gauche aux coordonnées $H_{ab} = 0.864$ et $H_{a'b'} = 0.345$.

Cette représentation permet de bien comprendre l'avantage de l'approche adoptée dans cet article : on dépasse la distinction usuelle entre "proche de l'indépendance", "liaison positive" et "liaison négative", en proposant une distinction plus fine qui identifie

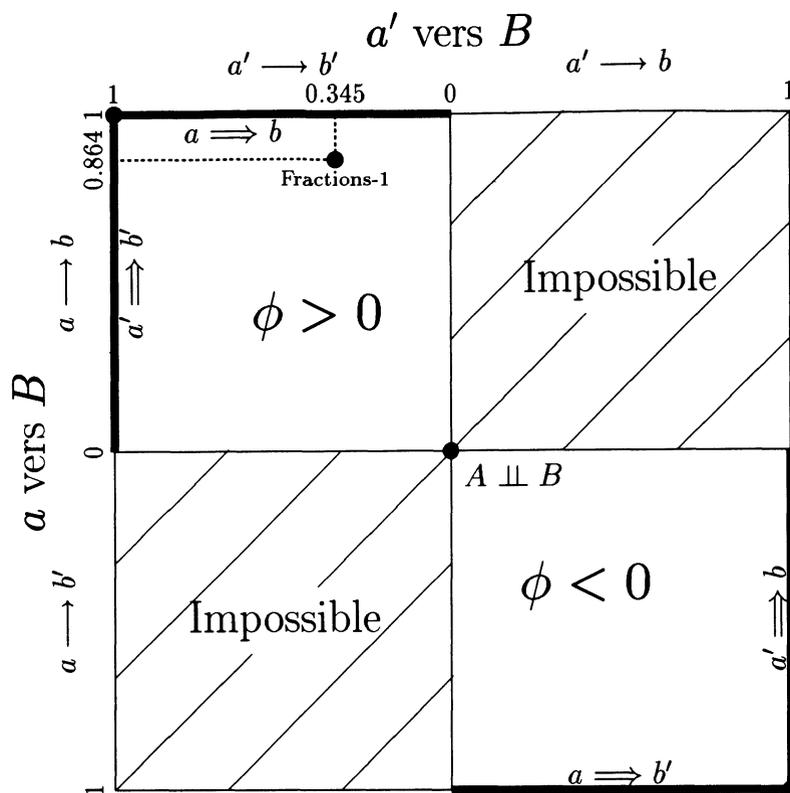


Figure 1: Carte descriptive des structures implicatives possibles pour un tableau 2×2 . L'axe vertical représente l'indice H_{ab} (en haut) ou l'indice $H_{ab'}$ (en bas), l'axe horizontal l'indice $H_{a'b'}$ (à gauche) ou l'indice $H_{a'b}$ (à droite). Aux données de l'exemple "Fractions-1" est associé, au plan descriptif, le point de coordonnées $H_{a'b'} = 0.345$ et $H_{ab} = 0.864$.

clairement les diverses façons de s'écarter de l'indépendance. De plus, cette représentation s'avèrera particulièrement utile, (i) pour comparer descriptivement plusieurs ensembles de données, et (ii) pour analyser inductivement un tableau 2×2 comme nous le verrons par la suite.

3.6. Conclusions possibles pour deux variables binaires homologues

Sur le plan formel, les relations $a \iff b$ et $a \iff b'$ n'ont pas un statut différent. Mais lorsque les variables sont homologues, leur interprétation respective est fort différente. Dans le cas de la première, il y a équivalence entre les deux épreuves A et B : on réussit à A si on réussit à B , on échoue à A si on échoue à B . Dans le cas de la seconde, les épreuves A et B sont en relation de *disjonction* (ou d'*exclusion réciproque*) : réussir à l'une implique échouer à l'autre. Ainsi pour deux variables homologues, nous adopterons des termes spécifiques pour qualifier les implications et les équivalences lorsqu'elles relient la réussite à une épreuve à l'échec à l'autre :

$$\begin{array}{lll}
 a \iff b' & \text{i.e. } b \iff a' & \text{disjonction} \\
 a \implies b' & \text{i.e. } b \implies a' & \text{exclusion négative} \\
 a' \implies b & \text{i.e. } b' \implies a & \text{exclusion positive}
 \end{array}$$

La relation $a \implies b'$ est équivalente à $b \implies a'$ (par contraposition), et signifie ainsi que la réussite à une des épreuves implique l'échec à l'autre, ou autrement dit qu'il est impossible de réussir aux deux épreuves à la fois, d'où le qualificatif de "négative" pour cette exclusion. De même l'exclusion "positive" correspond au cas où il est impossible d'échouer aux deux épreuves. Bien entendu, ce qui précède s'étend aux q-implications

et aux q-équivalences correspondantes et nous parlerons ainsi de *q-disjonction* et de *q-exclusion positive* ou *négative*.

Les tableaux 6a et 6b font la synthèse des relations possibles entre deux variables homologues. Outre les distinctions qui viennent d'être introduites, ces conclusions sont relatives aux choix de deux valeurs-repères, h_{tend} et h_{quasi} , qui, conformément à (12), servent de bornes pour conclure à une "tendance à la q-implication" ou à une "q-implication"¹¹.

Tableau 6: Relations possibles entre deux variables homologues A et B et interprétation statistique correspondante : (a) cas d'une liaison positive ($\phi > 0$), (b) cas d'une liaison négative ($\phi < 0$). Les qualificatifs "quasi" sont sous-entendus.

(a)	$H_{a'b'} \geq h_{quasi}$	$h_{tend} \leq H_{a'b'} < h_{quasi}$	$H_{a'b'} < h_{tend}$
$H_{ab} \geq h_{quasi}$	Equivalence	Implication $a \longrightarrow b$ avec tendance à l'équivalence	Implication $a \longrightarrow b$
$h_{tend} \leq H_{ab} < h_{quasi}$	Implication $b \longrightarrow a$ avec tendance à l'équivalence	Tendance à l'équi- valence	Tendance à l'impli- cation $a \longrightarrow b$
$H_{ab} < h_{tend}$	Implication $b \longrightarrow a$	Tendance à l'impli- cation $b \longrightarrow a$	Absence de ten- dance implicative
(b)	$H_{a'b} \geq h_{quasi}$	$h_{tend} \leq H_{a'b} < h_{quasi}$	$H_{a'b} < h_{tend}$
$H_{ab'} \geq h_{quasi}$	Disjonction	Exclusion négative avec tendance à la disjonction	Exclusion négative
$h_{tend} \leq H_{ab'} < h_{quasi}$	Exclusion positive avec tendance à la disjonction	Tendance à la dis- jonction	Tendance à l'exclu- sion négative
$H_{ab'} < h_{tend}$	Exclusion positive	Tendance à l'exclu- sion positive	Absence de ten- dance implicative

Remarque : Dans le tableau 6 les relations de q-équivalence, de q-disjonction, de q-exclusion et d'absence de tendance implicative portent sur les *variables* A et B et sont toutes symétriques : on peut parler par exemple de "q-disjonction entre A et B ".

3.7. Autres indices reliés à H

3.7.1. Indices κ ("Kappa") et "Del"

L'indice κ ("Kappa") introduit par Cohen (1960) peut également être envisagé pour mesurer le degré de quasi-équivalence dans un tableau 2×2 . Le modèle logique d'équivalence $a \iff b$ correspond à la conjonction des implications $a \implies b$ et $b \implies a$. L'indice κ peut en fait s'exprimer comme *moyenne pondérée* des indices H associés à ces deux implications. La notion de q-équivalence de degré h ($\overset{h}{\iff}$) définie précédemment

¹¹Si on privilégiait le point de vue de l'importance de l'écart à l'indépendance, en adoptant deux valeurs-repères h_{neg} et h_{not} , on aurait un tableau analogue mais avec d'autres conclusions : "écart notable à $A \perp\!\!\!\perp B$ vers $a \implies b$ ", "... vers $a \iff b$ ", etc., "écart négligeable à $A \perp\!\!\!\perp B$ (i.e. q-indépendance $A \perp B$)".

comprend, quant à elle, une condition sur le *minimum* de ces deux indices H et est donc plus forte que celle qu'on pourrait définir avec κ .

Nous reviendrons sur ce point dans Bernard & Charron (sous presse); nous y considérerons en effet l'indice "*Del*" proposé par Hildebrand *et al.* (1977) pour la mesure du degré d'adéquation de données catégorisées bivariées à un modèle logique caractérisé par *une ou plusieurs* cases d'erreur; les indices H et κ sont des cas particuliers de cet indice général.

3.7.2. Indice *RIOC*

L'indice *RIOC* ("Risk Improvement Over Chance") a été proposé pour mesurer l'efficacité prédictive d'une variable prédictrice sur une variable à prédire (Copas & Loeber, 1990; Loeber & Dishion, 1983). Cet indice peut en fait s'exprimer comme le maximum des deux indices H d'un tableau 2×2 qui sont positifs lorsque la liaison est positive : $RIOC = \max(H_{ab}, H_{ba})$. Du fait des inégalités du tableau 5, l'indice *RIOC* n'est autre que l'indice symétrique de Loevinger évoqué à la note 8 p. 11.

4. ANALYSE INDUCTIVE DES IMPLICATIONS

Nous abordons maintenant le problème de la généralisation à une population des conclusions obtenues lors de l'étape descriptive. Avant d'envisager spécifiquement l'analyse implicative d'un tableau 2×2 , nous rappellerons certains points concernant l'inférence pour des données catégorisées en général.

4.1. Le problème de l'inférence pour des données catégorisées

Un ensemble de données catégorisées est constitué de n observations à valeur dans un ensemble de K catégories, d'où une composition observée en effectifs $n_K = (n_k)_{k=1\dots K}$. (Pour un tableau 2×2 , il y a $K = 4$ catégories obtenues par le croisement de deux ensembles A_2 et B_2 .)

L'étape descriptive aboutit à une conclusion descriptive, obtenue sur la base des fréquences observées $f_K = n_K/n$. Cette conclusion, quelle qu'elle soit, peut toujours s'exprimer par le fait que les fréquences f_K possèdent une certaine *propriété d'intérêt* \mathcal{P} , ce que nous noterons $\mathcal{P}(f_K)$.

On considérera que les observations résultent du tirage d'un échantillon aléatoire de taille n dans une population caractérisée par les *fréquences parentes* (ou *paramètres*) $\varphi_K = (\varphi_k)_{k=1\dots K}$. Ceci définit un modèle d'échantillonnage multinomial pour la variable F_K , dont la valeur observée est f_K :

$$F_K \sim Mn(n, \varphi_K) \tag{14}$$

Les fréquences parentes φ_K sont inconnues, mais les fréquences observées f_K en sont le reflet, reflet d'autant plus fidèle que la taille n est élevée. Le problème de l'inférence statistique consiste à formuler une conclusion sur les fréquences parentes φ_K ou certains paramètres qui en sont dérivés, au vu des données observées. Plus précisément, nous formulerons ce problème en nous demandant dans quelle mesure la propriété d'intérêt \mathcal{P} peut être étendue à la population, c'est-à-dire aux φ_K . Autrement dit, ayant observé $\mathcal{P}(f_K)$, peut-on dire que $\mathcal{P}(\varphi_K)$?

Pour répondre au problème de l'inférence deux approches sont envisageables : l'approche fréquentiste et l'approche bayésienne.

4.2. L'inférence fréquentiste

L'approche fréquentiste (tests d'hypothèses, intervalles de confiance) est à notre connaissance la seule voie explorée jusqu'à présent pour le problème qui nous concerne ici. Mais cette approche présente des difficultés qui la rendent discutable dans certains cas. Ces difficultés ont avant tout un caractère général, d'où la nécessité d'un rapide survol des principes généraux de l'inférence fréquentiste, mais nous verrons qu'elles interviennent de façon accrue dans le contexte spécifique de cet article.

4.2.1. Principes généraux de l'inférence fréquentiste

Nous ne considérerons ici que le cas où la propriété d'intérêt \mathcal{P} concerne un seul paramètre dérivé numérique $\sigma = g(\varphi_K)$, où g désigne une fonction quelconque à valeurs réelles.

La procédure de base de l'approche fréquentiste, le test d'hypothèse, a pour but de tester une hypothèse particulière sur σ , $\mathcal{H}_0 : \sigma = \sigma_0$. Le principe du test consiste à situer la valeur observée $s = g(f_K)$ par rapport à la distribution d'échantillonnage de $S = g(F_K)$, déduite de celle de F_K , sous l'hypothèse \mathcal{H}_0 . On aboutit à une conclusion, soit de compatibilité, soit d'incompatibilité, des données avec \mathcal{H}_0 (cf. *e.g.* Rouanet, Bernard, Le Roux, 1990).

L'autre procédure fréquentiste usuelle consiste, en procédant au test de toutes les hypothèses possibles sur σ , à déterminer un intervalle de confiance pour σ , c'est-à-dire l'ensemble IC des valeurs de σ compatibles avec les données observées.

4.2.2. Les difficultés de l'inférence fréquentiste et leurs solutions

Pour le test d'une hypothèse ponctuelle \mathcal{H}_0 , une difficulté majeure que rencontre l'inférence fréquentiste est que, hors des situations élémentaires, la distribution d'échantillonnage de $S = g(F_K)$ n'est pas complètement spécifiée par \mathcal{H}_0 et dépend encore de *paramètres parasites* : au lieu de l'unique distribution d'échantillonnage requise, on a en fait un ensemble de distributions d'échantillonnage selon les valeurs possibles des paramètres parasites. De ce fait le test d'hypothèse tel que nous l'avons décrit ne peut être pratiqué. Les deux solutions usuelles pour contourner cet obstacle sont celle des tests conditionnels et celle des tests asymptotiques.

La solution des *tests conditionnels* consiste à introduire des contraintes sur les paramètres φ_K (en plus de celle exprimée par l'hypothèse \mathcal{H}_0) et/ou sur les données observables. Un exemple typique de cette approche est celui où, pour l'analyse d'un tableau de contingence, on compare les données observées aux seules données observables ayant mêmes marges que le tableau observé. Ce faisant, on se débarrasse des paramètres parasites, mais au prix de contraintes ad hoc et donc quelque peu arbitraires.

La solution des *tests asymptotiques* découle du fait que, pour une vaste classe de fonctions g , lorsque n tend vers l'infini, la distribution d'échantillonnage de $S = g(F_K)$ ne dépend plus des paramètres parasites. A ce résultat, on adjoint souvent celui de la normalité asymptotique de cette distribution, d'où les tests approchés asymptotiques (*e.g.* le test d'indépendance usuel du Khi-2). Les paramètres parasites ont disparu mais, en contrepartie, ces tests ne sont valides que pour les échantillons de taille suffisamment grande et pour des valeurs de σ_0 non trop proches des bornes du paramètre σ .

La construction de l'intervalle de confiance nécessite (au moins conceptuellement) le recours à un ensemble de tests et les difficultés précédentes se transfèrent ainsi à cette procédure. Elles se trouvent même parfois renforcées du fait que telle solution pour le test d'une hypothèse donnée peut ne plus convenir pour le test d'une autre.

4.2.3. Inférence fréquentiste sur l'indice H

Nous avons introduit à la section 3 l'indice de Loevinger H , indice numérique dont la valeur observée $g(f_K)$ est l'estimation du paramètre dérivé parent correspondant $g(\varphi_K)$, que nous noterons η . Plusieurs auteurs ont proposés des tests ou des intervalles de confiance pour η en ayant recours à un des deux types de solutions précédents : "approche conditionnelle" pour Copas & Loeber (1990), Gras & Larher (1993) et Lerman, Gras & Rostam (1981) ; "approche asymptotique" pour Copas & Loeber (1990), Hildebrand *et al.* (1977), Fleiss (1981). Nijssse (1992) fait la comparaison de plusieurs de ces solutions¹².

La méthode proposée par Gras & Larher (1993) et Lerman, Gras & Rostam (1981), dans le cadre de l'approche conditionnelle¹³, permet seulement de tester, l'hypothèse $\eta = 0$ et par extension l'hypothèse $\eta \leq 0$, ce qui, du fait que $\eta_{ab} \leq 0 \iff \eta_{ba} \leq 0$, revient en fait à tester l'hypothèse $\phi \leq 0$. Cette approche privilégie ainsi le point de référence que constitue l'indépendance $A \perp\!\!\!\perp B$ et non celui de l'implication stricte.

Par la suite, nous nous intéresserons uniquement aux procédures proposées par les auteurs cités qui conduisent à des limites et des intervalles de confiance pour η , notions qui ne font pas jouer à l'hypothèse d'indépendance de rôle de référence privilégiée.

Intervalles de confiances pour l'indice η .

Copas & Loeber (1990, équation (11)) donnent comme approximation asymptotique de la variance de la distribution d'échantillonnage de H_{ab} la formule suivante :

$$Var_{CL1}(H_{ab}) \approx \frac{f_{ab'}}{n(f_a f_{b'})^3} [f_{ab'}(f_{ab'} f_{a'b} - f_{ab} f_{a'b'}) + f_{ab} f_{a'b'}] \quad (15)$$

A peu de choses près, c'est également la formule qu'on peut déduire de celle proposée par Hildebrand *et al.* (1977, équation (7) p. 200) pour l'indice δ :

$$Var_H(H_{ab}) = Var_{CL1}(H_{ab}) \times \frac{n}{n-1} \quad (16)$$

Fleiss (1981, p. 76) fournit une formule concurrente basée sur l'approximation de la distribution d'échantillonnage de $\log(1 - H_{ab})$:

$$Var_F(\log(1 - H_{ab})) \approx \frac{f_{a'b} + H_{ab}(f_{ab} + f_{a'b'})}{n f_{ab'}} \quad (17)$$

Chacune des formules précédentes conduit à un intervalle de confiance approché pour η_{ab} . En effet, étant donnée une statistique S estimant un paramètre σ , dont la valeur

¹²Les résultats de Copas & Loeber (1990) et de Nijssse (1992) sont présentés comme portant sur l'indice *RIOC* indice défini comme maximum de deux indices de Loevinger (cf. section 3.7.2) ; mais, en toute rigueur, ils portent en fait seulement sur l'indice de Loevinger lui-même.

¹³Ces auteurs proposent en fait plusieurs méthodes correspondant à divers modèles d'échantillonnage, dont une pour le modèle multinomial.

observée est s , et dont la variance d'échantillonnage est $Var(S)$, un intervalle de confiance approché (approximation normale) pour σ à la garantie γ est donné par :

$$IC = s \pm z_{(1-\gamma)} \sqrt{Var(S)} , \quad (18)$$

où $z_{(1-\gamma)}$ est la valeur critique bilatérale de la distribution normale réduite au seuil $(1-\gamma)$ (par exemple pour $\gamma = 0.95$, on a $z_{0.05} = 1.96$). Nous noterons IC_{CL1} , IC_H et IC_F les intervalles de confiance déduits respectivement des formules (15), (16) et (17). Ces trois intervalles approchés ont été proposés pour le cas où n est suffisamment grand¹⁴.

Pour le cas où n est petit, Copas & Loeber (1990, équation (22)) proposent un autre intervalle de confiance approché, que nous noterons IC_{CL2} , obtenu dans le cadre de l'approche conditionnelle, dont nous ne détaillerons pas le calcul ici.

Appliquons ces diverses formules à l'exemple "Fractions-1" pour l'étude de la q-implication $a \longrightarrow b$ pour laquelle nous avons trouvé descriptivement $H_{ab} = 0.864$ avec $n = 165$. En prenant comme garantie $\gamma = 0.95$, on obtient les intervalles de confiance pour η_{ab} suivants :

$$\begin{aligned} IC_{CL1} &= [0.719; 1.008] \\ IC_H &= [0.718; 1.009] \\ IC_F &= [0.606; 0.953] \\ IC_{CL2} &= [0.651; 0.941] \end{aligned} \quad (19)$$

On constate que les divers intervalles de confiance ainsi obtenus sont assez différents les uns des autres. De plus, les intervalles IC_{CL1} et IC_H incluent des valeurs impossibles (> 1) pour η_{ab} ; ceci tient à ce que les conditions d'une bonne approximation ne sont pas remplies : l'indice observé H_{ab} est trop proche de la valeur maximale 1, et n n'est pas suffisamment grand. Cette remarque conduit à écarter ces deux solutions et à privilégier les deux autres, mais il convient de souligner qu'il reste difficile de répondre à la question "Quel est le meilleur intervalle approché?" dans la mesure où chacun fournit une approximation d'un "intervalle idéal" qui, lui-même, *n'existe pas* du fait de l'intervention de paramètres parasites. Pour la même raison la distinction entre n petit et n grand peut difficilement être rendue parfaitement opérationnelle.

Difficultés de l'approche asymptotique pour l'inférence sur η .

Les limitations de l'approche asymptotique que nous avons soulignées en 4.2.2 sont générales; mais, pour l'inférence sur le paramètre dérivé η , elles interviennent de façon plus aiguë. En effet, la question d'intérêt est souvent de montrer qu'on est proche de l'implication stricte, c'est-à-dire proche de la valeur extrême, 1, de η . De ce fait, une des conditions de validité des tests asymptotiques n'est typiquement pas satisfaite. Hildebrand *et al.* (1977, p. 207) résument la situation paradoxale dans laquelle on se trouve avec cette approche : il y a conflit entre l'intérêt scientifique, pour le chercheur, d'observer un indice H proche de 1, et l'intérêt technique d'avoir un indice éloigné de cette valeur limite.

Ceci est particulièrement manifeste dans le cas extrême où $H_{ab} = 1$ (soit $f_{ab'} = 0$), dans lequel les formules (15), (16) et (17) conduisent à des intervalles soit ponctuels soit indéfini. Plusieurs des auteurs cités suggèrent alors d'appliquer les mêmes formules mais en

¹⁴Se placer dans le cas n grand permet, entre autres, de considérer $s = g(f_K)$ comme un estimateur sans biais de $S = g(\varphi_K)$, et ainsi d'éviter la nécessité du choix d'un meilleur estimateur.

ajoutant (et éventuellement soustrayant) $1/2$ à certains des effectifs observés, mais cette suggestion constitue une solution ad hoc qui ne repose sur aucun argument théorique. Le calcul de IC_{CL2} fait également intervenir une solution de ce type.

4.3. Inférence bayésienne pour des données catégorisées

Outre les critiques qui précèdent, il en est une autre plus fondamentale. Les méthodes fréquentistes précédentes fournissent des solutions pour l'inférence sur un paramètre dérivé numérique $\sigma = g(\varphi_K)$, mais non pour le problème général de l'inférence tel que nous l'avons énoncé, c'est-à-dire portant sur une propriété \mathcal{P} quelconque : il peut s'agir d'une propriété complexe, composite, portant simultanément sur plusieurs indices H , comme par exemple lorsqu'il s'agit de montrer qu'une q -implication est de degré élevé mais que sa réciproque est de faible degré, ou bien encore qu'il y a q -indépendance entre deux variables. L'approche bayésienne, par contre, fournit un cadre général pour répondre au problème de l'inférence dans ce sens fort.

Le principe général de l'inférence bayésienne est le suivant : à partir de données recueillies selon un certain modèle d'échantillonnage, et d'une *distribution initiale* sur les paramètres de ce modèle, on déduit une *distribution finale* sur ces mêmes paramètres. Les deux distributions, initiale et finale, expriment de façon probabiliste l'état initial (avant la prise en compte des données) et l'état final (après la prise en compte des données) de connaissance sur les paramètres. La distribution finale porte simultanément sur l'ensemble des paramètres, et s'intéresser à une propriété \mathcal{P} particulière se ramène à la construction de la distribution marginale appropriée. Dans cette approche, l'élimination des paramètres parasites consiste à *moyenner* sur ces paramètres, en respectant la pondération exprimée par la distribution finale globale. L'ouvrage de Jeffreys (1961) et celui plus récent de Bernardo & Smith (1994) fournissent une bonne présentation générale de l'approche bayésienne de l'inférence.

En ce qui concerne les données catégorisées, on consultera Bernard (1986 et 1991) pour une présentation détaillée de cette approche. Nous en rappelons brièvement les grandes lignes. Quand les données sont recueillies selon un modèle d'échantillonnage multinomial, et en choisissant une distribution initiale de Dirichlet $Di(\alpha_K)$, $\alpha_K = (\alpha_k)_{k=1\dots K}$, alors la distribution finale est encore une distribution de Dirichlet $Di(\alpha_K + n_K)$:

$$\varphi_K \sim Di(\alpha_K) \implies \varphi_K | n_K \sim Di(\alpha_K + n_K) \quad (20)$$

La famille des distributions de Dirichlet est privilégiée pour le modèle multinomial du fait qu'elle possède la propriété de *conjugaison* : si l'initiale y appartient, alors il en est de même de la finale. L'inférence bayésienne peut alors être simplement décrite en termes de *forces* sur les K catégories : les *forces initiales* α_K sont actualisées, par l'apport des données n_K , en *forces finales* $\alpha'_K = \alpha_K + n_K$.

Disposant d'une distribution de probabilité finale sur les paramètres φ_K , la réponse bayésienne au problème général de l'inférence consiste simplement à dériver de cette distribution globale, la probabilité de $\mathcal{P}(\varphi_K)$: $Prob(\mathcal{P}(\varphi_K))$; si cette probabilité, on dit aussi *garantie*, est suffisamment élevée, alors la conclusion descriptive $\mathcal{P}(f_K)$ peut être généralisée à la population. Plus précisément, on évalue cette garantie par rapport aux garanties-repères conventionnelles $\gamma = 0.90, 0.95, 0.99, \text{etc.}$.

Lorsque la propriété \mathcal{P} porte plus spécifiquement sur un paramètre dérivé numérique $\sigma = g(\varphi_K)$, on pourra répondre au problème en deux temps : (i) construire la distribution finale marginale sur σ , et (ii) de celle-ci, déduire la probabilité cherchée. Dans ce cas, on

pourra aussi calculer des *limites* (ou des *intervalles*) de *crédibilité* pour σ à une garantie-repère fixée¹⁵ ; ce sont les équivalents bayésiens des limites et intervalles de confiance du cadre fréquentiste.

La mise en application de cette théorie générale d'inférence nécessite de fournir la réponse à deux questions : (i) Comment choisir la distribution initiale sur φ_K ? (ii) Comment, à partir de la distribution finale, dériver la probabilité de la propriété d'intérêt ? Mais ces deux questions sont de natures fort différentes ; la première est d'ordre conceptuel et constitue le seul point de choix de la méthode bayésienne ; la seconde est purement d'ordre technique.

4.3.1. *Choix de la distribution initiale*

Le seul point de choix de l'approche bayésienne est celui de la distribution initiale. Lorsque celle-ci est prise dans la famille des distributions de Dirichlet, ce choix est simplement celui des forces initiales α_K . Si on se place dans une perspective d'analyse des données, les forces initiales doivent être choisies de façon à exprimer un *état initial d'ignorance* sur les paramètres φ_K .

Cette perspective restreint considérablement l'ensemble des choix possibles pour α_K . L'analyse de diverses solutions proposées dans ce cadre conduit à la notion d'une *zone d'ignorance* définie par $\forall k \in \{1 \dots K\}$, $\alpha_k \geq 0$ et $\sum \alpha_k = 1$ (Bernard, 1996 ; Walley, 1996). A partir de là, on peut adopter deux stratégies pour le choix des forces initiales α_K : (i) prendre un point "central" de cette zone d'ignorance et ainsi proposer une *solution standard*, ou (ii) considérer cette zone d'ignorance dans son ensemble et ainsi, pour chaque propriété d'intérêt sur φ_K , calculer non pas une probabilité unique mais un intervalle de probabilités¹⁶. Soulignons que, pour f_K fixé, le choix d'une distribution initiale particulière dans la zone d'ignorance a une influence sur les résultats d'autant plus faible que la taille n des données est grande.

L'un de nous (Bernard, 1996) discute cette question en détail pour $K = 2$ et montre que le choix d'une distribution initiale dans cette zone d'ignorance possède son exacte contrepartie en inférence fréquentiste en tant que sélection de la règle d'arrêt et choix du mode de calcul du seuil observé d'un test, inclusif ou exclusif. Dès lors, si on considère que ce problème constitue une limitation pour l'approche bayésienne, il en constitue également une pour l'approche fréquentiste¹⁷.

Pour les besoins de cet article nous retiendrons la solution standard définie par $\alpha_k = 1/K$ (Bernard 1986 et 1991 ; proposée par Perks, 1947) et nous parlerons de *distribution standard* pour la distribution finale qui découle de ce choix. Il sera néanmoins important de juger de la sensibilité des résultats à ce choix, surtout lorsque l'effectif total n est petit.

¹⁵On aura seulement recours, dans cet article, à des intervalles de crédibilité symétriques, c'est-à-dire ceux pour lesquels les deux régions pour σ extérieures à l'intervalle ont même probabilité.

¹⁶Ces deux alternatives ne sont pas les seules. La solution de Jeffreys (1961) consiste à prendre $\forall k, \alpha_k = 1/2$. L'approche des "reference priors" de Bernardo & Smith (1994) conduirait au choix d'une distribution initiale spécifique pour chaque paramètre dérivé considéré.

¹⁷Ces deux points de choix de l'approche fréquentiste concernent la définition du test exact et sont donc indépendants des difficultés évoquées en 4.2.2.

4.3.2. Méthode de calcul par échantillonnage-MC

Qu'il s'agisse de construire la distribution d'un paramètre dérivé ou d'évaluer la probabilité d'une propriété complexe, l'approche bayésienne se heurte vite à des difficultés techniques. En effet, en dehors des situations élémentaires, le problème ne peut être résolu de façon analytique mais seulement par des moyens numériques. De ce fait l'application pratique des méthodes bayésiennes a longtemps été restreinte aux situations où les calculs étaient envisageables en un temps raisonnable sur les ordinateurs disponibles. Ces limites ont été repoussées par le développement de la puissance des ordinateurs, et encore davantage grâce à l'émergence d'un ensemble de méthodes générales d'approximation telles que : "Gibbs sampling", "sampling-resampling techniques", "weighted bootstrap". Le point commun de ces méthodes est d'approximer la distribution finale globale par un échantillon pseudo-aléatoire de celle-ci ; de cette distribution approchée, on déduit la distribution de tout paramètre dérivé ou la probabilité de toute propriété d'intérêt. Pour plus de détails sur ces méthodes, nous renvoyons le lecteur aux articles de Casella & George (1992) et de Smith & Gelfand (1992) et aux références qui y sont citées.

Pour ce qui nous concerne ici, Bernard (soumis) indique plusieurs méthodes de ce type, applicables à une distribution de Dirichlet. Une des méthodes préconisées repose sur une propriété d'indépendance de la Dirichlet (Bernard, à paraître) ; elle conduit à un algorithme plus efficace que ceux issus des méthodes générales mentionnées ci-avant. Nous désignerons ici cette méthode par le terme d'"échantillonnage-MC" (MC pour "Monte-Carlo").

Pour le contexte spécifique de cet article, l'analyse d'un tableau 2×2 , compte tenu du petit nombre (3) de paramètres impliqués, on pourrait aussi recourir à des méthodes d'intégration numérique, mais ces méthodes deviendraient vite impraticables avec des tableaux de plus grandes dimensions, sujet que nous aborderons dans l'article suivant (Bernard, Charron, sous presse). Au contraire la méthode d'échantillonnage-MC est applicable dans tous les cas et sera ainsi celle que nous privilégions.

La méthode d'échantillonnage-MC est une méthode approchée, mais l'approximation réalisée n'a pas le même statut que les approximations asymptotiques du cadre fréquentiste. La distribution finale sur φ_K et tout énoncé qui en découle sont parfaitement spécifiés par l'équation (20), et le recours à une méthode approchée constitue seulement ici une commodité technique. De plus, il est ici possible d'augmenter la précision de l'approximation en augmentant la taille N de l'échantillon-MC, les seules limites tenant alors à la puissance de calcul et au temps disponibles. La qualité de l'approximation peut être contrôlée par le fait que l'erreur standard sur la garantie approchée d'un énoncé quelconque ne dépasse pas $1/(2\sqrt{N})$. Par la suite, les inférences bayésiennes réalisées ont été obtenues avec des échantillons-MC de taille $N = 10^6$, d'où une erreur standard sur les garanties d'au plus 0.0005. En règle générale, nous recommandons d'utiliser des échantillons-MC de taille minimum $N = 10^4$.

4.4. Inférence bayésienne sur un indice de Loevinger η

Appliquons la méthode d'inférence bayésienne au problème de l'inférence sur un indice η , sur l'exemple les données "Fractions-1" (cf. tableau 1) et l'étude de la q-implication $a \rightarrow b$. La distribution finale standard sur l'ensemble des paramètres φ_{AB} est donnée par :

$$(\varphi_{ab}, \varphi_{ab'}, \varphi_{a'b}, \varphi_{a'b'}) \sim Di(36.25, 3.25, 36.25, 90.25) \quad (21)$$

De cette distribution globale, on déduit celle de η_{ab} par échantillonnage-MC (voir figure 2). On a observé un indice descriptif $H_{ab} = 0.864$, et on constate que cette valeur correspond à peu près au pic de cette distribution. La dispersion de la distribution traduit l'incertitude sur la vraie valeur de η_{ab} . Précisément, la moyenne et l'écart-type de cette distribution sont : $Moy = 0.855$ et $Et\gamma = 0.074$. On remarquera la dissymétrie marquée de cette distribution, due à ce que l'indice observé est proche de 1, valeur maximum pour η_{ab} .

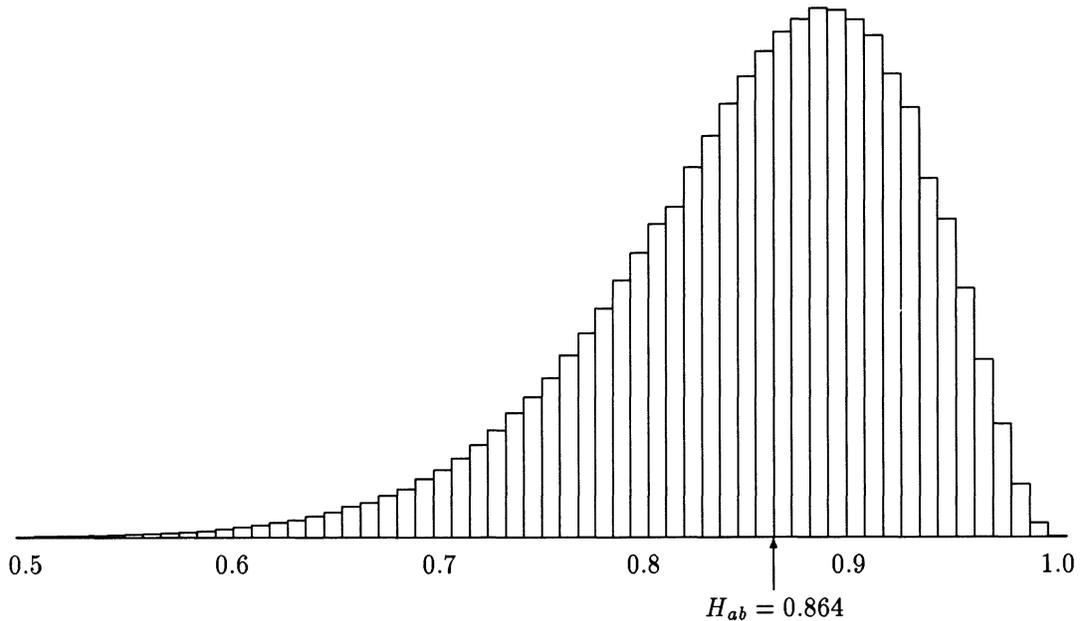


Figure 2: Exemple "Fractions-1". Distribution bayésienne standard de η_{ab} .

L'indice observé H_{ab} présente, entre autres, la propriété $H_{ab} > 0.60$, soit une q-implication observée de degré 0.60 : $a \xrightarrow{0.60} b$. De la distribution finale standard de η_{ab} , on déduit $Prob(\eta_{ab} > 0.60) = 0.996$, c'est-à-dire que la propriété est, pour la population, attestée avec la garantie 0.996 : on peut conclure inductivement à $a \xrightarrow{0.60} b$ à la garantie 0.996. Bien entendu la garantie qu'on peut atteindre est d'autant plus faible que la propriété est forte : l'énoncé $H_{ab} > 0.80$ est également une propriété observée des données mais il ne peut être généralisé qu'avec la trop faible garantie 0.789. En fixant une garantie-repère, e.g. $\gamma = 0.95$, la limite inférieure de crédibilité vaut 0.717 : $Prob(\eta_{ab} > 0.717) = 0.95$.

Pour offrir un élément de comparaison avec les méthodes fréquentistes décrites en 4.2.3, calculons l'intervalle de crédibilité standard, noté ICR , pour η_{ab} à la garantie 0.95 :

$$ICR = [0.682; 0.965] \quad (22)$$

L'ordre de grandeur de ces limites bayésiennes est le même que celui des limites de confiance correspondantes de (19). Contrairement à certains intervalles de confiance trouvés, l'intervalle bayésien ne couvre que des valeurs possibles pour η_{ab} ; ceci est un trait général de l'approche bayésienne proposée et se produirait aussi pour une taille n plus petite, ou pour une valeur observée de l'indice plus proche de la valeur limite 1.

Pour juger de la sensibilité des résultats bayésiens au choix de la distribution initiale dans la zone d'ignorance définie en 4.3.1, on peut calculer l'intervalle de crédibilité pour chaque vecteur de forces initiales α_{AB} pris dans cette zone. Les deux intervalles les plus extrêmes¹⁸ à la garantie 0.95 sont : $[0.643; 0.948]$ et $[0.700; 0.971]$. Ainsi, dans tous les cas,

¹⁸Ceux-ci sont respectivement obtenus, dans ce cas, pour les forces initiales $\alpha_{AB} = (0, 1, 0, 0)$ et $\alpha_{AB} = (1, 0, 0, 0)$.

on peut conclure que $Prob(\eta_{ab} > 0.643) > 0.975$ et donc à une q-implication de degré élevé ($h_{quasi} = 0.60$) avec une garantie importante.

Remarque : La dispersion de la distribution finale sur η_{ab} est d'autant plus faible que l'effectif n est élevé. Plus précisément, ce sont les effectifs marginaux de la case ab' (case d'erreur associée à $a \implies b$) qui jouent un rôle déterminant dans cette dispersion, et particulièrement le plus petit de ces effectifs : la dispersion sera d'autant plus forte que $Min(n_a, n_{b'})$ est faible. C'est également lorsqu'un de ces effectifs est petit que l'influence de la distribution initiale est la plus forte.

Cas d'une implication stricte $a \implies b$ descriptivement vérifiée.

Le cas extrême où l'on aurait $H_{ab} = 1$, soit $f_{ab'} = 0$, est particulièrement instructif sur l'apport de l'approche bayésienne. C'est en effet, comme nous l'avons vu, le cas le plus délicat pour l'approche fréquentiste asymptotique. On considérera ici que l'absence d'observations dans la case ab' ne découle pas d'une contrainte structurelle connue *a priori*¹⁹.

Considérons l'exemple des données "Fractions-1" mais en remplaçant $n_{ab'}$ par 0, de sorte que les effectifs observés sur $A \times B$ sont maintenant : 36, 0, 36, 90. L'inférence bayésienne standard conduit alors à l'intervalle de crédibilité sur η_{ab} , $ICR = [0.917, 1.000]$ à la garantie 0.95, soit en particulier une conclusion inductive de q-implication $a \xrightarrow{0.917} b$ à la garantie 0.975. Du fait qu'ici les effectifs marginaux $n_a = 36$ et $n_{b'} = 90$ sont relativement élevés, la distribution standard est assez concentrée au voisinage de la valeur 1. En faisant varier la distribution initiale dans la zone d'ignorance, les intervalles de crédibilité extrêmes pour η_{ab} à la garantie 0.95 sont $[0.829, 0.999]$ et $[1, 1]$ (cet intervalle ponctuel est obtenu avec des forces initiales qui expriment que le 0 est structurel, cf. note 19, p. 26) ; ainsi, dans tous les cas, on peut au moins conclure que : $Prob(\eta_{ab} > 0.829) > 0.975$.

4.5. Inférence sur la structure implicative dans un tableau 2×2

L'étude inductive de la structure implicative dans un tableau $A_2 \times B_2$ consiste à énoncer une conclusion conjointe sur deux indices de Loevinger parents : η_{ab} et $\eta_{a'b'}$ si la liaison entre A et B est positive, $\eta_{ab'}$ et $\eta_{a'b}$ si elle est négative. Mais, bien entendu, le sens de la liaison entre A et B observé sur l'échantillon ne correspond pas nécessairement au sens de cette liaison dans la population ; s'il y a incertitude sur la grandeur des indices η , il y a également incertitude sur leur signe.

Pour répondre à ce problème, considérons à nouveau la carte des structures implicatives possibles pour un tableau 2×2 (cf. figure 1 p. 16). Un tableau 2×2 observé correspond à un point observé sur cette carte. Mais, au niveau inductif, chaque point correspond à une possibilité de structure implicative pour le tableau 2×2 parent. Lorsqu'on munit cette carte d'une grille de valeurs-repères, au niveau descriptif le tableau observé "tombe" dans une case déterminée, alors que, au niveau inductif, à chaque case est associée une certaine probabilité de contenir le tableau parent. La figure 3a donne une telle carte inductive, pour les données "Fractions-1" et les valeurs-repères 0.20, 0.40, 0.60, 0.80. Pour mieux visualiser la densité de probabilité, on peut représenter les probabilités par la surface de

¹⁹ Dans le cas d'un 0 structurel dans la case ab' , il est possible d'exprimer la contrainte structurelle à l'aide de la distribution initiale : on choisit une force initiale $\alpha_{ab'} = 0$ sur la catégorie impossible et l'inférence bayésienne conduit alors à un énoncé certain sur η_{ab} , $\eta_{ab} = 1$. Le résultat est bien sûr attendu, mais il permet de voir comment l'approche bayésienne permet le cas échéant d'intégrer des informations *a priori* via la distribution initiale.

disques comme à la figure 3b ; cette dernière est construite avec des valeurs-repères variant de 0.10 en 0.10.

C'est la case correspondant à la structure observée qui a la plus grande probabilité (0.633). Ceci est généralement vrai, à condition de choisir, comme ici, des valeurs-repères équi-espacées. Si on veut condenser cette carte inductive par un énoncé plus compact, on procède en choisissant deux valeurs-repères particulières h_{tend} et h_{quasi} , et on pourra calculer la garantie à accorder à une des conclusions possibles du tableau 6. Pour $h_{tend} = 0.20$ et $h_{quasi} = 0.60$, la propriété de "q-implication de a vers b avec tendance à la q-équivalence" peut être attestée à une garantie élevée, 0.994 ($= 0.155 + 0.015 + 0.633 + 0.190$) (cf. figure 3a).

4.6. Inférer sur la q-équivalence et la q-indépendance dans un tableau 2×2

A partir d'une telle carte inductive, il est possible de déterminer la garantie à accorder à une conclusion de q-équivalence entre a et b de degré h ($a \xrightarrow{h} b$) ou à celle de q-indépendance entre A et B de degré h ($A \perp^h B$).

Mais, alternativement, on peut aussi remarquer que chacune de ces conclusions correspond à une propriété relative à un paramètre numérique spécifique dérivé des φ_{AB} . La propriété $a \xrightarrow{h} b$ peut s'écrire $Min(\eta_{ab}, \eta_{ba}) > h$, et l'étudier revient donc à inférer sur le paramètre dérivé $\sigma_1 = Min(\eta_{ab}, \eta_{ba})$. De même, l'étude de la propriété $A \perp^h B$ se ramène à l'inférence sur le paramètre dérivé $\sigma_2 = Max(\eta_{ab}, \eta_{ab'}, \eta_{a'b}, \eta_{a'b'})$.

Nous donnerons ici l'exemple de la recherche d'une conclusion de q-indépendance sur un autre exemple "Fractions-2", qui correspond à deux autres épreuves du dossier "Fractions" (épreuves $A = OFPT$ et $B = QCPP$, cf. section 5). Les effectifs observés sont donnés dans le tableau 7 ainsi que les indices de Loevinger associés à chaque case.

Tableau 7: Exemple "Fractions-2". Effectifs observés n_{ab} et opposés des taux de liaison $-t^{ab}$ (indices de Loevinger associés à chaque case d'erreur) pour les épreuves $A = OFPT$ et $B = QCPP$.

n_{ab}	b	b'
a	58	31
a'	51	25

$-t^{ab}$	b	b'
a	0.014	-0.026
a'	-0.016	0.031

Pour ces données on a, par exemple, la propriété descriptive de q-indépendance au degré $h = 0.20$, soit : $A \perp^{0.20} B$. Puisque l'indice H observé maximum vaut 0.031, la propriété de q-indépendance est en fait vérifiée descriptivement pour tout degré $h > 0.031$.

La carte inductive de la structure implicative pour cet exemple, est donnée à la figure 4 ; comme précédemment, deux représentations sont données : valeurs des probabilités pour la grille de valeurs-repères 0.20, 0.40, 0.60, 0.80 (figure 4a) et représentation graphique des probabilités pour une grille plus fine de 0.10 en 0.10 (figure 4b). On en déduit que la probabilité d'avoir $A \perp^{0.20} B$ dans la population vaut 0.915 ($= 0.385 + 0.530$).

La figure 5 donne la distribution bayésienne standard du paramètre dérivé σ_2 , maximum des quatre indices η parents. L'allure particulière de cette distribution tient

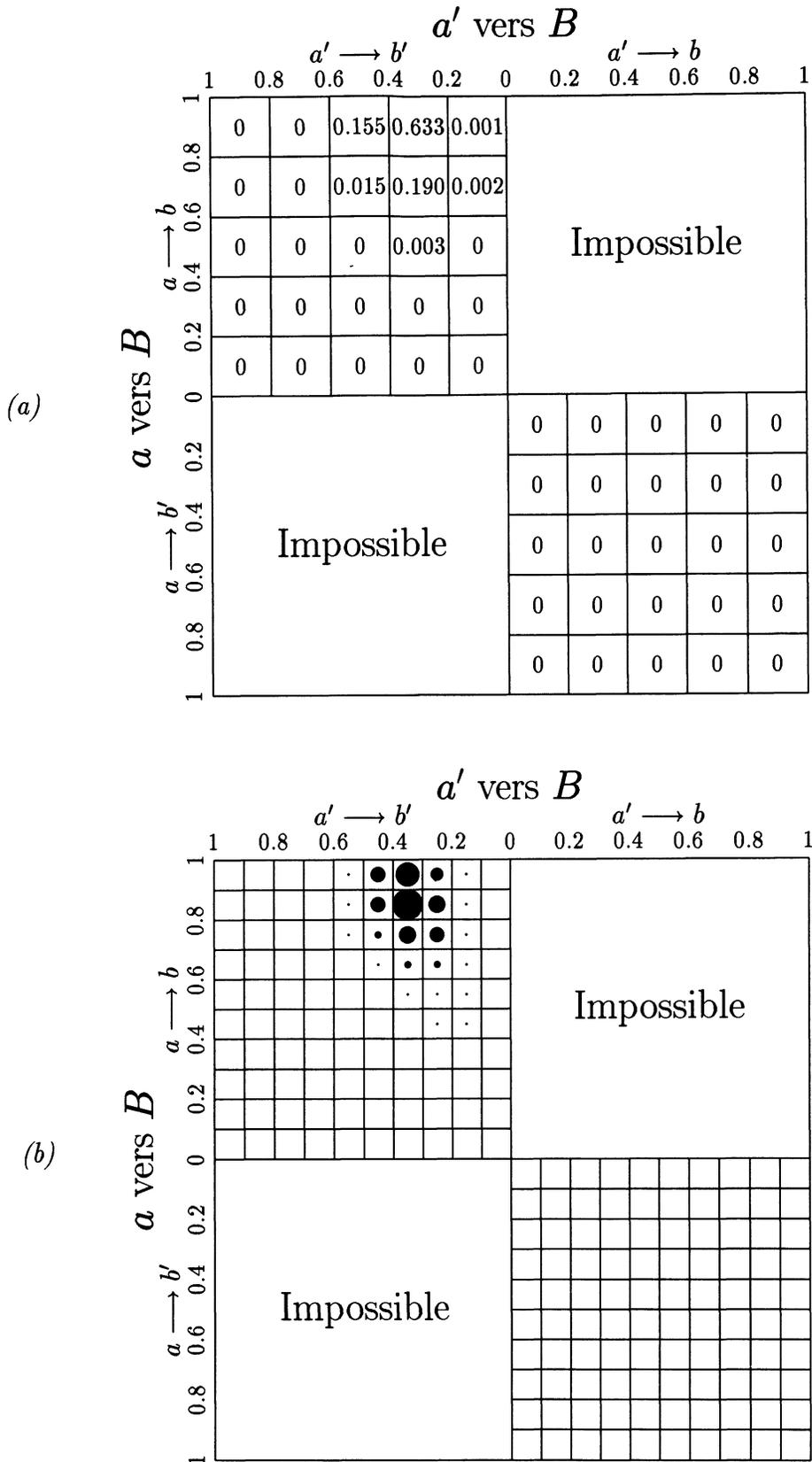


Figure 3: Exemple "Fractions-1". Carte inductive pour la structure implicative ; (a) valeurs des probabilités pour la grille de valeurs-repères 0.20, 0.40, 0.60, 0.80 ; (b) les probabilités sont représentées par des disques de surface proportionnelle, pour la grille de valeurs-repères 0.10, 0.20, etc.. Les axes se lisent comme ceux de la figure 1. Les probabilités notées 0 sont inférieures à 10^{-3} .

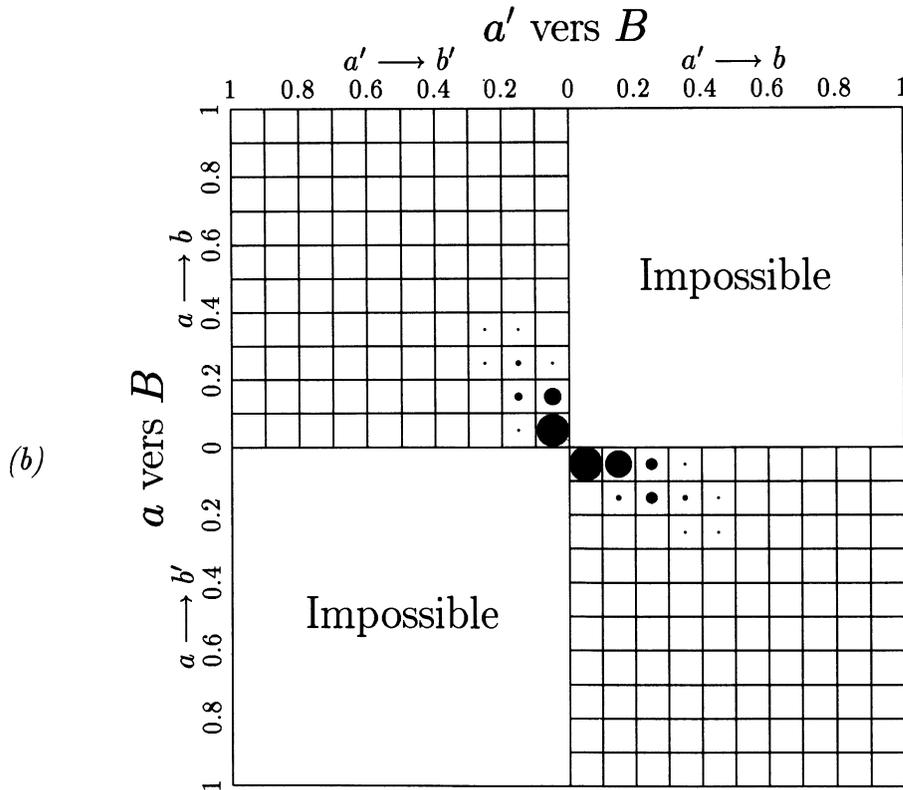
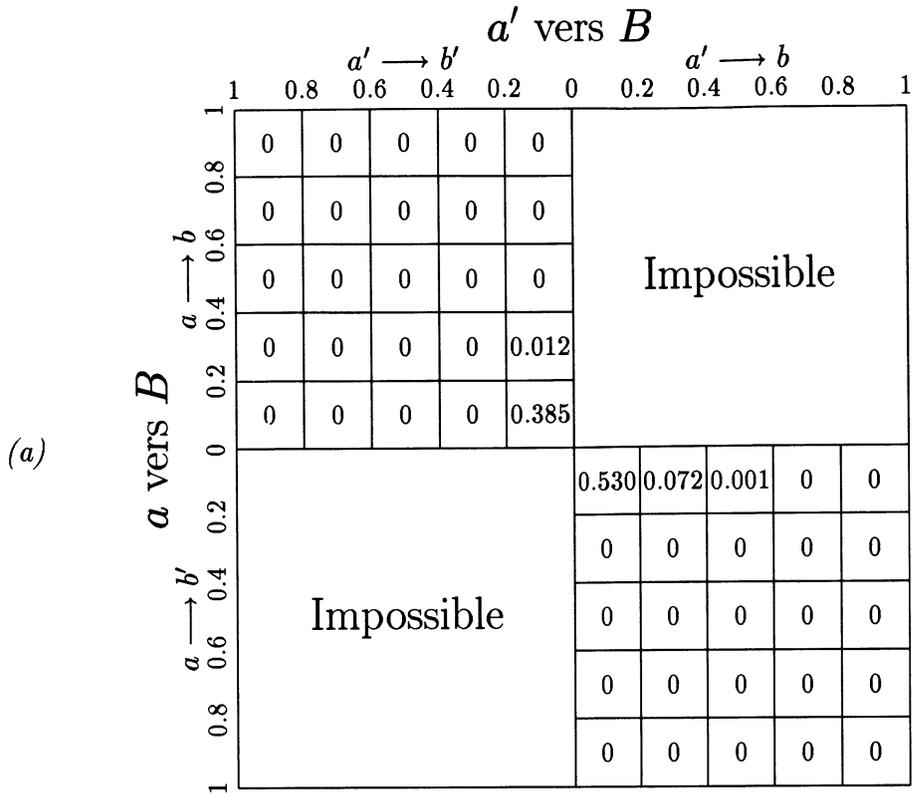


Figure 4: Exemple "Fractions-2". Carte inductive pour la structure implicative. Se lit comme la figure 3.

à ce qu'on est descriptivement très proche de l'indépendance stricte et que le paramètre dérivé σ_2 est borné à gauche par la valeur 0. Cet "effet de bord" serait moins marqué si les données étaient moins proches de l'indépendance et si leur taille était plus élevée.

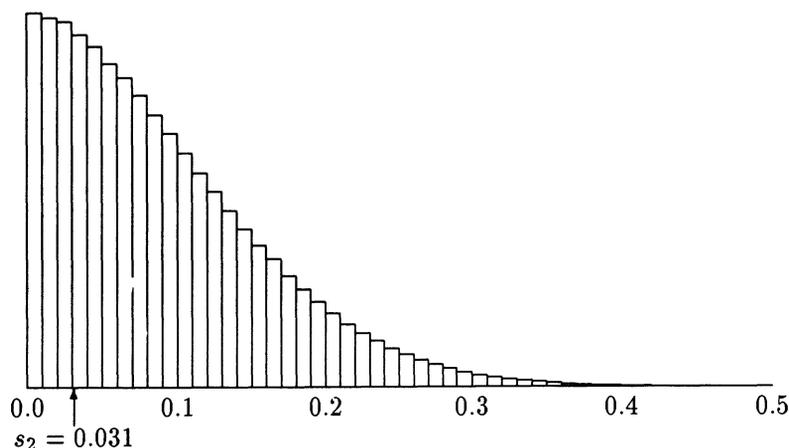


Figure 5: Exemple "Fractions-2". Distribution bayésienne standard de $\sigma_2 = \text{Max}(\eta_{ab}, \eta_{ab'}, \eta_{a'b}, \eta_{a'b'})$.

A partir de cette distribution, on retrouve la probabilité précédente comme $\text{Prob}(\sigma_2 < 0.20) = 0.915$. Mais on peut également chercher la plus petite valeur h pour laquelle on pourrait conclure à la q -indépendance avec une garantie fixée γ ; pour $\gamma = 0.95$, on trouve $\text{Prob}(\sigma_2 < 0.229) = 0.95$.

Remarque : Considérer un paramètre d'intérêt qui s'exprime comme minimum ou maximum d'autres paramètres n'introduit pas de difficulté particulière dans le cadre bayésien puisqu'on dispose d'une distribution sur l'ensemble des paramètres. Une inférence de ce type serait par contre beaucoup plus délicate à envisager dans le cadre fréquentiste.

5. EXEMPLE D'AIB : LES FRACTIONS

Dans l'exemple qui suit, les observations sont à valeurs dans le croisement de six variables binaires. L'analyse présentée se base sur l'AIB de chaque couple de variables et propose une représentation synthétique des relations implicatives binaires obtenues.

5.1. Objectifs expérimentaux et méthode

Les exemples "Fractions-1" (section 1) et "Fractions-2" (section 4.6) sont extraits d'une recherche exposée de façon exhaustive dans Charron (1995 et à paraître). Nous la présentons ici en nous centrant sur ses aspects méthodologiques, c'est-à-dire sur la mise en œuvre de l'AIB et les conclusions que cette méthode permet de tirer.

Cette recherche étudie la conceptualisation des fractions comme relations entre mesures chez l'enfant et l'adolescent. Un ensemble de 18 énoncés de problèmes relatifs à l'usage de la fraction a été proposé à 165 sujets répartis en trois niveaux scolaires (Cm2, 5ème, 3ème) de 55 sujets chacun. Dans chaque énoncé de problème, une fraction (donnée ou à calculer) reliait une quantité de référence à une quantité comparée. Six types de problèmes ont été constitués par le croisement de trois tâches et de deux situations. Les tâches consistaient à calculer, soit la fraction (tâche OF), soit la quantité comparée (tâche QC), soit la quantité de référence (tâche QR). Les deux situations se distinguaient par

le fait que la fraction exprimait, soit un rapport Partie-Tout (situation PT), soit un rapport Partie-Partie (situation PP). Par ailleurs, chaque type de problème a été présenté sous trois habillages différents (parts de gâteaux, clients dans un restaurant, arbres d'une forêt), d'où l'ensemble de 18 énoncés de problèmes. On trouvera en annexe des exemples d'énoncés pour chacun des six types de problèmes.

L'objectif général de cette recherche est de mettre à jour les éventuelles dépendances orientées existant entre ces types de problèmes : la résolution de certains nécessite-t-elle de savoir résoudre tels ou tels autres ? Pour répondre à cet objectif, nous avons considéré comme épreuves chacun des six types de problèmes précédents. Chaque épreuve a été codée en réussite/échec selon le critère suivant : réussite lorsqu'au moins 2 des 3 habillages proposés avaient donné lieu à une réponse correcte, échec dans le cas contraire. Nous sommes ainsi ramenés à l'étude de la structure implicative globale reliant ces six épreuves binaires homologues : QCPT, QCPP, QRPT, QRPP, OFPT, OFPP.

5.2. Structure implicative pour chaque paire d'épreuves

L'analyse a consisté, pour chaque niveau scolaire, à étudier la structure implicative pour chaque paire d'épreuve²⁰, puis à proposer un résumé global de ces structures implicatives consistant en un *graphe implicatif* inspiré de Gras & Larher (1993). Nous présenterons d'abord les résultats de façon détaillée pour les élèves de Cm2, puis de façon compacte pour les deux autres niveaux scolaires.

5.2.1. Analyse des résultats des élèves de Cm2

Analyse descriptive.

Le tableau 8 donne les tris croisés en effectifs pour chaque paire d'épreuves ; le tableau 9 indique, pour chacun de ces tris croisés, les indices de Loevinger H associés aux quatre cases d'erreur possibles, les indices positifs y figurant en gras. Nous privilégions ici l'idée de grille de valeurs-repères (pour les graphes notamment), mais nous utiliserons aussi les conclusions synthétiques de "q-implication" ou de "tendance à la q-implication" relativement aux valeurs-repères $h_{tend} = 0.20$ et $h_{quasi} = 0.40$.

Tableau 8: Niveau scolaire Cm2. Effectifs observés pour chaque paire d'épreuves.

		QRPT		OFPT		QCPP		QRPP		OFPP	
		1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
QCPT	1	7	33	15	25	35	5	1	39	9	31
	0	6	9	5	10	2	13	3	12	4	11
QRPT	1			8	5	9	4	2	11	4	9
	0			12	30	28	14	2	40	9	33
OFPT	1					12	8	3	17	9	11
	0					25	10	1	34	4	31
QCPP	1							2	35	8	29
	0							2	16	5	13
QRPP	1									3	1
	0									10	41

²⁰Il est nécessaire d'étudier les relations entre toutes les paires d'épreuves puisque la relation de q-implication n'est pas transitive.

Tableau 9: Niveau scolaire Cm2. Indices de Loevinger pour chaque paire d'épreuves.

		QRPT		OFPT		QCPP		QRPP		OFPP	
		1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
QCPT	1	0.260	-0.080	-0.031	0.018	-0.301	0.618	0.656	-0.051	0.048	-0.015
	0	-0.692	0.214	0.083	-0.048	0.802	-1.648	-1.750	0.137	-0.128	0.040
QRPT	1			-0.692	0.396	-0.029	0.060	-1.115	0.087	-0.302	0.093
	0			0.214	-0.122	0.009	-0.019	0.345	-0.027	0.093	-0.029
OFPT	1					0.108	-0.222	-1.063	0.083	-0.904	0.280
	0					-0.062	0.127	0.607	-0.048	0.516	-0.160
QCPP	1							0.257	-0.020	0.085	-0.026
	0							-0.528	0.041	-0.175	0.054
QRPP	1									-2.173	0.673
	0									0.170	-0.053

Pour fournir une lecture globale des dépendances orientées, les relations pour lesquelles l'indice H dépasse 0.20 peuvent être représentées par un *graphe implicatif descriptif*. Les figures 6a et 6b montrent deux possibilités de présentation d'un tel graphe.

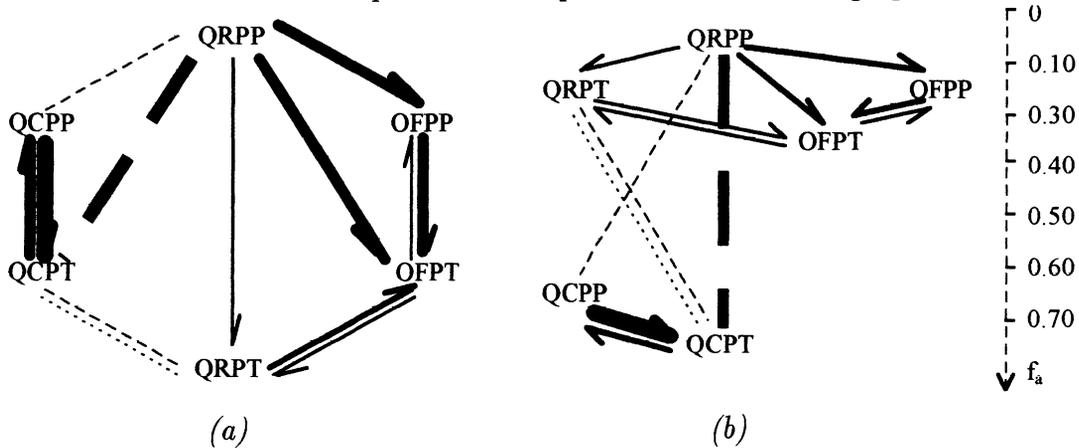


Figure 6: Niveau scolaire Cm2. Graphe implicatif descriptif; (a) épreuves disposées en hexagone; (b) épreuves disposées selon leur fréquence de réussite, petite (en haut), grande (en bas). Le type de trait (plein, pointillé, tireté) indique le type de la relation (respectivement implication, exclusion positive, exclusion négative). Les traits doublés correspondent à des relations de type équivalence ou disjonction. L'épaisseur des traits indique la valeur de l'indice H concerné, codé selon la grille de valeurs-repères 0.20, 0.40, 0.60, 0.80.

Dans la figure 6a les épreuves ont été réparties sur les sommets d'un hexagone. Chaque sommet représente une épreuve, les types de liens utilisés indiquant la nature de la relation : une flèche pour une tendance à la q-implication (de "réussite" à "réussite"), i.e. $a \rightarrow b$ ou $b \rightarrow a$; une ligne pointillée pour une tendance à la q-exclusion positive, i.e. $a' \rightarrow b$; et une ligne tiretée pour une tendance à la q-exclusion négative, i.e. $a \rightarrow b'$. Rappelons que la relation d'exclusion se lit de façon symétrique (e.g. $(a \rightarrow b') \iff (b \rightarrow a')$) d'où la nécessité de liens exprimant cette symétrie (cf. section 3.6). L'épaisseur des liens traduit la grandeur des relations codée à l'aide de la grille de valeurs-repères 0.20, 0.40, 0.60 et 0.80. L'absence de lien entre deux épreuves exprime la q-indépendance au degré $h = 0.20$.

Dans la figure 6b les épreuves sont disposées verticalement selon leurs fréquences de réussite respectives, les épreuves les moins réussies figurant en haut, les plus réussies en bas ; à ceci près cette figure se lit comme la figure 6a. Dans cette seconde représentation

du graphe implicatif, lorsque deux épreuves sont en liaison positive, par exemple QRPP et QRPT, la q-implication de plus grand degré est nécessairement celle qui va de haut en bas, ceci en vertu des inégalités données au tableau 5.

La figure 6 fait ressortir deux blocs d'épreuves. Le premier bloc, constitué des épreuves QRPP, QRPT, OFPP et OFPT, ne fait intervenir que des liaisons positives : q-implication de QRPP vers OFPP et OFPT, tendance à la q-implication de QRPP vers QRPT ; q-implication avec tendance à l'équivalence de OFPP vers OFPT et de QRPT vers OFPT. Le second bloc, constitué des épreuves QCPP et QCPT, a une situation particulière : ces deux épreuves sont q-équivalentes entre elles et n'entretiennent avec les autres épreuves que des relations de q-exclusion et tendance à la q-exclusion (avec QRPP et QRPT) ou de q-indépendance (avec OFPP et OFPT).

Analyse inductive bayésienne.

Nous procédons maintenant à l'AIB standard pour déterminer, parmi les relations orientées observées descriptivement, celles qui peuvent être attestées inductivement. Pour chaque case du tableau 9 où l'indice observé H est supérieur à 0.20, nous avons calculé la limite inférieure de crédibilité, à la garantie $\gamma = 0.90$, pour l'indice parent η correspondant. Ces limites sont données dans le tableau 10. Par exemple pour l'étude de la q-implication QRPP \rightarrow OFPP, pour laquelle nous avons trouvé descriptivement $H = 0.673$, on obtient l'énoncé : $Prob(\eta > 0.287) = 0.90$, i.e. l'indice parent η peut être déclaré supérieur à 0.287 avec la garantie 0.90.

Tableau 10: Niveau scolaire Cm2. Limites inférieures de crédibilité pour chaque indice η à la garantie 0.90 ; les valeurs négatives n'apparaissent pas.

		QRPT		OFPT		QCPP		QRPP		OFPP	
		1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
QCPT	1	0.059					0.446	0.249			
	0		0.048			0.619			0.042		
QRPT	1				0.154						
	0			0.080							
OFPT	1								0.016		0.140
	0							0.140		0.275	
QCPP	1										
	0										
QRPP	1										0.287
	0									0.058	

La figure 7 résume les cas pour lesquels la limite de crédibilité est supérieure à 0.20. Cette figure constitue un *graphe implicatif inductif* et peut se voir comme le résultat d'un filtrage du graphe descriptif précédent ; ce filtrage est inductif dans le sens où, parmi les relations observées descriptivement, il indique celles qu'il est possible de généraliser, compte tenu du nombre restreint d'observations. L'épaisseur des liens indique la grandeur minimale du paramètre qu'il est possible d'attester, mais n'indique rien quant à sa grandeur maximale. Ainsi pour l'exemple précédent, on peut conclure qu'il y a, au minimum, une tendance à l'implication de QRPP vers OFPP, ce qui n'exclut pas la possibilité d'une q-implication.

L'absence de lien traduit, dans tous les cas sur cet exemple, une insuffisance de l'information disponible : elle indique qu'il n'est pas possible de conclure à une tendance

à la q-implication (pour $h_{tend} = 0.20$), et non pas qu'une q-indépendance de degré 0.20 a pu être généralisée.

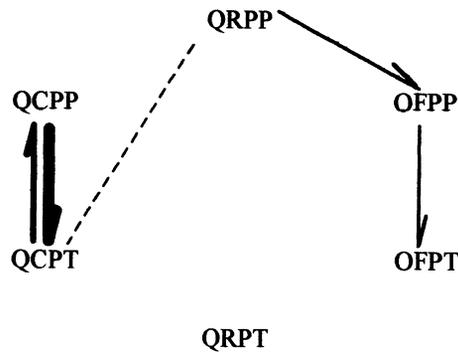


Figure 7: Niveau scolaire Cm2. Graphe implicatif inductif. Se lit comme la figure 6, à la seule différence que l'épaisseur des liens indique la valeur de la limite inférieure de crédibilité à la garantie 0.90.

Ce graphe inductif atteste d'une q-équivalence entre QCPP et QCPT. Il subsiste une tendance à la q-exclusion négative entre QRPP et QCPT, ainsi que des tendances à la q-implication de QRPP à OFPP et de OFPP à OFPT.

Aucune conclusion inductive ne peut être tirée avec une garantie suffisante pour les autres relations. Il faudrait disposer de plus de sujets pour pouvoir se prononcer. A cet égard, le graphe descriptif est un guide qui indique les relations qu'on pourrait espérer démontrer avec davantage de sujets (à condition d'obtenir des résultats descriptifs voisins).

5.2.2. Analyse des résultats des élèves de 5ème et de 3ème

Les figures 8 et 9 présentent les graphes descriptifs et inductifs obtenus pour les deux autres niveaux scolaires, 5ème et 3ème. Comme pour le Cm2, aucune conclusion inductive de q-indépendance n'a pu être tirée à la garantie 0.90, du fait du faible effectif de chaque niveau scolaire. On remarquera que le "tissu implicatif" est beaucoup plus dense pour ces deux niveaux scolaires, que ce soit descriptivement ou inductivement.

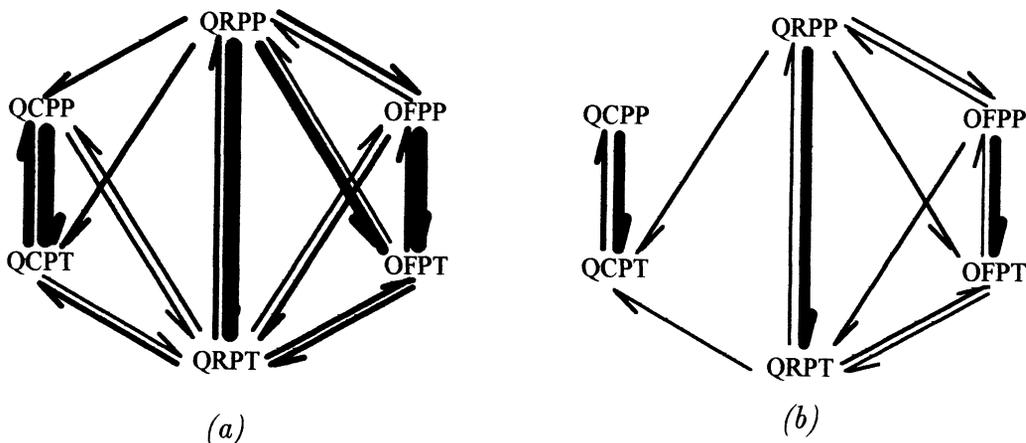


Figure 8: Niveau scolaire 5ème. Graphes implicatif (a) descriptif et (b) inductif à la garantie 0.90 (cf. légendes des figures 6 et 7).

Pour l'essentiel, on note une prédominance des relations de q-implication des situations PP vers les situations PT correspondantes : pour chaque tâche et chaque niveau scolaire,

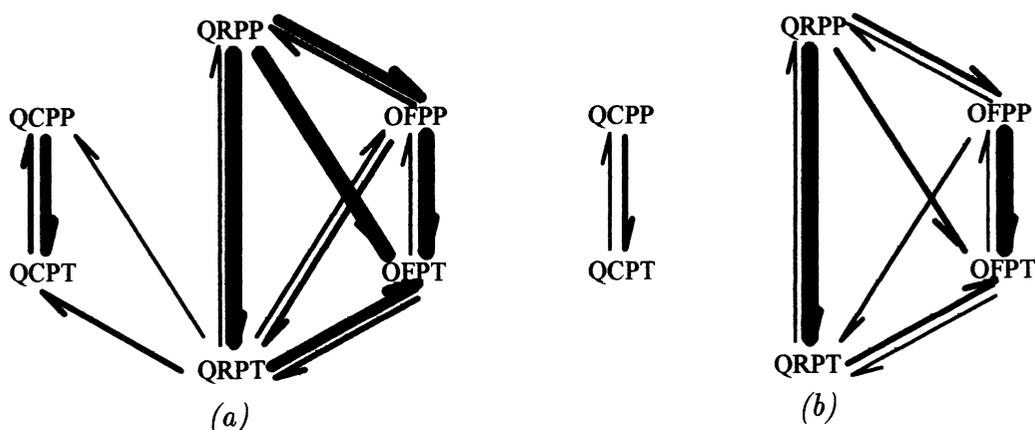


Figure 9: Niveau scolaire 3ème. Graphes implicatif (a) descriptif et (b) inductif à la garantie 0.90 (cf. légendes des figures 6 et 7).

on peut conclure inductivement, au minimum, à une q-implication avec tendance à la q-équivalence de PP vers PT.

On note aussi que les relations d'exclusion et de tendance à l'exclusion observées en Cm2 entre les tâches QC et les tâches QR disparaissent dès la classe de 5ème. Une analyse fine des stratégies adoptées par les élèves révèle que les exclusions observées en Cm2 peuvent s'interpréter par une généralisation abusive de raisonnements adaptés pour les tâches QC (plus faciles) aux tâches QR (plus difficiles) pour lesquelles ils ne le sont pas ; cette généralisation disparaît avec l'élévation du niveau scolaire (Charron, 1996 et soumis). Néanmoins l'idée de deux blocs d'épreuves (QC d'un côté, QR et OF de l'autre) subsiste : chacun est caractérisé par un fort tissu implicatif constitué de liaisons positives, alors que les q-implications reliant les deux blocs sont rares et de moindre degré.

6. ASPECTS INFORMATIQUES

Les résultats descriptifs et bayésiens donnés dans cet article ont été obtenus à l'aide du logiciel AIB-2, développé par les auteurs. Ce logiciel AIB-2, qui fait suite à une première version, AIB-1, réalisée par C. Charron et B. Lecoutre, concerne l'analyse implicative bayésienne pour un ensemble d'épreuves binaires, avec comme cas particulier l'AIB d'un tableau 2×2 . Il met en oeuvre la méthode d'échantillonnage-MC. Toute information concernant ce logiciel et ses modalités de diffusion peut être obtenue auprès des auteurs.

7. CONCLUSION

L'analyse implicative entre deux variables binaires a été envisagée au niveau descriptif à l'aide des indices de Loevinger H associés à un tableau 2×2 . Ces indices permettent de quantifier le degré de quasi-implication ou de quasi-équivalence entre deux modalités.

L'approche bayésienne fournit, pour l'analyse implicative, des solutions inductives générales et évite les difficultés de l'approche fréquentiste, notamment celles de l'approche fondée sur des raisonnements asymptotiques. De ce point de vue, son avantage est évident lorsque une implication est presque parfaitement vérifiée et/ou lorsque les données sont peu nombreuses. L'unique point de choix de l'approche bayésienne, celui d'une distribution initiale, est fortement restreint dans le cadre de l'analyse des données où la distribution initiale exprime un état d'ignorance ; la sensibilité des conclusions à ce choix peut être contrôlé en recourant à la zone d'ignorance.

Mais l'avantage décisif de l'approche bayésienne est surtout de fournir la réponse au problème de l'inférence dans toute sa généralité, en intégrant les deux étapes de l'analyse, descriptive et inductive, en une démarche globale : l'étape descriptive permet de dégager une propriété des données ; l'étape inductive consiste simplement, dans le cadre bayésien, à déterminer la probabilité que cette propriété soit vérifiée pour la population parente. La propriété d'intérêt peut porter sur un indice numérique ou bien être constituée d'une conjonction d'énoncés relatifs à divers indices. Pour l'analyse implicative d'un tableau 2×2 , ces deux étapes peuvent synthétisées par les cartes implicatives descriptive et inductive respectivement. De même, pour plus de deux variables binaires, l'analyse implicative peut être résumée par les graphes implicatifs, descriptif et inductif.

Cette démarche globale qui consiste à ancrer directement l'inférence bayésienne sur l'analyse descriptive n'est pas limitée au thème de l'analyse implicative pour des variables binaires étudié dans cet article ; elle a déjà été illustrée dans divers autres contextes (voir notamment Bernard, à paraître ; Bernard, Blancheteau, Rouanet, 1985 ; Lecoutre, 1984 ; Rouanet, 1996 ; Rouanet *et al.*, 1991). Dans un prochain article (Bernard, Charron, sous presse) elle sera mise en oeuvre pour l'analyse implicative pour deux variables catégorisées non binaires.

ANNEXE. DONNÉES "FRACTIONS" : EXEMPLES D'ÉNONCÉS POUR CHAQUE TYPE DE PROBLÈMES

Tâche	Situation	Exemple d'énoncé de problème
QC	PT	Dans un bois, il y a 80 arbres, les $\frac{4}{5}$ des arbres sont des marronniers. Trouve le nombre de marronniers qui sont dans le bois.
QC	PP	Au restaurant, 70 personnes prennent de la viande, les autres prennent du poisson. Le nombre de personnes qui prennent du poisson représente les $\frac{2}{5}$ du nombre de personnes qui prennent de la viande. Trouve le nombre de personnes qui prennent du poisson.
QR	PT	Au restaurant, 30 clients ont fini de manger, c'est à dire les $\frac{3}{5}$ de tous les clients du restaurant. Trouve le nombre de clients du restaurant.
QR	PP	Dans une forêt de cèdres et de sapins, il y a 60 cèdres, c'est à dire les $\frac{3}{5}$ des sapins. Trouve le nombre de sapins.
OF	PT	Un grand gâteau contient 90 parts, 36 parts ont été mangées. Quelle fraction représentent celles qui ont été mangées ? Trouve la fraction la plus simple possible (c'est à dire une fraction irréductible).
OF	PP	Dans un gâteau, 49 parts sont décorées, 14 ne le sont pas. Quelle fraction représentent celles qui ne le sont pas par rapport aux parts décorées ? Trouve la fraction la plus simple possible (c'est à dire une fraction irréductible).

BIBLIOGRAPHIE

BERNARD, J.-M. (1986), "Méthodes d'Inférence Bayésienne sur des Fréquences", *Informatique et Sciences Humaines*, 68, 89–133.

BERNARD, J.-M. (1991), "Inférence Bayésienne et Prédicative sur les Fréquences" dans *L'Inférence Statistique dans la Démarche du Chercheur*, par H. Rouanet, M.-P. Lecoutre, M.-C. Bert, B. Lecoutre, J.-M. Bernard, European University Studies, Series 6, Psychology, Berne : Peter Lang, pp. 121–153.

- BERNARD, J.-M. (1996), "Bayesian Interpretation of Frequentist Procedures for a Bernoulli Process", *The American Statistician*, 50, No. 1, 7–13.
- BERNARD, J.-M. (à paraître), "Bayesian Analysis of Tree-Structured Categorized Data", *Revue Internationale de Systémique*.
- BERNARD, J.-M. (soumis), "Sample-based Approximate Methods for the Bayesian Analysis of Multinomial Data".
- BERNARD, J.-M., BLANCHETEAU, M., ROUANET H. (1985), "Le Comportement Prédateur chez un Forficule, *Euborellia Moesta* (Géné), II. Analyse Séquentielle au Moyen de Méthodes d'Inférence Bayésienne", *Biology of Behaviour*, 10, 1–22.
- BERNARD, J.-M., CHARRON, C. (sous presse), "L'Analyse Implicative Bayésienne : une méthode pour l'étude des dépendances orientées. II : Modèle logique sur un tableau de contingence.
- BERNARDO, J. M., SMITH, A. F. M. (1994), *Bayesian Theory*, New-York : Wiley.
- BIDEAUD, J., LAUTREY, J. (1983), "De la résolution empirique à la résolution logique du problème d'inclusion : Evolution des réponses en fonction de l'âge et des situations expérimentales", *Cahiers de Psychologie Cognitive*, 3, 295–326.
- CHARRON, C. (1995), "Individual Variations in the Construction of Categories of Problems Involving Fractions", Actes de *Psychological Mathematical Education 1995*, Osnabruck, Germany, 7–10.
- CHARRON, C. (1996), "Une Approche Bayésienne de l'Analyse Implicative, un Exemple sur la Catégorisation de Problèmes Relatifs aux Fractions, Actes du Séminaire de Didactique 94-95, IRMAR, Université de Rennes I.
- CHARRON, C. (à paraître), "Categorization of Problems and Conceptualization of Fractions in Adolescents", *European Journal of Psychology of Education*.
- COHEN, J. (1960), "A coefficient of agreement for nominal scales", *Educational and Psychological Measurement*, 20, 37–46.
- CASELLA, G., GEORGE, E. I. (1992), "Explaining the Gibbs sampler", *The American Statistician*, 46, 167–174.
- CORROYER, D., ROUANET, H. (1994), "Sur l'Importance des Effets et ses Indicateurs dans l'Analyse Statistique des Données", *L'Année Psychologique*, 94, 607–624.
- COPAS, J. B., LOEBER, R. (1990), "Relative Improvement over chance (RIOCI) for 2×2 tables", *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 43, 293–307.
- FLEISS, J. L. (1981), *Statistical methods for rates and proportions*, 2ème ed., New-York : Wiley.
- GRAS, R., LARHER, A. (1993), "L'implication Statistique, une Nouvelle Méthode d'Analyse de Données", *Mathématiques Informatique et Sciences humaines*, 120, 5–31.

- HILDEBRAND, D. K., LAING, J. D., ROSENTHAL, H. (1977), *Prediction Analysis of Cross Classifications*, New-York : Wiley.
- JEFFREYS, H. (1961), *Theory of Probability*, Troisième édition, Oxford : University Press.
- LECOUTRE, B. (1984), *L'Analyse Bayésienne des Comparaisons*, Lille : Presses Universitaires de Lille.
- LERMAN, I. C., GRAS, R., ROSTAM, H. (1981), "Elaboration et Evaluation d'un Indice d'Implication pour des Données Binaires : I", *Mathématiques et Sciences humaines*, 74, 5-35.
- LOEBER, R., DISHION, T. (1983), "Early Predictors of Male Delinquency : A Review", *Psychological Bulletin*, 94, No. 1, 68-99.
- LOEVINGER, J. (1947), "A systematic Approach to the Construction and Evaluation of Tests of Ability", *Psychological Monographs*, 61, No. 4, 1-49.
- LOEVINGER, J. (1948), "The Technic of Homogeneous Tests Compared with some Aspects of Scale Analysis and Factor Analysis", *Psychological Bulletin*, 45, 507-530.
- LUXENBURGER, M. (1991), "Implications Partielles dans un Contexte", *Mathématiques Informatique et Sciences humaines*, 113, 35-55.
- NIJSSE, M. (1992), "Attributable risk and relative improvement over chance : A note on Copas & Loeber (1990)", *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 45, 329-332.
- PERKS, F. J. A. (1947), "Some Observations on Inverse Probability Including a New Indifference Rule (with discussion)", *Journal of the Institute of Actuaries*, 73, 285-334.
- ROUANET, H. (1996), "Bayesian Methods for Assessing Importance of Effects", *Psychological Bulletin*, 119, 149-158.
- ROUANET, H., BERNARD, J.-M., LE ROUX, B. (1990), *Statistique en Sciences Humaines : Analyse Inductive des Données*, Paris : Dunod.
- ROUANET, H., LECOUTRE, M.-P., BERT, M.-C., LECOUTRE, B., BERNARD, J.-M. (1991), *L'Inférence Statistique dans la Démarche du Chercheur*, European University Studies, Series 6, Psychology, Berne : Peter Lang.
- ROUANET, H., LE ROUX, B. (1993), *Analyse des Données Multidimensionnelles*, Paris : Dunod.
- SMITH, A. F. M., GELFAND, A. E. (1992), "Bayesian Statistics Without Tears : A Sampling-Resampling Perspective", *The American Statistician*, 46, 84-88.
- WALLEY, P. (1996), "Inferences from Multinomial Data : Learning about a Bag of Marbles (with discussion)", *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B.*, 58, 3-57.