MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

JEAN-FRANÇOIS LASLIER

Solutions de tournois : un spicilège

Mathématiques et sciences humaines, tome 133 (1996), p. 7-22

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1996__133__7_0>

Math. Inf. Sci. hum. (34e année, n°133, *1996*, pp. 7-22)

SOLUTIONS DE TOURNOIS : UN SPICILÈGE

Jean-François LASLIER[1]

RÉSUMÉ – *L'article passe en revue quelques Solutions de Tournois (correspondances de choix définies sur les tournois). On compare ces solutions entre elles, et on mentionne certaines de leurs propriétés.*

SUMMARY – Tournaments solutions : a survey.
The article is a survey of some existing Tournament Solutions (Choice correspondences defined on tournaments). We compare these solutions and mention some of their properties.

1. INTRODUCTION

Étant donnée une relation binaire T, on donne souvent à l'assertion xTy la signification « x est meilleur que y ». C'est le cas par exemple lorsque T enregistre les résultats de rencontres sportives, ou encore lorsque T est l'agrégation de préférences individuelles par la règle majoritaire. Se pose alors naturellement la question de savoir, sur la seule base de l'information de type binaire fournie par T, quels éléments x, y... peuvent être jugés globalement les meilleurs. Cette question n'admet en général pas de réponse immédiate et, de fait, de nombreuses méthodes ont été proposées, méthodes qui peuvent conduire parfois à des résultats sensiblement différents. Cet article expose certaines de ces méthodes, définies dans le cas particulier où la relation binaire de comparaison T est complète. Étant donnée l'interprétation de T, on peut supposer que T est asymétrique, ce qui en fait une relation de tournoi. Une méthode pour déterminer les meilleurs éléments dans un tournoi est appelée une « solution de tournoi ». L'article expose donc certaines solutions de tournoi, étudie leurs propriétés et les compare entre elles.

La première partie introduit quelques notations et concepts de base. Pour l'exposé, nous distinguons les solutions issues de classements (deuxième partie) et celles définies à partir de propriétés « théoriques » (troisième partie). Cette distinction ne prétend pas à la profondeur mais met en avant le fait que les premières arrivent souvent à déterminer un unique « vainqueur du tournoi » alors que les secondes sont plutôt définies à partir de leurs propriétés et déterminent, sauf exception, des ensembles d'au moins trois vainqueurs *ex æquo*.

NOTATIONS ET CONCEPTS DE BASE

Soit X un ensemble fini et T une relation binaire sur X. On dit que T est un *tournoi* (fini) si T est complète et asymétrique, c'est-à-dire que pour tout x et tout y dans X, une et une seule des trois assertions est vraie : xTy, yTx ou $x = y$. Les éléments de X seront appelés « points », « propositions », ou « sommets ». On notera $\mathcal{T}(X)$ l'ensemble des tournois sur X. L'*ordre* de

[1] CNRS, THEMA, Université de Cergy-Pontoise

$T \in \mathcal{T}(X)$ est le cardinal de X.

On peut parler des tournois comme des graphes orientés, en considérant X comme un ensemble de sommets et en disant qu'une flèche (un arc !) $x \longrightarrow y$ va de x à y ssi xTy.

Deux présentations matricielles des tournois sont utiles : soit T un tournoi d'ordre n défini sur $X = \{1, ..., n\}$; la *matrice du tournoi* (matrice d'adjacence), M, est la matrice carrée $n \times n$ dont l'entrée $M_{x,y}$ vaut 1 si xTy et 0 sinon. La *matrice de gain* associée à T est la matrice $G = M - M^t$ dont l'entrée $G_{x,y}$ vaut 0 si $x = y$, +1 si xTy et −1 si yTx.

À tout tournoi T sur X on associe aussi un jeu à deux joueurs, symétrique et de somme nulle. Deux joueurs, A et B, ont pour ensemble de stratégies l'ensemble X, le gain pour un joueur jouant x quand son adversaire joue y est $G_{x,y}$.

Étant donnés $T \in \mathcal{T}(X)$ et $x, y \in X$, si xTy, on dit que x bat y, ou encore que x est un prédécesseur de y, ou que y est un successeur de x. On notera $T^+(x)$ l'ensemble des successeurs de x. Le *score de Copeland*, $s(x)$, de $x \in X$ dans le tournoi $T \in \mathcal{T}(X)$ est le nombre de sommets que x bat dans T :

$$s(x) = Card[T^+(x)].$$

Le score de Copeland de x est son demi-degré extérieur dans le vocabulaire de la théorie des graphes. On calcule ces scores à partir de la matrice du tournoi et du vecteur colonne $\mathbf{1}$ en remarquant que $s = M\,\mathbf{1}$. Un tournoi pour lequel tous les scores de Copeland sont égaux est dit *régulier*, ces scores valent alors $(n-1)/2$, où n est l'ordre du tournoi.

Étant donnés $T \in \mathcal{T}(X)$ et $U \in \mathcal{T}(Y)$, une bijection f de X sur Y est un *isomorphisme de tournoi* ssi pour tout x et x' dans X on a :

$$xTx' \Leftrightarrow f(x)Uf(x').$$

Si $X = Y$, on dit alors que f est un *automorphisme*, ou une *symétrie* de T. S'il existe une symétrie f de T telle que $y = f(x)$, on dit que x et y sont symétriques. Si tous les points de X sont symétriques (plus exactement : si pour tout x et tout y il existe une symétrie f telle que $y = f(x)$), on dit que T lui-même est symétrique. Pour tout ordre impair, il existe des tournois symétriques, et il n'en existe pas d'ordre pair.

Une *solution de tournois* est une application S qui associe à chaque tournoi $T \in \mathcal{T}(X)$ un sous-ensemble non vide $S(X)$ de X et qui est stable par isomorphisme de tournoi : pour $T \in \mathcal{T}(X)$ et $U \in \mathcal{T}(Y)$, si f est un isomorphisme de T sur U, $S(U) = f(S(T))$. Clairement, si T est symétrique alors $S(T) = X$; l'existence de tournois symétriques montre donc que la recherche des « vainqueurs » d'un tournoi se heurte à un obstacle rédhibitoire : pour un tel tournoi, « tous les points sont équivalents » et donc inéluctablement *ex æquo*.

Un tournoi symétrique est régulier, mais il existe des tournois réguliers qui ne sont pas symétriques. Une solution S telle que $S(T) = X$ chaque fois que T est régulier est dite *régulière*. Nous verrons dans la dernière partie de cet article que, contrairement à l'intuition, il existe des solutions intéressantes qui ne sont pas régulières (ensemble de Banks, ensemble d'équilibre de tournoi).

Étant donné un sous-ensemble Y de X, la restriction à Y de la relation binaire $T \in \mathcal{T}(X)$ est un tournoi sur Y, qui sera notée T/Y. On appelle *partie homogène* de T un sous-ensemble non vide Y de X tel que pour tout $y \in Y$ et tout $x, x' \in X \setminus Y$ on ait : $yTx \Leftrightarrow yTx'$. Soient Y et Z deux parties homogènes de T d'intersection vide, alors soit tous les points de Y battent tous ceux de Z, soit tous les points de Z battent tous ceux de Y ; considérons alors $\{Y_1, ..., Y_k\}$ une partition de X en parties homogènes de T, sur cette partition, on définit un tournoi R en posant : $Y_i \, R \, Y_j \Leftrightarrow (\forall\, y \in Y_i, \forall\, z \in Y_j, yTz)$. Le tournoi R est appelé le *résumé de T par* $\{Y_1, ..., Y_k\}$.

Un *vainqueur de Condorcet* du tournoi T est un point x qui bat dans T tous les autres points. Si un tel point existe, il est unique, mais les tournois n'admettent en général pas de vainqueur de Condorcet. Une solution S est dite *Condorcet-cohérente* si $S(T) = \{x\}$ quand x est vainqueur de Condorcet de T. Évidemment, toutes les solutions envisagées vérifient cette propriété. Une propriété plus forte, mais elle aussi désirable, est la cohérence au sens de Smith ; une solution S est *Smith-cohérente* si $S(T) \subseteq Y$ chaque fois que Y vérifie :

$$\forall\, y \in Y, \forall\, x \in X \setminus Y, yTx.$$

Remarquez que cette propriété est en fait liée à la précédente ; on peut l'exprimer en disant que si T possède un résumé pour lequel Y est un vainqueur de Condorcet alors S choisit dans Y. À nouveau, toutes les solutions envisagées sont Smith-cohérentes.

On peut définir de nombreuses autres propriétés pour les solutions de tournoi. Les deux précédentes apparaissent comme des exigences minimales, j'en mentionnerai trois autres (outre la *régularité* déjà définie) :

Monotonie : Soient deux sommets x et y tels que yTx et soit T' le tournoi obtenu à partir de T en renversant le seul arc $y \rightarrow x$. La solution S est monotone si $x \in S(T)$ entraîne $x \in S(T')$.

La propriété de monotonie peut elle aussi apparaître comme minimale et, sauf mention du contraire, toutes les solutions envisagées seront monotones. Les deux suivantes sont en revanche visiblement exigeantes et aucune des solutions « pratiques » définies dans la section suivante ne les vérifie.

Propriété du sur-ensemble fort : La solution S vérifie la propriété du sur-ensemble fort (« Strong Superset Property ») si pour toute partie Y de X telle que $S(T) \subseteq Y$, $S(T/Y) = S(T)$. En d'autres termes, pour une telle solution, l'élimination de points qui ne sont pas des vainqueurs ne modifie pas l'ensemble des vainqueurs.

Propriété de cohérence par composition : Soit $\{Y_1, ..., Y_k\}$ une partition de X en parties homogènes de T et soit R le résumé associé. Notons $T_i = T/Y_i$. La solution S est cohérente par composition si on a :

$$S(T) = \bigcup_{Y_i \in S(R)} S(T_i)$$

En d'autres termes, les meilleurs sommets (dans T) sont les meilleurs sommets (dans T_i) des meilleures parties homogènes (dans R).

2. QUELQUES SOLUTIONS « PRATIQUES » DÉRIVÉES DE CLASSEMENTS

Les solutions présentées dans cette partie sont des méthodes de score ou de classement. Une méthode de score permet d'associer à chaque point d'un tournoi un nombre, censé quantifier la « force » du point dans le tournoi. Le classement des points par leurs scores respectifs permet de définir le vainqueur du tournoi comme le point de plus grand score. En cas d'*ex æquo*, il y a tout simplement plusieurs vainqueurs. Pour départager les éventuels *ex æquo*, on peut considérer le tournoi restreint à ces points et appliquer à nouveau la même méthode (ou, pourquoi pas, une autre) ; nous n'analyserons pas ces méthodes de score itératives. On peut aussi chercher directement à classer les points sans passer par l'intermédiaire d'une quantification par des scores. La méthode la plus intéressante est alors la méthode qui conduit à la définition de la *solution de Slater*. Les méthodes présentées dans cette section s'étendent naturellement au cas des tournois pondérés, dans lesquels la comparaison entre x et y est quantitative au lieu d'être dichotomique (xTy ou yTx) ; mais nous n'aborderons pas cette question.

2.1. *La solution de Copeland*

DÉFINITION 1. La *solution de Copeland*, C, est définie par :

$$C(T) = \{x \in X : \forall\, y \in X,\ s(y) \leq s(x)\}.$$

Il s'agit certainement de la méthode la plus naturelle : les vainqueurs sont les sommets qui battent le plus de sommets. Elle est employée pour le classement des équipes sportives avec des améliorations permettant de tenir compte des matchs nuls et de départager les éventuels *ex æquo*. Son nom provient de l'article de référence de Copeland (1951). Des axiomatisations de cette solution ont été proposées par Rubinstein (1980) et Henriet (1985). La solution de Copeland est monotone mais n'est pas cohérente par composition et ne vérifie pas la propriété du sur-ensemble fort. Si on fait l'analyse en composantes principales du nuage de n points dans $\mathbb{R}^n$ défini par la matrice de gain G, on observe que le score de Copeland présente une corrélation nulle avec au moins la moitié des axes principaux d'inertie du nuage (Laslier, 1995).

Une qualité de la solution de Copeland est sa simplicité de calcul. Intuitivement, elle a pour inconvénient d'accorder le même poids à la victoire de x contre y ou contre z, même si y est reconnu comme plus fort que z. On peut donc penser à l'améliorer de la manière suivante : dans un premier temps, chaque sommet x se voit attribuer autant de points qu'il compte de victoires, c'est-à-dire son score de Copeland. On calcule donc le vecteur $s_1 = s = M\,\mathbf{1}$. Dans un deuxième temps, ces scores sont pris comme indicateurs de la valeur des sommets dans le tournoi et on calcule $s_2(x)$ en faisant la somme des valeurs $s_1(y)$ des y que x bat, c'est-à-dire $s_2 = M\,s_1 = M^2\,\mathbf{1}$. L'itération de ce processus à l'infini conduit à la solution présentée au paragraphe suivant. Une variante consiste à compter un point par victoire plus un demi-point correspondant au « match nul de x contre lui-même ».

2.2. *La solution du long chemin*

Considérons les itérées successives M^k de la matrice du tournoi M. On remarque que l'entrée (x, y) de M^k est le nombre de chemins

$$x = x_1 \to x_2 \to \dots \to x_{k+1} = y$$

de longueur k allant de x à y. La suite de vecteurs $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $s_0 = \mathbf{1}$ et $s_{k+1} = M\,s_k = M^k\,\mathbf{1}$ fournit pour chaque sommet x le nombre total de chemins de longueur k partant de x. On peut montrer à l'aide du théorème de Perron-Frobenius (voir les références plus loin ; pour le théorème de Perron-Frobenius, voir par exemple : Michel, 1984) que, lorsque k tend vers l'infini, la proportion des chemins de longueur k partant de x tend vers une limite $lc(x)$:

$$lc(x) = \lim_{k \to \infty} \frac{s_k(x)}{\langle \mathbf{1}, s_k \rangle}.$$

DÉFINITION 2. La solution du long chemin, LC est définie par :

$$LC(T) = \{x \in X : \forall\, y \in X,\ lc(y) \leq lc(x)\}.$$

Le vecteur lc des proportions de longs chemins est un vecteur propre de M associé à sa plus grande valeur propre, ce qui permet de le calculer facilement. Le classement obtenu peut différer de celui obtenu au moyen des scores de Copeland. Cette méthode apparaît quelquefois sous la dénomination de « méthode du vecteur propre » (Wei (1952), Kendall (1955)). Moon (1968) donne quelques indications bibliographiques sur cette méthode et ses dérivées. Berge (1970) propose de prendre $lc(x)$ comme indicateur de la force de x dans le tournoi. La même technique est utilisée par Saaty (1977, 1986) dans un cadre plus général que celui des tournois, ce qui a suscité une littérature abondante. Citons seulement Johnson, Beine et Wang (1979) et Jensen (1986). Keener (1993) a repris cette idée d'utiliser le théorème de Perron-Frobenius pour déterminer des classements.

2.3. *Le maximum de vraisemblance*

On attribue cette méthode à E. Zermelo (1929). Supposons que le résultat de la confrontation entre x et y soit une variable aléatoire telle que xTy apparaisse avec la probabilité $p(x, y)$ (et que donc yTx apparaisse avec la probabilité $p(y, x) = 1 - p(x, y)$). Supposons de plus que les $n(n-1)/2$ variables aléatoires ainsi définies soient indépendantes. Supposons enfin que ces probabilités puissent s'exprimer à l'aide de n nombres w_x ($x \in X$) en posant pour tout $x \neq y$:

$$p(x, y) = \frac{w_x}{w_x + w_y}.$$

(Le nombre w_x peut être interprété comme un indicateur de la force de x.) Alors on peut exprimer la probabilité d'occurrence de tout tournoi T sur X comme fonction des w_x :

$$Prob(T/w) = \prod_{xTy} \frac{w_x}{w_x + w_y}$$

La méthode du maximum de vraisemblance consiste alors, T étant donné, à chercher w (tel que la somme des w_x soit par exemple égale à 1) qui maximise $Prob(T/w)$. On démontre que ce problème de maximisation admet une solution unique et que tous les w_x sont alors positifs. Mais on peut aussi démontrer (voir Moon (1968)) que le classement des sommets défini par ces indicateurs est en fait le même que le classement obtenu par la simple méthode de Copeland. Ainsi la solution de tournoi définie par la méthode du maximum de vraisemblance est égale à la solution de Copeland.

2.4. *Une solution markovienne*

À $T \in \mathcal{T}(X)$ d'ordre n, on associe une chaîne de Markov $(\xi_t)_{t \in \mathbb{N}}$ sur X définie de la manière suivante : ξ_0 suit une loi de probabilité uniforme sur X, et pour tout $t > 0$, tout x et tout y dans X, la probabilité que $\xi_t = x$ sachant que $\xi_{t-1} = y$, notée $P(x/y)$ est égale à :

- 0 si yTx
- $\frac{1}{n-1}$ si xTy
- $\frac{s(y)}{n-1}$ pour $x = y$.

L'interprétation de cette chaîne de Markov est la suivante : un premier sommet est choisi au hasard ; aux dates ultérieures, le sommet courant ($y = \xi_{t-1}$) est confronté à un sommet ($x \neq y$) choisi au hasard et y est remplacé par x si x bat y. Cette idée a été proposée sous cette forme par Laslier (1993), et (indépendamment et dans un cadre plus général) par Levchenkov (1992, 1995a).

On démontre que la chaîne de Markov ainsi définie admet une unique probabilité stationnaire $(p_x)_{x \in X}$, indépendante de la distribution initiale, la probabilité p_x s'interprétant comme la fréquence d'apparition de l'alternative x ou encore comme la fréquence des victoires de x. On peut donc utiliser p comme vecteur de score et définir une nouvelle solution de tournoi :

DÉFINITION 3. La *solution de choix auto-cohérent*, *SCR* est définie par :

$$SCR(T) = \{x \in X : \forall\, y \in X, p_y \leq p_x\},$$

où p est la probabilité stationnaire de la chaîne de Markov associée à T.

Le nom « choix auto-cohérent » (*Self-consistent Choice Rule*) vient de Levchenkov (1995a) qui propose une axiomatisation de cette méthode de score. La solution ainsi définie est distincte des autres méthodes de score, s'étend naturellement au cas de tournois valués, et est monotone et régulière. Elle ne vérifie pas la propriété du sur-ensemble fort ni la cohérence par composition.

2.5. *La solution de Slater*

Sans chercher à quantifier par des scores la force des points dans un tournoi, on peut essayer d'ordonner ces points. Cette idée conduit à la solution présentée dans ce paragraphe. Ordonner les points, cela signifie déterminer une relation d'ordre, en évitant si possible les *ex æquo*. Le plus simple est de rechercher une relation d'ordre total strict, c'est-à-dire un tournoi transitif. Pour ce faire, on munit l'ensemble $\mathfrak{T}(X)$ d'une distance et on cherche dans $\mathfrak{T}(X)$ les ordres les plus proches du tournoi considéré. Dans un ordre strict, il n'y a pas d'ambiguïté sur le vainqueur ; on considère donc comme vainqueur du tournoi T tout point vainqueur d'un tournoi transitif à distance minimale de T.

Une possible distance entre deux tournois T et T' définis sur le même ensemble X est donnée par le nombre de flèches qu'il faut inverser pour passer du graphe de l'un au graphe de l'autre :

$$\Delta(T, T') = Card\{(x, y) \in X^2 : xTy \wedge yT'x\}.$$

Si on définit les tournois comme des ensembles de couples, on voit qu'il s'agit de la distance usuelle de la différence symétrique. Notons $\mathfrak{L}(X)$ l'ensemble des tournois transitifs sur X. Un *ordre de Slater* pour T est un tournoi transitif U tel que :

$$\Delta(U, T) = Min\{\Delta(V, T) : V \in \mathfrak{L}(X)\}.$$

Les ordres dits ici « de Slater » (Slater, 1961) se généralisent par les *ordres médians*, voir Barthélemy et Monjardet (1981).

DÉFINITION 4. La *solution de Slater*, SL est définie par : pour tout tournoi $T \in \mathfrak{T}(X)$, $x \in SL(T)$ ssi il existe un ordre de Slater pour T dont x est vainqueur de Condorcet.

Bien qu'on puisse facilement fabriquer des exemples dans lesquels il n'y a pas unicité du vainqueur de Slater, il se peut en pratique qu'on obtienne un seul vainqueur, même pour des tournois sans vainqueur de Condorcet. Mais ce vainqueur ne coïncide pas forcément avec le vainqueur obtenu par la méthode de Copeland (Bermond, 1972) ou par une autre méthode de score. Par rapport à la méthode de Copeland, il semble que la méthode de Slater donne moins d'*ex æquo* ; pour confirmer cette observation, il pourrait être intéressant de calculer par exemple la probabilité (sous l'hypothèse d'équiprobabilité des tournois) qu'un tournoi ait un unique vainqueur de Slater sachant qu'il n'a pas de vainqueur de Condorcet, et de même pour Copeland. À notre connaissance, ce calcul n'a pas été fait.

Beaucoup de choses sont connues sur la méthode de Slater, aussi bien du point de vue théorique qu'en ce qui concerne les méthodes de calcul qui permettent de déterminer les ordres de Slater d'un tournoi (voir l'article de Charon, Hudry et Woirgard (1996) dans ce même numéro). La solution de Slater est monotone mais n'est pas cohérente par composition et ne vérifie pas la propriété du sur-ensemble fort.

3. SOLUTIONS « THÉORIQUES »

3.1. *Le cycle supérieur*

À partir d'un tournoi $T \in \mathfrak{T}(X)$, on définit une nouvelle relation binaire sur X en posant que *x atteint* y (on notera $x \mapsto y$) ssi x bat y, directement ou indirectement :

$$x \mapsto y \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}^* : \exists\, x_1, \dots, x_k \in X : x = x_1 \to x_2 \to \dots \to x_k = y.$$

Cette relation est réflexive et transitive, elle est aussi complète puisque T l'est. Posons alors $x \leftrightarrow y$ ssi $x \mapsto y$ et $y \mapsto x$. La relation $\leftrightarrow$ est une relation d'équivalence sur X, dont les classes d'équivalence sont des parties homogènes du tournoi (ce sont les « composantes fortement connexes »). L'ensemble quotient $X/\leftrightarrow$ est une partition en parties homogènes, le résumé associé à cette partition est un ordre total strict. L'élément maximal de cet ordre est un sous-ensemble non vide de X noté $TC(T)$ et appelé le *cycle supérieur* (*Top Cycle*) de T :

DÉFINITION 5. Le *cycle supérieur* de T est l'ensemble

$$TC(T) = \{x \in X : \forall\, y \in X, y \neq x \Rightarrow x \mapsto y\}.$$

Clairement, toute solution S vérifiant la cohérence de Smith sélectionne dans le cycle supérieur. Mais cet ensemble est souvent très gros, ce qui motive la recherche de solutions plus fines.

3.2. *L'ensemble non-couvert*

Cette solution a été proposée indépendamment par Fishburn (1977) et Miller (1980). Étant donnés deux sommets x et y, on dit que *x couvre y* ssi $T^+(y) \subseteq T^+(x)$. Si $x \neq y$, on a soit $x \in T^+(y)$ et $y \notin T^+(x)$, soit au contraire $y \in T^+(x)$ et $x \notin T^+(y)$. Donc l'inclusion $T^+(y) \subseteq T^+(x)$ n'est jamais une égalité, et si x couvre y, x bat y. Ainsi, x couvre y ssi xTy et pour tout z, $yTz \Rightarrow xTz$. La relation binaire ainsi définie, dite *relation de couverture*, est transitive (car l'inclusion est transitive !) et asymétrique : c'est un ordre strict, en général non complet. On définit alors l'ensemble non-couvert, noté $UC(T)$, comme l'ensemble des éléments maximaux pour la relation de couverture. Cette présentation montre que l'ensemble non-couvert n'est jamais vide et donc UC est une solution de tournoi. On démontre (« principe des deux pas », Shepsle et Weingast (1982)) que les points non-couverts sont ceux qui battent tout sommet du tournoi *en au plus deux coups* ; il s'agit des *centres* du tournoi (voir Berge (1970) par exemple pour la définition générale des centres d'un graphe). On peut donc poser :

DÉFINITION 6. L'*ensemble non-couvert* est défini par :

$$UC(T) = \{x \in X : \forall\, z \in X, zTx \Rightarrow \exists\, y \in X : xTy \wedge yTz\}.$$

Clairement, cet ensemble est inclus dans le cycle supérieur du tournoi, et cette inclusion peut être stricte.

On peut aussi interpréter la relation de couverture dans le jeu associé au tournoi. Rappelons que, dans un jeu, une stratégie x d'un joueur A *domine* la stratégie y du même joueur A si x fait mieux que y quelles que soient les stratégies utilisées par les adversaires de A. Dans le cas du jeu symétrique de tournoi, x domine y au sens de la théorie des jeux ssi x couvre y. L'ensemble non-couvert est donc l'ensemble des stratégies non-dominées.

Cette solution possède les propriétés de monotonie et de cohérence par composition mais pas la propriété du sur-ensemble fort.

L'ensemble non-couvert joue un rôle primordial dans la théorie des tournois, toutes les solutions « pratiques » présentées précédemment sélectionnent des points non-couverts et toutes les solutions « théoriques » qui vont être présentées dans la suite font de même. Le premier raffinement théorique auquel on peut penser est le cycle supérieur du tournoi restreint aux sommets non-couverts : $TC \circ UC(T) = TC(T/UC(T))$. Moulin (1986) a donné l'exemple d'un tournoi dans lequel $C(T) \cap TC \circ UC(T) = \varnothing$. Banks, Bordes et Le Breton (1991) ont montré que cette situation ne pouvait pas se produire avec la solution de Slater : pour tout T, $SL(T) \subseteq TC \circ UC(T)$.

Les raffinements suivants de l'ensemble non-couvert sont ses itérés :

$$UC^2 = UC \circ UC, \ldots, UC^{k+1} = UC \circ UC^k, UC^\infty = \bigcap_k UC^k.$$

Dès que k est supérieur ou égal à deux, les vainqueurs de Slater peuvent ne plus être sélectionnés par ces solutions. La solution UC^{∞} correspond dans le jeu du tournoi à l'élimination itérative des stratégies dominées, mais ce n'est pas une solution de tournoi très intéressante ; en effet, Laslier (1993) donne un exemple prouvant qu'elle n'est pas monotone. (Ce qui montre incidemment que la monotonie n'est pas une propriété triviale et que la composée de deux solutions monotones peut ne pas l'être.)

3.3 *L'ensemble couvrant minimal*

Soit Y une partie de X et $T \in \mathcal{T}(X)$, soient aussi $y \in Y$ et $x \in X \setminus Y$. On dit que *y couvre x dans $Y \cup \{x\}$* si y couvre x dans le tournoi $T/(Y \cup \{x\})$. On dit que Y est *couvrant* dans T si tout point $x \in X \setminus Y$ est couvert dans $Y \cup \{x\}$. On devine que l'ensemble non-couvert itéré, $UC^{\infty}(T)$ est un ensemble couvrant. Dutta (1988) a montré que c'est bien le cas mais que, choses plus étonnantes, d'une part il existe pour certains tournois des ensembles couvrants strictement plus petits que $UC^{\infty}(T)$, et d'autre part l'intersection de deux ensembles couvrants n'est jamais vide. Il existe donc un ensemble couvrant minimal (par inclusion), ce qui permet de définir une nouvelle solution de tournoi, notée $MC(T)$ (en anglais : minimal covering set) :

DÉFINITION 7. L'*ensemble couvrant minimal* de T, $MC(T)$, est le plus petit sous-ensemble de X tel que tout point $x \in X \setminus MC(T)$ soit couvert dans $MC(T) \cup \{x\}$.

L'ensemble couvrant minimal a été axiomatisé par Dutta. Il possède d'excellentes propriétés normatives (Laffond, Laslier et Le Breton, 1995a) ; par exemple, il vérifie les propriétés de monotonie, de cohérence par composition et de sur-ensemble fort. Mais il est malheureusement assez difficile à calculer.

On peut donner de la solution MC une interprétation en termes de théorie des jeux à l'aide de la notion introduite par Shapley (1964) d'*Ensemble Selle Faible*. Dans un jeu à deux joueurs, Shapley définit un Ensemble Selle Faible comme un couple d'ensembles de stratégies (un ensemble par joueur) tel que toute stratégie ajoutée apparaisse comme dominée : dans le cas du jeu symétrique du tournoi, c'est exactement l'idée de Dutta. En général, il existe de tels ensembles, mais il peut en exister plusieurs. Duggan et Le Breton (1995) ont montré qu'un ensemble selle faible *unique* existe dans les jeux à deux joueurs symétriques et à somme nulle pourvu que les paiements hors-diagonale soient non-nuls. Comme c'est le cas du jeu associé à un tournoi (ces paiements sont +1 ou −1), ils obtiennent comme cas particulier le résultat de Dutta.

3.4. *La solution du Bipartisan*

Cette solution est définie directement à partir du jeu associé à un tournoi. En tant que jeu à deux joueurs symétrique et à somme nulle, ce jeu possède des équilibres de Nash en stratégies mixtes. Fisher et Ryan (1992, 1995a, 1995b) et Laffond, Laslier et Le Breton (1993a) ont, par deux méthodes différentes, démontré qu'il possède un *unique* équilibre de Nash, et que cet équilibre est symétrique. À tout tournoi $T \in \mathcal{T}(X)$ on peut donc associer une distribution de probabilité p sur X telle que le couple de réponses (p, p) soit l'équilibre en stratégies mixtes du jeu associé à T. Un sommet est dit appartenir à l'*ensemble du Bipartisan*, noté $BP(T)$, si ce sommet est joué à l'équilibre avec une probabilité non nulle :

DÉFINITION 8. La *solution du Bipartisan*, *BP*, est définie comme le support de la stratégie d'équilibre du jeu associé au tournoi.

Cette solution est plus fine que l'ensemble couvrant minimal. On a donc la suite d'inclusions :

$$BP \subseteq MC \subseteq UC^{\infty} \subseteq \ldots \subseteq UC^{k} \subseteq \ldots \subseteq UC \subseteq TC,$$

ces inclusions pouvant être strictes (du moins celles qui ne sont pas trivialement des égalités, comme $UC^{\infty} = UC^{n}$). En l'absence de vainqueur de Condorcet, BP sélectionne toujours au moins trois points, il en est donc de même des autres solutions de cette liste. On démontre facilement que cette solution est régulière, ce qui prouve que les précédentes le sont aussi. Comme l'ensemble couvrant minimal, l'ensemble du Bipartisan possède de bonnes propriétés normatives, en particulier il vérifie la monotonie, la cohérence par composition et la propriété de sur-ensemble fort. Il est assez facile à calculer par programmation linéaire de l'équilibre de Nash.

Il possède aussi une interprétation positive évidente : soient deux partis politiques A et B et un ensemble d'électeurs (en nombre impair) exprimant des préférences (ordres totaux stricts) sur les éléments de X dits *propositions* pour éviter l'anglicisme *alternatives*. La relation binaire « une majorité d'électeurs préfère x à y » définit un tournoi $T \in \mathcal{T}(X)$. Le jeu associé à T décrit la « compétition électorale pure » entre A et B : chaque parti choisit une proposition et les électeurs votent pour l'un ou l'autre des partis en fonction de leurs préférences sur les propositions. Le résultat d'unicité obtenu à propos du jeu de tournoi se généralise à la classe des jeux à deux joueurs symétriques à somme nulle dont tous les paiements hors-diagonale sont des entiers impairs (Laffond, Laslier et Le Breton, 1995b), ce qui permet d'obtenir le résultat pour d'autres jeux électoraux que les tournois (Laffond, Laslier et Le Breton, 1994).

On peut remarquer que l'étude des solutions de tournois a ainsi permis d'obtenir plusieurs résultats nouveaux sur les jeux à deux joueurs symétriques et de somme nulle, en analysant les notions d'élimination itérative des stratégies dominées, d'ensemble selle faible et d'équilibre de Nash mixte avec les outils de la théorie des graphes. En pratique, l'étude des tournois est un exercice de théorie des jeux particulièrement éclairant et pédagogique.

3.5. *Autres affaiblissements de la couverture*

Ici, on cherche à définir, étant donné T, une relation binaire R qui soit un affaiblissement de la relation de couverture associée à T (c'est-à-dire telle que xRy si x couvre y). L'ensemble des éléments maximaux pour R est alors un sous-ensemble de l'ensemble non-couvert. S'il est non-vide, on peut définir ainsi une solution de tournoi qui est plus sélective que l'ensemble non-couvert. Deux méthodes sont ici envisagées ; dans la première, R est une sous-relation du tournoi initial (xRy implique xTy) mais l'ensemble des points maximaux peut être vide ; dans la seconde on peut avoir xRy et yTx mais il y a toujours des points maximaux.

3.5.1. Affaiblissement à la Laffond et Lainé

Rappelons que x couvre y si x bat y et *tous* les points que y bat. L'affaiblissement le plus naturel est donc de dire que x couvre faiblement y si x bat y et bat *presque tous* les points que y bat. Cette idée est explorée par Laffond et Lainé (1994) sous plusieurs variantes dont la plus intéressante est la suivante : on dit que x *couvre faiblement* y, et on note $x \rightarrow_f y$ si :

- xTy
- $Card\{z \in X : yTz \wedge zTx\} \leq 1.$

On définit alors l'*ensemble fortement non-couvert* pour T comme l'ensemble des points maximaux pour la relation $\rightarrow_f$, c'est-à-dire l'ensemble des points qui ne sont pas faiblement couverts. Ce sous-ensemble de $UC(T)$ peut être vide, mais à partir de la remarque que si $x \rightarrow_f y$ alors $s(x) \geq s(y)$, Laffond et Lainé peuvent caractériser les tournois, assez spécifiques, pour lesquels l'ensemble fortement non-couvert est vide.

3.5.2. Affaiblissements à la Levchenkov

Pour un entier $q \geq 2$, étant donnés $x \neq y$, on dit que x *q-surpasse* y ssi

- $\forall z \in X \setminus \{x, y\}, yTz \Rightarrow xTz$
- $yTx \Rightarrow Card\{z \in X : xTz \wedge zTy\} \geq q$.

Notons xM_qy si x q-surpasse y. Clairement, si x couvre y, xM_qy, et pour $q' > q$, $xM_{q'}y \Rightarrow xM_qy$. De plus on peut observer que si xM_qy alors $s(x) > s(y)$. Ceci assure que les relations M_q, pour $q \geq 2$ sont des sous-relations acycliques de la relation de couverture. Elles ont donc des éléments maximaux. Soit $L_q(T)$ l'ensemble des éléments maximaux de M_q, L_q est une solution de tournoi et on a pour tout tournoi T :

$$L_2(T) \subseteq L_3(T) \subseteq \dots \subseteq L_q(T) \subseteq \dots \subseteq UC(T).$$

On s'intéresse surtout à L_2. Cette solution est régulière, elle est monotone mais ne vérifie pas la propriété du sur-ensemble fort et n'est pas cohérente par composition. Clairement, elle contient la solution de Copeland, on a ni $L_2 \subseteq UC^2$ ni $UC^2 \subseteq L_2$. Elle peut dans certains cas ne sélectionner qu'un seul point (qui sera alors le vainqueur de Copeland), même en l'absence de vainqueur de Condorcet. Cette solution a été définie et étudiée par Levchenkov (1995b).

3.6. *La solution de Banks*

Un sous-ensemble Y non vide de X est appelé une *chaîne transitive* de $T \in \mathcal{T}(X)$ si T/Y est transitif. Une chaîne transitive Y est *maximale* s'il n'existe pas de chaîne transitive Z telle que $Y \subset Z$. Toute chaîne transitive possède un vainqueur de Condorcet, et il existe toujours de telles chaînes. On définit une nouvelle solution de tournoi, dite *ensemble de Banks* et notée $B(T)$ de la manière suivante :

DÉFINITION 9. L'*ensemble de Banks*, $B(T)$, est l'ensemble des vainqueurs de Condorcet des chaînes transitives maximales de T.

Cette définition est due à Banks (1985). L'ensemble $B(T)$ est un sous-ensemble de l'ensemble non-couvert mais pas toujours de ses itérés. Plus précisément, on peut démontrer (Laffond, Laslier et Le Breton, 1995a) les relations suivantes :

- $\forall T, B(T) \subseteq TC \circ UC(T) \subseteq UC(T)$
- $\exists T : B(T) \not\subseteq UC^2(T)$
- $\forall T, B(T) \cap MC(T) \neq \emptyset$
- $\exists T : B(T) \not\subseteq BP(T)$ et $\exists T : BP(T) \not\subseteq B(T)$
- $\forall T$ et $\forall k$, $B \circ MC(T) \subseteq B \circ UC^\infty(T) \subseteq B \circ UC^k(T) \subseteq B(T)$
- $\forall T$ et $\forall k$, $B^k(T) \subseteq UC^k(T)$ et $B^\infty(T) \subseteq UC^\infty(T)$.

Les vainqueurs de Copeland peuvent ne pas appartenir à l'ensemble de Banks. Laffond et Laslier (1991) montrent qu'il en est de même pour les vainqueurs de Slater et prouvent aussi que la solution de Banks n'est pas régulière ; ceci montre que, même dans un tournoi régulier, il se peut que des points soient, d'un certain point de vue, meilleurs que les autres. Pour des tournois suffisamment gros, les ensembles de Copeland, de Banks et de Slater peuvent être disjoints. Dans Charon, Hudry et Woirgard (1996) figure un tournoi d'ordre 16 tel que les ensembles de Banks et de Slater sont disjoints. Cette solution est monotone et cohérente par composition mais ne vérifie pas la propriété du sur-ensemble fort. Nous reviendrons sur l'ensemble de Banks à propos des arbres binaires.

3.7. *L'ensemble d'équilibre*

Avant de définir cette solution, plusieurs concepts doivent être introduits. Notons $T^{-}(y)$ l'ensemble des points qui battent $y \in X$ dans le tournoi $T \in \mathcal{T}(X)$:

$$x \in T^{-}(y) \Leftrightarrow xTy$$

Étant donnée une solution de tournoi quelconque, S, on associe à T une nouvelle relation binaire sur X, notée $D(S, T)$, en posant :

$$xD(S, T)y \Leftrightarrow x \in S(T/T^{-}(y)).$$

On dira que x *conteste* y (au sens de S). Une telle relation de contestation est asymétrique.

Étant donnée une relation binaire quelconque R sur X, on dit qu'une partie non vide Y de X est *rétensive* pour R (en anglais : *retentive*) s'il n'existe pas $x \in X \setminus Y$ et $y \in Y$ tels que xRy. Une partie rétensive Y est *minimale* s'il n'existe pas de partie Z rétensive telle que $Z \subset Y$. L'*ensemble supérieur* de R, noté $TS(R)$, est la réunion des parties minimales rétensives pour R. Dans le cas où R est un tournoi, R admet une unique partie minimale rétensive : son cycle supérieur.

L'*ensemble d'équilibre du tournoi T*, noté $TEQ(T)$ est défini par récurrence sur l'ordre n de T comme ensemble supérieur de sa propre relation de contestation. Pour les tournois d'ordre 1, il n'y a pas de problème ; supposons que l'on ait défini $TEQ(U)$ pour tout tournoi U d'ordre inférieur ou égal à n et considérons un tournoi T d'ordre $n + 1$. Alors chaque sous-tournoi $T/T^{-}(x)$ est d'ordre inférieur ou égal à n, on peut donc calculer la relation $D(TEQ, T)$, et en particulier son ensemble supérieur $TS(D(TEQ, T))$. On pose alors $TEQ(T) = TS(D(TEQ, T))$. Cette construction, due à Schwartz (1990), définit une solution de tournoi vérifiant les principes de cohérence de Condorcet et de Smith. On peut la résumer dans la définition suivante :

DÉFINITION 10. L'*ensemble d'équilibre du tournoi* est l'unique solution de tournoi, TEQ, vérifiant pour tout tournoi T :

$$TEQ(T) = TS(D(TEQ, T)).$$

Cette solution est difficile à calculer (on ne connaît cependant pas sa complexité algorithmique) ; de plus sa définition récursive rend son étude délicate. Schwartz a montré que l'ensemble d'équilibre est toujours un sous-ensemble de l'ensemble de Banks, sous-ensemble quelquefois strict ($TEQ(T)$ peut aussi être un sous-ensemble strict de $B^{\infty}(T)$). On en déduit que la solution TEQ n'est pas régulière. Dutta (1990) exhibe un tournoi T d'ordre 8 pour lequel $TEQ(T)$ est strictement inclus dans $MC(T)$ mais on sait pas si pour tout tournoi $TEQ(T) \subseteq MC(T)$. Laffond, Laslier et Le Breton (1995a) montrent que $TEQ = TEQ \circ UC^{\infty}$ et prouvent à l'aide de tournois d'ordre 6 et 29 qu'il n'y a pas d'inclusion entre TEQ et BP. Laffond, Lainé et Laslier (1996) montrent que TEQ satisfait à la cohérence par composition. On ne sait à peu près rien d'autre sur cette solution de tournoi. Laffond, Laslier et Le Breton (1993b) expliquent comment les conjectures qu'on peut émettre à son propos sont reliées entre elles. Par exemple si on pouvait prouver que la relation de contestation associée à TEQ n'admet jamais qu'une seule partie minimale rétensive alors on aurait la monotonie de TEQ, la propriété du sur-ensemble fort et l'inclusion $TEQ \subseteq MC$.

3.8. *Les arbres binaires*

Un *arbre binaire étiqueté* d'ordre n est un arbre binaire à $m > n$ nœuds initiaux et un nœud terminal, muni d'une application qui associe à chaque nœud initial un nombre entre 1 et n, son *étiquette*. Chacune des n étiquettes doit correspondre à au moins un nœud initial mais plusieurs nœuds initiaux peuvent avoir la même étiquette. Chaque nœud de l'arbre binaire, à l'exception des nœuds initiaux, possède exactement deux *prédécesseurs*. La figure 1a montre un arbre binaire étiqueté d'ordre 5 qui possède la propriété particulière que chaque étiquette n'y apparaît qu'une fois.

Figures 1a et 1b

Étant donné $\mathfrak{A}$ un arbre binaire étiqueté d'ordre n, considérons un tournoi $T \in \mathfrak{T}(X)$ d'ordre n et une bijection $\phi : X \to \{1, \ldots, n\}$. On appellera ϕ un *tirage* (ϕ définit donc un ordre total sur X). On peut alors jouer le tournoi T suivant le « tableau de match » défini par $\mathfrak{A}$ et ϕ de la manière naturelle suivante : soit $\mathfrak{N}$ l'ensemble des nœuds de l'arbre ; on définit une application ψ de $\mathfrak{N}$ dans X en posant : si α est un nœud initial d'étiquette $i \in \{1, \ldots, n\}$ alors $\psi(\alpha) = \phi^{-1}(i)$, et si α est un nœud non-initial, alors il possède deux prédécesseurs, β et γ, et on pose $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$ si $\psi(\beta) T \psi(\gamma)$ et $\psi(\alpha) = \psi(\gamma)$ si $\psi(\gamma) T \psi(\beta)$. Prenons par exemple $T \in \mathfrak{T}(\{a, b, c, d, e\})$. Soit ϕ le tirage :

$$\phi(a) = 1,\ \phi(b) = 2,\ \phi(c) = 3,\ \phi(d) = 4,\ \phi(e) = 5.$$

Si T vérifie aTb, cTa, dTc et dTe alors on obtient le résultat représenté sur la figure 1b. Le *gagnant de T pour l'arbre étiqueté $\mathfrak{A}$ et le tirage ϕ* est le sommet que ψ attribue au nœud terminal de l'arbre. Dans l'exemple il s'agit du sommet d. On notera :

$$d = <\mathfrak{A}, T, \phi>.$$

Cette manière de déterminer des vainqueurs d'un tournoi correspond à ce qui est pratiqué pour certaines compétitions sportives, par exemple les « systèmes de coupe » à élimination directe. Elle est cependant plus générale car nous n'avons pas exclu qu'une équipe apparaisse plusieurs fois dans le tirage des places initiales, bien que l'exemple proposé n'ait pas exploité cette possibilité. La même modélisation représente le système des propositions, amendements et sous-amendements utilisé dans certaines assemblées législatives telles que le sénat américain (Ordeshook, 1986).

La généralisation à un ordre quelconque du schéma proposé en exemple est appelé un *agenda simple*. Il est clair que dans un agenda simple, le vainqueur dépend de manière cruciale du tirage (l'ordre d'apparition des sommets). Qui décide de ce tirage possède un pouvoir stratégique important. Nous reviendrons sur ce point.

Chaque arbre étiqueté d'ordre n définit une correspondance de choix dans les tournois d'ordre n, obtenue en faisant varier le tirage dans l'ensemble des tirages possibles. Si on dispose d'une famille $(\mathfrak{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'arbres étiquetés (un pour chaque ordre n), on définit ainsi une solution de tournoi. On pose, pour tout T d'ordre n :

$$\Gamma^{\mathfrak{A}_n}(T) = \{x \in X : \exists\ \phi \in \mathfrak{B}_n(X) : x = <\mathfrak{A}_n, T, \phi>\},$$

où $\mathfrak{B}_n(X)$ désigne l'ensemble des bijections de $\{1, \ldots, n\}$ sur X (c'est-à-dire l'ensemble des ordres totaux définis sur X).

DÉFINITION 11. Soit S une solution de tournoi ; s'il existe une suite $(\mathfrak{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'arbres étiquetés telle que pour tout tournoi T d'ordre n, on ait

$$S(T) = \Gamma^{\mathfrak{A}_n}(T)$$

on dit que $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *implémente* S.

Il est assez facile de voir que si S est implémentable par des arbres binaires, alors S sélectionne dans le cycle supérieur. Il est aussi assez immédiat de constater que la famille des agendas simples implémente précisément la solution TC. Mais bien peu de choses sont connues à propos de cette notion d'implémentation. Moulin (1986) a démontré que la solution de Copeland n'est pas implémentable par des arbres binaires, en utilisant le concept de parties homogènes d'un tournoi (qu'il appelle « ensembles adjacents »), mais on est loin de pouvoir caractériser les solutions implémentables.

3.9. *Le vote sophistiqué*

Revenons aux agendas simples et considérons des tournois issus de l'agrégation par la règle majoritaire des préférences d'une population I d'individus. Supposons que ces individus soient des agents rationnels susceptibles, pour des raisons stratégiques, de ne pas voter conformément à leurs préférences vraies. Considérons par exemple l'agenda simple d'ordre 3, dans lequel le sommet a est d'abord opposé au sommet b, puis le sommet choisi entre a et b est à son tour opposé au sommet c. En *vote sincère*, c est opposé à a si aTb et à b si bTa. Le résultat est donc :
cas 1 : c si aTb et cTa,
cas 2 : c si bTa et cTb,
cas 3 : a si aTb et aTc,
cas 4 : b si bTa et bTc.

Mais si les votants se comportent de manière stratégique, ils peuvent manipuler ce processus. Par exemple si aTb, cTa et bTc (cas 1 : c finalement choisi), un individu qui préfère a à b et b à c peut avoir intérêt à voter pour b contre a pour que c soit opposé à b au second tour, ce qui ferait choisir finalement b au lieu de c. Si tous les individus font ces mêmes raisonnements, on est en présence d'une situation de *vote sophistiqué*. Pour étudier une telle situation, on suppose que les préférences individuelles sont connaissance commune des individus. On a alors un jeu à information complète entre ces individus. L'étude de ces jeux de vote sophistiqué a été entreprise par Farquharson (1969) et continuée par McKelvey et Niemi (1978), Shepsle et Weingast (1982), Moulin (1983, 1986), Banks (1985), Dutta et Sen (1993). Nous ne détaillerons pas cette étude mais nous expliquerons seulement le résultat suivant :

PROPOSITION. Le vote sophistiqué sur un agenda simple conduit au choix d'une proposition appartenant à l'ensemble de Banks du tournoi majoritaire.

Ce beau résultat est en fait la raison pour laquelle l'ensemble de Banks a été introduit dans la théorie des tournois. Adoptons d'abord la notation suivante, qui facilite la description des arbres binaires. Étant donné un tournoi T sur un ensemble X, définissons sur X une *opération*, qui sera notée comme un produit, par : pour tout x et tout y dans X,

- si $x = y$, $xy = x$,
- si xTy, $xy = x$,
- si yTx, $xy = y$.

Cette opération vérifie les deux propriétés suivantes : pour tout x et tout y dans X, $xy \in \{x, y\}$ et $xy = yx$, et toute opération sur X vérifiant ces deux propriétés définit un tournoi sur X. Il est donc équivalent de parler d'un tournoi ou d'un produit tel que $xy = yx \in \{x, y\}$. On peut remarquer que la *transitivité* du tournoi est équivalente à l'*associativité* du produit. Un arbre binaire étiqueté d'ordre n peut alors se définir comme un *polynôme* de n variables. Par exemple l'arbre binaire étiqueté d'ordre 5 représenté sur la figure 1a est le polynôme

$$\pi_5\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_5(x_4(x_3(x_2x_1))).$$

Plus généralement, les polynômes π_n définis par $\pi_1(x_1) = x_1$ et

$$\pi_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = x_n \, \pi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

correspondent aux agendas simples.

Supposons que nous ayons donné un sens précis au « résultat de l'arbre binaire en vote sophistiqué » et que pour chaque tournoi, chaque arbre binaire étiqueté et chaque tirage, ce résultat soit unique. Soit alors un agenda simple d'ordre n et un tournoi T, supposons que le tirage ϕ fasse apparaître les propositions dans l'ordre x_1, x_2, x_3, etc. Désignons par $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la proposition finalement choisie en vote sophistiqué. À l'issue du premier vote entre x_1 et x_2, les votants seront face à un agenda simple d'ordre $n - 1$, soit avec le tirage x_1, x_3, x_4, etc., soit avec le tirage x_2, x_3, x_4, etc. Le résultat en vote sophistiqué sera donc soit $f_{n-1}(x_1, x_3, \ldots, x_n)$, soit $f_{n-1}(x_2, x_3, \ldots, x_n)$. À l'équilibre du jeu (nous ne détaillerons pas ici le concept d'équilibre à utiliser), les votants votent pour ce qui conduit au résultat final le plus favorable pour eux, c'est-à-dire que le résultat final est :

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{n-1}(x_1, x_3, \ldots, x_n) \, f_{n-1}(x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

On constate alors que les fonctions f_n ainsi définies sont en fait des polynômes, c'est-à-dire que pour chaque agenda simple, il existe un arbre binaire étiqueté et un tirage qui donne (en vote sincère) le résultat du vote sophistiqué sur l'agenda simple. On peut écrire les premiers de ces « agendas sophistiqués » :

$$f_1(x_1) = x_1$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_3)(x_2 x_3)$$

$$f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((x_1 x_4)(x_3 x_4))((x_2 x_4)(x_3 x_4))$$

$$f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = [((x_1 x_5)(x_4 x_5))((x_3 x_5)(x_4 x_5))][((x_2 x_5)(x_4 x_5))((x_3 x_5)(x_4 x_5))].$$

La représentation graphique de l'agenda sophistiqué d'ordre n comprend 2^{n-1} nœuds initiaux. On montre que la solution de tournoi correspondante est la solution de Banks : pour tout tournoi T d'ordre n :

$$\Gamma f_n(T) = B(T).$$

Après le cycle supérieur, qui est implémenté par les agendas simples, la solution de Banks est la seconde solution de tournoi intéressante qui est implémentable par arbres binaires.

BIBLIOGRAPHIE

BANKS, J. (1985) "Sophisticated voting outcomes and agenda control", *Social Choice and Welfare*, 2, 295-306.

BANKS, J., G. BORDES et M. LE BRETON (1991) "Covering relations, closest orderings and hamiltonian bypaths in tournaments", *Social Choice and Welfare*, 8, 355-363.

BARTHÉLEMY, J.-P. et B. MONJARDET (1981) "The median procedure in cluster analysis and social choice theory", *Mathematical Social Sciences*, 1, 235-267.

BERGE, C. (1970) *Graphes*, Gauthier-Villars.

BERMOND, J.-C. (1972) "Ordres à distance minimum d'un tournoi et graphes partiels sans circuits maximaux", *Math. Sci. hum*, 37, 5-25.

CHARON, I., O. HUDRY et F. WOIRGARD (1996) "Ordres médians et ordres de Slater des tournois", *Math. Inf. et Sci. hum.*, 133.

COPELAND, A.H. (1951) "A 'reasonable' social welfare function", Seminar on applications of mathematics to social sciences, University of Michigan.

DUGGAN, J. et M. LE BRETON (1995) "Dutta's minimal covering set and Shapley's saddle", Document de travail du GREQAM 95A02, Aix-Marseille.

DUTTA, B. (1988) "Covering sets and a new Condorcet choice correspondence", *Journal of Economic Theory*, 44, 63-80.

DUTTA, B. (1990) "On the Tournament Equilibrium set", *Social Choice and Welfare*, 7, 381-383.
DUTTA, B. et A. SEN (1993) "Implementing generalized Condorcet social choice functions via backward induction", *Social Choice and Welfare*, 10, 149-160.
FARQUHARSON, R. (1969) *Theory of voting*. Yale University press, New Haven.
FISHBURN, P. (1977) "Condorcet social choice functions", *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 33, 469-489.
FISHER, D. et J. RYAN (1992) "Optimal strategies for a generalized "Scissors, Paper and Stone" game", *American Mathematical Monthly*, 99, 935-942.
FISHER, D. et J. RYAN (1995a) "Tournament games and Positive Tournaments", *Journal of Graph Theory*, 19, 217-236.
FISHER, D. et J. RYAN (1995b) "Probabilities within optimal strategies for tournament games", *Discrete Applied Mathematics*, 56, 87-91.
HENRIET, D. (1985) "The Copeland choice function : An axiomatic characterization", *Social Choice and Welfare*, 2, 49-63.
JENSEN, R. (1986) "Comparison of consensus methods for priority ranking problems", *Decision Sciences*, 17, 195-211.
JOHNSON, C., W. BEINE et T. WANG (1979) "Left-right asymmetry in an eigenvector ranking procedure", *Journal of Mathematical Psychology*, 19, 61-64.
KEENER, J. (1993) "The Perron-Frobenius theorem and the ranking of football teams", *SIAM Review*, 35 (1), 80-93.
KENDALL, M.G. (1955) "Further contributions to the theory of paired comparisons", *Biometrics*, 11, 43-62.
LAFFOND, G. et J. LAINÉ (1994) "Weak covering relations", *Theory and Decision*, 37, 245-265.
LAFFOND, G., J. LAINÉ et J.-F. LASLIER (1996) "Composition-consistency of social choice functions and tournament solutions", *Social Choice and Welfare*, 13, 75-93.
LAFFOND, G. et J.-F. LASLIER (1991) "Slater's winners of a tournament may not be in the Banks set", *Social Choice and Welfare*, 8, 355-363.
LAFFOND, G., J.-F. LASLIER et M. LE BRETON (1993a) "The Bipartisan set of a tournament game", *Games and Economic Behavior*, 5, 182-201.
LAFFOND, G., J.-F. LASLIER et M. LE BRETON (1993b) "More on the Tournament Equilibrium Set", *Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines*, 123, 37-44.
LAFFOND, G., J.-F. LASLIER et M. LE BRETON (1994) "Social choice mediators", *American Economic Review* (proc.), 84 (2), 448-453.
LAFFOND, G., J.-F. LASLIER et M. LE BRETON (1995a) "A complete analysis of Condorcet choice correspondences", *Mathematical Social Sciences*, 30 (1), 23-35.
LAFFOND, G., J.-F. LASLIER et M. LE BRETON (1995b) "A theorem on symmetric, two-player zero-sum games", Document de travail du GREQAM 95A01, Aix-Marseille.
LASLIER, J.-F. (1993) *Solutions de Tournois*, Habilitation à diriger les recherches en Science Économique, Université de Cergy-Pontoise.
LASLIER, J.-F. (1995) "Multivariate description of comparison matrices", à paraître dans *Multicriteria Decision analysis*, 5 (2).
LEVCHENKOV, V.S. (1992) "Social choice theory : a new sight", Preprint of the Institute for System Analysis, Moscou.
LEVCHENKOV, V.S. (1995a) "Self-consistent choice rule", Document de travail du Laboratoire d'Économétrie, CNAM, Paris.
LEVCHENKOV, V.S. (1995b) "Cyclic tournaments : A matching solution", Document de travail du Laboratoire d'Économétrie, CNAM, Paris.
McKELVEY, R. and R. NIEMI (1978) "A multistage game representation of sophisticated voting for binary procedures", *Journal of Economic Theory*, 18, 1-22.
MICHEL, P. (1984) *Cours de mathématique pour économistes*, Economica.
MILLER, N. (1980) "A new solution set for tournaments and majority voting : Further graph-theoretical approaches to the theory of voting", *American Journal of Political Science*, 24 (1), 68-96.
MOON, J. W. (1968) *Topics on tournaments*, Holt, Rinehart and Winston.
MOULIN, H. (1983) *The Strategy of Social Choice*, North Holland, Amsterdam.

MOULIN, H. (1986) "Choosing from a tournament", *Social Choice and Welfare*, 3, 272-291.
ORDESHOOK, P.C. (1986) *Game theory and political theory, an introduction*, Cambridge University Press.
RUBINSTEIN, A. (1980) "Ranking the participants in a tournament", *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 98, 108-11.
SAATY, T. (1977) "A scaling method for priorities in hierarchical structures", *Journal of Mathematical Psychology*, 15, 234-281.
SAATY, T. (1986) "Axiomatic foundation of the analytical hierarchy process", *Management Science*, 32 (7), 84-855.
SCHWARTZ, T. (1990) "Cyclic tournaments and cooperative majority voting : A solution", *Social Choice and Welfare*, 7, 19-29.
SHAPLEY, L. (1964) "Some topics in two-persons games", *in Advances in Game Theory*, Annals of Mathematic Studies 52, M. Dresher, L. Shapley et A. Tucker (eds), Princeton University Press, 1-28.
SHEPSLE, K. et B. WEINGAST (1982) "Uncovered sets and sophistigated voting outcomes with implications for agenda institutions", *American Journal of Political Science*, 21, 769-803.
SLATER, P. (1961) "Inconsistencies in a schedule of paired comparisons", *Biometrika*, 48, 303-312.
WEI, T. (1952) *The Algebraic Foundations of ranking Theory*, Ph. D. thesis, Cambridge University.
ZERMELO, E. (1929) "Die Berechnung der Turnier-Ergebnisse als ein maximal Problem der Warscheinlichkeistsrechnung", *Math. Zeitung*, 29, 436-460.