MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

IRÈNE CHARON
OLIVIER HUDRY
FRÉDÉRIC WOIRGARD

Ordres médians et ordres de Slater des tournois

Mathématiques et sciences humaines, tome 133 (1996), p. 23-56
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1996__133__23_0>

Mzth. Inf. Sci. hum. (34[e] année, n° 133, *1996*, pp. 23-56)

ORDRES MÉDIANS ET ORDRES DE SLATER DES TOURNOIS

Irène CHARON, Olivier HUDRY et Frédéric WOIRGARD[1]

RÉSUMÉ – *Dans cet article, nous essayons de faire le point sur les résultats concernant les aspects combinatoires et algorithmiques des ordres médians et des ordres de Slater des tournois. La plupart des résultats recensés sont tirés de différentes publications ; plusieurs sont originaux.*

SUMMARY – Median and Slater's orders of tournaments.
In this paper, we try to enumerate the results dealing with the combinatorial and algorithmic aspects of the median orders and Slater orders of tournaments. Most of the quoted results may be found in the different papers devoted to these topics ; some others are new ones.

1. INTRODUCTION : DES PRÉFÉRENCES INDIVIDUELLES AUX TOURNOIS

Bien que les deux problèmes auxquels nous allons nous intéresser admettent une même modélisation, leurs origines et leurs interprétations sont distinctes. Le premier peut s'énoncer de la façon suivante, en adoptant une formulation issue de la théorie des votes : étant donné un ensemble (un *profil*, appelé aussi parfois une *opinion* ([65])) Π de m préférences individuelles R_i ($1 \leq i \leq m$) définies sur un même ensemble (fini) X de n candidats, déterminer une préférence collective O^* représentant (« agrégeant ») « le mieux possible » le profil Π ; il s'agit donc ici d'un problème que l'on pourrait qualifier d'approximation. Le second est, quant à lui, un problème d'ajustement : étant donnée une relation binaire R (représentant par exemple la préférence d'un votant unique) définie sur l'ensemble X, déterminer une relation binaire O^* vérifiant certaines propriétés (comme la transitivité) et « ressemblant le plus possible » à R.

Pour préciser le critère à optimiser dans les deux cas, nous considérons la distance δ de la différence symétrique (égale au double de la distance de Kendall) qui mesure, entre deux relations binaires R et S définies sur un même ensemble, le nombre de désaccords entre elles (voir par exemple [11] pour les propriétés et les emplois variés de cette distance) :

$$\delta(S_1, S_2) = \left|\left\{(x, y) \text{ tels que } [xS_1y \text{ et non } xS_2y] \text{ ou } [xS_2y \text{ et non } xS_1y]\right\}\right|$$

Si on dispose d'un profil $\Pi = (R_1, R_2, ..., R_m)$, on définit l'*éloignement* $\Delta(\Pi, O)$ entre Δ et O par :

$$\Delta(\Pi, O) = \sum_{i=1}^{m} \delta(R_i, O)$$

L'éloignement Δ peut être interprété comme le nombre total de désaccords entre le profil Π et la relation O.

---

[1] ENST, 46, rue Barrault, 75634 Paris cedex 13

Nous nous intéressons ici, pour le premier (respectivement second) problème, au cas où les préférences individuelles R_i (respectivement la préférence R) sont toutes des relations asymétriques et complètes définies (respectivement asymétrique et complète définie) sur l'ensemble X des candidats : il s'agit donc de *tournois* (respectivement d'un *tournoi*) ; autrement dit, dans un tournoi T, pour deux candidats x et y avec $x \neq y$, on a une et une seule des deux possibilités : xTy ou yTx ; on constate que ce type de relation, qui permet par exemple de représenter le résultat d'une méthode de comparaison par paires, comme celle proposée par Condorcet à la fin du XVIIIe siècle ([26]), contient les ordres totaux : un ordre total est un tournoi transitif et réciproquement. Nous considérerons de plus que la relation O^* recherchée, selon le problème pour approcher ou ajuster les données, doit être un ordre total. Le problème consiste alors à déterminer un ordre total strict O^* minimisant $\Delta(\Pi, O)$ dans le premier cas, $\delta(R, O)$ dans le second, sur l'ensemble des ordres totaux stricts définis sur X. Dans le premier cas, l'ordre total qui approche le mieux le profil Π sera appelé *ordre médian* ([11]) ou *ordre de Kemeny* (en mémoire de J.G. Kemeny qui fut un des premiers à poser le problème en ces termes en 1959 [56]) ; dans le second, l'ordre qui permet d'ajuster le tournoi sera appelé *ordre de Slater* (en mémoire de P. Slater qui a rencontré ce problème d'ajustement en 1961 [74]).

En considérant qu'un ordre total est un tournoi particulier, on peut unifier la formulation des deux problèmes décrits plus haut de la manière suivante :

PROBLÈME 1. Étant donné un profil Π de m tournois (éventuellement de m ordres totaux) définis sur un même ensemble X, déterminer un ordre total O^* minimisant l'éloignement Δ par rapport à Π sur l'ensemble Ω des ordres totaux définis sur X :

$$\Delta(\Pi, O^*) = \min_{O \in \Omega} \Delta(\Pi, O)$$

Le problème de Slater s'obtient donc quand Π est réduit à $m = 1$ tournoi (qu'on pourra supposer non transitif, car l'ajustement d'un ordre total en un ordre total est assez immédiat).

Il est habituel de représenter une préférence R exprimée sur X à l'aide d'un graphe. Les sommets de celui-ci sont les éléments de X et un arc (x, y) existe dans le graphe quand le candidat x est préféré au candidat y pour la relation R, c'est-à-dire quand on a xRy ; les propriétés du graphe sont alors celles que possèdent R : il pourra, selon les cas, être par exemple asymétrique, complet, transitif, etc. De la même manière, le profil Π de m tournois $(T_1, T_2, ..., T_m)$ peut être représenté à l'aide d'un graphe G_Π orienté symétrique complet (tous les arcs existent sauf les boucles (x, x)) pondéré : le poids de l'arc (x, y) traduit l'intensité globale de la préférence de x sur y. Afin de mesurer celle-ci, on peut développer Δ en récrivant l'éloignement entre le profil Π et un ordre total O, comme cela est fait par exemple dans [11]. En posant pour cela $t_{xy}^j = 1$ si on a xT_jy (c'est-à-dire si x est « préféré » à y par le votant j) et $t_{xy}^j = 0$ sinon et, de la même façon, $o_{xy} = 1$ si xOy et $o_{xy} = 0$ sinon, il vient :

$$\delta(T_j, O) = \sum_{(x,y) \in X^2} \left| t_{xy}^j - o_{xy} \right| = \sum_{(x,y) \in X^2} \left[t_{xy}^j - o_{xy} \right]^2$$

puis

$$\Delta(\Pi, O) = C - \sum_{(x,y) \in X^2} m_{xy} . o_{xy}$$

où C est une constante qui mesure le nombre total d'opinions exprimées par l'ensemble des votants : $C = \sum_{j=1}^{m} \sum_{(x,y) \in X^2} t_{xy}^j$, soit ici $C = \frac{m.n(n-1)}{2}$ si n désigne le nombre de candidats ($n = |X|$), et où m_{xy} représente le double de l'écart entre le nombre de votants préférant x à y et la majorité $\frac{m}{2}$: $m_{xy} = 2\left(\sum_{j=1}^{m} t_{xy}^{j} - \frac{m}{2}\right)$. On notera que m_{xy} est un entier relatif qui a la même parité que m et qui vérifie de plus l'égalité : $m_{xy} + m_{yx} = 0$.

Ce développement incite à pondérer les arcs (x, y) de G_Π par m_{xy}. La matrice $M = (m_{xy})$ des poids que l'on obtient ainsi est appelée *matrice majoritaire*.

S'il est ainsi facile d'associer un graphe pondéré à tout profil de tournois (et donc à tout profil d'ordres totaux), il est naturel de se poser la question réciproque de savoir quels sont les graphes représentant des profils de tournois ou d'ordres totaux. B. Debord a fourni à cet égard les caractérisations suivantes dans [28] :

PROPOSITION 1 (caractérisation d'une matrice majoritaire associée à un profil de m tournois). Une matrice $M = (m_{xy})$ peut être considérée comme la matrice majoritaire d'un profil de m tournois si et seulement si on a :

1) $\underset{(x,y)\in X^2}{\mathrm{Max}} \left|m_{xy}\right| \le m$

2) les termes m_{xy} ont tous la parité de m

3) pour tout couple $(x, y) \in X^2$, on a $m_{xy} + m_{yx} = 0$. ♦

PROPOSITION 2 (caractérisation d'une matrice majoritaire associée à un profil d'ordres totaux en nombre non fixé). Une matrice $M = (m_{xy})$ peut être considérée comme la matrice majoritaire d'un profil d'ordres totaux en nombre non fixé si et seulement si on a :

1) les termes m_{xy} ont tous la même parité

2) pour tout couple $(x, y) \in X^2$, on a $m_{xy} + m_{yx} = 0$. ♦

On constate donc que la seule différence entre la caractérisation matricielle des profils de tournois et ceux d'ordres totaux consiste en ce qu'on peut fixer le nombre de tournois mais pas celui des ordres totaux. En fait, on ne sait pas caractériser une matrice majoritaire associée à un profil de m ordres totaux, m étant fixé, sauf pour de petites valeurs de n ($n \le 5$ et m quelconque) ou de m ($m = 2$ et n quelconque) ([33]) ; le problème de reconnaissance associé est d'ailleurs conjecturé NP-complet.

On notera d'autre part que les constructions utilisées par B. Debord pour établir les deux propositions précédentes peuvent se faire en temps polynomial, à condition toutefois de coder le profil, non pas en énumérant les m préférences individuelles (ici des tournois), mais en énumérant les préférences individuelles deux à deux distinctes, suivies de leur nombre d'occurrences (voir [46] pour plus de détails). Il en découle que, du point de vue de la complexité, il est équivalent de considérer le profil ou le graphe associé, à ceci près qu'on ne pourra supposer fixé le nombre de préférences individuelles dans le cas d'un profil d'ordres totaux quand on s'intéressera au graphe le représentant.

À l'aide des développements de Δ effectués plus haut, on constate que minimiser Δ revient à choisir les variables o_{xy} de manière à maximiser $\sum_{(x,y)\in X^2} m_{xy}.o_{xy}$, les variables o_{xy} devant décrire un ordre total strict. On peut en déduire une formulation du problème sous forme de programmation linéaire en 0-1 (on trouvera dans [66] d'autres expressions pour la fonction à optimiser, toutes équivalentes, ainsi du reste qu'une intéressante mise au point historique et bibliographique) :

$$\text{Maximiser} \sum_{(x,y)\in X^2} m_{xy}.o_{xy}$$

$$\text{avec les contraintes} \begin{cases} \forall (x,y) \in X^2, \ \ o_{xy} + o_{yx} = 1 \text{ (asymétrie et complétude)} \\ \forall (x,y,z) \in X^3, \ \ o_{xy} + o_{yz} - o_{xz} \le 1 \text{ (transitivité)} \\ \forall (x,y) \in X^2, \ \ o_{xy} \in \{0,1\} \end{cases}$$

D'un point de vue graphique, on peut aussi interpréter l'objectif comme consistant à extraire du graphe G_Π un ensemble d'arcs de poids maximum constituant le graphe d'un ordre total, ou encore de supprimer dans G_Π $\frac{n(n-1)}{2}$ arcs de poids globalement minimum afin que les $\frac{n(n-1)}{2}$ arcs restant dans G_Π décrivent un ordre total de poids maximum.

Pour arriver enfin à une formulation faisant intervenir un tournoi comme modèle graphique du profil, il suffit de constater qu'il existe une redondance dans la représentation fournie par G_Π : $\forall\ (x, y) \in X^2$, on a $m_{xy} = -m_{yx}$ (en revanche, cette égalité n'étant plus nécessairement vraie si on admet que les relations du profil puissent ne pas être des tournois, appliquer dans ce cas ce qui suit risque d'être hasardeux, à cause de la perte d'informations que cela entraîne). On peut donc décider de ne garder qu'un seul des deux arcs (x, y) ou (y, x), par exemple celui de poids (m_{xy} ou m_{yx}) positif (autrement dit, on oriente l'arc de x vers y quand une majorité de votants préfère x à y) ; quand les deux poids sont nuls, on garde arbitrairement l'un des deux. On obtient ainsi un tournoi T_Π dont les pondérations sont positives ou nulles, de même parité. Puisqu'on cherche un ordre total strict comme relation médiane du profil, il est équivalent de dire qu'on supprime un arc (x, y) ou qu'on garde l'arc (y, x) dans G_Π. Par rapport au tournoi pondéré T_Π, la recherche d'un ordre médian se ramène alors à la détermination d'un ensemble d'arcs de poids minimum dont l'inversion dans T_Π rend T_Π transitif : ce sont les arcs (x, y) qu'on a décidé de conserver pour former T_Π alors qu'il eût fallu choisir (y, x) pour obtenir un ordre médian. Le tournoi transitif ainsi obtenu sera représentatif d'un ordre médian du profil Π. Notons que, même si le profil ne contient que des ordres totaux, T_Π n'est pas nécessairement un ordre total ; il s'agit du célèbre « effet Condorcet », pour reprendre l'expression de G. T. Guilbaud ([43]) ; la démarche consistant à chercher un ordre médian du profil est parfois attribuée à Condorcet lui-même (voir [11] pour un rappel historique plus large et les références appropriées, ou [17] pour une description plus complète du contexte historique) et assurément à J.G. Kemeny en 1959 ([56]).

Envisagé sous l'angle graphique, le problème 1 peut donc être reformulé de la façon suivante :

PROBLÈME 2. Étant donné un tournoi $T = (X, U)$ pondéré par une application p définie de U dans $\mathbb{N}$, déterminer un sous-ensemble V de U tel que $P(V) = \sum_{(x,y)\in V} p(x, y)$ soit minimum et tel que le tournoi obtenu en inversant dans T les arcs de V soit transitif.

REMARQUE 1. À l'aide de ce qui a été dit plus haut, il est facile de constater que le problème 1 et le problème 2 ne diffèrent que par deux points. Le premier, déjà mentionné, concerne l'incapacité de retrouver m quand on considère le tournoi associé à un profil de m ordres totaux. Le second est relatif à la parité des poids des arcs : aucune contrainte de parité n'est imposée dans le problème 2. Ce dernier point n'est pas fondamental, et on peut facilement le relâcher en constatant qu'il suffit de doubler tous les poids du tournoi pour qu'ils aient tous la même parité s'ils ne l'avaient pas déjà ; ce faisant, on double bien sûr la valeur prise par Δ, mais on ne modifie pas la (ou les) solution(s) optimale(s).

C'est sous cette forme que nous allons nous intéresser au problème des ordres médians d'un tournoi. Bien que ce problème se rencontre dans de nombreux contextes, par exemple en génie électrique, en agronomie, en mathématiques, ou encore bien sûr en sciences sociales (voir par exemple [10], [11], [42], [45] ou [53] pour des références ou des applications dans ces domaines), c'est par rapport au contexte de vote décrit au début de cette partie que nous désignerons ou illustrerons les entités définies et manipulées plus loin.

NOTATIONS ET DÉFINITIONS DE BASE. Les notations utilisées reprennent celles du livre de référence de J.W. Moon, de même que les concepts classiques ([67]). $T = (X, U)$ désignera toujours un tournoi, et $p(x, y) \in \mathbb{N}$ le poids de l'arc (x, y). Le nombre de sommets $|X|$ sera noté n. Pour un arc (x, y) de T, on dira que x *bat* y ou que y *est battu par* x. Le *score* $s(x)$ d'un sommet x est son demi-degré extérieur, c'est-à-dire le nombre de sommets battus par x ; si n est impair et que tous les scores sont égaux à $(n-1)/2$, le tournoi est dit *régulier* ; si n est pair et que les scores diffèrent entre eux d'au plus 1, le tournoi est dit *quasi régulier* (la moitié des scores valent alors $(n/2) - 1$, et l'autre moitié $n/2$). Pour $V \subseteq U$, on pose $P(V) = \sum_{(x,y) \in V} p(x, y)$ et on appelle cette quantité le *poids* de V. Le (ou les) tournoi(s) transitif(s) obtenu(s) en inversant dans T un ensemble V d'arcs de poids $P(V)$ minimum sera (seront) appelé(s) *ordre(s) médian(s)* de T. Quand on inverse un ensemble V d'arcs dans T pour obtenir un ordre total strict O (pas nécessairement médian), on pose $\kappa(T, O) = P(V)$ et on appelle cette quantité *éloignement* entre T et O ; le minimum de $\kappa(T, O)$ quand O décrit l'ensemble des ordres totaux définis sur X sera noté $K(T)$ et sera appelé *indice de Kemeny de T* ; un ordre médian est donc un ordre dont l'éloignement à T égale l'indice de Kemeny de T. Si tous les poids valent 1, nous dirons que T est *non pondéré* ; dans un tournoi T non pondéré, le poids d'une partie de U sera donc égal à son cardinal, et la recherche d'un ordre médian, alors appelé *ordre de Slater*, correspond à la recherche d'un nombre minimum d'arcs à inverser dans T pour le rendre transitif ; dans ce cas, l'indice de Kemeny (égal à ce nombre minimum d'arcs) est noté $i(T)$ et s'appelle *indice de Slater* de T. Un ordre total $O = (X, W)$ défini sur X sera aussi écrit, pour une numérotation appropriée, $x_1 > ... > x_{n-1} > x_n$ avec $(x_i, x_j) \in W$ si et seulement si l'indice i est plus petit que l'indice j ; on dira aussi dans ce cas que x_i *est avant* x_j ; une partie de O de la forme $x_1 > ... > x_{i-1} > x_i$ avec $1 \leq i \leq n$ sera appelée *section commençante de l'ordre O* ; le sommet x_1 sera appelé *le vainqueur* de l'ordre O. Plus généralement, un sommet x sera un vainqueur (de Kemeny) (respectivement vainqueur de Slater) de T s'il existe un ordre médian (respectivement un ordre de Slater) dont x est vainqueur. Enfin, pour un ensemble d'arcs $V \subset U$, on note $\overline{V}$ l'ensemble des arcs « inverses » de V : $\overline{V} = \{(x, y) \text{ tel que } (y, x) \in V\}$.

2. PROBLÈMES ÉQUIVALENTS ET COMPLEXITÉ

Le problème 2 consiste donc à rendre transitif T en inversant un ensemble d'arcs de poids minimum. Or, il est bien connu (voir [67] par exemple) qu'un tournoi est transitif si et seulement s'il ne possède pas de circuit ; de plus, un tournoi ne possède pas de circuit si et seulement s'il ne possède pas de circuit de longueur 3 (appelé *3-circuit* dans la suite), c'est-à-dire de circuit constitué de trois sommets et de trois arcs. En effet, un tournoi T étant un graphe complet, il est facile, à partir d'un circuit C donné, d'établir l'existence d'un 3-circuit dans T, en considérant les cordes de C. Cette équivalence entre tournoi transitif (c'est-à-dire ordre total strict) et tournoi sans circuit incite à s'intéresser au problème 3 :

PROBLÈME 3. Étant donné un tournoi $T = (X, U)$ pondéré par une application p définie de U dans $\mathbb{N}$, déterminer un sous-ensemble V de U tel que $P(V)$ soit minimum et tel que le graphe $(X, U - V)$ obtenu en supprimant dans T les arcs de V soit sans circuit.

On appellera *ensemble d'arcs retour* un sous-ensemble d'arcs dont la suppression simultanée permet de détruire tous les circuits de T ou encore, de manière équivalente, un sous-ensemble tel que tout circuit de T contienne au moins un de ces arcs. Le problème 3 consiste donc à déterminer un ensemble d'arcs retour de poids minimum.

Il est facile de montrer que le problème 2 et le problème 3 admettent des solutions optimales V de même poids et que ces solutions optimales ne diffèrent éventuellement que par des arcs de poids nul. C'est ce que précise le théorème suivant, qui généralise aux tournois pondérés un résultat établi par D.H. Younger en 1963 pour les tournois non pondérés ([81]).

THÉORÈME 1. Les problèmes 2 et 3 ont même valeur optimale. De plus, toute solution optimale du problème 2 est solution optimale du problème 3. Réciproquement, de toute solution optimale V_3 du problème 3, on peut extraire une solution optimale V_2 du problème 2 (avec $P(V_2) = P(V_3)$).

Preuve. Soit P_2 le poids minimum des solutions optimales du problème 2 et soit P_3 le poids minimum des solutions optimales du problème 3. Considérons une solution optimale V_2 du problème 2 : $P(V_2) = P_2$ et l'inversion des arcs de V_2 dans T donne un tournoi transitif T_2, donc sans circuit. Par conséquent, la suppression dans T des arcs de V_2 revient à ne garder que les arcs communs à T et à T_2, c'est-à-dire les éléments de $U - V_2$. T_2 étant sans circuit, le graphe $(X, U - V_2)$ est aussi sans circuit. D'où, par définition du minimum, l'inégalité $P_3 \leq P_2$.

Considérons maintenant une solution optimale V_3 du problème 3 : $P(V_3) = P_3$ et le graphe $(X, U - V_3)$ est sans circuit. Il est toujours possible de compléter un graphe sans circuit en un ordre total strict. Considérons une telle extension linéaire $O = (X, V_O)$ de $(X, U - V_3)$; on a donc $U - V_3 \subset V_O$. Posons $W = V_O - (U - V_3)$: les éléments de W sont les arcs ajoutés pour construire l'extension linéaire O à partir du graphe sans circuit $(X, U - V_3)$. On notera que W et V_3 ne sont pas disjoints *a priori* : il se peut que l'extension linéaire nous oblige à remettre un arc de V_3 qui aurait été enlevé lors de la destruction des circuits. Posons V_2 l'ensemble des arcs supprimés qui ne sont pas remis lors de l'extension linéaire : $V_2 = V_3 - W \cap V_3$; les arcs de O qui ne sont pas arcs de T ne sont finalement que les arcs de V_3 qui ont été inversés, c'est-à-dire les éléments de V_2 (en effet, O et T étant complets, si un arc (x, y) ne leur appartient pas, alors nécessairement (y, x) leur appartient) ; autrement dit, on a $O = (X, (U - V_2) \cup \overline{V_2})$. On en déduit que le graphe $(X, U - V_2)$ est sans circuit. Par définition du minimum P_3, il s'ensuit la relation $P_3 \leq P(V_2)$. Or, on a $P(V_2) = P(V_3) - P(W \cap V_3)$. Ceci n'est compatible avec l'inégalité précédente que si $P(W \cap V_3)$ est nul. Ce qui entraîne à son tour que le poids de tous les arcs de $W \cap V_3$ (c'est-à-dire des arcs qu'on supprime puis qu'on remet) est nul. De plus, il vient $P(V_2) = P(V_3) = P_3$. Mais on a aussi que l'inversion dans T des arcs de V_2 conduit à un ordre total (l'ordre O). Donc par définition de P_2, on obtient $P_2 \leq P(V_2) = P_3$.

Cette inégalité et celle établie à la fin du paragraphe précédent montrent l'égalité entre les minima des problèmes 2 et 3 : $P_2 = P_3$. De plus, la démonstration montre d'une part que toute solution optimale du problème 2 est aussi solution optimale du problème 3 et, d'autre part, une solution optimale du problème 3 peut donner une solution optimale du problème 2 par l'élimination éventuelle de certains arcs de poids nul. ♦

REMARQUE 2. Il est en fait assez clair que toute solution réalisable du problème 2 (c'est-à-dire tout ensemble d'arcs dont l'inversion dans T rend celui-ci transitif sans être forcément de poids minimum) est aussi une solution réalisable du problème 3 (c'est-à-dire tout ensemble d'arcs dont la suppression dans T rend celui-ci sans circuit sans être forcément de poids minimum). Mais la réciproque de cette proposition est fausse, ce qui rend la seconde partie de la démonstration précédente plus délicate. Par exemple, supprimer tous les arcs d'un circuit fait bien disparaître ce dernier ; en revanche, inverser ces mêmes arcs en fait apparaître un autre. Or, rien n'interdit dans le problème 3 de supprimer des arcs de poids nul, même si cela est inutile. Évidemment, ce phénomène n'apparaît pas si aucun arc n'est de poids nul (ce qui est le cas entre autres pour le problème de P. Slater) ; il y a alors identité entre solutions optimales du problème 2 et celles du problème 3.

On peut exploiter l'équivalence entre problèmes 2 et 3 pour étudier leur complexité et établir le théorème 2 (pour une présentation approfondie de la théorie de la NP-complétude, voir par exemple [8] ou [34]) :

THÉORÈME 2. Les problèmes 2 et 3 sont NP-difficiles.

Preuve. Nous allons montrer plus précisément que le problème de reconnaissance associé au problème 3 est NP-complet. L'équivalence établie au théorème 1 permettra de conclure quant au problème 2. Le problème de reconnaissance associé au problème 3 peut s'énoncer comme suit :

Nom : Ensemble d'arcs retour pour les tournois
Données : Un tournoi $T = (X, U)$ pondéré par p défini de U dans $\mathbb{N}$, un entier K ;
Question : Existe-t-il un sous-ensemble V de U avec $P(V) \leq K$ et tel que le graphe $(X, U - V)$ obtenu en supprimant dans T les arcs de V soit sans circuit ?

Il est immédiat de constater que ce problème est dans la classe NP. D'autre part, si on considère les instances de ce problème pour lesquelles les valeurs prises par p sont 0 ou 1 et en construisant un graphe orienté obtenu en ne retenant que les arcs de poids égal à 1, le problème se confond alors avec celui appelé *Feedback arc set* dans la littérature anglo-saxonne et qui est NP-complet ([34]). La transformation utilisée étant polynomiale en la taille des données, la NP-complétude de *Feedback arc set* entraîne celle d'Ensemble d'arcs retour pour les tournois, ce qui achève la preuve. ♦

Compte tenu des caractérisations données par B. Debord (propositions 1 et 2), de la remarque sur la polynomialité de ses transformations et enfin de la remarque 1 sur la parité des valuations du tournoi qui résume le profil, on déduit du théorème 2 la conséquence suivante :

COROLLAIRE 1. Le problème 1 est NP-difficile quand on veut agréger un profil d'ordres totaux en nombre non fixé ou un profil de tournois en nombre pair ($m \geq 2$). ♦

REMARQUE 3. La preuve précédente montre que les problèmes 2 et 3 restent NP-difficiles si on se restreint aux instances pour lesquelles p ne prend que les valeurs 0 et 1. On peut aussi s'arranger pour ne pas utiliser la valeur 0, mais à condition alors d'admettre des poids dépendant de n (ce qui signifie, par rapport au problème de vote initial, que le nombre de votants doit être suffisamment grand par rapport au nombre de candidats). En revanche, on ne connaît pas la complexité des problèmes 2 et 3 pour les instances pour lesquelles p prend des valeurs strictement positives majorées par une constante. En particulier, on ne connaît pas la complexité du problème de Slater (correspondant à $p(u) = 1$ pour tout arc u).

Il existe d'autres formulations équivalentes du problème des ordres médians et des ordres de Slater. Nous en donnons encore trois, sans démonstrations (simples, compte tenu de ce qui vient d'être fait) de leur équivalence (d'où découlera le fait qu'ils sont NP-difficiles). La première est évidente et a pour seul mérite, comme le souligne J.-C. Bermond dans [15], de relier deux problèmes étudiés souvent séparément :

PROBLÈME 4. Étant donné un tournoi pondéré T, déterminer un graphe partiel de T sans circuit et de poids maximum.

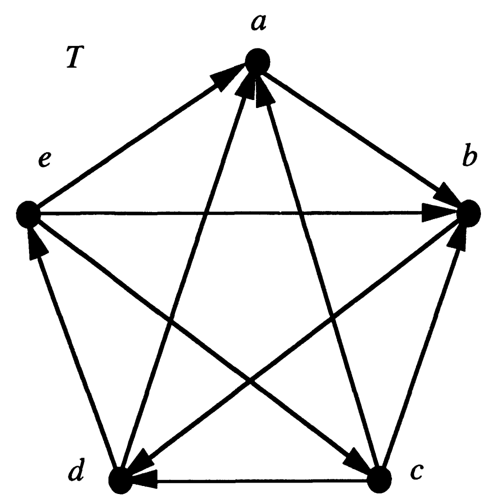
Il est clair que le complémentaire de tout ensemble d'arcs retour de poids minimum est solution du problème 4 et réciproquement.

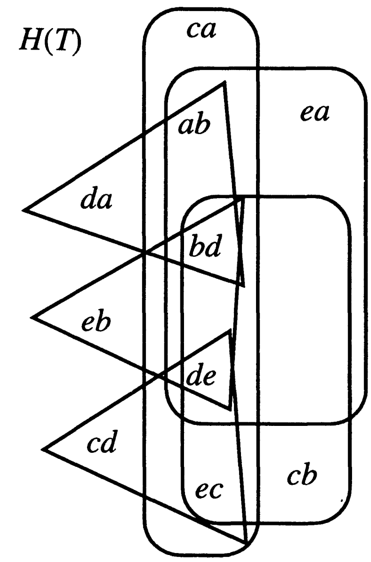
Pour le problème 5, on définit la matrice des poids d'un tournoi pondéré comme étant la matrice $M = (m_{ij})_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n}$ définie par $m_{ij} = p(i, j)$ si l'arc (i, j) existe dans le tournoi et 0 sinon (il s'agit en fait du même m_{ij} que celui introduit plus haut pour traduire l'intensité des préférences dans le problème de vote).

PROBLÈME 5. Étant donnée la matrice M des poids d'un tournoi pondéré, déterminer un (même) ordre sur les lignes et sur les colonnes de façon à minimiser la somme des termes situés sous la diagonale.

Cette formulation a fait l'objet d'une étude par D.H. Younger dans [81] pour les tournois non pondérés ; la somme des termes se confond alors avec leur nombre. C'est aussi sous cette forme que P. Slater abordait la résolution de son problème ([74]).

Pour la dernière formulation, nous devons introduire un nouvel outil : l'hypergraphe pondéré $H(T)$ des circuits du tournoi T. L'ensemble des sommets de $H(T)$ est constitué des arcs de T figurant dans au moins un circuit de T. Une arête de $H(T)$ correspond à un circuit de T et réciproquement. Les sommets de $H(T)$ sont pondérés par le poids de l'arc qu'ils représentent. L'exemple suivant illustre ce concept dans le cas d'un tournoi non pondéré ; dans $H(T)$, un arc (x, y) de T est représenté par xy.





Rappelons que, dans un hypergraphe H, un *transversal* est un ensemble de sommets tel que chaque arête contient au moins un de ces sommets ([14]). Le poids d'un transversal d'un hypergraphe dont les sommets sont pondérés est la somme des poids des sommets constituant le transversal. Ce qui signifie qu'un transversal de $H(T)$ est un ensemble d'arcs de T tel que tout circuit de T passe par au moins un de ces arcs, c'est-à-dire un ensemble d'arcs retour de T. D'où l'équivalence entre le problème 3 et le suivant.

PROBLÈME 6. Étant donné un tournoi T pondéré, déterminer un transversal de poids minimum de $H(T)$.

Dans le cas d'un tournoi non pondéré T, il y a donc égalité entre indice de Slater $i(T)$ et nombre de transversalité (cardinal minimum d'un transversal) de l'hypergraphe des circuits associé $H(T)$, égalité figurant déjà dans [15]. Ainsi, dans l'exemple précédent, puisque les sommets bd et ec couvrent toutes les arêtes de $H(T)$, on a $i(T) = 2$ et l'inversion dans T des arcs (b, d) et (e, c) conduit à l'ordre de Slater (qui n'est pas unique) $c > d > e > a > b$.

3. PROPRIÉTÉS DES VAINQUEURS

Puisqu'on ne connaît pas d'algorithme polynomial déterminant un ordre médian ou un ordre de Slater d'un tournoi, les méthodes exactes de résolution sont fondées sur des énumérations plus ou moins exhaustives des ordres totaux possibles (voir plus loin). Il est alors intéressant de connaître des propriétés vérifiées par les ordres médians et les ordres de Slater de façon à réduire le plus possible ces énumérations. Cette partie est consacrée à certaines de ces propriétés, à caractère plutôt combinatoire ; elles établissent parfois des liens avec d'autres solutions de tournois ; on pourra aussi se reporter en outre à [61] pour des propriétés axiomatiques vérifiées ou non par la solution de Slater.

La plupart des propriétés suivantes donnent en fait des conditions nécessaires pour qu'un sommet donné puisse être vainqueur (de Kemeny ou de Slater), mais la première que nous rappelons (due à É. Jacquet-Lagrèze ([51]) dans le cas pondéré et à D.H. Younger ([81]) dans le cas non pondéré) et ses corollaires portent sur une propriété globale des ordres médians (ou de Slater ; ceux-ci ayant les mêmes propriétés que les ordres médians d'un tournoi pondéré par 1, il n'est pas utile de les traiter particulièrement dans ce qui suit).

PROPOSITION 3. Soit T un tournoi et soit $O = x_1 > x_2 > ... > x_{n-1} > x_n$ un ordre médian de T. Alors, pour tout i et tout j avec $i < j$, $x_i > x_{i+1} ... > x_{j-1} > x_j$ est un ordre médian du sous-tournoi engendré par les sommets $x_i, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_j$.

Preuve. Si ce n'était pas le cas, soit O_{ij} un ordre médian du sous-tournoi engendré par les sommets $x_i, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_j$. Alors, il est facile de voir que l'ordre O' obtenu en substituant O_{ij} à $x_i > x_{i+1} ... > x_{j-1} > x_j$ dans O serait meilleur que O, qui de ce fait ne pourrait être un ordre médian de T. ♦

On en déduit immédiatement les corollaires suivants (en considérant le cas $j = i + 1$).

COROLLAIRE 2. Soit $O = x_1 > x_2 > ... > x_{n-1} > x_n$ un ordre médian d'un tournoi $T = (X, U)$ pondéré par p. Alors, pour tout i avec $1 \leq i < n$, on a : $(x_i, x_{i+1}) \in U$ ou bien $p(x_{i+1}, x_i) = 0$. ♦

COROLLAIRE 3. Soit $O = x_1 > x_2 > ... > x_{n-1} > x_n$ un ordre médian d'un tournoi $T = (X, U)$ pondéré. Si la suite d'arcs $(x_i, x_{i+1})_{1 \leq i < n}$ ne définit pas un chemin hamiltonien de T, alors les arcs « mal orientés » sont tous de poids nul et leur inversion dans O donne un ordre médian de T associé à un chemin hamiltonien de T. ♦

Par conséquent, il existe toujours un ordre médian qui soit associé à un chemin hamiltonien de T (mais il peut y en avoir qui ne le soient pas à cause des poids nuls). De plus, tout ordre médian qui n'est pas associé à un chemin hamiltonien peut facilement être obtenu à l'aide de ceux qui le sont. Enfin, constatons que si tous les poids sont strictement positifs, alors tout ordre médian est associé à un chemin hamiltonien. On retrouve comme cas particulier le résultat de R. Remage Jr. et W.A. Thompson Jr. ([73]) :

COROLLAIRE 4. Tout ordre de Slater d'un tournoi T définit un chemin hamiltonien de T. ♦

Le corollaire 3 dans sa forme complète ainsi que la proposition 4 sont utilisés dans [22] pour réduire l'arbre de recherche d'une méthode arborescente de résolution. Pour cette proposition 4, nous introduisons une convention (conforme à la modélisation initiale du problème) et deux définitions suivies d'un lemme.

DÉFINITIONS 1.

1. Soit Y un sous-ensemble de X et soit $x \in X$. On appelle *poids partiel de x par rapport à Y* et on note $P_Y(x)$ la quantité $\sum_{y \in Y} p(x, y)$ avec la convention $p(x, y) = -p(y, x)$ (et $p(x, x) = 0$).
2. Soit O un ordre total défini sur q éléments de X. On appelle *décalage de paramètres i et j appliqué à O* l'opération qui consiste à transformer O en un ordre obtenu en décalant les sommets dont les positions dans O sont comprises entre $i + 1$ et j (respectivement j et $i - 1$) (ces valeurs étant incluses) d'un cran à gauche (respectivement à droite) si $i < j$ (respectivement si $i > j$), puis à placer en position j le sommet qui occupait dans O la position i. Ainsi, si on a $O = x_1 > ... > x_{i-1} > x_i > x_{i+1} > ... > x_{j-1} > x_j > x_{j+1} > ... > x_q$, un décalage de paramètre i et j donne l'ordre $x_1 > ... > x_{i-1} > x_{i+1} > ... > x_j > x_i > x_{j+1} > ... > x_q$, tandis qu'un décalage de paramètre j et i donne $O = x_1 > ... > x_{i-1} > x_j > x_i > ... > x_{j-1} > x_{j+1} > ... > x_{q-1} > x_q$.

LEMME 1. Soit T un tournoi pondéré par p et soit O l'ordre $x_1 > ... > x_n$. L'application à O d'un décalage de paramètres i et j ($i \neq j$) donne un ordre O' tel que :

1. $\kappa(T, O') - \kappa(T, O) = P_{\{x_{i+1}, ..., x_j\}}(x_i)$ si $i < j$
2. $\kappa(T, O') - \kappa(T, O) = -P_{\{x_j, ..., x_{i-1}\}}(x_i)$ si $i > j$.

Preuve. Il suffit de considérer les arcs qui sont inversés dans T pour obtenir O mais qui ne le sont pas pour obtenir O', ou l'inverse. Il s'agit dans les deux cas d'arcs ayant une extrémité confondue avec x_i et l'autre appartenant à l'ensemble qui en indice de P dans les formules précédentes. Le calcul des variations en découle directement, à l'aide de la convention faite dans les définitions 1... ♦

PROPOSITION 4. Soit $S = x_1 > x_2 > \ldots > x_{q-1} > x_q$ une section commençante d'un ordre défini sur X. Pour que S soit la commençante d'un ordre médian de T, il faut avoir
1. $P_Y(x_q) \geq 0$, en posant $Y = X - \{x_1, x_2, \ldots, x_{q-1}\}$
2. $\forall\, i,\ 1 \leq i \leq q-1,\ P_{\{x_i, \ldots, x_{q-1}\}}(x_q) \leq 0$ et $P_{\{x_{i+1}, \ldots, x_{q-1}, x_q\}}(x_i) \geq 0$.

Preuve. Montrons d'abord la première partie. Pour cela considérons un ordre O commençant par S en supposant qu'on ait $P_Y(x_q) < 0$. Alors, le décalage de paramètres q et n appliqué à O (consistant à déplacer x_q à la fin de O) conduit à un ordre O' tel que, d'après le lemme 1 :

$$\kappa(T, O') - \kappa(T, O) = P_Y(x_q) < 0.$$

Par conséquent, O n'est pas d'éloignement minimum et O ne peut pas être médian.

La démonstration de la seconde partie utilise les mêmes outils. Supposons qu'il existe i $(1 \leq i \leq q-1)$ avec $P_{\{x_i, \ldots, x_{q-1}\}}(x_q) > 0$. Alors le décalage de paramètre q et i appliqué à S conduit à une section meilleure que S ; en vertu de la proposition 3, S ne peut donc pas être la section commençante d'un ordre médian de T. De même, supposons qu'il existe i $(1 \leq i \leq q-1)$ avec $P_{\{x_{i+1}, \ldots, x_q\}}(x_i) < 0$. Alors le décalage de paramètres i et q conduit là encore à une section meilleure que S. La conclusion est donc la même que précédemment. ♦

En termes moins formels, la première partie de la proposition 4 implique le résultat suivant (correspondant au cas $q = 1$) : pour qu'un sommet x soit un vainqueur, la somme des poids des arcs sortant de x doit être supérieure ou égale à la somme des poids des arcs entrant en x. Il s'agit d'une généralisation d'un résultat établi par J.-C. Bermond dans [15] dans le cas des tournois non pondérés, stipulant qu'un vainqueur de Slater x possède un score au moins égal à la moitié de $n - 1$: $s(x) \geq (n-1)/2$. On peut préciser un peu plus :

PROPOSITION 5. T est un tournoi régulier (donc avec un nombre n impair de sommets) si et seulement si tout sommet de T est vainqueur de Slater. Si T n'est pas régulier, il existe au moins un vainqueur de Slater x dont le score $s(x)$ est supérieur ou égal à $n/2$.

Preuve. Considérons un ordre de Slater O, et soit x son vainqueur. Soit O' l'ordre obtenu en appliquant à O un décalage de paramètres 1 et n (autrement dit, une permutation circulaire plaçant x à la fin de O). Si le score $s(x)$ de x était strictement inférieur à $(n-1)/2$, la distance entre O' et T serait strictement plus petite qu'entre O et T, et O ne serait pas ordre de Slater de T : donc tout vainqueur de Slater possède un score au moins égal à $(n-1)/2$ (c'est-à-dire aussi au moins $n/2$ si n est pair). De plus, si $s(x) = (n-1)/2$ (ce qui suppose n impair), le décalage considéré transforme O en un ordre O' à même distance de T que O ; O' est alors lui aussi un ordre de Slater. Si O ou O' commencent par un sommet de score supérieur ou égal à $n/2$, alors O ou O' conviennent pour conclure. Sinon on recommence en appliquant de nouveau un décalage de paramètres 1 et n. On arrête ce processus quand on a trouvé un vainqueur dont le score convient ou quand on retrouve le vainqueur de O ; mais alors, dans ce dernier cas, tous les sommets de T ont été rencontrés sans qu'on s'y arrête : c'est donc qu'ils sont tous de score $(n-1)/2$, et T est régulier. Réciproquement, si T est régulier, les n ordres engendrés par les n décalages successifs sont des ordres de Slater de T; ces ordres ayant tous des vainqueurs deux à deux différents, tous les sommets de T sont vainqueurs de Slater de T. ♦

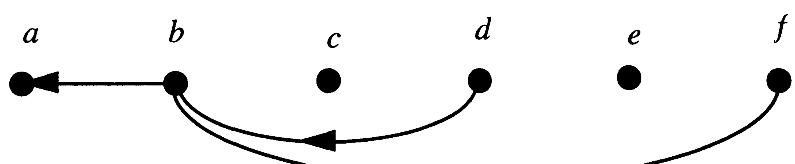
En revenant au problème initial de vote (et en en reprenant les notations), la proposition

4 redonne aussi la relation montrée par B. Monjardet dans [65] : $\sum_{y \neq x} \sum_{j=1}^{m} t_{xy}^{j} \geq \left\lceil \frac{(n-1)m}{2} \right\rceil$ (autrement dit, pour que x soit vainqueur, il faut qu'il recueille plus de voix en sa faveur qu'en sa défaveur dans les comparaisons par paires). Ces résultats sont prolongés par A. Guénoche qui, à l'aide d'une solution heuristique et le poids de certains arcs, encadre le rang que peut avoir un sommet dans une solution optimale (voir par exemple [41]).

La seconde condition de la proposition 4, facilement exploitable algorithmiquement (on peut l'implémenter avec une complexité amortie en $O(n)$ à condition d'y consacrer une place mémoire en $O(n)$), caractérise les ordres totaux O qu'on ne peut améliorer à l'aide de décalages : ce sera le cas si et seulement si toutes les sections commençantes de O respectent la condition. On peut remarquer au passage que cette seconde partie de la proposition 4 redonne le corollaire 2 et le principe du chemin hamiltonien du corollaire 4 : il suffit pour cela de considérer le cas $i = q - 1$ dans la première condition de la seconde partie (elle redonne aussi la première condition de cette même proposition, mais il est intéressant algorithmiquement de les distinguer).

La proposition 4 pourrait laisser croire qu'un vainqueur de Kemeny est un sommet x maximisant $P_X(x)$, c'est-à-dire maximisant la différence entre somme des poids des arcs entrants et somme des poids des arcs sortants. Cette assertion est fausse, même dans le cas où tous les poids sont égaux à 1. Dans son article de 1972 ([15]), J.-C. Bermond montre, à l'aide d'un tournoi à sept sommets, qu'il existe des tournois pour lesquels l'ensemble des vainqueurs de Slater peut être disjoint de l'ensemble des sommets de score maximum (c'est-à-dire les *vainqueurs de Copeland* ; voir par exemple [61] pour la définition et les propriétés de cette solution de tournois) ; il en est donc de même avec la solution du maximum de vraisemblance attribuée à E. Zermelo en 1929, puisque cette méthode donne les mêmes ordres que la solution de Copeland (voir par exemple [61]).

On peut être plus précis encore. Dans le tournoi suivant (pour lequel les arcs absents sont tous orientés de gauche à droite, il est facile de montrer que b est le seul vainqueur de Slater alors qu'il n'est que de score 3, tandis que a est de score 4. En revanche, on peut vérifier (par exemple à l'aide de la table dressée dans [67] qui donne tous les tournois non isomorphes à au plus six sommets) qu'il existe toujours un vainqueur de Slater qui est aussi vainqueur de Copeland si le tournoi possède $n \leq 5$ sommets, que tout vainqueur de Slater est vainqueur de Copeland si on a $n \leq 4$ et enfin que tout vainqueur de Copeland est vainqueur de Slater si on a $n \leq 3$.



Parmi les autres solutions de tournois figure celle qui consiste à retenir comme vainqueurs les *sommets non couverts* d'un tournoi non pondéré, proposée par P. Fishburn en 1977 ([32]) et N. Miller en 1980 ([64]) (voir aussi [61]). La définition que nous proposons ci-dessous est une généralisation aux tournois pondérés de la notion habituelle de la couverture.

DÉFINITIONS 2. Soient x et y deux sommets distincts de T. On dit que x *couvre* y si et seulement si : $\forall z \in X, p(x, z) \geq p(y, z)$ (avec la même convention que plus haut) et de plus $\exists z \in X$ tel que $p(x, z) > p(y, z)$. On note $x \gg y$ le fait que x couvre y. Un sommet est dit *non couvert* s'il n'existe aucun autre sommet le couvrant. Le résultat suivant est immédiat :

PROPOSITION 6. La relation de couverture $\gg$ est un ordre partiel défini sur X dont les éléments maximaux sont les sommets non couverts de T. Cet ordre partiel est appelé *ordre trace*. ♦

REMARQUES 4. Dans le cas de tournois non pondérés, x couvre y si et seulement si x bat y et tout sommet battu par y l'est aussi par x ; on retrouve ainsi la définition habituelle de la couverture. Dans ce cas, on peut montrer que tout sommet non couvert est un centre de T (voir [13] pour la définition d'un centre) et réciproquement, qu'un centre x atteint tout autre sommet y de T soit directement soit en passant par un seul sommet intermédiaire : $(x, y) \notin U \Rightarrow \exists\, z \in X$ tel que $(x, z) \in U$ et $(z, y) \in U$ (en particulier, tout sommet de score maximum est non couvert, c'est-à-dire est un centre).

Afin d'énoncer le lien qui existe entre sommets non couverts (au sens de la définition 2) et vainqueurs de Kemeny, il nous faut encore une définition ne faisant entrer en jeu que l'orientation des arcs de T. Supposons que T n'est pas fortement connexe et décomposons-le en ses q ($q \geq 2$) composantes fortement connexes $C_1, C_2, ..., C_q$. La relation $>_{\text{cfc}}$ définie sur les composantes C_i ($1 \leq i \leq q$) par $C_i >_{\text{cfc}} C_j$ (avec $i \neq j$) si et seulement s'il existe $x_i \in C_i$ et $x_j \in C_j$ tels que $(x_i, x_j) \in U$ est un ordre total. Il existe donc un élément maximal unique (confondu avec le tournoi tout entier si celui-ci est fortement connexe).

DÉFINITION 3. On appelle *composante source* de T et on note $CS(T)$ la composante fortement connexe de T qui est l'élément maximal pour l'ordre total $>_{\text{cfc}}$.

Il s'agit donc de la composante fortement connexe dont il ne sort que des arcs sans qu'il en entre en provenance des autres composantes ($CS(T)$ est parfois appelé *cycle supérieur de T*, en anglais *top cycle*, ou encore *composante maximale*). Le théorème 3 (démontré dans [22] à l'aide de décalages appropriés) généralise lui aussi aux tournois pondérés un résultat établi par J.S. Banks, G. Bordes et M. Le Breton dans [7]. Pour les résultats qui suivent, T^* désigne le sous-tournoi induit par les sommets non couverts de T.

THÉORÈME 3.
1. Il existe un vainqueur de T appartenant à $CS(T^*)$.
2. Si les poids sont tous strictement positifs, tout ordre médian de T est une extension linéaire de l'ordre trace de T. Sinon, il existe au moins un ordre médian de T qui est une extension linéaire de l'ordre trace de T. ♦

COROLLAIRE 5. Si les poids sont tous strictement positifs, tout vainqueur de T appartient à $CS(T^*)$. ♦

COROLLAIRE 6. Il existe un vainqueur de T appartenant à $CS(T)$ et si les poids sont tous strictement positifs, tout vainqueur de T appartient à $CS(T)$. ♦

REMARQUES 5.
1. La difficulté introduite par la présence d'arcs de poids nul n'est pas aussi importante qu'il peut y paraître, au moins du point de vue du calcul des ordres médians. Bien que le poids nul d'un arc (x, y) indique que l'arc (y, x) est tout aussi légitime que (x, y) (ce qui est la source de la difficulté), le corollaire 3 montre qu'on peut mettre en œuvre les critères en principe applicables seulement dans le cas de poids strictement positifs et comment récupérer ensuite les ordres médians qu'on aurait alors oubliés. Évidemment, ce problème ne se pose pas pour les ordres de Slater.
2. On notera que si au moins certains vainqueurs de Kemeny et tous les vainqueurs de Slater sont des sommets non couverts, en revanche il se peut qu'aucun vainqueur de Slater (et donc *a fortiori* de Kemeny) ne soit un sommet non couvert du sous-tournoi T^* engendré par les sommets non couverts de T. On trouvera un contre-exemple à huit sommets dans [59].

Il semble que le lien n'ait pas déjà été fait entre sommets non couverts et le résultat suivant ([10]), valable pour les tournois non pondérés et prouvé directement sans utiliser la notion de couverture.

THÉORÈME 4. Dans un tournoi non pondéré T, les arcs inversés dans T pour obtenir un ordre de Slater appartiennent tous à des 3-circuits. ♦

PROPOSITION 7. Soit T un tournoi non pondéré. Un arc (x, y) de T appartient à un 3-circuit de T si et seulement si y n'est pas couvert par x dans T.

Preuve. Soit (x, y, z, x) un 3-circuit de T. Alors z est battu par y sans l'être par x ; donc x ne peut pas couvrir y. Réciproquement, supposons que x ne couvre pas y ; c'est donc qu'il existe un sommet z qui est battu par y mais pas par x ; comme on est dans un tournoi, c'est donc que z bat x et (x, y, z, x) est un 3-circuit de T. ♦

Le théorème 4 dit par conséquent qu'on n'inverse pas d'arc (x, y) si x couvre y, ce qui revient à dire qu'un ordre de Slater est une extension linéaire de l'ordre trace de T. De même, la seconde partie du théorème 3 dit que si x couvre y dans T, alors x arrive avant y dans tout ordre de Slater de T : on n'inverse donc pas l'arc (x, y), ce qui revient à dire que seuls les arcs dont l'origine ne couvre pas l'extrémité, c'est-à-dire des arcs appartenant à des 3-circuits, peuvent être inversés.

Le corollaire 6 n'a d'intérêt que si le tournoi n'est pas fortement connexe. On peut alors aller plus loin, à l'aide d'un résultat simple (suffisamment pour qu'on en laisse la démonstration au lecteur) permettant de se ramener systématiquement à des tournois fortement connexes pour déterminer les ordres médians ou les ordres de Slater.

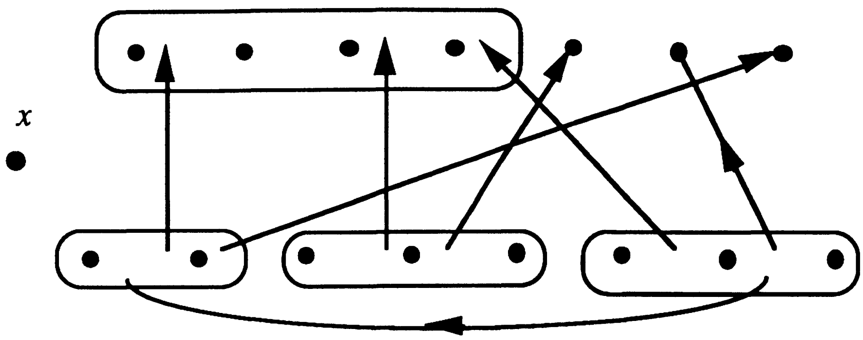
PROPOSITION 8. Soit un tournoi T non fortement connexe et soient $C_1, C_2, ..., C_q$ ses composantes fortement connexes. Soient $O_1, O_2, ..., O_q$ des ordres médians respectivement de $C_1, C_2, ..., C_q$. On a alors :
1. La concaténation $O_1 > O_2 > ... > O_q$ est un ordre médian de T.
2. Si les poids de T sont tous strictement positifs, tout ordre médian de T est une concaténation de la forme précédente. ♦

REMARQUES 6. Il est possible, si on connaît les scores de T (pondéré ou non), de déterminer les composantes fortement connexes de T en $O(n)$, à l'aide de la caractérisation de H.G. Landau ([60]) et même, plus précisément, $SC(T)$ en $O(|SC(T)|)$. On trouvera d'autre part dans [22] quelques précisions concernant les ordres médians qui ne seraient pas obtenus conformément à la seconde partie de la proposition 8, du fait de la présence d'arcs de poids nul.

On pourrait penser, à tort, que les vainqueurs de Slater sont aussi *vainqueurs de Banks* ([6] ; voir aussi [61] pour la définition), c'est-à-dire les vainqueurs de sous-tournois transitifs maximaux (pour l'inclusion). G. Laffond et J.-F. Laslier ont montré dans [58] qu'il n'en est rien, en exhibant un tournoi à 75 sommets qui a en plus pour mérite d'avoir les ensembles des vainqueurs de Copeland, de Slater et de Banks deux à deux disjoints. Avant de finir cette partie, nous donnons un exemple plus petit, à 16 sommets, pour lequel il y a encore disjonction entre ensemble des vainqueurs de Slater et celui des vainqueurs de Banks. Rien ne garantit qu'il s'agit du plus petit contre-exemple ; on peut d'ailleurs trouver des tournois plus petits (par exemple à 13 sommets) avec au moins un vainqueur de Slater qui ne soit pas vainqueur de Banks.

De façon à alléger la représentation, tous les arcs du tournoi ne sont pas représentés ; les sommets ont été regroupés en « paquets » (ce sont des *parties homogènes* du tournoi) ; un arc d'un paquet A vers un paquet B signifie que, pour tout sommet a de A et tout sommet b de B, l'arc entre a et b est orienté de a vers b ; les arcs manquants sont tous orientés de gauche à droite entre les sommets situés sur une même couche, ou de haut en bas pour des sommets situés sur des couches différentes.

PROPOSITION 9. Dans le tournoi donné ci-dessous, x est le seul vainqueur de Slater et n'est pas vainqueur de Banks.



Preuve. Elle n'est pas donnée ici mais se trouve dans [24]. On montre en fait qu'il n'y a qu'un seul ordre de Slater (dont x est vainqueur). Il est plus facile de vérifier que x n'est pas vainqueur de Banks : les trois chaînes transitives maximales dont x est vainqueur sont constituées, outre de x, d'exactement deux des trois paquets de la couche la plus basse ; il est clair alors qu'une telle chaîne n'est pas maximale, puisqu'il suffit de la faire précéder du sommet approprié situé à droite de la couche supérieure pour en obtenir une autre la contenant. ♦

Finissons cette liste des propriétés que vérifient les ordres médians par la proposition 10. Pour l'énoncer, nous avons besoin d'une définition supplémentaire. Nous supposerons ici que le profil considéré est un profil d'ordres totaux.

DÉFINITION 4. Soit un profil $\Pi = (O_1, O_2, ..., O_m)$ de m ordres totaux. On appelle *ordre d'unanimité* ou aussi *ordre de Pareto* l'ordre partiel $\bigcap_{1 \le j \le m} O_j$ obtenu en prenant l'intersection de tous les O_j pour $1 \le j \le m$.

La proposition 10, établie par B. Monjardet dans [65], montre que les ordres médians sont des extensions linéaires particulières de l'ordre d'unanimité (cette propriété est qualifiée de *parétienne* : un ordre médian d'un profil d'ordres totaux est donc dit *parétien*). Il est difficile de mettre en œuvre cette propriété si on ne connaît du problème que le tournoi qui résume le profil, puisqu'on a vu plus haut qu'on perd alors la valeur de m. Il n'est possible de l'exploiter qu'en connaissant la valeur de m ; la conséquence est alors qu'on ne peut inverser un arc de poids m dans le tournoi (ce qui traduit l'unanimité dans la formulation que nous avons retenue). Il se peut d'autre part que l'ordre d'unanimité soit vide.

PROPOSITION 10. Tout ordre médian d'un profil d'ordres totaux contient l'ordre d'unanimité de ce profil. ♦

4. ENCADREMENTS DE $i(T)$

Il est bien sûr toujours possible de majorer $i(T)$ à l'aide d'une solution heuristique. Nous n'envisageons pas ici cette possibilité et allons proposer quelques encadrements indépendamment de toute méthode de résolution. Nous allons d'abord nous intéresser au maximum $I(n)$ que peut prendre $i(T)$ quand T décrit l'ensemble de tous les tournois ayant n sommets (pour le minimum de $i(T)$, ce résultat est immédiat : 0, correspondant aux seuls tournois transitifs ; il est facile de plus de montrer que toutes les valeurs entières comprises entre 0 et $I(n)$ peuvent être atteintes). Il est clair que $I(n)$ ne peut excéder la moitié des arcs : il vaudrait mieux sinon inverser les arcs que l'on n'inverse pas ! Le théorème 7 montre que $I(n)$ peut cependant être de cet ordre de grandeur (ce que raffine le théorème 8). Le théorème suivant est dû à K.B. Reid ([71]) (on pourra rapprocher ce résultat de celui de S. Poljak et D. Turzík dans [70], selon lequel on peut construire un ordre à distance inférieure ou égale à $(n-1)^2/4$; le résultat de K.B. Reid est plus précis) :

THÉORÈME 5. Pour $n \geq 8$, on a $I(n) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$. ♦

Le résultat suivant, cité dans [15] et dû à H.A. Jung ([52]) ainsi que les corollaires 7 et 8, donne des résultats plus précis, mais est aussi plus difficile à exploiter.

THÉORÈME 6. Pour toute décomposition de n sous la forme $n_1 + n_2$ avec $n_1 \leq n_2$, on a : $I(n) \leq I(n_1) + I(n_2) + \frac{n_1(n_2 - 1)}{2}$ si n est pair, $I(n) \leq I(n_1) + I(n_2) + \frac{n_1 n_2}{2}$ si n est impair. ♦

COROLLAIRE 7. $I(2^k) \leq 2^{2k-2} - (k + 1).2^{k-2}$. ♦

COROLLAIRE 8. Si n (pair) s'écrit $\sum_{i=1}^{q} 2^{k_i}$ avec $0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_q$, alors :

$$I(n) \leq \frac{1}{4} n(n-1) - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{q} (k_i + 2q - 2i) 2^{k_i}$$

Si n est impair, alors : $I(n) \leq I(n-1) + \frac{n-1}{2}$. ♦

Ces résultats découlent en fait d'un résultat applicable à tout tournoi. Si on considère une bipartition (X_1, X_2) quelconque de X, pour rendre transitif T, il suffit de rendre transitifs les tournois T_1 et T_2 engendrés respectivement par X_1 et X_2 et d'inverser tous les arcs orientés de X_1 vers X_2 ou au contraire de X_2 vers X_1. En appelant $m^+(A, B)$ le nombre d'arcs allant d'une partie A de X vers une partie B de X disjointe de A, ce résultat peut s'écrire :

PROPOSITION 11. On a, pour tout tournoi T et toute bipartition (X_1, X_2) de X :

$$i(T) \leq i(T_1) + i(T_2) + \min\{m^+(X_1, X_2) \,;\, m^+(X_2, X_1)\}$$ ♦

Cette proposition se généralise immédiatement à l'indice de Kemeny $K(T)$ d'un tournoi pondéré, en considérant, au lieu de leur nombre, la somme des poids des arcs allant de X_1 vers X_2 ou de X_2 vers X_1, et en remplaçant $i(T_1)$ (respectivement $i(T_2)$) par $K(T_1)$ (respectivement $K(T_2)$).

Le théorème suivant, dû à P. Erdös et J.W. Moon ([31]), donne un minorant de $I(n)$. Comme de plus $I(n)$ est trivialement majoré par $\left\lfloor \frac{n(n-1)}{4} \right\rfloor$ (on n'inverse pas plus de la moitié des arcs), il montre que, pour n assez grand, $I(n)$ est de l'ordre de $n^2/4$.

THÉORÈME 7. $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_\varepsilon$ tel que $n > n_\varepsilon$ entraîne $I(n) > \frac{n(n-1)}{4}(1 - \varepsilon)$. ♦

On peut raffiner ce résultat à l'aide de ceux obtenus grâce à des raisonnements probabilistes par J. Spencer d'une part ([76] pour le majorant, [77] pour le minorant) et W. F. de la Vega ([30]) de l'autre (pour le minorant) (voir aussi [78]) ; on obtient de ce fait un équivalent de $I(n)$ pour les grandes valeurs de n plus précis que le précédent.

THÉORÈME 8. Pour n assez grand, on a :

$$\frac{n(n-1)}{4} - \frac{7n\sqrt{n}}{4} \leq I(n) \leq \frac{n(n-1)}{4} - \frac{n\sqrt{n}}{8\sqrt{\pi}}$$ ♦

De plus, W.F. de la Vega a montré que, toujours pour n assez grand, la valeur de $i(T)$ est supérieure ou égale à $\frac{n(n-1)}{4} - \frac{7n\sqrt{n}}{4}$ pour presque tous les tournois engendrés aléatoirement de la façon suivante : pour chaque paire de sommets $\{x, y\}$, on choisit l'arc entre x et y avec la même probabilité (donc égale à 0,5) pour chacun des deux sens possibles, le choix de l'orientation d'un arc étant indépendant du choix de l'orientation des autres arcs (en fait, W.F. de la Vega et J. Spencer étudiaient le problème 4, c'est-à-dire la recherche d'un graphe partiel sans circuit ayant le plus d'arcs possibles ; le lien existant entre ce problème et celui de P. Slater permet d'obtenir directement le résultat du théorème 8). Cela montre, incidemment, que cette façon d'engendrer des tournois aléatoires, par exemple pour tester ou comparer (avec la prudence qui s'impose) des méthodes de résolution exactes ou approchées, risque d'introduire un biais en conduisant à des tournois d'indice élevé. L'algorithme proposé dans [20] tente de pallier cet inconvénient et permet d'engendrer aléatoirement des tournois en fixant leurs scores, tout tournoi possédant les scores fixés ayant une probabilité non nulle d'être engendré.

Les valeurs exactes de $I(n)$ pour les premières valeurs de n ($n \leq 13$) sont résumées dans le tableau suivant, tiré de [16] ainsi que les encadrements pour $14 \leq n \leq 25$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$I(n)$	0	0	1	1	3	4	7	8	12	15	20	22	28

n	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
minorant	31	38	40	47	55	64	64	72	80	91	91	103
majorant	32	39	44	52	58	67	73	83	91	102	110	122

Le théorème 9 est lui aussi tiré de [16] :

THÉORÈME 9. Pour tout q et r, on a $I(qr) \geq \text{Max}\{q.I(r) + r^2.I(q), r.I(q) + q^2.I(r)\}$ et $I(qr + 1) \geq \text{Max}\{q.I(r + 1) + r^2.I(q), r.I(q + 1) + q^2.I(r)\}$ ♦

En relation avec $I(n)$ et à défaut de connaître la structure des tournois maximisant $i(T)$, on peut encore mentionner les conjectures énoncées par J.-C. Bermond dans [15] :

CONJECTURE 1. Si n est impair, les tournois d'indice $I(n)$ sont réguliers.

CONJECTURE 2. Si n est impair avec $n = 2q + 1$, $I(2q + 1) = I(2q) + q$.

CONJECTURE 3. Pour tout n, il existe un tournoi régulier (n impair) ou quasi régulier (n pair) d'indice $I(n)$.

On notera que la conjecture 2 entraîne les deux autres. Les conjectures 1 et 3 sont par ailleurs confortées par le résultat de F.W. de la Vega rappelé plus haut, puisque la génération aléatoire consistant à choisir la direction d'un arc avec la même probabilité pour chacun des deux sens conduit d'une part à des indices de Slater souvent élevés et d'autre part à des scores souvent proches les uns des autres.

Il est aussi intéressant d'avoir une idée de la valeur de $i(T)$ pour un tournoi T quelconque, en particulier un minorant (utilisé comme évaluation dans des méthodes arborescentes ; voir plus loin). Les résultats suivants ([15]) s'inspirent de la formulation correspondant au problème 6 dans lequel on cherche un transversal de l'hypergraphe $H(T)$ des circuits. Tout encadrement du nombre de transversalité de $H(T)$ donne un encadrement de $i(T)$. L'inconvénient majeur de cette approche est que $H(T)$ peut être très gros, avec jusqu'à $n(n-1)/2$ sommets (ce qui revient à dire que tout arc appartient à un circuit ; c'est le cas par exemple ([4]), pour n impair, des tournois réguliers) mais surtout avec un nombre d'arêtes qui peut être exponentiel par rapport à n (ne serait-ce qu'à cause des circuits hamiltoniens ; on peut montrer que dans certains tournois réguliers, parfois appelés *tournois circulants*, le nombre de circuits hamiltoniens est au moins $2^{(n-3)/2}$). En pratique, il est souvent trop long de construire $H(T)$. Compte tenu du rôle privilégié que jouent les arcs constituant les 3-circuits de T, on peut ne considérer, pour obtenir un minorant de $i(T)$, que l'hypergraphe $H_3(T)$ des 3-circuits de T (défini comme $H(T)$ en ne considérant que les 3-circuits). $H_3(T)$ peut encore avoir $n(n-1)/2$ sommets ([4]), mais son nombre d'arêtes est égal au nombre de 3-circuits de T. Or, si les scores de T sont $s_1, s_2, ..., s_n$, le nombre $C_3(T)$ de 3-circuits de T vaut ([67]):

$$C_3(T) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \sum_{j=1}^{n} \frac{s_j(s_j-1)}{2} \leq \begin{cases} (n^3-n)\,/\,24 \text{ si } n \text{ impair} \\ (n^3-4n)\,/\,24 \text{ si } n \text{ pair} \end{cases}$$

On constatera au passage que $C_3(T)$ fournit un majorant (trivial) de $i(T)$ (c'est à lui qu'aboutit le résultat de J.B. Kadane ([54]) selon lequel il faut effectuer précisément $C_3(T)$ inversions d'arcs dont les deux extrémités ont même score pour transformer T en un tournoi transitif).

Appelant $\tau_3(T)$ le nombre de transversalité (cardinal minimum d'un transversal, c'est-à-dire d'un sous-ensemble Y de X tel que toute arête passe par au moins un élément de Y ; voir [14] pour la définition) de $H_3(T)$ et $\tau(T)$ celui de $H(T)$, on a, puisque d'une part $H_3(T)$ est un sous-graphe partiel de $H(T)$ et d'autre part $\tau(T) = i(T)$ (problème 6) :

PROPOSITION 12. Pour tout tournoi T, $\tau_3(T) \leq i(T)$. ♦

Néanmoins, le calcul exact de $\tau_3(T)$ risque de rester long, puisque la détermination du nombre de transversalité d'un hypergraphe est NP-difficile dans le cas général ([34]) (mais il n'est pas non plus exclu *a priori* que $H_3(T)$ possède des propriétés jusqu'à présent inexploitées qui rendraient polynomiale la détermination de $\tau_3(T)$). On peut éventuellement se contenter de tout minorant de $\tau_3(T)$, qui en sera donc un aussi pour $i(T)$. En particulier, on peut obtenir le résultat suivant à l'aide des degrés de $H_3(T)$ ([22]), le degré d'un sommet u de $H_3(T)$ (c'est-à-dire un arc de T), étant en fait le nombre de 3-circuits auxquels u appartient dans T.

DÉFINITION 5. On suppose les sommets u de $H_3(T)$ (c'est-à-dire certains arcs de T) numérotés par degrés (dans $H_3(T)$) ∂_u décroissants. On définit le paramètre $\chi(T)$ comme le plus petit entier χ tel que : $\sum_{j=1}^{\chi} \partial(u_j) \geq C_3(T)$.

PROPOSITION 13. Pour tout tournoi T, on a $\chi(T) \leq \tau_3(T)$. ♦

Une autre voie possible, pour minorer $i(T)$, consiste à rechercher des *circuits arc-disjoints*, c'est-à-dire des circuits dont les arcs leur sont propres (deux circuits arc-disjoints peuvent partager un ou plusieurs sommets, mais pas d'arc). En effet, si un tournoi T possède q circuits arc-disjoints, il est nécessaire, pour rendre T transitif, de détruire tous ces circuits ; or, l'inversion d'un arc de l'un de ces circuits n'affecte pas les autres circuits, puisqu'ils sont arc-disjoints ; donc $i(T)$ est supérieur ou égal au nombre maximum de circuits arc-disjoints de T :

PROPOSITION 14. Soit $\nu(T)$ le nombre maximum de circuits arc-disjoints de T ; on a :

$$\nu(T) \leq i(T).$$ ♦

Ce résultat peut aussi être montré en considérant un couplage maximum de $H(T)$, c'est-à-dire un ensemble d'arêtes telles que deux quelconques de ces arêtes ne passent pas par un même sommet. Une arête de $H(T)$ étant un circuit de T, un couplage de $H(T)$ définit un ensemble de circuits arc-disjoints de T et réciproquement. Or, dans tout hypergraphe, le cardinal de tout couplage est inférieur ou égal au cardinal de tout transversal (voir [14]). D'où, compte tenu de l'égalité entre $\tau(T)$ et $i(T)$, l'inégalité (qui peut être stricte) entre le cardinal maximum $\nu(T)$ d'un couplage de $H(T)$ et $i(T)$.

On peut encore interpréter $\nu(T)$ comme le nombre de stabilité (cardinal maximum d'un ensemble de sommets deux à deux non adjacents) du graphe dont les sommets sont les circuits de T, deux sommets étant reliés si les deux circuits associés partagent au moins un arc.

Quelle que soit la façon dont on interprète $\nu(T)$, son calcul reste trop long en pratique. On peut bien sûr se restreindre, comme précédemment, à la recherche d'un couplage maximum dans $H_3(T)$, c'est-à-dire à un ensemble maximum de 3-circuits arc-disjoints. Même alors, cela risque de prendre trop de temps, et on peut être amené à devoir se contenter d'un minorant de ce nombre. Notons que, si on appelle $\nu_3(T)$ le cardinal d'un couplage maximum dans $H_3(T)$, ce minorant sera moins bon que $\tau_3(T)$, puisque, fort de ce qui a été énoncé plus haut :

PROPOSITION 15. Pour tout tournoi T, on a $\nu_3(T) \leq \tau_3(T)$. ♦

En corollaire de la proposition 14, il vient que $I(n)$ est minoré par le nombre $\pi(n)$ maximum de circuits arc-disjoints qu'un tournoi à n sommets peut posséder. Ce nombre est identique au nombre de cycles arête-disjoints que la clique K_n à n sommets possède puisqu'il est toujours possible, comme le remarque J.-C. Bermond dans [15], d'orienter ces cycles arête-disjoints indépendamment les uns des autres pour les transformer en circuits arc-disjoints ; il suffit ensuite d'attribuer une orientation arbitraire aux arêtes de K_n qui n'en auraient pas reçu pour obtenir un tournoi à $\pi(n)$ circuits arc-disjoints. R.K. Guy d'une part ([44]), G. Chartrand, D. Geller et S. Hedetniemi d'autre part ([25]) ont déterminé ce nombre, d'où :

PROPOSITION 16. Pour tout n, on a $\pi(n) = \left\lfloor \frac{n}{3}\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right\rfloor \leq I(n)$. ♦

On remarquera à l'aide du tableau donné plus haut qu'il y a égalité pour $n \leq 9$, puis inégalité stricte au-delà.

On peut aussi chercher à encadrer l'indice de Slater d'un tournoi en faisant intervenir ses scores. Le paramètre $\sigma(T)$ est défini dans [18] et était déjà suggéré par A. Guénoche dans [39] :

DÉFINITIONS 6.
1. Soient $s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_n$ les scores de T triés par ordre croissant. On pose :

$$\sigma(T) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |s_i - i + 1|.$$

2. On pose $I(n, \sigma) = \text{Max}\{i(T) \text{ pour } T \text{ à } n \text{ sommets et tel que } \sigma(T) = \sigma\}$

Les résultats suivants sont démontrés dans [18].

PROPOSITION 17.
1. Pour tout T, $\sigma(T)$ est un entier compris entre 0 (pour les tournois transitifs et seulement eux) et $(n^2 - 1)/8$ si n est impair (cas des tournois réguliers et seulement eux), $(n^2 - 2n)/8$ si n est pair (cas entre autres des tournois quasi réguliers), et toutes les valeurs entières intermédiaires peuvent être observées.

2. Pour tout T, $\sigma(T) = \sum_{i:s_i-i+1\geq 0}(s_i - i + 1) = -\sum_{i:s_i-i+1\leq 0}(s_i - i + 1)$.
3. Les sommets x_j ($1 \leq j \leq n$) de T étant numérotés conformément à l'ordre croissant des scores, pour tout q compris entre 1 et $n - 1$, le nombre d'arcs ayant leur origine dans $\{x_1, x_2, \ldots x_q\}$ et leur extrémité dans $\{x_{q+1}, x_{q+2}, \ldots x_n\}$ est inférieur ou égal à $\sigma(T)$. ♦

PROPOSITION 18. Pour tout tournoi T, on a $\sigma(T) \leq i(T)$ et il existe des tournois pour lesquels il y a égalité. ♦

PROPOSITION 19. Soit q un entier. On a, pour n assez grand ($n \geq 6p$ suffit) :
1. Si $q \equiv 0$ ou 1 [mod 4], alors pour $\sigma = \frac{3p(3p+1)}{4}$, $I(n, \sigma) \geq \frac{\sqrt{16\sigma+1}-1}{6}n - \sigma$
2. Si $q \equiv 2$ [mod 4], alors pour $\sigma = \frac{p(9p+4)}{4}$, $I(n, \sigma) \geq \frac{\sqrt{36\sigma+4}-2}{9}n - \sigma$
1. Si $q \equiv 0$ ou 1 [mod 4], alors pour $\sigma = \frac{9p^2+4p-1}{4}$, $I(n, \sigma) \geq \frac{\sqrt{36\sigma+13}-2}{9}n - \sigma$ ♦

Ces minorants sont obtenus en exhibant des tournois avec $\sigma(T) = \sigma$ ayant un nombre de 3-circuits arc-disjoints égal à l'un des minorants, d'où le résultat en vertu de la proposition 14. On notera que ces minorants sont peu différents de $\frac{2}{3}n\sqrt{\sigma} - \sigma$. D'autre part, pour les valeurs de σ que l'on atteint pas à l'aide d'une des formules précédentes, la construction utilisée pour exhiber ces minorants peut encore être appliquée pour fournir des tournois à σ fixé ayant un « grand » nombre de 3-circuits (voir [18] pour plus de détails).

THÉORÈME 10. Pour $\sigma \neq 0$, on a pour tout n : $I(n, \sigma) < n\sqrt{\sigma}$. ♦

En fait, la méthode suivie dans [18] (elle n'est d'ailleurs valable en principe que pour $\sigma \geq 9$; on peut facilement compléter les cas manquants en s'en inspirant) permet d'avoir un majorant plus fin, mais aussi plus difficile à exprimer. Ainsi, pour $\sigma \geq 9$ et pour n assez grand, a-t-on le minorant (lui-même issu d'une approximation que l'on peut éviter) $\frac{1}{2}\sqrt{(n^2-2n)(4\sigma+1)} - \frac{n}{4}$ (voir [18] pour plus de détails).

De la proposition 18 et du théorème 10, on tire le corollaire suivant :

COROLLAIRE 9. Pour tout tournoi non transitif T à n sommets, on a l'encadrement :
$$\sigma(T) \leq i(T) \leq n\sqrt{\sigma(T)}.$$
♦

La majoration que l'on obtient pour $I(n)$ en remplaçant $\sigma(T)$ par son maximum ne donne pas une borne plus intéressante que les précédentes. Même pour des petites valeurs de σ, l'écart entre $I(n, \sigma)$ et $n\sqrt{\sigma}$ n'est pas négligeable, comme en témoigne la proposition 20, issue de [18] :

PROPOSITION 20. $I(n, 1) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, $I(n, 2) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor$, $I(n, 3) \in \{n-3, n-2\}$.
♦

En fait, la construction utilisée pour majorer $i(T)$ repose sur un regroupement des sommets (considérés selon les scores croissants) en paquets à peu près de même cardinal, puis à rendre transitif chacun des paquets (on majore alors le nombre d'arcs à inverser à l'aide de la borne de K.B. Reid rappelée au théorème 5) et enfin à détruire les circuits restants en inversant les arcs allant d'un paquet contenant des sommets de faible score vers un paquet contenant des sommets de score plus élevé. Or, pour des raisons techniques, il faut que les paquets ne contiennent pas trop de sommets (sinon la majoration du nombre d'arcs à inverser entre les paquets est trop grossière), ni trop peu (sinon la borne de K.B. Reid n'est plus applicable). Cela explique que la valeur proposée pour majorer $I(n, \sigma)$ ne soit bonne ni pour σ très petit ni σ très grand ; il semble alors préférable de revenir au début de la construction elle-même et de l'adapter au cas particulier à traiter.

En revanche, on constate que le rapport entre le minorant de $I(n, \sigma)$ énoncé à la proposition 19 et le majorant du théorème 10 est de l'ordre de 2/3, c'est-à-dire du même ordre que le rapport entre le nombre maximum de circuits arc-disjoints et le maximum asymptotique de $I(n)$. Comme le minorant de la proposition 19 est obtenu à l'aide de circuits arc-disjoints, ce rapport semble indiquer qu'il est probablement difficile d'obtenir un encadrement qualitativement plus resserré en ne prenant en compte que des constructions fondées sur la manipulation des circuits arc-disjoints.

Concernant encore le paramètre σ, il est intéressant de le comparer aux autres minorants. Il est facile d'obtenir des tournois T pour lesquels $\sigma(T)$ est plus petit que $\tau_3(T)$, $\chi(T)$, $\nu(T)$ ou $\nu_3(T)$ (par exemple à l'aide des tournois T avec $\sigma(T) = 1$). L'étude de l'unique (*cf.* [67]) tournoi régulier R_5 à cinq sommets montre que σ peut aussi être plus grand que ν_3 ; en effet, on a : $\sigma(R_5) = 3$ et $\nu_3(R_5) = 2$ (mais en revanche R_5 possède, outre deux 3-circuits arc-disjoints, un troisième circuit arc-disjoint des deux précédents et de longueur 4 : d'où $\sigma(R_5) = \nu(R_5)$). Pour les paramètres ν et τ_3 comparés à σ, nous conjecturons les inégalités suivantes :

CONJECTURES 4.
1. Pour tout tournoi T, on a $\sigma(T) \leq \nu(T)$.
2. Pour tout tournoi T, on a $\sigma(T) \leq \tau_3(T)$.

Une autre conjecture a été posée dans [18] concernant la croissante de $I(n, \sigma)$ avec σ :

CONJECTURE 5. Pour n fixé, $I(n, \sigma)$ croît (au sens large ? au sens strict ?) avec σ (pour les valeurs de σ compatibles avec n).

Cette conjecture peut être rapprochée de celles de J.-C. Bermond (rappelées plus haut) : une croissance large de $I(n, \sigma)$ montrerait que, pour n impair, certains tournois réguliers maximisent l'indice de Slater (première partie de la conjecture 3) et une croissance stricte entraînerait la conjecture 1 (car seuls les tournois réguliers ont un σ maximum pour n impair). Pour n pair, la conjecture 5 n'entraînerait aucune des conjectures de J.-C. Bermond, mais renforcerait la seconde partie de la conjecture 3 en donnant la forme des scores des tournois (ou de certains d'entre eux) maximisant l'indice de Slater.

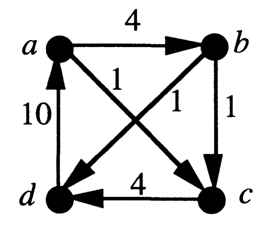
On peut enfin rappeler aussi la conjecture d'A. Adám ([1]), qui concerne plus généralement les graphes orientés antisymétriques (la proposition est fausse dans le cas de graphes orientés non nécessairement antisymétriques (voir [80]) ; la conjecture est vraie si on remplace « circuit » par « 3-circuit » ou « le nombre de circuits » par « l'indice de Slater »).

CONJECTURE 6. Dans tout tournoi non transitif, il existe au moins un arc dont l'inversion fait décroître le nombre de circuits.

5. ENCADREMENTS DE $K(T)$

Comme pour $i(T)$, il est toujours possible de majorer l'indice de Kemeny $K(T)$ à l'aide d'une heuristique ; nous n'examinerons pas ici ces possibilités. Notons seulement qu'il est possible de considérer comme majorant le produit de l'indice de Slater par le plus grand des poids des arcs du tournoi ; quand les poids sont un peu variés, ce majorant est en général mauvais, voire très mauvais. Remarquons aussi que le nombre d'arcs que l'on inverse dans un tournoi T pondéré pour le rendre transitif « au moindre coût » ne peut en aucun cas être strictement inférieur à l'indice de Slater du même tournoi dépourvu de ses poids. En revanche, ce nombre d'arcs peut être strictement supérieur. Ces remarques sont résumées dans le lemme suivant dont la preuve, évidente, découle de la définition d'un minimum.

LEMME 2. Soit un tournoi $T = (X, U)$ pondéré par p. Soient $V \subset U$ de cardinal minimum tel que $(X, (U - V) \cup \overline{V})$ soit transitif et $W \subset U$ avec $p(W)$ minimum tel que $(X, (U - W) \cup \overline{W})$ soit transitif. Alors $|W| \geq |V| = i(T)$ et $p(V) \geq p(W) = K(T)$. ♦



Le fait que ces inégalités puissent être strictes est illustré par l'exemple ci-contre à quatre sommets. L'indice de Slater de ce tournoi vaut 1 (l'inversion de l'arc (d, a) suffit à le rendre transitif) mais son indice de Kemeny vaut 3 et correspond à l'inversion des arcs (a, c), (b, c) et (b, d), tandis que l'inversion de l'arc (d, a) entraîne un poids de 10. On constate aussi sur cet exemple qu'on peut être amené à inverser un arc n'appartenant à aucun 3-circuit, comme ici l'arc (b, c).

Il résulte des caractérisations de B. Debord qu'il est possible d'observer des tournois uniformément pondérés par 0 et qui soient représentatifs de profils d'ordres totaux ou de profils de tournois. Il est clair alors que tout ordre total est ordre médian et que l'indice de Kemeny est nul ; le minimum de $K(T)$ peut donc être nul, sans pour autant que T soit transitif.

D'un autre côté, il résulte du lemme 2 que le maximum de $K(T)$ est majoré par $i(T).p_{max}$ où p_{max} désigne le plus grand des poids des arcs de T, et cette borne peut être atteinte (c'est le cas notamment, bien sûr, quand les arcs portent tous le même poids...).

Les deux résultats qui suivent tentent de raffiner un peu cet encadrement en faisant intervenir plus distinctement les poids des arcs.

PROPOSITION 21. Soit un tournoi T pondéré par p et soient $u_1, u_2, \ldots, u_{\frac{n(n-1)}{2}}$ les arcs de T numérotés selon les poids croissants : $0 \leq p(u_1) \leq p(u_2) \leq \ldots \leq p\left(u_{\frac{n(n-1)}{2}}\right)$. Soit $\alpha(T)$ un minorant quelconque de $i(T)$. On a alors $K(T) \geq \sum_{j=1}^{\alpha(T)} p(u_j)$.

Preuve. Il découle du lemme 2 qu'on doit inverser au moins $i(T)$ arcs pour rendre T transitif. Dans le meilleur des cas, il s'agit des arcs les plus légers. D'où $K(T) \geq \sum_{j=1}^{i(T)} p(u_j)$. Comme les poids sont tous positifs ou nuls, on peut minorer cette dernière somme par le terme mentionné dans la proposition 21. ♦

Cette minoration, utile par exemple dans les méthodes de recherche arborescentes (voir plus loin), est applicable en particulier en considérant les paramètres $\sigma(T)$ ou $\chi(T)$, relativement faciles à calculer. Le résultat est souvent assez médiocre quand les poids sont variés (puisqu'on considère systématiquement les plus petits poids), mais peut-être assez bon si les poids sont proches les uns des autres. Il sera évidemment d'autant plus proche de $K(T)$ que le minorant $\alpha(T)$ sera proche de $i(T)$.

La minoration suivante, même si elle repose sur une moins bonne approximation de $i(T)$ que $\chi(T)$, peut être meilleure que la précédente quand les poids sont variés. Pour cela, soit C un circuit de T ; on pose $\psi(C) = \min_{u \in C} p(u)$. De même, pour un ensemble E de circuits arc-disjoints, on pose $\Psi(E) = \sum_{C \in E} \psi(C)$. On peut maintenant énoncer la proposition 22 :

PROPOSITION 22. Soit un ensemble quelconque E de circuits arc-disjoints de T ; on a alors : $\Psi(E) \leq K(T)$.

Preuve. Puisque E est un ensemble de circuits arc-disjoints, pour rendre T transitif, il est nécessaire de détruire les circuits de E en inversant au moins un arc de chacun d'entre eux. Dans le meilleur des cas, il s'agit de l'arc le plus léger du circuit. Chaque circuit C de E apporte donc une contribution, qui lui est propre, au moins égale à $\psi(C)$. L'inégalité s'ensuit. ♦

On est donc amené à chercher un ensemble E de circuits arc-disjoints tel que $\Psi(E)$ soit aussi grand que possible. La détermination du maximum que peut prendre $\Psi(E)$ étant en pratique trop longue, on doit en fait se contenter d'un minorant de ce maximum. Remarquons au passage qu'un ensemble E maximisant Ψ n'a pas de raison d'être un ensemble de cardinal égal à $v(T)$: on peut avoir intérêt à sélectionner moins de circuits arc-disjoints, mais plus lourds. C'est pour cette raison (les poids sont en moyenne plus élevés) que ce minorant peut être meilleur que celui obtenu à partir de $\chi(T)$.

6. ALGORITHMES DE RÉSOLUTION EXACTE OU APPROCHÉE

Le problème étant NP-difficile, les algorithmes permettant d'exhiber un ordre médian (ou *a fortiori* tous les ordres médians) ont une complexité croissant exponentiellement avec n. Le problème de Slater n'étant pas connu pour être polynomial, il en est de même pour les algorithmes permettant de le résoudre de manière exacte. On peut dès lors adopter l'une des trois directions suivantes :

- Chercher une (ou toutes les) solution(s) optimale(s), à l'aide d'une méthode exacte de complexité exponentielle ; ceci n'est envisageable que pour des valeurs de n qui ne sont pas trop grandes.
- Se contenter d'une solution approchée obtenue en un temps raisonnable, en essayant bien sûr de faire en sorte qu'elle soit aussi bonne que possible.
- Analyser le cas à traiter afin de savoir s'il appartient à une famille d'instances polynomiales du problème, auquel cas on peut le résoudre polynomialement à l'aide d'un algorithme idoine.

De nombreuses méthodes ont été proposées dans les deux premières directions : programmation linéaire (par la résolution du problème dual du problème en 0-1 donné dans la première partie), programmation dynamique, méthodes arborescentes par séparation et évaluation (*branch and bound* en anglais), techniques d'affectation quadratique (on trouvera dans [62] une formulation du problème sous forme d'affectation quadratique et des éléments de résolution pour les problèmes de cette forme), différentes heuristiques fondées sur des améliorations locales. On trouvera de nombreuses références dans [11], [12] et [72], références que nous ne reproduirons pas ici. D'autres méthodes depuis ont été proposées, s'inspirant ou non de techniques déjà utilisées.

Pour les méthodes exactes, on peut signaler l'approche polyédrale de M. Grötschel,

M. Jünger et G. Reinelt ([36], [37] et [38]) complétée, lorsqu'elle échoue, par une méthode arborescente ; elle a permis à ces auteurs de résoudre de manière exacte des problèmes assez gros, allant, pour des problèmes associés à des données réelles, jusqu'à $n = 60$.

On peut aussi signaler les méthodes arborescentes développées dans [9], [19], [21] ou [22], qui essaient de tirer parti d'un ou de plusieurs des résultats théoriques énoncés plus haut, relatifs aux propriétés vérifiées par les vainqueurs de Kemeny ou de Slater. Un des intérêts de ce genre de méthode réside dans le fait qu'il permet d'obtenir toutes les solutions optimales. Des raffinements techniques ont été apportés par A. Guénoche, par exemple en mémorisant des informations sur les sections commençantes engendrées ; la comparaison de ces informations lui permet ensuite d'éliminer des sections qui ne peuvent être sections commençantes d'ordres médians ou de Slater (voir [40] ou l'article d'A. Guénoche [41] dans ce numéro). Les propriétés des vainqueurs de Kemeny ou de Slater ont aussi été exploitées, du moins certaines d'entre elles, pour accélérer la recherche des ordres médians ou de Slater en éliminant là encore des sections commençantes ne pouvant conduire à des solutions optimales. Il en est de même des minorations de $i(T)$ ou de $K(T)$ évoquées dans les parties 4 et 5 afin d'améliorer la fonction d'évaluation des sommets de l'arborescence en anticipant sur ce qu'il faudra inverser pour compléter la section commençante en un ordre total défini sur l'ensemble des sommets du tournoi. Des expériences menées sur différents types de tournois (voir par exemple [22]) montrent que les variantes obtenues en prenant en compte ces paramètres permettent de réduire considérablement les temps de calcul et la taille de l'arborescence. *A contrario*, les raffinements reposant sur les propriétés combinatoires ne semblent pas toujours apporter un gain important : par exemple, ne chercher les vainqueurs que parmi les sommets non couverts (théorème 3) élimine peu de sommets de l'arborescence, et ne compense pas en général le temps passé à exhiber les sommets non couverts, tandis que le fait de se restreindre aux sommets pour lesquels la somme des poids des arcs sortants est supérieure ou égale à celle des arcs entrants (proposition 4) conduit à une procédure à la fois rapide et efficace. En ce qui concerne la stratégie selon laquelle on développe l'arborescence, deux stratégies ont été essentiellement appliquées : celle qui consiste à développer la feuille de plus petite évaluation (stratégie « meilleur d'abord », mise en œuvre par exemple dans [9]) qui a pour avantage que le premier ordre total calculé sur X est optimal mais comme inconvénient d'encombrer une grande place mémoire, et le classique développement « en profondeur d'abord », moins consommateur de place mémoire (il suffit de connaître la branche sur laquelle on travaille et non plus toute l'arborescence) et plus propre à utiliser les calculs effectués lors des itérations précédant le traitement du sommet courant de l'arborescence, mais qui nécessite l'exploration de toute l'arborescence (c'est-à-dire de toutes les branches qui ne sont élaguées ni par l'évaluation ni par le principe de séparation). Une bonne heuristique permet, pour la recherche en profondeur d'abord, d'avoir un ordre total qui indiquera dans quel ordre procéder à la séparation et ainsi de réduire l'énumération en facilitant l'obtention précoce d'une solution optimale. De plus, il est facile, d'un point de vue pratique, d'appliquer les variantes précédentes dans un parcours en profondeur (voir [22]). D'un autre côté, il est montré dans [21] comment l'utilisation d'une structure de données un peu sophistiquée (un « tas ») peut accélérer, dans une stratégie meilleur d'abord, la détermination de la feuille à développer (la complexité de cette opération passe ainsi de $O(n!)$ dans [9] à $O(n.\log n)$ dans [21] pour le même algorithme mais avec un tas pour conserver les feuilles de l'arborescence).

Parmi les méthodes heuristiques postérieures à 1981 et ne se trouvant donc pas évoquées dans [11] figure la relaxation lagrangienne, développée par D. Arditti en 1984 dans [5]. En relâchant (au sens lagrangien) les contraintes de transitivité du programme en 0-1 énoncé dans la première partie, D. Arditti obtient un problème dual (au sens lagrangien) qui, appliqué à des données réelles avec $n = 36$ et $n = 44$, lui a permis d'obtenir des solutions optimales (pour l'exemple avec $n = 36$ tiré de [63], D. Arditti estime que le temps de calcul est environ huit fois moins élevé que la méthode utilisée par F. Marcotorchino et P. Michaud ([63]), reposant sur la résolution du problème dual (au sens de la programmation linéaire) du même programme linéaire décrit dans la première partie, mais en continu ; même si la machine est identique dans les deux cas, il semble cependant raisonnable d'être prudent dans ce genre de comparaisons expérimentales). Le comportement du temps de calcul de cette méthode reste acceptable pour des valeurs plus grandes de n : moins d'une heure de temps CPU (sur un

DPS8) pour des tests aléatoires avec n compris entre 50 et 90.

D'autres heuristiques ont été proposées pour déterminer un ordre médian ou un ordre de Slater, fondées sur des méthodes heuristiques générales (« métaheuristiques ») comme les méthodes d'amélioration itérative (*descentes*), le recuit simulé, la méthode Tabou ([46]), une métaheuristique récente nommée *bruitage* ou sur des hybridations de telles méthodes avec des algorithmes génétiques ([23]) (les algorithmes génétiques « purs » semblant peu efficaces par rapport aux méthodes précédentes). Ces techniques utilisent les décalages décrits plus haut (définitions 1). Plus précisément, pour une descente, on part d'une configuration donnée (un ordre total) et on envisage successivement des décalages (ou des combinaisons de certains décalages) d'un sommet dans la configuration courante ; si une telle transformation entraîne une diminution de l'éloignement, on l'adopte, sinon on la rejette ; on recommence ainsi tant qu'on peut. Par rapport à une descente, le recuit simulé (méthode stochastique) acceptera une transformation avec une probabilité qui est une fonction décroissante de l'augmentation de l'éloignement d'une part et, d'autre part, du degré d'avancement du déroulement de la méthode, pour se confondre finalement avec une descente. La méthode Tabou (méthode déterministe) consiste d'abord à appliquer une descente dans laquelle on choisit, à chaque itération, la transformation qui entraîne la plus grande diminution de l'éloignement ; quand on ne peut plus descendre, on remonte en adoptant la transformation qui fait le moins remonter et en interdisant, pendant un certain nombre d'itérations, la transformation inverse qui ferait revenir sur ses pas. Le bruitage (méthode stochastique) s'inspire aussi des descentes, mais au lieu de considérer la véritable variation de l'éloignement quand on applique une transformation, on ajoute à celle-ci une perturbation (un « bruit ») qui décroît vers 0 au cours de l'algorithme ; il diffère du recuit simulé par principalement trois facteurs : l'aspect aléatoire n'intervient pas avec la même distribution, de ce fait on peut rejeter une transformation avantageuse, la manière d'examiner les transformations est plus systématique et évite d'appliquer plusieurs fois une même transformation. Les algorithmes génétiques (méthode stochastique) quant à eux travaillent non plus sur une seule configuration, mais sur plusieurs à la fois (une *population*) ; trois opérateurs interviennent (du moins pour les algorithmes génétiques « purs » ; d'autres formes sont actuellement développées incluant par exemple des descentes associées à chaque configuration de la population) : la sélection qui va choisir, en fonction de leurs éloignements au tournoi, certains ordres totaux de la population, le croisement qui va combiner les ordres totaux sélectionnés pour en fabriquer des nouveaux et la mutation qui va modifier localement la structure des ordres totaux ainsi engendrés. Les hybridations de ces méthodes mélangent des ingrédients de ces méthodes dans le but d'obtenir de nouvelles techniques empruntant des éléments (si possible les bons !) aux métaheuristiques précédentes ; ainsi, d'après [23], introduire un examen systématique des transformations (comme dans le bruitage) dans un recuit simulé permet d'améliorer les performances de celui-ci, de même que l'introduction de croisements (comme dans les algorithmes génétiques) dans le recuit simulé ou le bruitage. Ces méthodes donnent souvent de bons résultats en des temps de calcul acceptables. Ainsi, pour certains tournois non pondérés pour lesquels on connaît l'indice de Slater (voir plus loin), le recuit simulé ou le bruitage déterminent une solution optimale en quelques secondes pour des tournois à plusieurs centaines de sommets (mais ces tournois, construits par des substitutions décrites plus loin, ont des propriétés très particulières ; néanmoins, une descente ou une méthode spécifique comme celle de A.F.M. Smith et C.D. Payne, évoquée au paragraphe suivant, échouent assez fréquemment sur ces tournois).

Des méthodes approchées liées au problème ont aussi été proposées. C'est le cas par exemple de la méthode de A.F.M. Smith et C.D. Payne ([75]) pour le problème de l'ajustement d'un tournoi en un ordre total (problème de P. Slater). Elle exploite le résultat suivant, que l'on peut trouver par exemple dans le livre de J.W. Moon ([67]) :

PROPOSITION 23. Soient T un tournoi non pondéré et soit (x, y) un arc de T ; soient $s(x)$ et $s(y)$ les scores de x et de y respectivement. Si $s(y)$ est supérieur ou égal à $s(x)$, alors l'inversion de l'arc (x, y) dans T entraîne une diminution du nombre de 3-circuits égale à $s(y) - s(x) + 1$. ♦

On notera que l'inversion d'un arc appartenant à un 3-circuit peut bien sûr en créer de nouveaux. Le résultat de la proposition 23 tient compte de ce fait et la quantité $s(y) - s(x) + 1$ représente en fait le nombre de 3-circuits détruits moins le nombre de 3-circuits créés par l'inversion de l'arc (x, y). A.F.M. Smith et C.D. Payne tirent donc profit de ce résultat pour identifier des arcs dont l'inversion va rapprocher le tournoi d'un tournoi transitif : on inverse l'arc (x, y) (ou, en cas d'égalité, un des arcs choisi arbitrairement) qui maximise $s(y) - s(x)$; on procède ainsi tant qu'il y a des 3-circuits (puisqu'un tournoi est transitif si et seulement s'il ne contient pas de 3-circuit). Il ne s'agit que d'une heuristique, dont la complexité peut être majorée par $O(n^5)$ (une bonne structure de données permet d'obtenir une meilleure complexité), et qui échoue parfois dans la recherche d'un ordre de Slater, comme l'a montré J.P.N. Phillips dans [68] à l'aide d'un tournoi à 10 sommets (un autre exemple à 8 sommets est donné dans [9] ; pour des valeurs plus petites de n, on peut trouver des tournois pour lesquels leur algorithme ne donne qu'une partie des solutions optimales quand on fait varier les arcs à égalité à une itération donnée, ou encore fournit des ordres n'ayant pas tous la même distance au tournoi initial). Cette méthode est généralisée de deux façons au cas des tournois pondérés ([9]) : dans la première généralisation, on divise $s(y) - s(x) + 1$ par le poids de l'arc (x, y) ; dans la seconde, on remplace $s(y) - s(x) + 1$ par la différence entre le poids des 3-circuits que l'on détruit en inversant (x, y) et le poids des 3-circuits que l'on crée, puis on divise cette différence par le poids de (x, y). La seconde généralisation est plus longue à mettre en œuvre que la première mais donne souvent de meilleurs résultats. Cependant, ces variantes donnent en général des valeurs nettement moins bonnes que les métaheuristiques évoquées plus haut, y compris dans le cas non pondéré.

Pour mémoire, on mentionnera aussi les méthodes relativement rudimentaires développées par W.D. Cook et M. Kress, seuls ou avec divers auteurs (I. Ali, I. Golan, ... ; voir [27] par exemple) pour approcher un ordre de Slater. Utilisant le fait qu'un ordre de Slater définit un chemin hamiltonien du tournoi, ils conçoivent un algorithme en $O(n^2)$ dans [27] améliorant un ordre total qui ne posséderait pas cette propriété, par exemple obtenu par un autre algorithme proposé dans [27] et fondé sur une amélioration de l'ordre de Copeland (c'est-à-dire défini par l'ordre décroissant des scores ; l'amélioration en question consiste à départager les sommets de même score en considérant le sous-tournoi qu'ils engendrent et en appliquant la même méthode à celui-ci ; une variante (en $O(n^4)$) est proposée qui consiste, quand on rencontre des sommets de même score s, à examiner le sous-tournoi engendré par tous les sommets non encore traités au lieu de celui induit seulement par les sommets de score s). Ils appliquent aussi des descentes utilisant ce que nous avons appelé plus haut des décalages. Ils comparent ces variantes à la méthode proposée par S.T. Goddard ([35]) et concluent que celle-ci est moins bonne (ce qui n'est pas forcément très étonnant et ne constitue pas au demeurant un argument d'efficacité très convaincant).

Cette dernière modifie elle aussi la méthode de Copeland en essayant d'éliminer les *ex æquo*. Pour cela, en appelant $A = (a_{kl})$ la matrice d'adjacence du tournoi à traiter, on calcule les matrices (appelées par S.T. Goddard les matrices de j-connectivité) $A_j = \left(a_{kl}^j\right)$ définies par $A_1 = A$ et, pour tout $j > 1$, pour tout k et tout l, $a_{kl}^{j+1} = \left(\sum_{q=1}^{n} a_{kq}^j + \sum_{q=1}^{n} a_{lq}^j\right) \times a_{kl}$; on mène ces calculs jusqu'à un indice j tel que tous les a_{kl}^j soient distincts (ce qui peut ne jamais se produire) ; on adopte alors l'ordre induit par les a_{kl}^j. (On remarquera que cette méthode rappelle celle que J.-F. Laslier appelle la *solution du long chemin* dans [61] ; les différences sont qu'on n'itère pas jusqu'à l'infini et qu'il ne s'agit pas tout à fait des puissances de A.) On peut se demander si la méthode de S.T. Goddard est tout à fait appropriée pour la recherche d'un ordre de Slater, ou si elle ne constituerait pas plutôt une autre solution de tournoi...

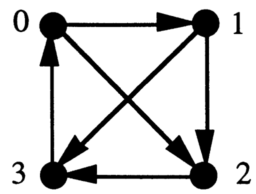
Plus fouillée que les précédentes est la méthode récemment mise au point par M. Kaykobad, Q.N.U. Ahmed, A.T.M. Shafiqul Khalid et R.-A. Bakhtiar dans [55], toujours pour le problème de Slater (mais elle ne semble pas difficile à généraliser aux tournois pondérés). Cet algorithme, dont la complexité est évaluée par les auteurs à $O(n^6)$ (ou $O(n^5)$ si on accepte de consacrer une place mémoire en $O(n^3)$ pour conserver le résultat de calculs intermédiaires), améliore un ordre total (éventuellement aléatoire) en en déterminant un qui ne soit pas améliorable par des décalages (ce qui entraîne qu'il respecte le principe du chemin hamiltonien). Bien qu'il s'apparente ainsi à la proposition 4, il fait intervenir d'autres transformations que les décalages de sommets un à un. Il utilise la notion de *coupe* : une coupe dans un ordre total O est une bipartition de l'ensemble des sommets séparant l'ensemble M_O des meilleurs (selon O) sommets de l'ensemble P_O des pires (toujours selon O). La valeur de la coupe est le nombre d'arcs allant de M_O vers P_O moins le nombre d'arcs ayant l'orientation opposée. Constatant que, pour être optimal, un ordre total ne doit pas contenir de coupe de valeur négative, les quatre chercheurs cités ont conçu un algorithme construisant un tel ordre, à l'aide d'échanges intervertissant les sommets de M_O et ceux de P_O quand une coupe (M_O, P_O) de valeur négative (ou parfois de valeur nulle) est trouvée dans l'ordre courant O. L'ordre d'examen des coupes permet d'aboutir à un ordre total possédant la propriété énoncée plus haut.

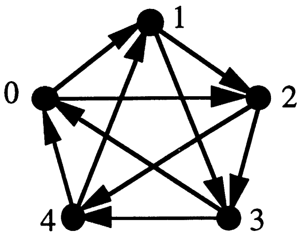
On peut encore citer les algorithmes développés par S. Poljak et D. Turzík dans [70] et par S. Poljak, V. Rödl et J. Spencer dans [69]. Dans [70] est présenté un algorithme récursif qui s'applique à plusieurs problèmes d'optimisation, dont la recherche d'un graphe sans circuit dans un graphe orienté. Étant donné un graphe $G = (S, A)$ pondéré par une fonction c positive ou nulle, il permet, pour les problèmes considérés et pour certaines valeurs d'un réel λ compris strictement entre 0 et 1, d'exhiber un graphe partiel $H = (S, B)$ tel qu'on ait : $\sum_{b \in B} c(b) \geq \lambda \sum_{a \in A} c(a) + \frac{1-\lambda}{2}\alpha(G)$, où $\alpha(G)$ est le poids d'un arbre couvrant de poids minimum (par rapport à c) de G. Dans le cas de la recherche d'un graphe partiel sans circuit d'un graphe orienté antisymétrique avec c qui est la fonction constante égale à 1, ils trouvent que $\lambda = 0{,}5$ convient. Ils obtiennent ainsi un algorithme qui sélectionne dans un tournoi au moins $\frac{n(n-1)}{4} + \frac{n-1}{4}$ arcs sans circuit, et donc qui inverse au plus $\frac{(n-1)^2}{4}$ arcs pour obtenir un ordre total. Quant à l'algorithme qui se trouve dans [69], il s'agit d'une belle (et non triviale !) application des méthodes probabilistes au même problème. Les auteurs de cet article en déduisent un algorithme en $O(n^3.\log n)$ qui détermine (au moins pour n assez grand) un graphe partiel sans circuit avec au moins $\frac{n(n-1)}{4} + \frac{n\sqrt{n}}{8\sqrt{\pi}}$ arcs du tournoi, et donc un ordre total obtenu en inversant au plus $\frac{n(n-1)}{4} - \frac{n\sqrt{n}}{8\sqrt{\pi}}$ arcs.

En ce qui concerne la troisième voie possible (rechercher des familles polynomiales d'instances), il semble qu'il y ait peu de travaux effectués jusqu'à maintenant. On trouvera néanmoins dans [19] deux algorithmes en $O(n)$ (y compris pour la saisie du graphe, sous une forme appropriée bien sûr) permettant de déterminer l'indice de Slater et un ordre de Slater pour tout tournoi T avec $\sigma(T) = 1$ pour l'un (très simple) et $\sigma(T) = 2$ pour l'autre (nettement moins sympathique). Plus d'audace conduit à poser la conjecture 7 (dont on notera qu'elle n'est pas incompatible avec une éventuelle NP-difficulté du problème de Slater) :

CONJECTURE 7. Soit σ un entier fixé. La détermination de l'indice de Slater des tournois T avec $\sigma(T) = \sigma$ peut se faire en un temps polynomial (par rapport à n).

Il existe aussi une famille simple de tournois pour lesquels la résolution est immédiate : ce sont les tournois parfois appelés les *circulants*. Ils sont obtenus en plaçant les n sommets sur un cercle et on trace les arcs en tournant toujours dans le même sens, en commençant par la périphérie. Plus formellement, les circulants sont les tournois dont les sommets peuvent être numérotés de 0 à $n - 1$ de façon à avoir les propriétés suivantes (les quantités qui suivent s'entendant modulo n) : si n est impair, il existe un arc d'un sommet j vers tout sommet k tel qu'on ait $j < k \leq j + (n-1)/2$; si n est pair, un sommet j bat les sommets k tels qu'on ait $j < k \leq j + n/2$ si j est compris entre 0 et $n/2$ inclus ou tel qu'on ait $j < k < j + n/2$ sinon. Le dessin suivant montre les tournois circulants à 4 et 5 sommets.





Il est facile de constater que les circulants sont réguliers si n est impair ou quasi réguliers sinon (la réciproque étant fausse). On sait donc, d'après la proposition 5 que, si n est impair, tout sommet d'un circulant est vainqueur de Slater. La proposition 24 précise l'indice de Slater et la forme des ordres de Slater pour les circulants.

PROPOSITION 24. Soit T un circulant dont les n sommets sont numérotés comme ci-dessus.
1. Si n est impair, $i(T)$ vaut $(n^2 - 1)/8$. De plus, un tel tournoi admet n ordres de Slater, de la forme (en considérant les termes suivants modulo n) $j > j + 1 > ... > j + n$ pour $0 \leq j \leq n - 1$.
2. Si n est pair, $i(T)$ vaut $(n^2 - 2n)/8$. De plus, un tel tournoi n'admet qu'un ordre de Slater, de la forme $0 > 1 > ... > n$.

Preuve. On peut constater dans les deux cas que la valeur proposée pour $i(T)$ est égale à $\sigma(T)$. À l'aide de la proposition 18, on peut conclure que ces quantités fournissent des minorants de $i(T)$. L'examen des ordres proposés montrent qu'ils sont à une distance de T égale à $\sigma(T)$. Cela permet de conclure simultanément qu'on a $i(T) = \sigma(T)$ et que les ordres proposés sont bien des ordres de Slater de T. Le fait que ce sont les seuls n'est pas prouvé ici et est laissé aux soins du lecteur qui pourra, par exemple, procéder par récurrence... ♦

Fort de la proposition 8, on peut étendre la proposition précédente aux tournois dont les composantes fortement connexes sont des circulants.

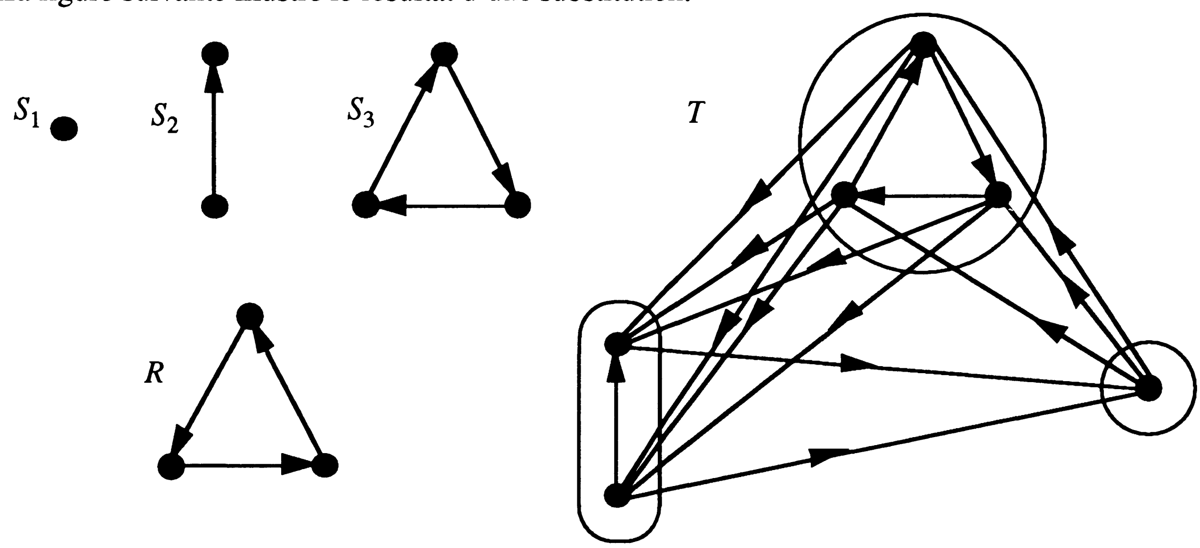
Il existe une autre famille de tournois réguliers particulièrement intéressants : les tournois des résidus quadratiques. Ils sont définis lorsque n est un nombre premier congru à 3 modulo 4 (par exemple 7, 11, 19, 23, 31, etc.) ; dans un tel tournoi, dont on suppose encore les sommets numérotés de 0 à $n - 1$, un arc est orienté de j vers k si $k - j$ est congru à un carré modulo n. Tous les sommets jouent un même rôle ainsi que toutes les paires de sommets. Comme tous les tournois réguliers, tous les sommets sont vainqueurs de Slater. On ne connaît pas l'indice de Slater de ces tournois, mais un bon minorant, minorable par $\frac{n(n-1)}{4} - \frac{n\sqrt{n}}{2}\left(1 + \log_2 n\right)$, est calculé dans [3] (on pourra le comparer au majorant de $I(n)$ donné par le théorème 8).

THÉORÈME 11. Soit n un nombre premier avec $n \equiv 3$ (modulo 4) et soit T_n le tournoi des résidus quadratiques à n sommets. Alors on a : $i(T_n) \geq \frac{n(n-1)}{4} - 2^{\lceil \log_2 n \rceil - 2} \lceil \log_2 n \rceil \sqrt{n}$. ♦

Une autre façon de procéder pour exhiber des familles d'instance pour lesquelles on connaîtrait l'indice de Slater et au moins un ordre de Slater consiste à partir d'un ensemble d'arcs E puis à construire des tournois admettant E comme ensemble d'arcs retour. C'est ce qui est fait dans [10] (voir aussi [50]). On y trouve entre autres des constructions de tournois admettant comme ensemble d'arcs retour certaines configurations comme des chemins, des étoiles, des arcs disjoints, des graphes bipartis complets, des chemins alternés, des circuits alternés, des arborescences et des ordres totaux. Il est clair qu'on connaît immédiatement l'indice de Slater de ces tournois (c'est le nombre d'arcs de la configuration à partir de laquelle on a construit le tournoi) et un de leurs ordres de Slater (l'inversion des arcs de la configuration de départ en donne un). La difficulté est plutôt alors de reconnaître si un tournoi donné est isomorphe à un des tournois que l'on peut ainsi construire (rappelons qu'on ne connaît pas la complexité du problème consistant à savoir si deux graphes sont isomorphes (voir [34]) ; d'un point de vue pratique, cela signifie qu'on ne sait pas le faire en un temps polynomial). La même difficulté apparaît pour les tournois que l'on peut construire par *substitution.* Cette opération, aussi appelée *composition* ([67]) ou *produit lexicographique* ([15]), peut être décrite d'une façon plus générale (que dans les références citées) comme suit : on part d'un tournoi R à q sommets et de q tournois S_j ($1 \leq j \leq q$), on remplace chaque sommet de R par un des q tournois S_j puis on relie les tournois S_j conformément à l'orientation des arcs dont les extrémités sont les sommets que les S_j viennent de remplacer (tous les arcs ont donc la même orientation entre deux tournois de type S_j). La définition 7 décrit une substitution plus formellement.

DÉFINITION 7. Soient R un tournoi à q sommets et $S_1, S_2, ..., S_q$ q tournois ayant respectivement $m_1, m_2, ..., m_q$ sommets. Notons $r_1, r_2, ..., r_q$ les sommets de R et $s_1^j, \ldots, s_{m_j}^j$ ceux de S_j ($1 \leq j \leq q$). La *substitution* de $S_1, S_2, ..., S_q$ aux sommets de R est l'opération qui consiste à construire un tournoi $T = (X, U)$, que nous noterons $T = R\otimes[S_1, ..., S_q]$, ayant $n = \sum_{j=1}^{q} m_j$ sommets : $x_1^1, \ldots, x_{m_1}^1, x_1^2, \ldots, x_{m_2}^2, \ldots, x_1^q, \ldots, x_{m_q}^q$; les éléments de U sont définis par : $\left(x_t^u, x_v^w\right) \in U$ si $\{u = w$ et $\left(s_t^u, s_v^u\right)$ est un arc de $S_u\}$ ou $\{u \neq w$ et (r_u, r_w) est un arc de $R\}$.

La figure suivante illustre le résultat d'une substitution.



Il est possible d'exprimer l'indice de Slater de $R\otimes[S_1, ..., S_q]$ en fonction des indices de Slater des S_j ($1 \leq j \leq q$) et de l'indice de Kemeny du tournoi R' obtenu en pondérant les arcs (r_j, r_k) de R par le produit $m_j.m_k$ (ainsi pour l'exemple précédent, les poids à attribuer aux arcs de R pour obtenir R' seraient 6, 2 et 3). La proposition 25 ([49]) précise cette relation :

PROPOSITION 25. En reprenant la définition de R' ci-dessus, on a :

$$i(R\otimes[S_1, ..., S_q]) = \sum_{j=1}^{q} i(S_j) + K(R') \qquad \blacklozenge$$

Il est donc facile, à l'aide de la substitution, de construire des familles de tournois avec un nombre quelconque de sommets et d'indice de Slater connu. Reste, comme il est dit plus haut, à pouvoir identifier ces tournois obtenus par des substitutions...

Ceci établit en outre un lien supplémentaire entre problème de Slater et problème de

Kemeny, et pourrait suggérer une nouvelle approche pour démontrer que le problème de Slater est NP-difficile ; on notera cependant que, par rapport à la démonstration proposée dans la première partie, on dispose de moins de liberté pour choisir le poids des arcs : alors qu'on pouvait choisir les $n(n-1)/2$ poids indépendamment les uns des autres, le choix est ici restreint à n valeurs indépendantes (une pour chaque sommet).

Le corollaire suivant, correspondant au cas où les S_j sont tous isomorphes à un même tournoi S (c'est en fait dans ce cas qu'est définie la substitution dans [15] et [67]) répond, en la corrigeant, à une conjecture énoncée par J.-C. Bermond dans [15].

COROLLAIRE 10. Soit R un tournoi à q sommets et soit un tournoi S à m sommets. Alors, en répétant q fois le tournoi S dans la substitution, on a : $i(R \otimes [S, ..., S]) = q.i(S) + m^2.i(R)$. ♦

COROLLAIRE 11. Soit T un tournoi à n sommets. On pose $T^1 = T$ et, pour $k \geq 1$, $T^{k+1} = T^k \otimes [T, ..., T]$ où T est répété n fois. On a alors, pour tout $k \geq 1$:

$$i(T^k) = \frac{n^{2k-1} - n^{k-1}}{n-1} i(T)$$ ♦

7. NOMBRE MAXIMUM D'ORDRES DE SLATER

Du point de vue de la théorie des votes, il peut être intéressant, voire indispensable, de connaître non pas seulement une solution optimale, mais toutes les solutions optimales. Nous allons consacrer cette dernière partie au nombre maximum d'ordres de Slater qu'un tournoi (non pondéré) peut posséder.

En ce qui concerne les ordres médians des tournois pondérés, le cas est vite réglé : il suffit de considérer un profil tel que le tournoi associé n'ait que des pondérations nulles (un tel profil existe d'après les caractérisations de B. Debord rappelées dans la première partie) ; il est clair qu'alors tout ordre total est médian et qu'il y a donc $n!$ solutions optimales.

Il est facile de voir que le nombre maximum d'ordres de Slater que peut admettre un tournoi peut être exponentiel par rapport à n à l'aide de la proposition 8. Considérons en effet un tournoi à $n = 3q$ sommets constitué de q composantes fortement connexes toutes isomorphes à un 3-circuit ; comme un 3-circuit admet trois ordres de Slater, la proposition 8 indique que ce tournoi possède exactement $3^q = 3^{n/3} = e^{(n.\ln 3)/3}$ ordres de Slater (avec $(\ln 3)/3 \cap 0,37$). On peut obtenir plus d'ordres de Slater en considérant les tournois obtenus par substitution. Appelons $N(T)$ le nombre d'ordres de Slater qu'admet un tournoi T si T n'est pas pondéré, le nombre d'ordres médians de T sinon. Le théorème 12 ([49]) donne un minorant du nombre d'ordres de Slater d'un tournoi obtenu par substitution en fonction des caractéristiques des tournois de départ.

THÉORÈME 12. Soit R un tournoi à q sommets et soient q tournois $S_1, S_2, ..., S_q$. Soit R' le tournoi pondéré obtenu en pondérant R comme pour la proposition 25. On a alors :

$$N(R \otimes [S_1, ..., S_q]) \geq N(R') \prod_{j=1}^{q} N(S_j)$$ ♦

COROLLAIRE 12. Soit R un tournoi à q sommets et soit un tournoi S. Alors, en répétant q fois le tournoi S dans la substitution, on a : $N(R \otimes [S, ..., S]) \geq N(R)[N(S)]^q$.

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème 12 en constatant que, les arcs de R' ayant tous le même poids, les ordres médians de R' sont les ordres de Slater de R et réciproquement. ♦

COROLLAIRE 13. Soit T un tournoi à n sommets. On pose $T^1 = T$ et, pour $k \geq 1$, $T^{k+1} = T^k \otimes [T, ..., T]$ où T est répété n fois. On a alors pour tout $k \geq 1$: $N(T^k) \geq N(T)^{\frac{n^k - 1}{n-1}}$.♦

Appelant $N(n)$ le nombre maximum d'ordres de Slater qu'un tournoi à n sommets peut posséder, on obtient ainsi un minorant de $N(n)$, au moins pour certaines valeurs de n (en nombre infini), en choisissant habilement le tournoi de départ T. Ainsi, en choisissant pour T un 3-circuit et en remarquant qu'alors T^k possède 3^k sommets, on obtient, pour toute valeur de n puissance de 3 : $N(n) \geq 3^{(n-1)/2} = e^{(n.\ln 3 - \ln 3)/2}$ (avec (ln3)/3 ∩ 0,55). En fait, quand le tournoi R dans lequel on effectue la substitution est régulier (donc avec un nombre impair de sommets) et si les tournois S_j $(1 \leq j \leq 3)$ ont tous le même nombre de sommets, on a un résultat plus précis que celui du théorème 12, comme le montre le théorème 13 ([49]).

THÉORÈME 13. Soit R un tournoi régulier à q sommets et soient q tournois $S_1, S_2, ... S_q$ ayant le même nombre n de sommets. On a alors : $N(R \otimes [S_1, ..., S_q]) \geq n.\, N(R) \prod_{j=1}^{q} N(S_j)$. ♦

On choisissant S_1, S_2 et S_3 isomorphes à un 3-circuit et en répétant la substitution $k - 1$ fois à partir d'un tournoi R lui aussi isomorphe à un 3-circuit, on obtient un tournoi à $n = 3^k$ sommets possédant un grand nombre d'ordres de Slater. On peut montrer par récurrence le corollaire 14 ([49]).

COROLLAIRE 14. Soit k un entier et soit $n = 3^k$. En utilisant les notations du corollaire 13, soit $T = C_3^k$ où C_3 est un 3-circuit. T est un tournoi à n sommets tel que $N(T) \geq 3^{\frac{3n - 2\log_3 n - 3}{4}}$.

♦

On en déduit l'inégalité : $N(n) \geq \exp\left[\frac{\ln 3}{4}(3n - 2\log_3 n - 3)\right]$ quand n est une puissance de 3 (le coefficient de n dans l'exponentielle vaut (3ln3)/4 ∩ 0,82).

Pour un tournoi donné, on peut minorer son nombre d'ordres de Slater à l'aide de son *groupe d'automorphismes*. On peut voir un automorphisme comme une façon de renommer les sommets du tournoi tout en préservant l'orientation des arcs de celui-ci. Plus précisément :

DÉFINITIONS 8. Un *automorphisme* φ d'un tournoi $T = (X, U)$ est une bijection de X dans X telle que l'arc $(\varphi(x), \varphi(y))$ appartient à U si et seulement si (x, y) appartient à U. Le *groupe d'automorphismes* de T est l'ensemble des automorphismes de T.

Cet ensemble forme un groupe pour la composition de bijections. Il est montré dans [67] que le cardinal de cet ensemble est impair. Un automorphisme étant une façon de renuméroter les sommets sans changer la structure du tournoi, on a le théorème 14 :

THÉORÈME 14. Soit $G(T)$ le groupe d'automorphismes de T. Alors $N(T)$ est un multiple de $|G(T)|$.

Preuve. Soit $O = x_1 > x_2 > ... > x_n$ un ordre de Slater de T et soit φ un automorphisme de T. Il est facile de voir que $\varphi(O) = \varphi(x_1) > \varphi(x_2) > ... > \varphi(x_n)$ est aussi un ordre de Slater de T, et différent de O si φ n'est pas l'identité. De plus, si φ_1 et φ_2 sont deux automorphismes distincts, $\varphi_1(O)$ et $\varphi_2(O)$ sont deux ordres de Slater distincts. À partir d'un ordre de Slater O, on peut donc obtenir $|G(T)|$ ordres de Slater. Soit E la relation définie sur les ordres de Slater de T par :

$OEO' \Leftrightarrow \exists\ \varphi$ automorphisme de T tel que $O = \varphi(O')$. Il est aisé de vérifier que E est une relation d'équivalence. D'après ce qui précède, chaque classe d'équivalence contient $|G(T)|$ ordres de Slater de T. Les classes d'équivalence étant disjointes, on obtient le résultat. ♦

En corollaire, on peut minorer $N(n)$ par le maximum $g(n)$ du cardinal de $G(T)$ quand T décrit l'ensemble des tournois à n sommets. On connaît un encadrement asymptotique de ce maximum (voir [67], où se trouvent aussi les valeurs précises de $g(n)$ pour $1 \leq n \leq 27$ et un encadrement un peu plus précis mais moins synthétique) :

PROPOSITION 26. On a : $\sqrt{3} \leq \lim\limits_{n \to +\infty} g(n)^{1/n} \leq 2,5.$ ♦

Puisque $g(n)$ est un minorant de $N(n)$, cet encadrement peut donner un minorant de N plus intéressant que celui obtenu par le corollaire 14 si la limite de la proposition 26 est plutôt proche de 2,5 (en effet, $\ln 2{,}5 > 0{,}92$ alors que $\ln\sqrt{3} < 0{,}55$).

Pour avoir un majorant de $N(n)$, on peut utiliser le fait qu'un ordre de Slater définit un chemin hamiltonien du tournoi (corollaire 4). On connaît l'ordre de grandeur du nombre maximum de chemins hamiltoniens qu'un tournoi à n sommets peut posséder. Le résultat suivant est montré dans [2] ; il correspond à une conjecture énoncée par T. Szele en 1943 ([79]), lequel avait montré que la limite du théorème 15 existe et est comprise entre 0,5 et 0,6.

THÉORÈME 15. Soit $c(n)$ le nombre maximum de chemins hamiltoniens que peut posséder un tournoi à n sommets. On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[\dfrac{c(n)}{n\,!}\right]^{1/n} = 0,5.$ ♦

En fait, ce que N. Alon montre à l'aide d'une approche probabiliste, c'est d'une part qu'il existe un tournoi ayant au moins $n!/2^{n-1}$ chemins hamiltoniens et d'autre part que $c(n)$ est majoré pour tout n par $\alpha.n\sqrt{n}.n!/2^{n-1}$ où α est une constante. À propos des chemins hamiltoniens d'un tournoi, rappelons (cas particulier d'un résultat de L. Rédei cité dans [67]) que tout tournoi possède un nombre impair de chemins hamiltoniens. On connaît aussi les premières valeurs de $c(n)$: $c(3) = 3$, $c(4) = 5$, $c(5) = 15$, $c(6) = 45$, $c(7) = 189$ (voir [67]).

Pour les tournois T avec $\sigma(T) \in \{1, 2\}$, on peut montrer les résultats suivants ([47] et [48]) :

PROPOSITION 27.
1. Le nombre maximum d'ordres de Slater que peut admettre un tournoi T avec $\sigma(T) = 1$ vaut $\dfrac{1}{3}\left(2^{\lfloor (n+3)/2 \rfloor} + (-1)^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}\right).$
2. Soient r_1, r_2 et r_3 les trois racines de l'équation $r^3 - 5r^2 + 2r + 4 = 0$ ($r_1 \cap 4{,}32$; $r_2 \cap 1{,}27$; $r_3 \cap -0{,}59$). Il existe trois constantes α, β, γ telles que, pour tout n, il existe un tournoi T à n sommets et avec $\sigma(T) = 2$ vérifiant : $N(T) = \alpha.\, r_1^{\lfloor n/4 \rfloor} + \beta.\, r_2^{\lfloor n/4 \rfloor} + \gamma.\, r_3^{\lfloor n/4 \rfloor}.$ ♦

Pour finir, nous posons un problème relatif aux tournois qui admettent un nombre maximum d'ordres de Slater :

PROBLÈME. Quels sont les tournois à n sommets possédant $N(n)$ ordres de Slater ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADÁM, A. (1964) "Problem" *in Theory of graphs and its applications*, Proc. Coll. Smolenice, Czech. Acad. Sci. Publ.
[2] ALON, N. (1990) "The maximum number of Hamiltonian paths in tournaments", *Combinatorica*, 10, 319-324.
[3] ALON, N. et J. SPENCER, *The probabilistic method*, J. Wiley, New York, 1992.
[4] ALSPACH, B. (1967) "Cycles of each length in regular tournaments", *Canad. Math. Bull.*, 10, 283-286.
[5] ARDITTI, D. (1984) "Un nouvel algorithme de recherche d'un ordre induit par des comparaisons par paires", *in Data analysis and informatics III*, E. Diday *et al.* (sd), North Holland, Amsterdam, 323-343.
[6] BANKS, J. (1985) "Sophisticated voting outcomes and agenda control", *Social Choice and Welfare*, 2, 295-306.
[7] BANKS, J., G. BORDES et M. LE BRETON (1991) "Covering relations, closest orderings and hamiltonian bypaths in tournaments", *Social Choice and Welfare*, 8, 355-363.
[8] BARTHÉLEMY, J.-P., G. COHEN et A. LOBSTEIN (1992), *Complexité algorithmique et problèmes de communication*, Masson, Paris.
[9] BARTHÉLEMY, J.-P., A. GUÉNOCHE et O. HUDRY (1989) "Median linear orders: heuristics and a branch and bound algorithm", *EJOR*, 41, 313-325.
[10] BARTHÉLEMY, J.-P., O. HUDRY, G. ISAAK, F.S. ROBERTS et B. TESMAN (1995) "The reversing number of a digraph", *Discrete Applied Mathematics*, 60, 39-76.
[11] BARTHÉLEMY, J.-P. et B. MONJARDET (1981) "The median procedure in cluster analysis and social choice theory", *Mathematical Social Sciences*, 1, 235-267.
[12] BARTHÉLEMY, J.-P. et B. MONJARDET (1988) "The median procedure in data analysis : new results and open problems", in *Classification and related methods of data analysis*, H.H. Bock (sd), North Holland, Amsterdam.
[13] BERGE, C. (1970) *Graphes*, Gauthier-Villars.
[14] BERGE, C. (1987) *Hypergraphes*, Gauthier-Villars.
[15] BERMOND, J.-C. (1972) "Ordres à distance minimum d'un tournoi et graphes partiels sans circuits maximaux", *Math. Sci. hum*, 37, 5-25.
[16] BERMOND, J.-C. et Y. KODRATOFF (1976) "Une heuristique pour le calcul de l'indice de transitivité d'un tournoi", *RAIRO*, 10 (3), 83-92.
[17] BLACK, D. (1958) *The theory of committees and elections*, Cambridge University Press, Londres.
[18] CHARON-FOURNIER, I., A. GERMA et O. HUDRY (1992) "Encadrement de l'indice de Slater d'un tournoi à l'aide de ses scores", *Math. Inf. Sci. hum*, 118, 53-68.
[19] CHARON-FOURNIER, I., A. GERMA et O. HUDRY (1992) "Utilisation des scores dans des méthodes exactes déterminant les ordres médians de tournois", *Math. Inf. Sci. hum*, 119, 53-74.
[20] CHARON-FOURNIER, I., A. GERMA et O. HUDRY, "Random generation of tournaments and asymmetric digraphs with given out-degrees", à paraître dans *EJOR*.
[21] CHARON, I., A. GUÉNOCHE, O. HUDRY et F. WOIRGARD, "A branch and bound method applied to ordinal data analysis", *Actes de l' "International Conference on Ordinal and Symbolic Data Analysis" (OSDA)*, Springer Verlag, à paraître.
[22] CHARON, I., A. GUÉNOCHE, O. HUDRY et F. WOIRGARD, "New results on the computation of median orders", *Actes du "5e Colloque International de Théorie des Graphes et Combinatoire"*, soumis pour publication.
[23] CHARON, I. et O. HUDRY, "Lamarckian genetic algorithms applied to the search of median orders", soumis pour publication.
[24] CHARON, I., O. HUDRY et F. WOIRGARD, "A 16-vertex tournament for which Banks set and Slater set are disjoint", soumis pour publication.
[25] CHARTRAND, G., D. GELLER et S. HEDETNIEMI (1971) "Graphs with forbidden subgraphs", *Journal of Combinatorial Theory*, 10, 1, série B, 12-41.
[26] CONDORCET, M.J.A.N. Caritat (marquis de) (1785) *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, Paris.

[27] COOK, W.D., I. GOLAN et M. KRESS (1988) "Heuristics for ranking players in a round robin tournament", *Computers and Operations Research*, 15 (2), 135-144.
[28] DEBORD, B. (1987) "Caractérisation des matrices de préférences nettes et méthodes d'agrégation associées", *Mathématiques et Sciences Humaines* 97, 5-17.
[30] DE LA VEGA, W.F. (1983) "On the maximal cardinality of a consistent set of arcs in a random tournament", *Journal of Combinatorial Theory*, 35, série B, 328-332.
[31] ERDÖS, P. et J.W. MOON (1965) "On sets of consistent arcs in a tournament", *Canad. Math. Bull.*, 8, 269-271.
[32] FISHBURN, P. (1977) "Condorcet social choice functions", *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 33, 469-489.
[33] FISHBURN, P. (1987) "Decomposing weighted digraphs into sums of chains", *Discrete Applied Mathematics*, 16, 15-31.
[34] GAREY, M.R., et D.S. JOHNSON (1979) *Computers and intractability, a guide to the theory of NP-completeness*, Freeman, New York.
[35] GODDARD, S.T. (1983) "Tournament rankings", *Management Science*, 29 (12), 1385-1392.
[36] GRÖTSCHEL, M., M. JÜNGER, G. REINELT (1984) "A cutting plane algorithm for the linear ordering problem", *Operations Research*, 32, 1195-1220.
[37] GRÖTSCHEL, M., M. JÜNGER, G. REINELT (1984) "Optimal triangulation of large real-world input-output-matrices", *Statistische Hefte*, 25, 261-295.
[38] GRÖTSCHEL, M., M. JÜNGER, G. REINELT (1985) "Facets of the linear ordering polytope", *Mathematical Programming*, 33, 43-60.
[39] GUÉNOCHE, A. (1988) "Order at minimum distance of a valued tournament", communication à *Modélisation, Analyse et Agrégation des Préférences et des Choix* (TRAP 3), Marseille-Luminy.
[40] GUÉNOCHE, A. (1995) "How to choose according to partial evaluations", *in Advances in Intelligent Computing*, B. Bouchon-Meunier *et al.* (sd), IPMU'94, Lecture Notes in Computer Sciences n° 945, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 611-618.
[41] GUÉNOCHE, A. (1996) "Vainqueurs de Kemeny et tournois difficiles", *Math. Inf. Sci. hum*, 133.
[42] GUÉNOCHE, A., B. VANDEPUTTE-RIBOUD et J.-B. DENIS (1994) "Selecting varieties using a series of trials and a combinatorial ordering method", *Agronomie*, 14, 363-375.
[43] GUILBAUD, G.T. (1952) "Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation", *Économie Appliquée*, 5 (4), repris dans *Eléments de la théorie des jeux*, Dunod, Paris, 1968.
[44] GUY, R.K. (1967) "A coarseness conjecture of Erdös", *Journal of Combinatorial Theory*, 3, 38-42.
[45] HUBERT, L. (1976) "Seriation using asymmetric proximity measures", *Br. J. Math. Statist. Psychol.*, 29, 32-52.
[46] HUDRY, O. (1989) *Recherche d'ordres médians : complexité, algorithmique et problèmes combinatoires*, thèse de doctorat de l'ENST, Paris.
[47] HUDRY, O. (1992) "Sur le nombre d'ordres médians de certains tournois", *Actes des journées Mathématiques Discrètes et Sciences Sociales*, Amiens, 56-61.
[48] HUDRY, O. et F. WOIRGARD (1994) "Combinatorics and voting theory : on the number of median orders of tournaments", communication à *Conference on combinatorics in the behavioral sciences*, Irvine, États-Unis.
[49] HUDRY, O. et F. WOIRGARD (1995) "Lower and upper bounds of the maximum number of Slater's orders of tournaments", communication au *8e Colloque Franco-Japonais/4e Colloque Franco-Chinois Combinatoire et Informatique*, Brest.
[50] ISAAK, G. (1995) "Tournaments as feedback arc sets", *The Electronic Journal of Combinatorics*, 2.
[51] JACQUET-LAGRÈZE, É. (1969) "L'agrégation des opinions individuelles", *Informatique et Sciences Humaines*, 4, 1-21.
[52] JUNG, H.A. (1970) "On subgraphs without cycles in a tournament", *Combinatorial theory and its applications II*, Balatonfüred, P. Erdös, A. Renyi et V.T. Sös (sd), Amsterdam, North-Holland, 675-677.

[53] JÜNGER, M. (1985) *Polyhedral combinatorics and the acyclic subdigraph problem*, Heldermann Verlag, Berlin.
[54] KADANE, J.B. (1966) "Some equivalence classes in paired comparisons", *Ann. math. Statist.*, 37, 488-494.
[55] KAYKOBAD, M., Q.N.U. AHMED, A.T.M. SHAFIQUL KHALID et R.-A. BAKHTIAR (1995) "A new algorithm for ranking players of a round-robin tournament", *Computers and Operations Research*, 22 (2), 221-226.
[56] KEMENY, J.G. (1959) "Mathematics without numbers", *Daedalus*, 88, 577-591.
[58] LAFFOND, G. et J.-F. LASLIER (1991) "Slater's winners of a tournament may not be in the Banks set", *Social Choice and Welfare*, 8, 355-363.
[59] LAFFOND, G., J.-F. LASLIER et M. LE BRETON (1991) "Choosing from a tournament : a progress report and some new results", document de travail du CNAM.
[60] LANDAU, H.G. (1953) "On dominance relations and the structure of animal societies III. The condition for a score structure", *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 13, 1-19.
[61] LASLIER, J.-F. (1996) "Solutions de tournois : un spicilège", *Math. Inf. Sci. hum*, 133.
[62] LENSTRA, J.K. (1977) *Sequencing by enumerative methods*, Mathematical Centre Tracts n° 69, Mathematisch Centrum, Amsterdam.
[63] MARCOTORCHINO, J.-F. et P. MICHAUD (1979) *Optimisation en analyse ordinale de données*, Masson, Paris.
[64] MILLER, N. (1980) "A new solution set for tournaments and majority voting : Further graph-theoretical approaches to the theory of voting", *American Journal of Political Science*, 24 (1), 68-96.
[65] MONJARDET, B. (1973) "Tournois et ordres médians pour une opinion", *Mathématiques et Sciences Humaines*, 43, 55-73.
[66] MONJARDET, B. (1990) "Sur diverses formes de la "règle de Condorcet" d'agrégation des préférences", *Math. Inf. Sci. hum*, 111, 61-71.
[67] MOON, J. W. (1968) *Topics on tournaments*, Holt, Rinehart and Winston.
[68] PHILLIPS, J.P.N. (1976) "On an algorithm of Smith and Payne for determining Slater's i and all nearest adjoining orders", *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 29, 126-127.
[69] POLJAK, S., V. RÖDL et J. SPENCER (1988) "Tournament ranking with expected profit in polynomial time", *SIAM Journal Disc Math*, 1 (3), 372-376.
[70] POLJAK, S. et D. TURZÍK (1986) "A polynomial time heuristic for certain subgraph optimization problems with guaranteed lower bound", *Discrete Mathematics*, 58, 99-104.
[71] REID, K.B. (1969) "On set of arcs containing no cycles in tournaments", *Canad. Math. Bull.*, 12, 261-264.
[72] REINELT, G. (1985) *The linear ordering problem : algorithms and applications*, Research and Exposition in Mathematics 8, Heldermann Verlag, Berlin.
[73] REMAGE Jr., R. et W.A. THOMPSON Jr. (1966) "Maximum likelihood paired comparison rankings", *Biometrika*, 53, 143-149.
[74] SLATER, P. (1961) "Inconsistencies in a schedule of paired comparisons", *Biometrika*, 48, 303-312.
[75] SMITH, A.F.M. et C.D. PAYNE (1974) "An algorithm for determining Slater's i and all nearest adjoining orders", *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology* 27, 49-52.
[76] SPENCER, J. (1971) "Optimal ranking of tournaments", *Networks* 1, 135-138.
[77] SPENCER, J. (1978) "Nonconstructive methods in discrete mathematics", *in Studies in Combinatorics*, G.C. Rota (sd), Mathematical Association of America, Washington DC, 142-178.
[78] SPENCER, J. (1987) *Ten lectures on the probabilistic method*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics N° 52, SIAM, Philadelphie, États-Unis.
[79] SZELE, T. (1943) "Kombinatorikai vizsgálatok az irányított teljes gráffal kapesolatban", *Mat. Fiz. Lapok.*, 50, 223-256, traduit en allemand sous le titre "Untersuchungen über gerichtete vollständige Graphen", *Publ. Math. Debrecen*, 13 (1966), 145-168.
[80] THOMASSEN, C. (1987) "Counterexamples to Adám's conjecture on arc reversals in directed graphs", *Journal of Combinatorial Theory*, 42, série B, 128-130.
[81] YOUNGER, D.H. (1963) "Minimum feedback arc sets for a directed graph", *IEEE Trans. of the profes. tech. group in circuit theory*, 10 (2), 238-245.