MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

MICHEL ARMATTE

Robert Gibrat et la loi de l'effet proportionnel

Mathématiques et sciences humaines, tome 129 (1995), p. 5-35
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1995__129__5_0>

Math. Inf. Sci. hum. (33e année, n°129, *1995*, pp.5-35)

ROBERT GIBRAT
ET LA LOI DE L'EFFET PROPORTIONNEL[1]

Michel ARMATTE[2]

RÉSUMÉ — *C'est en 1931 que Robert Gibrat (1904-1980) soutient une thèse à Lyon sur la loi de l'effet proportionnel. Ce polytechnicien enseignant à l'Ecole des Mines devient par cet ouvrage un des principaux représentants de l'économétrie version française, avant que de s'engager dans une carière politique commencée à X-Crise et terminée à Vichy, puis dans une carrière d'Ingénieur hydroélectricien qui l'amènera à la création de l'usine marémotrice de la Rance puis à d'importantes fonctions dans la gestion et le développement de l'industrie atomique. Mais ce sont les justifications d'une modélisation des revenus par la loi lognormale que nous étudions plus précisément dans cet article d'un point de vue historique, en particulier les emprunts faits à Galton, MacAlister et Kapteyn, la concurrence avec les modèles de Pareto, de Pearson ou d'Edgeworth, le jeu entre l'argument probabiliste laplacien et les arguments statistiques sur la qualité et le nombre des ajustements produits, l'extension considérable des domaines d'application envisagés.*

ABSTRACT — Robert Gibrat and the proportionnal effect law
Robert Gibrat (1904-1980), a french engineer, consultant and teacher at the Ecole des Mines, who was a famous econometrician, took some responsabilities in the X-Crise movement then in the Government of Vichy, and became after the war a great specialist of energetical engineering. Gibrat submitted his doctoral thesis at Lyon in 1931 about the "proportionnal effect law". This paper is an historical study of this law, or what is now called "lognormal models" of revenus distributions. We examine its first suggestion by Galton and MacAlister, its probabilistic justification by Laplace and Kapteyn, its competition with others models (Pareto, Pearson , Edgeworth), the statistical qualities of the great quantity of adjustements that Gibrat exhibited, and the extended scope he decovered for new applications of this model.

L'introduction par Gibrat en 1931 de la loi log-normale comme "modèle" de distributions de revenus, puis d'autres phénomènes économiques ou non économiques - principalement hydroélectriques - s'inscrit à un moment clé de l'histoire des méthodes statistiques en économie.

Elle se place d'abord au lendemain de la crise de 1929 qui a consacré la faillite de méthodes statistiques de prévision fondés sur de simples descriptions du cycle des affaires à l'aide d'indicateurs combinés en des baromètres économiques. L'échec des méthodes conjoncturelles induisent un mouvement social de certaines élites - dont le type est l'ingénieur social - en faveur d'un traitement mathématique des problèmes économiques mis

[1] Cet article est une version remaniée de la section 10.5 d'une thèse de Doctorat soutenue le 24 janvier 1995 à l'EHESS sous la direction de J. Mairesse : *Histoire du modèle linéaire : Formes et usages en Statistique et en Econométrie jusqu'en 1945.*

[2] Université Paris-Dauphine.

au devant de la scène par la crise. En France c'est le mouvement X-Crise qui mobilise d'abord les polytechniciens, puis des universitaires et des chefs d'entreprise, dans un débat national sur les politiques économiques (libérales ou dirigistes) et surtout, sur les méthodologies diverses qui permettent de traiter scientifiquement de ces questions. Parmi celles-ci, l'économétrie qui est au niveau international de même inspiration que le mouvement français, mais qui va se donner les moyens professionnels - Société, journal, séminaires - de prolonger ce mouvement par un travail de refonte unitaire des approches quantitatives en économie développé dans le cadre d'une nouvelle discipline académique. L'économétrie sera amenée à poser explicitement comme condition de sa réussite la mise en correspondance de ses raisonnements théoriques et des observations statistiques par le biais de modèles probabilistes structurels. Le rattachement de la statistique au calcul des probabilités profite alors tout autant de la refonte axiomatique de ce calcul (Von Mises, Kolmogorov) d'un regain d'intérêt pour les théorèmes limites (Liapounoff, Lindeberg, Levy) et des développements de la statistique mathématique anglaise autour du contrôle des inférences (R. Fisher, Neyman, Wald). Le travail de Gibrat peut être compris comme un premier pas dans la transition d'une statistique descriptive sans modèle et sans aléa vers les modèles stochastiques prônés par la Cowles Commission. En étudiant de près les justifications empiriques et théoriques de son modèle, ainsi que les questions posées par ses interprétations dans le champ économique (et dans quelques autres), on se fera une idée du partage qui s'établit dans cette période de transition entre influences du vieux paradigme de la statistique économique et de celui de la révolution économétrique.

ELÉMENTS BIOGRAPHIQUES

Robert Gibrat (1904-1980) est absent de la plupart des dictionnaires biographiques comme le *Dictionary of Scientific Biography*, le *World Who's who in Science*, le *Modern Scientists and Ingineers*, l'*International Encyclopaedia of Social Sciences*, l'*Encyclopaedia of Statistical Sciences* où il mérite pourtant sa place. Seuls le *Palgrave* et le *Dictionnaire de Biographie Française* de d'Amat lui consacrent une petite notice. Robert Gibrat est né à Lorient. Son père était médecin en chef dans la marine. Il a fait ses études aux Lycées de Rennes, Lorient et Brest, puis à Saint-Louis à Paris. Il entre à l'Ecole polytechnique en 1922, et comme membre d'une promotion paire, son professeur d'analyse a dû être Hadamard plutôt que Levy. Il choisit l'Ecole des Mines comme école d'application, et débute sa vie professionnelle comme consultant technique dans différentes entreprises privées. Il a suivi en parallèle des cours à la faculté des Sciences et à la faculté de Droit qui l'ont doté d'une double licence. Il se marie en 1928 avec Yseult Viel dont il aura trois filles Corinne, Mowgli, et Fleur. Il est professeur et sous-directeur de l'Ecole des Mines de Saint-Etienne de 1927 à 1931, date à laquelle il soutient sa thèse de Doctorat de Droit à l'Université de Lyon sur *Les Inégalités économiques,* sous la direction de Gonnard, professeur d'économie politique, et avec, dans son jury, le chargé de cours François Perroux et le professeur Dulac de la faculté des sciences. Il revient ensuite à Paris pour un poste de professeur à l'Ecole des Mines qu'il occupera à partir de 1936. D'après le Registre de l'Ecole il aurait quitté celle-ci en 1940 mais la bibliothèque contient encore un de ses Cours d'Electricité industrielle pour l'année 1943-44. Palgrave et d'Amat le donnent professeur aux Mines jusqu'en 1968. Ce qui est sûr, c'est qu'il est appelé comme Directeur de l'Electricité au Ministère de la Production Industrielle (Caziot) du premier gouvernement Laval en juillet 1940, et qu'il est Secrétaire d'Etat aux Communications dans le second gouvernement Laval du 18 avril 1942. Comme le remarquent plusieurs historiens, et en particulier Jean Pierre Azema[3], "*le plus remarquable cependant fut la percée de ceux qu'on dénomme actuellement les technocrates : hauts fonctionnaires ou cadres dynamiques du secteur privé qui avaient "pantouflé", issus des*

[3] J.P. AZEMA, *De Munich à la Libération (1938-1944)*, Nouvelle histoire de la France contemporaine, Paris, Le Seuil, 1979, p.87-88.

mêmes Grandes Ecoles et des mêmes Grands Corps. Avant la guerre, ces inspecteurs des Finances, ces polytechniciens, ces centraliens avaient participé à des colloques communs, s'étaient retrouvés dans des cénacles choisis - tel X-Crise fondé par Jean Coutrot -, avaient écrit dans des revues de qualité, tels les Nouveaux Cahiers...". De fait, Robert Gibrat, après avoir rejoint *Ordre Nouveau*[4], a été un membre actif du groupe X-Crise. Il écrit dans le *Bulletin mensuel du Centre Polytechnicien d'Etudes Economiques* qui est l'organe du groupe et le lieu d'enregistrement d'un débat animé sur les économies de l'est et de l'ouest, sur les mérites comparés des méthodes mathématique, statistique, et historique, où se confrontent ces technocrates - de cette époque daterait le phénomène ou tout au moins la terminologie rétroactivement appliquée au phénomène -, technocrates de tous les bords, partisans d'un certain socialisme comme Jules Moch et Alfred Sauvy, d'un capitalisme dirigé comme les fondateurs Bardet et Loizillon puis Coutrot, ou du libéralisme le plus pur comme Rueff et Divisia. Une analyse par ce dernier de la thèse de Gibrat paraît dans le n°14-15 de 1934, et Gibrat lui-même tient dans ce bulletin une rubrique régulière sur l'Econométrie à partir du n°17 (1934) jusqu'au n°31-32 (1936). On y trouve encore deux conférences de lui sur *la science économique* (n°26), et sur *le mouvement des affaires* (n°31-32). Gibrat n'a donc fait que suivre à Vichy un certain nombre de ses camarades - comme le major polytechnicien Jean Bichelonne, Secrétaire d'Etat à la production Industrielle de novembre 1942 à novembre 1943, organisateur du STO. Gibrat ne suivra pas Laval jusqu'à Sigmaringen comme son camarade. "*Il est en Afrique du Nord et inspecte les travaux du transsaharien au moment du débarquement américain. Il retourne cependant à Vichy mais démissionne [avec trois de ses collègues: Barbaud, Auphan, Brévié] à la suite de l'occupation totale du pays par les allemands, provoquée par le débarquement en Afrique du Nord. Arrêté à la Libération, il passe un an à la prison de Fresnes. Il en profite pour mettre au point des plans et des calculs pour un nouveau type de centrale hydraulique. Le 12 mars 1946, la Haute Cour le condamne à dix ans d'indignité nationale. Il bénéficie de circonstances atténuantes car il n'a eu que des responsabilités strictement techniques au sein du gouvernement et il apporte les preuves d'une attitude favorable à la Résistance et aux Juifs*".[5]

C'est comme ingénieur conseil à EDF pour les usines marémotrices que Gibrat reprend une activité professionnelle après 1945, et jusqu'en 1968. Il a publié sur le sujet une première note dans la *Revue de l'Industrie Minérale,* en 1944, et l'usine de la Rance est en partie son œuvre, comme il le racontera dans le second et dernier ouvrage qu'il a publié en 1966[6]. Il occupera ensuite de hautes responsabilités dans les institutions liées au développement de la politique atomique de la France : Directeur général d'INDATOM (1955-74), PDG de la SOCIA (1960), Président du Comité scientifique d'EURATOM. Membre de l'IIS et de la Société internationale d'économétrie, il a présidé plusieurs sociétés professionnelles ou savantes comme la Société française des électriciens (1955), la Société des ingénieurs civils de France (1966), la Société Statistique de Paris (1966) et de France (1978) ; la Société météorologique de France (1969), le Comité technique de la Société hydraulique de France, la section française de l'*American Nuclear Society* (1972).

L'intérêt de Gibrat pour la chose économique lui vint certainement à la fois des milieux industriels pour lesquels il était consultant, et des débats de l'après-crise sur les politiques économiques dont X-Crise fut le porte-voix. Il reste à comprendre comment ils se sont focalisés sur la question de la distribution des revenus, sous la forme d'un sujet de thèse. Dans une conférence du 22 avril 1931, quelques mois après la soutenance de sa thèse (28

---

[4] Groupe anticonformiste, créé par Arnaud Dandieu et Robert Aron, qui rejette à la fois capitalisme et socialisme, selon Anne-Marie Fabre (Cf note suivante).

[5] Anne Marie FABRE, "Robert Gibrat", *Dictionnaire des Ministres*, Dir. B. Yvert, Paris, Perrin, 1990.

[6] R. GIBRAT, "L'énergie des marées", Paris, *Presse Universitaires de France*, 1966. (et non pas "l'énergie des marais" comme le dit le biographe d'Amat).

janvier 1931), Robert Gibrat a décrit la genèse de son travail sur les inégalités[7]. Pour lui cette étude n'est que "le premier maillon d'une chaîne". *"Je fus submergé et déçu par les ouvrages antérieurs à 1920"* dit-il. Il rappelle que Tougan et Baranowsky ont recensé environ 200 théories des crises vers 1920, et pointe, comme Divisia, la nécessité qu'il y aurait à "n'utiliser une notion que si on peut la mesurer et l'exprimer par un nombre", ce qui n'autoriserait que des définitions opératoires des concepts. Irving Fisher n'a-t-il pas relevé 32 définitions du mot "profit" ? Présentant ensuite les travaux que nous venons d'évoquer sur les baromètres du Comité de Harvard, et les critiques de Yule sur la corrélation (le fameux exemple d'une "*spurrious correlation*" entre taux de mortalité et proportion des mariages célébrés à l'Eglise anglicane), Gibrat dit la chose suivante: *"Je me suis trouvé finalement en présence du problème suivant : que valent les corrélations dans les méthodes connexes en économie politique ? (...) Le chemin que je me traçai [fut d'étudier] d'abord les répartitions à un paramètre, c'est-à-dire l'étude des inégalités, puis les répartitions à deux ou plus de deux paramètres, c'est-à-dire la corrélation et les méthodes connexes ; enfin, troisième échelon, l'application des résultats obtenus au problème des crises".* Ce programme est classique pour un jeune économètre des années trente, mais comme il le dit lui-même, *"ce chemin est long, trop long pour mes forces"*. Et Gibrat s'en tiendra de fait à la première partie de son programme, à savoir l'étude des distributions d'un caractère. Ceci va l'occuper jusqu'en 1940. Après le détour que l'on sait par Vichy, Gibrat aura encore deux autres vies professionnelles, la seconde consacrée à l'énergie hydroélectrique des rivières et des marées, la troisième à l'énergie nucléaire.

La loi de l'effet proportionnel a certainement été considérée par Gibrat comme une découverte, une innovation en tout cas suffisamment importante pour qu'elle fasse l'objet d'un long article[8] dans le Bulletin de la *SGF*, puis d'une thèse publiée[9], d'un article dans une revue italienne[10] et enfin d'un compte-rendu à l'Académie des Sciences[11]. Par le titre - *Les inégalités économiques* - et le sous titre - *Applications d'une loi nouvelle, la loi de l'effet proportionnel* - de sa thèse, Gibrat indique assez bien qu'il va répondre au problème épineux et controversé de la mesure des inégalités, en faisant un détour productif par un ajustement des distributions, c'est-à-dire leur description ou leur explication par un modèle mathématique qu'il appelle une *loi*. Le mot ayant été suffisamment galvaudé - par exemple par les disciples de Quetelet -, et critiqué - par exemple par son propre directeur de thèse dans un article de la *Revue politique et parlementaire* de 1917, l'impétrant se doit de désamorcer ces critiques dans une introduction : *"On a parlé, pendant et après la guerre, de faillite des lois économiques. On en parle moins. Il en est ainsi dans toutes les branches de la connaissance"*. Gibrat développe alors une série d'exemples pris dans la physique qui montrent selon lui que, derrière l'indéterminisme de la physique quantique, subsistent des lois statistiques. Rueff avait rappelé aux économistes en 1922 que même la loi de Mariotte était statistique. *"Notre loi est essentiellement statistique"* confirme Gibrat dans son introduction. Son ouvrage est alors constitué en deux parties principales. La première est une mise en place théorique de sa *loi de l'effet proportionnel*, construite sur la base d'un principe génétique (celui de Kapteyn), après que place nette soit faite par la critique des ajustements empiriques de Pareto et de Pearson. La seconde partie se consacre d'abord à une discussion de la mesure de l'inégalité que permet cette loi, et de sa supériorité sur les autres approches du problème. Cette même partie développe ensuite un grand nombre d'ajustements

---

[7] R. GIBRAT, "Les inégalités économiques", *Revue industrielle des Mines*, Saint-Etienne, 15 juillet 1931.

[8] Robert GIBRAT, "Une loi des répartitions économiques : l'effet proportionnel", *Bulletin de la Statistique Générale de la France*, 1929-1930, p.469-514.

[9] R. GIBRAT, *Les inégalités économiques*, Thèse en Droit de l'Université de Lyon soutenue le 28 janvier 1931, Paris, Sirey, 296 p.

[10] R. GIBRAT, "La courbe des revenus", *la rivista italiana di Statistica*, oct.-déc. 1931.

[11] R. GIBRAT, "La loi de l'effet proportionnel", *Compte-Rendus de l'Académie des Sciences*, pour 1932, p.843-845 ; présenté par E. Jouguet le 7 mars 1932.

empiriques qui ont le triple objectif d'illustrer la méthode, de convaincre de l'étendue de son domaine d'application, et de fournir des mesures statistiques de l'inégalité des revenus et des patrimoines. Une troisième et une quatrième partie étendent encore le domaine de validité de la formule à la mesure de la concentration des industries et des populations urbaines.

AJUSTEMENTS OU MODÈLE GÉNÉTIQUE

Dans le chapitre III, Gibrat a groupé sous le terme ambigu d'*ajustement mathématique a priori*, des méthodes d'ajustement par des fonctions mathématiques qui n'ont aucun fondement probabiliste, et plus profondément, aucune justification sémantique dans la nature et le mode de production du phénomène étudié. La "loi de Pareto" aussi bien que "le système de courbes" de Karl Pearson, ont en commun, outre la proximité de leur date de naissance (1895-97), ce même souci d'ajustement par des formules dont ne rend compte aucune raison[12], même si leur genèse fut différente puisque Pareto part d'un signifié économique particulier - le revenu et sa répartition -, tandis que Pearson part d'un jeu de formes signifiantes - les distributions asymétriques -, dont peu importe la signification.

La courbe de Pareto[13], dont la première forme s'écrit $Log\ N(x) = Log\ A - \alpha Log\ x$, où $N(x)$ représente les effectifs de revenu supérieur à x, a été associée, dès son énoncé dans le *Cours d'Economie Politique* par Pareto, puis par un grand nombre d'économistes-statisticiens[14], à un débat très houleux sur la mesure des inégalités de revenus ou de fortunes. Ce débat portait aussi bien sur le domaine de validité de la formule (sur la seule queue de la distribution), sur l'estimation de son paramètre α (la méthode des moindres carrés sur les logarithmes n'étant pas la meilleure), sur le rapport ambigu de ce paramètre et de la notion controversée d'inégalité, sur les interprétations possibles (purement économistes, socialistes, ou encore naturalistes et liées à la courbe des aptitudes de Galton), et enfin sur la récession ou l'accroissement des inégalités que révélait les valeurs numériques de ce paramètre.

Avec le système de courbes de Pearson[15], dont les densités $y = f(x)$ sont les solutions d'une simple équation différentielle de la forme $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{a - x}{c_1 + c_2 x + c_3 x^2}$, les statisticiens disposent d'un jeu de densités paramétriques, symétriques ou asymétriques, finies ou infinies, pouvant s'ajuster par la méthode des moments à n'importe quelle distribution empirique, mais n'ayant aucune justification probabiliste. Edgeworth qui est l'auteur principal de cette critique, lui préfère un modèle probabiliste sous forme de loi des erreurs généralisées asymétrique[16], approximation à deux termes d'une binomiale plus précise que la loi normale, ou bien encore sous la forme d'une densité déduite de la densité normale par ce qu'il appelle une "*translation*", c'est-à-dire une transformation de la variable normale par une fonction quelconque. Tandis que Lucien March est un des rares économistes-statisticiens qui ait utilisé la "boîte à outil" de Pearson pour forger un modèle mathématique de la distribution de

---

[12] Du moins à cette époque, car on sait que la distribution de Pareto trouvera des justifications probabilistes importantes à la fin des années vingt.

[13] V. PARETO, "La legge della demanda", *Giornale degli Economisti*, janvier 1895 ; et V. PARETO, *Cours d'Economie Politique*, Lausanne, F. Rouge, 1896-1897 ; réédition *Œuvres Complètes*, Dir. Giovanni Busino, Tome 1, Genève, Droz, 1964.

[14] Otto Ammon, Le baron Mourre, André Liesse, Maurice Fréchet sont les principaux acteurs de ce débat que nous évoquons à la section 10.2 de notre thèse.

[15] K. PEARSON, "Contributions to the Mathematical Theory of Evolution. - II. Skew Variations in homogeneous Material", *Phil. Trans. of the Royal Society*, 186A, 1896, p.343-414.

[16] F.Y. EDGEWORTH, "The law of error", *Phil Mag*, 16, 1883, p.300-309 ; "On the asymetrical probability-curve", *Phil Mag.*, 1896 ; "The law of error", *Cambridge Phil. Trans.*, 20 ; 1905, p.36-65 et 113-141.

salaires ouvriers[17], Arthur Bowley a présenté des ajustements de salaires par la loi d'Edgeworth, à l'aide des méthodes concurrentes des moments et des percentiles.[18]

La critique de la méthode de Pearson que fait Gibrat est à plusieurs niveaux. "*Les moments d'ordre élevé ne sauraient inspirer confiance, ils manquent de stabilité, le moment d'ordre 4 est déjà fortement influencé par les grandes valeurs de la variable*". La méthode des moments pose effectivement un problème de fiabilité que Ronald Fisher a déjà débusqué à cette époque dans son célèbre texte de 1922[19] définissant les principales qualités d'un estimateur et montrant la supériorité de la méthode du maximum de vraisemblance sur celle des moments en terme d'*efficacité*. Gibrat ne connaît visiblement pas les travaux de Fisher, mais se rend compte expérimentalement de l'instabilité des résultats. Il ajoute que "l'automatisme de la méthode rend le contrôle difficile". En clair, aucune intuition géométrique n'accompagne les calculs formels assez complexes.

La critique principale court cependant en filigrane tout au long de l'ouvrage sans être nulle part clairement formulée : la méthode de Pearson résulte d'un ajustement ad hoc qui manque singulièrement de justification sémantique, dans le procédé même de formation de la distribution étudiée. Cette méthode offre une typologie des formes observées sans se soucier des raisons de ces formes. Gibrat reprend ici de façon assez allusive, les critiques fondamentales (qu'il ne semble pas connaître) de Galton, Weldon et Edgeworth.

C'est en gros la méthode de *transformation* que Gibrat reprend. Pourtant, sa référence n'est pas Edgeworth, qu'il évoque en une ligne, mais Kapteyn, dont il fait le précurseur de son raisonnement sur les effets proportionnels, bien qu'il ne le connaisse que par le traité de Jordan[20] . Cet astronome (et naturaliste) contemporain de Karl Pearson a proposé[21] un modèle de développement de baies en forme de grains sphériques, que l'on trouve aussi exposé par Risser[22], et qui est le suivant. Soit μ_0 la dimension des grains à l'origine. Dans chaque unité de temps, les grains subiront un accroissement variable qui dépend de leur exposition et de leur structure. Comme pour la théorie des erreurs élémentaires, Kapteyn suppose pour simplifier que la moitié des grains subira un accroissement $\mu_t + \varepsilon$ dû à une cause favorable, et l'autre moitié un accroissement $\mu_t - \varepsilon$ dû à une cause défavorable. En supposant aussi que cet effet $\pm\varepsilon$ de l'une ou l'autre cause est constant en valeur absolue, est indépendant du diamètre des grains au temps t, et indépendant aussi de l'effet ε_{t-i} des causes agissant aux périodes antérieures, Kapteyn retrouve les conditions de production d'une loi binomiale B(T,1/2) et de sa convergence vers une loi normale, laquelle pourra donc être prise comme modèle de distribution de la taille x des graines autour de leur moyenne $(\Sigma\mu_t)$ au bout d'un temps T.

Cependant, il est plus vraisemblable que certaines causes agiront non pas indépendamment de la taille du grain, mais en fonction de celle-ci. On peut supposer par exemple que l'effet du soleil est proportionnel à la racine carrée de leur surface sphérique, donc directement proportionnel au diamètre qui est la mesure de la taille des baies. En

---

17 L. MARCH , "Salaires, quelques exemples de leur distribution", *Journal de la Société de Statistique de Paris*, 1898, p. 193-206, et 241-248.

18 F.Y. EDGEWORTH et A.L. BOWLEY , "Methods of Representing Statistics of Wages and Other Groups Not Fulfilling the Normal Law of Error", *Journal of the Royal Statistical Society*, 65, 1902, p.325-354.

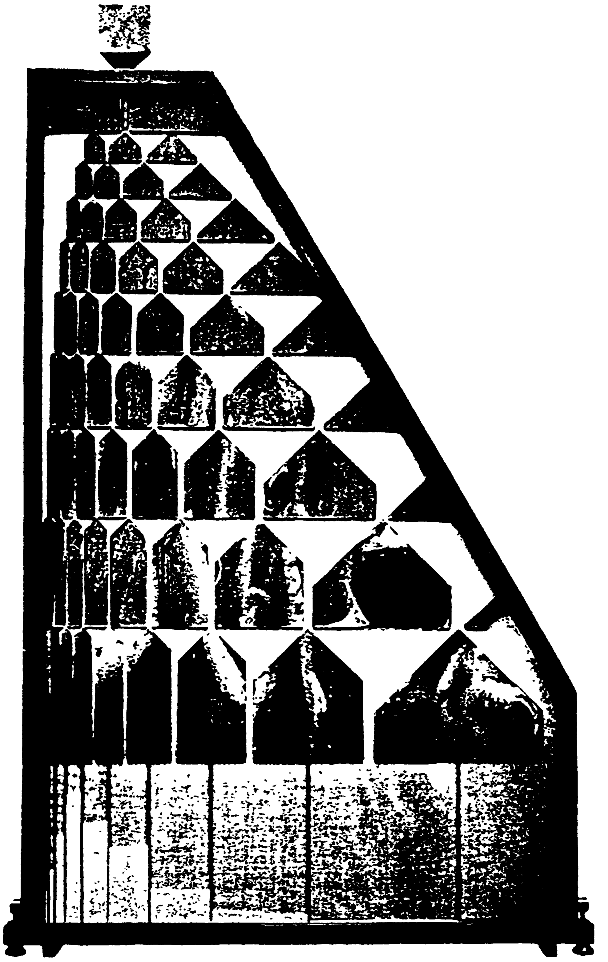
19 Ronald FISHER, "On the mathematical foundation of theoretical statistics", *Phil.trans. of the R.S.*, 222 A, 1922, p.309-68. Voir notre propre texte : "La construction des notions d'estimation et de vraisemblance chez Ronald A.Fisher", *Journal de la Société Statistique de Paris* , 1988, tome 129, n°1-2.

20 Charles JORDAN, *Statistique Mathématique*, Paris, Gauthier Villars, 1927, 340 p.

21 J.C. KAPTEYN, *Skew Frequency Curves in Biology and Statistics,* Astronomical Laboratory, Groningen, 1903.

22 R. RISSER, "Exposé des principes de la statistique mathématique", *JSSP*, 1935, p.302-305.

généralisant à une fonction quelconque, l'effet x d'une cause peut être une fonction de la forme $\varepsilon.f(x)$. Alors c'est $\varepsilon = \Delta x / f(x) = \Delta z$ qui est indépendante de x, et c'est une certaine fonction $z = g(x)$ qui est distribuée normalement comme somme de variables indépendantes de mêmes lois, tandis que la mesure x sera distribuée asymétriquement. Kapteyn illustre d'ailleurs le cas où $f(x)$ est une simple proportionnalité [$f(x) = kx$] par une nouvelle version de la "quincunx" de Galton et de Pearson. Le second avait adapté le célèbre dispositif de Galton à une binomiale de paramètre p quelconque (et non 1/2). Kapteyn remplace les clous disposés en quinconce par des coins dont la largeur L est proportionnelle à la déviation déjà effectuée :



Si x_j = déviation horizontale des billes au $j$ème rang,

$L = 2a\, x_{j-1}$

$x_j = x_{j-1} + dx = x_{j-1}(1+\varepsilon_j)$

ε_j prenant avec les probabilités 1/2 les valeurs $\pm\, a$

Alors $x_n = x_0 \prod(1+\varepsilon_j)$

$Log\ (x_n/x_0) = \sum Log(1+\varepsilon_j) \approx \sum \varepsilon_j \rightarrow N(0, a\sqrt{n})$

x_n suit une loi log-normale $LN(Log\ x_0,\ a\sqrt{n})$

Figure 1. La machine de Kapteyn (d'après Aitchison et Brown)

La place que confère Gibrat à ce modèle probabiliste par rapport aux ajustements empiriques est toute relative :

> *"Il est donc impossible de démontrer rigoureusement que, pour une répartition économique donnée, toutes les conditions nécessaires sont remplies. Le processus intellectuel doit être le suivant : I - des considérations a priori montrent qu'il est possible ou même probable que les conditions sont remplies ; II - l'ajustement par la formule est satisfaisante ; III - la valeur de l'approximation permet de considérer comme certain, très probable, ou peu probable l'indépendance des effets des causes. L'opération III est essentiellement subjective et son résultat ne peut influencer celle qui la précède. En d'autres termes, on peut rejeter complètement l'indépendance des effets des causes et cependant utiliser avec fruit l'ajustement. Au contraire, un mauvais ajustement de l'observation rend inutile un jugement sur cette indépendance".*[23]

---

[23] R. GIBRAT, "Les Inégalités...", *op. cit.*, p.61.

Et l'on peut voir dans la manière dont il en parle, non pas seulement une juxtaposition de deux raisons de croire à ce modèle, mais un début d'articulation consciente entre approche théorique et validation empirique qui sera l'âme de la méthode économétrique. Ce n'est qu'un début en ce sens que la justification théorique reste un "plus", un supplément d'âme, dont on peut à la rigueur se passer. Dans la statistique économique de 1920, on devait s'en passer. Dans l'économétrie d'Haavelmo, elle deviendra indispensable.

LA LOI DE L'EFFET PROPORTIONNEL

Gibrat transpose exactement ce raisonnement au domaine économique : les tailles des grains sont devenues les salaires (uniques) de plusieurs villes qui subissent chaque mois une augmentation à deux valeurs $\mu_t \pm \varepsilon$ également distribuées. "*Dans certaines villes, le syndicat ouvrier est plus violent, dans d'autres, le patron, manquant de commandes, ne craint pas la grève, etc..*". Si la tendance à la hausse un mois quelconque favorise de la même façon tous les groupes, quelle qu'ait été leur variation les mois précédents, alors la répartition de ces salaires sera normale. Mais il est bien plus naturel de considérer, conformément au second raisonnement de Kapteyn, que l'effet de cette cause d'augmentation, quelle qu'elle soit, dépend du niveau déjà atteint par la grandeur étudiée, par exemple que l'accroissement de salaire est proportionnel au salaire, ou encore que c'est son taux de croissance qui est constant. Gibrat s'attribue d'ailleurs abusivement "l'extension du raisonnement de Kapteyn" à des accroissements *relatifs* indépendants, alors que ce dernier l'avait lui-même explicitement envisagée. Dans la notation ci-dessus, cette proportionnalité se traduirait, en écrivant les accroissements comme des différentielles, par $dx = \varepsilon.x$, et Gibrat écrit plus généralement que $f(x)$ est une relation affine :

$$dx = \varepsilon.f(x) = \varepsilon.(x-x_0)/a$$

d'où $\varepsilon = dx/f(x) = a.dx\,/\,(x-x_0) = dz$

et $z = a.log(x-x_0)+b$ est la variable qui suit une loi normale, centrée mais d'écart-type $\sigma = 1/\sqrt{2}$, puisque Gibrat écrit la densité $f(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}$. La table de $R = \int_t^\infty e^{-z^2} dz$ est donnée à la fin de son ouvrage.

Robert Gibrat n'est pas l'inventeur de la loi log-normale. Elle a été imaginée une première fois par Galton et MacAlister en 1879[24], inspirés par la loi de Weber-Fechner qui relie en psychophysique un stimulus à sa réponse par un logarithme. Ils l'utilisèrent pour rendre compte de la distribution asymétrique de certaines données biologiques, et pour justifier l'usage de la moyenne géométrique.

Kapteyn a comme on l'a vu anticipé Gibrat en proposant lui-même l'extension du théorème de Laplace à une addition de variations relatives. Dans sa critique du premier ouvrage de Moore - *Laws of Wages* (1911) - Lucien March s'inscrit dans la longue tradition qui, de Galton à Sorel, fonde la distribution des revenus sur celle des aptitudes, mais il suggère que cela peut être par le biais d'une fonction non linéaire, si l'on veut rendre compte de la dissymétrie de la répartition des revenus. Il propose alors[25] de remplacer le modèle artificiel utilisé par Moore (constitué du collage des moitiés gauches et droites de deux lois normales différentes) par un autre schéma ainsi décrit : si au premier stade des ouvriers

---

[24] Francis GALTON, "The geometric mean in vital and social Statistics"; Donald MAC ALISTER, "The law of geometric mean", *Proceedings of the Royal Society of London*, 29, 1879, p.365-375.

[25] Lucien MARCH, "La théorie des salaires. A propos de l'ouvrage du Professeur Ludwell Moore : *Laws of Wages*", *JSSP*, 1912, p.366-383.

produisent une quantité a, leur différence d'aptitude les différenciera en deux groupes, l'un produisant a et l'autre produisant $a(1+\alpha)$, puis trois groupes produisant respectivement a, $a(1+\alpha)$ et $a(1+\alpha)^2$ avec des probabilités 1/4, 1/2, 1/4, etc.... Sans l'identifier formellement, March propose ici le schéma de Kapteyn. Le modèle lognormal est également discuté par Maurice Olivier dans un ouvrage[26] sur les indices publié en 1927. Gibrat qui a peut être lu cet ouvrage n'est donc pas l'inventeur de la loi de l'effet proportionnel. Mais il est à coup sûr le principal responsable de sa promotion soudaine en 1930, ce qui autorise à parler d'innovation.

Les propriétés classiques de la loi log-normale (à 3 paramètres) peuvent être rappelées dans le tableau suivant :

$*X \to LN(x_0, \mu, \sigma)$, loi log - normale ou loi "de l' effet proportionnel"

$\Leftrightarrow Y = Log(X - x_0) \to N(\mu, \sigma)$ avec $(X > x_0)$

$\Leftrightarrow$ [1] $Z = \frac{1}{\sigma} Log(X - x_0) - \frac{\mu}{\sigma} = a'.Log(X - x_0) + b' \to N(0,1)$

$*M = Med(X) = x_0 + e^{\mu} \Leftrightarrow Log(M - x_0) = \mu$

$*m = E(X) = x_0 + e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \Leftrightarrow Log(m - x_0) = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2$

$*Mo = Mode(X) = x_0 + e^{\mu - \sigma^2} \Leftrightarrow Log(Mo - x_0) = \mu - \sigma^2$

$*$ d'où [2] $(Mo - x_0).(m - x_0)^2 = (M - x_0)^3$

$*S^2 = Var(X) = (m - x_0)^2(e^{\sigma^2} - 1)$

$*\eta = \frac{S}{m} = \frac{m - x_0}{m}\sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$ (coefficient de variation)

$*\alpha = prob(X < f_X^{\alpha}) \Leftrightarrow f_X^{\alpha}$ = fractile d' ordre α de X

$\Leftrightarrow \alpha = prob(\frac{Log(X - x_0) - \eta}{\sigma} < \frac{Log(f_X^{\alpha} - x_0) - \eta}{s})$

$\Leftrightarrow$ [3] $Log(f_X^{\alpha} - x_0) = \sigma.f_Z^{\alpha} + \mu$ (f_Z^{α} fractile d' ordre α de Z)

$*$Le produit de deux lois *LN* est *LN*

$*$Réciproque de Cramer : $\{X_1 X_2 \to LN\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} X_1 \to LN \\ X_2 \to LN \end{Bmatrix}$

$*$Théorème de Lindeberg - Levy:

$X_j \to LN(\mu, \sigma)$ et indép $\Rightarrow \prod_{j=1}^{n} X_j \to LN(n\mu, \sigma\sqrt{n})$

$*$Théorème de Liapounoff :

$X_j \to LN(\mu_j, \sigma_j)$ et indép $\Rightarrow \prod_{j=1}^{n} X_j \to LN(\sum \mu_j, \sqrt{\sum \sigma_j^2})$

(si $\frac{\left\{\sum E\left|Log X_j - \mu_j\right|^3\right\}^{\frac{1}{3}}}{\left\{\sum \sigma_j^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$)

---

[26] Maurice OLIVIER, *Les Nombres-Indices de la variation des prix*, Paris, Giard, 1927.

Ces propriétés sont pour l'essentiel données par Gibrat dans une annexe. Il faut noter cependant que Gibrat écrivant que $z = a.log(x\text{-}x_0)+b$, avec $z \rightarrow N(0,1/\sqrt{2})$, et utilisant des logarithmes décimaux, nous devons écrire $Z = z\sqrt{2} = a\sqrt{2}\{Log(x\text{-}x_0)\}/\{Log10\}+b\sqrt{2}$, et donc, par identification, $a = (Log10)/\sigma\sqrt{2}$; $b = -\mu/\sigma\sqrt{2}$.

Gibrat considère que la relation [2] conduit avec un développement limité à la relation approchée : *2Moyenne + 1Mode = 3Médiane*, et il ajoute : "*L'établissement de cette relation est très important car une relation connue empiriquement depuis longtemps est ainsi retrouvée théoriquement*" (p.263).

L'asymétrie peut être mesurée par le coefficient de Pearson qui vaut ici η^3+3, ou bien encore par la quantité $S = 2\{(Q_3\text{-}M)\text{-}(M\text{-}Q_1)\}/(Q_3\text{-}Q_1) = 0{,}47693/a$. Gibrat rappelle que la distribution de type III de Pearson a été introduite en 1896 par Otto Ammon pour les revenus et utilisée par March et Pareto, et il montre (p.266) que la distribution qu'il étudie est le plus souvent du type VI dans la classification de Pearson lorsque $K = e^{\sigma^2/2} = \mathrm{e}^{1/4a^2 log^2 e}$ est à peine supérieur à 1 (cas des salaires), ou proche quelquefois du type III pour les valeurs plus élevées de K (cas des revenus), ce qui "explique le choix de M. March" et ce qui relie aussi cette formule à la seconde loi de Pareto.

MESURE DE L'INÉGALITÉ

Nous l'avons dit, Gibrat hérite d'une situation où la question de l'inégalité domine celle de l'ajustement. D'où le titre de son ouvrage. D'où un chapitre consacré à cette question : "*Comment définir et comment étudier l'inégalité de répartition des biens ?*" et une discussion des problématiques non formalisées de l'inégalité. Gibrat reprend la distinction entre la détermination économique des prix et des richesses et le problème social de la répartition des biens, et dans le second cas qui seul l'occupe, celle qui oppose paupérisme et inégalité, comme cela résulte du débat entre Leroy-Beaulieu et Lassalle. Ce dernier est longuement cité, comme Pareto l'avait déjà fait : "*Votre situation comme homme ...ne se mesure pas comparativement à la situation de l'animal dans la forêt vierge, ou comparativement à celle du nègre de l'Afrique, ni à celle du serf d'il y a deux cents ans, ou même d'il y a quatre vingt ans ; elle n'a d'autre mesure que celle de vos compagnons de l'humanité, que celle des autres classes dans le temps où vous vivez*". Gibrat rappelle ensuite que le thème de l'inégalité fut abordé par le Congrès International de Statistique, étudié dès 1868 par Dudley Baxter (La Haye), exposé dans un rapport à la session de Berlin de 1903. Il devint la seconde spécialité - après la question des sondages - du norvégien Kiaer, qui fut le secrétaire de la commission chargé de cette question. Gibrat désigne sous le nom de *méthode des pourcentages* l'évaluation de l'inégalité faite directement par comparaison des fréquences observée dans une même classe d'une période à une autre, qui ne tiennent compte ni du "progrès général des revenus", ni de la mobilité inter-classes. La critique qu'il en fait était déjà celle de Wolf. Il est plus original et pour cause lorsqu'il rapporte la méthode des *quartals* de Würzburger (1904), "appliquée au Danemark par M. Warming", puis reprise par Kiaer sous forme de cinquièmes : ce dernier par exemple compare les fréquences de classes représentant chacune le cinquième de la masse totale des revenus, ce qui élimine un effet d'échelle et permet ensuite des comparaisons spatiales ou temporelles. Dans une version ultérieure les 5 classes représentent respectivement 50%, 27%, 16%, 6%, et 1% des individus. Mais dans l'un et l'autre cas, aucun indice unique ne saurait synthétiser ces tableaux dont l'élaboration est de plus assez délicate. Gibrat conclut téléologiquement :

> *"En dehors de l'incertitude des calculs, cette méthode, quoique théoriquement correcte, présente l'inconvénient de n'utiliser qu'un petit nombre de points de la courbe de distribution. De plus ne réunissant pas en un seul coefficient les*

caractéristiques de l'inégalité, elle ne permet pas une étude facile et rapide de nombreuses distributions. Il faut remarquer que ce progrès ne pouvait être obtenu que lorsqu'on connaîtrait une formule représentant même approximativement la répartition. C'est ce qui explique l'importance de la découverte de Pareto".

Si Gibrat a raison, nous semble-t-il, de voir un progrès de l'objectivation de la notion d'inégalité dans l'indice unique, rien n'impose que cet indice résulte d'un ajustement. Il y a d'ailleurs dans la littérature sur le sujet beaucoup d'auteurs qui s'élèvent contre ce principe, préférant un indicateur qui soit au contraire indépendant du modèle choisi, comme la moyenne et la variance qui sont des caractéristiques de valeur centrale et de dispersion indépendante des formes des distributions. Le coefficient de variation $\sigma / \bar{x}$ de Pearson, ou son inverse que Gibrat nomme *coefficient de solidarité* peuvent jouer ce rôle, tout comme l'intervalle inter-quartile absolu ou relatif que pratiquait déjà Galton et que March propose de remettre à l'ordre du jour : *"Plus il est grand, plus les salaires sont généralement inégaux"* remarque-t-il dans son article de 1928[27], où il propose également d'utiliser *l'intervalle interquartal,* ou encore l'écart relatif entre la médiane et la médiale qu'il appelle *déviation intermédiante*. A ces mesures qui n'utilisent que deux points de la distribution, March préfère toutefois une mesure qui prend en compte toutes ces valeurs, et il propose la *différence moyenne* de Gini, lui donnant une interprétation géométrique.

L'avantage d'un ajustement serait non seulement de fournir une valeur unique de l'inégalité, mais de comparer des courbes de même famille, qui ne diffèrent donc que par ce paramètre. C'est exactement ce rôle qu'assume la courbe de Pareto, et Gibrat en rappelle les caractéristiques, ainsi que les mesures d'inégalités qui lui sont liées : le α lui-même de Pareto, le δ de Gini, ou le R_1 de Mourre.

Pour concurrencer valablement la courbe de Pareto, Robert Gibrat doit montrer qu'elle permet aussi de définir une mesure de l'inégalité au travers l'un de ses paramètres. Ce paramètre est a. Plus exactement, Gibrat montre dans une annexe que les principales mesures de l'inégalité pratiquées sont des fonctions monotones décroissantes de ce paramètre (voir notre tableau de correspondance ci-dessous) et propose de prendre comme mesure de l'inégalité la quantité $C = 100/a$, soit encore dans des notations modernes, un multiple du paramètre de la loi log-normale : $C = 100\sigma\sqrt{2} / Log 10 = 61{,}4\sigma$. C apparaît pratiquement dans les ajustements comme 100 fois l'inverse de la pente de la droite $z = a log(x-x_o) + b$. Si l'on se rappelle enfin que cette équation provenait de l'intégration d'une équation différentielle de la forme $dx/(x-x_o) = dz/a$, on voit que $1/a$ prend une signification dynamique dans le modèle génétique de la loi de l'effet proportionnel : il est le facteur de proportionnalité des effets dx qui modifient la valeur de x ; il exprime la "mobilité relative" du revenu x.

Gibrat cherche à exprimer[28] les différents indices d'inégalités pour sa loi de l'effet proportionnel. Or l'inter quartile relatif, le rapport des quartiles, les indices de Gini, de Mourre et de Fréchet varient en gros comme l'inverse de a. Gibrat en déduit que $C=100/a$, soit pour nous $61{,}4\sigma$, peut être pris commodément comme indice d'inégalité. Directement relié à un paramètre de sa loi, cet indice C en est le représentant, et donc hérite de ses qualités, en particulier de bien traduire (mieux que Pareto en tout cas) la distribution. Mais comme il se trouve quand même relié par des fonctions monotones (voir les formules du tableau précédent) aux autres indices usuels, C peut donc être utilisé à des fins comparatives indépendamment de la loi supposée.

---

[27] L. MARCH, "Différences et corrélation en statistique", *Journal de la Société de Statistique de Paris*, 1928, p.38-58.
[28] R. GIBRAT, *Les Inégalités...*, p. 89 et annexe p.261-268.

Mesure de l'inégalité	1ère loi de Pareto	Loi de Gibrat
Coeff. de variation $\sigma / \bar{x}$	$1/\sqrt{(\alpha^2-2\alpha)}$ si $\alpha>2$	$\frac{m-x_0}{m}\sqrt{e^{\sigma^2}-1}$
Inter quartile $(Q_3-Q_1)/Q_2$	$2^{1/\alpha}-\left(\frac{2}{3}\right)^{1/\alpha}$	$2sh(0{,}67\sigma)=2sh\frac{0{,}67Log10}{a\sqrt{2}}\approx\frac{2{,}2}{a}$ (avec $Q'_2=Q_2-x_o$)
(médiale-médiane)/médiale	$1-2^{\frac{1}{\alpha(\alpha-1)}}$	$1-e^{-2}=1-e^{-2{,}65/a^2}$ $(x_o\approx 0)$
δ de Gini	$\alpha/(\alpha-1)$ si $\alpha>1$	Non défini
G de Gini	$1/(2\alpha-1)$	$\frac{(m-x_0)}{m}\left\{1-2F_X(-\sigma/\sqrt{2})\right\}$
Indice de Fréchet[29] $\frac{m-x_0}{M-x_0}$	$\frac{1}{(\alpha-1)(2^{1/\alpha}-1)}$	$e^{(Log10)^2/4a^2}=e^{\sigma^2/2}$
C de Gibrat	Non défini	$C=100/a=61{,}4\,\sigma$

LES AJUSTEMENTS

Reste donc a étudier la méthode d'ajustement de Gibrat avant que d'en évaluer les résultats. Car "*cette formule a un intérêt par elle-même, indépendamment du raisonnement de Kapteyn et de sa modification. Notre attitude intellectuelle est la suivante pour le moment, voici une formule que nous nous sommes procurée par un moyen quelconque, peut-elle servir pour représenter des fonctions de fréquences?*" Ce point de vue du seul ajustement, comme l'était celui de Pareto et de Pearson, va dominer le reste de son travail. La méthode d'ajustement passe par les phases suivantes :

1. Cumul des effectifs relatifs $\overline{F}_i$ à partir des revenus les plus élevés.
2. Lecture de z_i dans la table de la loi normale : $FR(z_i)=1-\overline{F}_i$.
3. Calcul de log x .
4. Construction du graphique (z_i, $logx_i$) et ajustement graphique d'une droite.
5. Calcul des valeurs théoriques de z par l'équation de la droite.
6. Déduction des effectifs théoriques et de la qualité de l'ajustement.

L'ajustement se fonde donc sur la propriété centrale que la variable transformée z_i est une fonction linéaire du logarithme du revenu; en effet, si F_Y représente la fonction de répartition de la loi normale et F_Y^{-1} son inverse, alors :

$$prob(X > x) = \overline{F}_X(x) = \overline{F}_Y\left(\frac{Log(x-x_0)-\mu}{\sigma}\right) \text{ , d'où}$$

$$[4] \quad z = \overline{F}_Y^{-1}\left\{\overline{F}_X(x)\right\} = \frac{1}{\sigma}Log(x-x_0)+\frac{\mu}{\sigma} = alogx+b$$

Cette relation est aujourd'hui connue sous le nom de droite de Henry (ou Henri) du nom du polytechnicien P.J.P. Henri (1848-1907), enfant trouvé - d'où l'orthographe imprécise - qui l'enseignait à l'Ecole d'Artillerie dans les années 1880, et a été popularisée par le cours de Haag à l'Ecole d'Artillerie de Fontainebleau. Les anglo-saxons, sur la foi de

---

[29] Cet indice a été proposé par Fréchet dans son manuel rédigé avec Halbwachs en 1924 - M. FRECHET et M. HALBWACHS, *Le calcul des probabilités à la portée de tous* , Dunod, 1924, p.145. Il a été précisé dans une note jointe à l'article de Mourre (*JSSP* 1940). Il correspond au rapport du revenu moyen au revenu "probable", c'est-à-dire médian, corrigé du revenu minimum x_0. On vérifie facilement que a comme α sont des fonctions décroissantes de cet indice.

Aitchison et Brown (1962) citent plus volontiers l'ingénieur Hazen[30] comme le premier utilisateur de cette anamorphose particulière. Sous ce terme, le mathématicien français d'Ocagne a développé toute une série de transformations mathématiques de courbes, dont un des objectifs était la linéarisation des abaques utilisés en lieu et place des formules par les ingénieurs et les cadres militaires. Gibrat ne cite aucune de ces deux sources, mais il est vraisemblable qu'il a appris cette technique à l'Ecole polytechnique. Il n'utilise pas non plus d'échelles directement graduées en fonction de ces transformations, comme on trouvera plus tard dans les papiers gausso-logarithmiques.

La technique d'ajustement elle-même est entièrement graphique. Laissons d'abord Gibrat s'en expliquer :

> *"Pour obtenir le mieux possible l'équation de la droite, nous adoptons la méthode suivante. Un ajustement graphique donne une première approximation pour la droite. Nous calculons les différences d'ordonnées avec les points réels, et les reportons sur un graphique a petite échelle sur lequel nous interpolons une droite. Celle-ci nous fournit la seconde approximation voulue".*[31]

Pour quelle raison Gibrat n'utilise aucune méthode mathématique, que ce soit celle de Legendre ou de Cauchy ou de Pearson ? Comme il ne s'en explique pas davantage, la seule réponse vraisemblable, et qui soit la plus simple est *qu'il n'en a pas besoin*, d'une part parce que le modèle étant toujours à une seule variable exogène, la méthode graphique est toujours possible (ce n'était pas le cas des ajustements de March), d'autre part parce que cette pratique correspond naturellement à l'art de l'ingénieur de l'entre-deux-guerres et qu'elle seule évite un mauvais ajustement automatique, enfin parce que c'est plusieurs centaines d'ajustements que Gibrat a l'intention de mettre en œuvre, et cela nécessite une méthode instinctive et rapide. Peut-être pourrions-nous même avancer que c'est parce qu'il a rejeté une interpolation mathématique que Gibrat a pu capter l'intérêt des économistes pour son modèle.

Le modèle à trois paramètres offre une difficulté supplémentaire qui est l'estimation du revenu minimal x_0. Gibrat propose une méthode de balayage qui consiste à partir d'une valeur égale au revenu minimum observé et faire croître progressivement cette valeur, jusqu'à ce que le graphique des points $[log(x-x_0), z]$ soit linéaire. Il apparaît en effet que sa courbure d'abord dirigée vers les axes diminue, s'annule, puis s'inverse lorsqu'on augmente x_0. Il en résulte d'ailleurs que cette valeur optimale de x_0 correspond aussi à un minimum de la somme des carrés des erreurs du modèle linéaire, et un minimum de la somme des erreurs absolues sur les fréquences. C'est ce que nous avons pu constater, plus facilement que Gibrat, par simulation sur tableur. Il faut faire attention toutefois au fait que $log(x-x_0)$ ne peut bien sûr être défini que pour $x>x_0$ ce qui oblige à abandonner les premières données de revenus lorsque l'optimum de x_0 n'est pas inférieur au premier revenu déclaré. Dans ce cas, l'ajustement n'est plus fait sur toute la distribution, ce qu'oublie de préciser Gibrat.

Nous avons en effet repris les calculs sur deux des quatre jeux de données[32] utilisés par Gibrat comme exemples de démonstration. Ce sont les seuls exemples (tous deux empruntés à Bowley) pour lesquels il compare son ajustement à celui d'une loi de Pareto, pour conclure deux fois à la supériorité de son modèle.

---

[30] A. HAZEN, "Storage to be provided in impounding reservoirs for municipal water supply", *Trans. Amer. Soc. civ. Engrs.*, 77, p.1539.

[31] R. GIBRAT, *Les Inégalités...*, p. 66, note 1.

[32] Les deux autres concernent 1) La répartition des établissements industriels français d'après leur nombre d'employés et d'ouvriers 2) Les revenus anglais (Cédule D) 1893-1894.

Les données budgétaires que Bowley emprunte au *Class Cost of Living Committee* de 1918, et reproduit dans son traité[33], concernent des dépenses hebdomadaires de nourriture de 970 familles urbaine (par adulte ou équivalent). Il n'est pas étonnant dès lors que la formule de Pareto s'avère très mauvaise, même dans sa seconde forme pour lesquelles l'optimum de l'ajustement ne semble atteint que pour des valeurs très élevées du paramètre a, et surtout de α. Ni Bowley ni Gibrat ne rapportent d'ailleurs ces mauvais résultats. Le premier auteur donne par contre les résultats d'un ajustement par une loi des erreurs généralisées d'Edgeworth (m = 10,75 ; σ = 3,156 ; κ = 0,84) et par une courbe de Pearson de type III (paramètres : β_1 = 0,708 et β_2 = 4,035). Nous reproduisons les fréquences théoriques (*nth*) données par ces deux modèles, ainsi que les erreurs absolues relatives correspondantes (*E%n*). C'est en effet ce critère que choisit Gibrat, en se référant à Pearson, pour comparer la qualité des ajustements. Mais nous éliminons la première classe de dépenses du calcul et de la comparaison de la moyenne de ces erreurs (ainsi que du graphique), puisque les effectifs théoriques ne sont pas définis pour le modèle de Pareto et pour le modèle de Gibrat. On s'aperçoit alors que la supériorité de l'ajustement par la loi log-normale (avec une valeur optimale pour x_o de 1,06) est bien établie, même si nos évaluations diffèrent de celles de Gibrat. La moyenne des erreurs absolues relatives est respectivement de 155%, 23,5%, 18%, et 8% pour les méthodes de Pareto, Edgeworth, Pearson et Gibrat. Ce dernier donne respectivement 47,3, 58,1 et 4,2 pour les sommes des erreurs absolues des trois dernières. La première valeur est erronée, et vaut 88 selon ses propres valeurs des effectifs théoriques. La troisième ne peut être aussi faible. D'après ses propres effectifs théoriques (que nous ne retrouvons pas même avec x_o=0) elle est de 48, avec notre valeur x_o=1,06 qui minimise la moyenne des erreurs *relatives* elle est de 73. Sur ce premier exemple, l'avantage de la loi de Gibrat apparaît certain, mais fortement surestimé par l'auteur.

Le second jeu de données est celui des revenus anglais de 1911-1912 frappés de la *super-tax*, et que l'on trouve aussi dans le traité de Bowley[34]. Cette fois-ci, comme il s'agit de la partie supérieure d'une distribution de revenus, la loi de Pareto s'y ajuste particulièrement bien, surtout si nous éliminons la première observation, ce que nous avons fait. Par la méthode des moindres carrés, qui n'est pas la meilleure dans ce cas comme nous l'avons vu, nous obtenons pour la seconde loi (α = 1,927) une somme des erreurs absolues de 116, et une moyenne des erreurs relatives de 4,6% pour une valeur a=2,2 qui correspond bien à un minimum du premier critère. L'amélioration par rapport à la première loi (α = 1,727, somme des erreurs absolues 415, erreurs relative moyenne 9,7%) est assez nette. Et pourtant l'ajustement par la loi log-normale est encore meilleur puisqu'il donne une somme des erreurs absolues de 76 et une erreur relative moyenne de 3,7%. Notons que Gibrat donne pour la première loi de Pareto un α = 1,5 qui est celui de Bowley. Ce dernier propose d'estimer soit à partir de trois points de la courbe et du rapport des effectifs trouvés dans les deux intervalles qu'ils forment, soit par la formule de la moyenne des revenus dans un intervalle donné qui élimine à la fois les hauts et bas revenus mal ajustés, d'où une valeur plus faible que la nôtre. Gibrat conclut : "*Cet exemple est très instructif, car il montre les défauts de la formule de Pareto ; les chiffres extrêmes sont tout à fait faux. La formule A [la sienne] au contraire, épouse avec aisance, la répartition observée d'un bout à l'autre. L'erreur pourcentuelle en moyenne est de 21% pour la formule de Pareto et de 2,5% pour A*".[35]

[33] A. L. BOWLEY, *Elements of Statistics,* 4ème édition, 1920, p.310.

[34] A. L. BOWLEY, *op. cit.* p.347.

[35] R. GIBRAT, *Les Inégalités...,* p.73.

Dépenses hebdomadaires de nourriture (Bowley , 1918)

a										x0			
10				Pareto 2		Edgewoth		Pearson III		**1,06**			
log(x+a)	n	N	Nth	nth	E%n	nth	E%n	nth	E%n	z	zth	nth	E%n
2,3026	18	970	48942	46857	####	22	22	7	-61	0			
2,7408	107	952	2085	1215	1035	123	15	122	14	-2,084	-2,176	128	20
2,8622	255	845	870	471	85	233	-9	252	-1	-1,132	-1,05	254	0
2,9704	245	590	399	202	-18	248	1	250	2	-0,275	-0,231	244	0
3,0681	173	345	198	93	-46	168	-3	172	-1	0,3701	0,4125	162	-6
3,157	101	172	104	46	-54	89	-12	95	-6	0,9256	0,9432	88	-12
3,2387	38	71	58	24	-36	51	34	45	18	1,4524	1,3946	43	14
3,3142	17	33	34	13	-22	22	29	19	12	1,8247	1,7873	20	17
3,3844	9	16	20	8	-15	11	22	7	-22	2,1323	2,1349	9	-1
3,45	7	7	13	13	80	1	-86	1	-86	2,4461	2,4467	7	0
Moyenne	10,74				**155**		**23,5**		**18**				**7,96**
	2ème loi Pareto									Loi de Gibrat		a	b
	-7,201	27,38								3,0278	-6,69	4,93	4,73
	0,738	2,317								0,0405	0,0999	s	m
	0,932	0,504								0,9987	0,0585	0,33	2,21
	95,22	7								5577,5	7	médi	9,11
	24,17	1,777								19,075	0,0239		

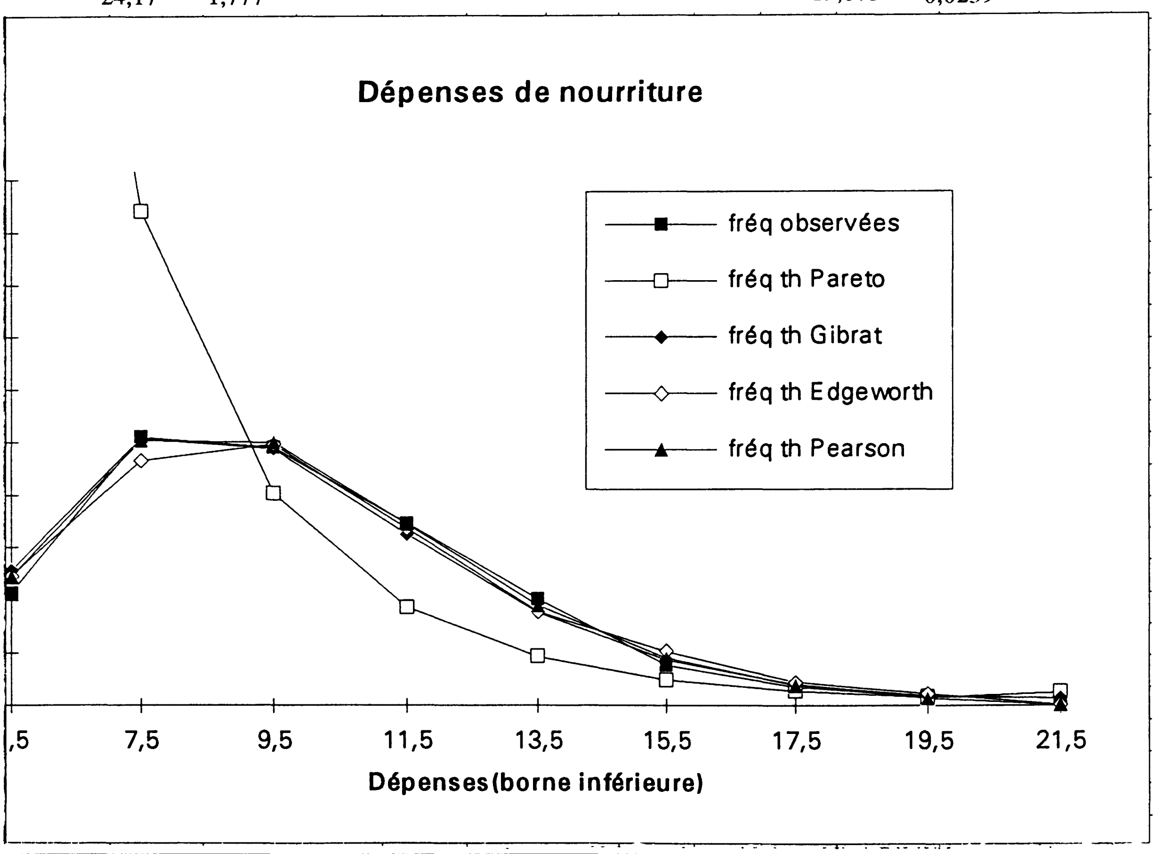


Figure 2. Comparaison d'ajustements sur dépenses de nourriture.

			Revenus anglais frappés de super-tax (Bowley)													
		a									xo					
		2,2									**5,7**					
Depense	x	log(x+a)	n	N	Nth1	nth1	E%n	Nth	nth	E%n	z	zth	Nth	E%	nth	E%
5	10	1,9741	7411	11554												
10	15	2,5014	2029	4143	4452	2295	13,10	4196	2032	0,14	0,362	0,364	4137	-0,15	2025	-0,21
15	20	2,8449	787	2114	2157	867	10,18	2164	841	6,84	0,904	0,905	2112	-0,09	797	1,28
20	25	3,1001	438	1327	1290	424	-3,13	1323	429	-2,11	1,201	1,207	1315	-0,91	411	-6,25
25	35	3,3032	382	889	866	391	2,44	895	405	6,12	1,426	1,417	904	1,72	400	4,65
35	45	3,6163	186	507	475	172	-7,67	489	180	-3,19	1,707	1,71	505	-0,49	184	-0,87
45	55	3,8544	107	321	303	91	-14,68	309	96	#####	1,914	1,916	320	-0,27	100	-6,09
55	65	4,0466	56	214	212	55	-2,45	213	57	1,78	2,085	2,075	220	2,65	61	8,41
65	75	4,2077	37	158	157	35	-4,23	156	37	-0,76	2,206	2,204	159	0,61	39	6,42
75	100	4,3464	55	121	122	49	-11,12	120	50	-9,04	2,309	2,313	120	-1,17	54	-2,57
100	120	4,6269	66	66	73	73	10,21	70	70	5,68	2,524	2,529	66	-0,01	66	-0,01
			Somme des err. abs			415			116						76,2	
		Moyenne	12,71	Moy. des err. rel.			**7,921**			**4,62**				**0,81**		**3,68**
1ere loi Pareto			2ème loi Pareto										a	b		
-1,787	12,515		-1,928	13,16							0,701	-0,659	1,142	0,47		
0,025	0,0894		0,014	0,051							0,002	0,007	s	m		
0,998	0,0552		1	0,029							1	0,006	1,426	0,94		
5288	8		19309	8							1E+05	8	media	2,56		
16,11	0,0244		16,13	0,007							4,234	3E-04				

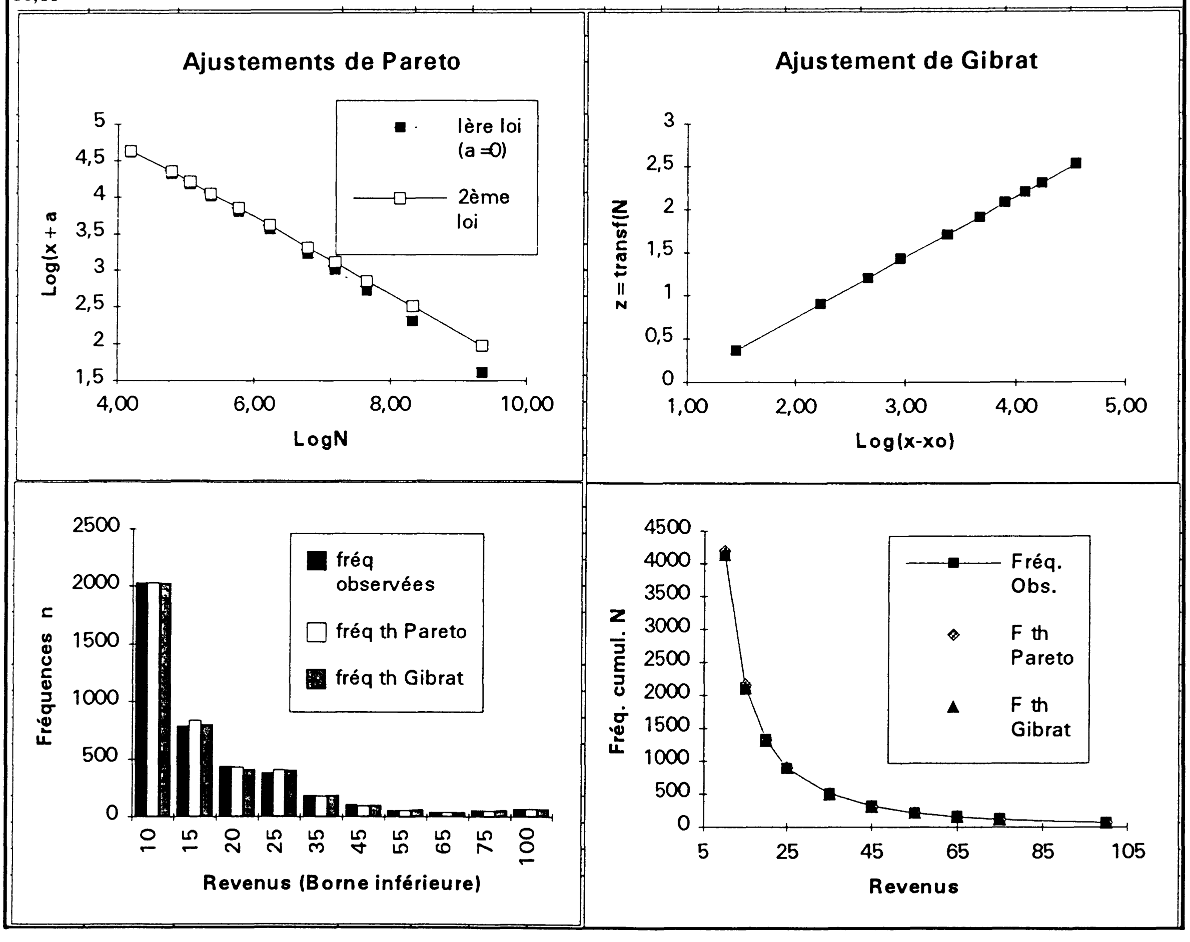


Figure 3. Ajustements de Pareto et Gibrat sur revenus anglais frappés de la super-tax.

Une fois de plus nous devons abaisser les prétentions de l'auteur et l'écart qui est mis entre les deux méthodes, puisque l'écart relatif moyen que nous calculons pour la loi de Gibrat (et sur une classe de moins) est à peine moins élevé que pour la seconde loi de Pareto, mais il l'est, et la conclusion reste en faveur de la loi de l'effet proportionnel, pour laquelle d'ailleurs nos résultats par les moindres carrés coïncident parfaitement avec ceux que Gibrat obtient par sa méthode graphique (à deux détentes !), aussi bien pour a=1,143 que pour

x_o=5,7. Gibrat consolide son avantage par le test d'adéquation de Pearson, le test du χ^2, dont la statistique apparaît bien comme une moyenne pondérée des écarts absolus entre fréquences observées et théoriques. La probabilité d'obtenir la distribution observée avec le modèle log-normal (que Gibrat interprète à tort comme la probabilité "en faveur" de son modèle) est de 0,793 contre moins d'un milliardième pour la (première) formule de Pareto, qu'il convient donc désormais d'abandonner. Il ne reste plus à notre auteur qu'à développer son dernier argument, à savoir que la loi possède un domaine d'application très vaste, et lui donner toute sa force en relayant le discours sur la qualité des ajustements par un discours sur la quantité de ces ajustements.

LES APPLICATIONS FAITES PAR GIBRAT

La seconde partie de sa thèse est pour l'essentiel consacrée à cette remarquable panoplie de résultats dont la qualité autant que la quantité sont tout à fait neuves dans le paysage de la statistique économique de l'entre-deux-guerres. C'est la première fois qu'un modèle mathématique est l'objet d'un si grand nombre d'illustrations économiques, et cela n'est pas pour rien dans son succès auprès des économistes peu sensibles aux charmes de la mathématique générale, mais très avides d'évidences chiffrées. Nous nous contenterons d'en dresser le tableau commenté, à peu près dans l'ordre où Gibrat les présente :

RUBRIQUE	LIEU	DATE	SOURCE	REMARQUE
REVENUS	Prusse	1911	BSGF (Dugé de B.)	
(Impôt/Revenu)	Oldenbourg	1890	Ammon/Pareto	(cf supra)
	France	1919-1927	Stat. fiscale	(loi du 15/7/1914)
	Allemagne	1852-1911	Jahrbuch / Soetbeer	Prusse, Saxe,Autriche
	Japon	1904	BIIS XVIII et XIX	
FORTUNES	Bâle	1454, 1887	Schmoller BIIS IX	+Augsbourg
(Impôt /Fortune)	Angleterre	1688	King/Davenant 1699	4 classes !
	Pays-Bas	1893-1910	Methorst, BIIS XX	
	Allemagne	1924-25		
	France	1922-1927 1921-1922	rentes vieillesse Caisse retraite, CCP	
SUCCESSIONS	France	1912,1926	Annuaire statistique	Droites "cassées"
(Impôt/Success.)	France	1911	Parts successorales	
	France	1902-1927	BIIS XVIII	+Thèse de Séailles[36]
	Pays-Bas	1879-1919	Methorst, BIIS XX	
REVENUS de la PROPRIETE	Paris	1878 1913	JSSP 1880 BSGF 1913	Loyers parisiens
	France	1900	Macquart,JSSP 1902	Propriétés bâties
	France	1896	desEssars,JSSP 1897	Dépôts de titres BdF
	France	1914	F.Faure, BIIS XIV-3	Ventes d'immeubles
	France	1914	Y.Guyot, BIIS XIV	Cotes foncières

[36] J. SEAILLES, "La répartition des fortunes d'après les statistiques successorales en France", Thèse, Paris, 1909.

SALAIRES	Angleterre	1906-1907	Board of Trade; BSGF 1913	3secteurs: coton, bâtiment et chemins de fer
	Italie Danemark Bavière	1906 1906 1909	Office du travail Recensement Landtag	Salaire par groupe d'âge
REVENUS DE L'ENTREPRISE	Allemagne	1927 1890-1902	Perroux/ Van Borght Lescure/Dermietzel	Profits=dividendes
	France	1927	Bul.LégisComp.1929	Impôts sur BIC
REPART.des Hommes dans les ENTREPRISES	France	1896-1921	Recensement, stat. des professions par branches (March)	Etude particulière sur les régions libérées
	Div. Pays Europe+US	1907	Ville-Chabrolle BSGF avril 1913	
	Turquie	1925	BSGF oct. 1929	Recensement industr.
	Allemagne	1907,1925	M.Dernis, thèse 1929	
REPART. des VILLES par taille	France	1926	Recensement	Pop. des communes de plus de 5000 hab.
	Europe, US	1927	Annuaire statistique	Villes>100 000
REPART. des FAMILLES par taille	France 11 départ.	1926	Huber, BSGF, 1929	Nombre d'enfants vivants

Si l'on considère que dans certains cas comme celui des données du *Board of Trade* les calculs sont faits pour chaque année et chaque branche, c'est à plusieurs centaines - Divisia en compte 600 - d'ajustements que Robert Gibrat a procédé dans sa thèse. Chaque fois, les sources sont indiquées, la qualité des statistiques est commentée (surtout dans le cas des données fiscales qui doivent être éclairées par la législation en cours dans le pays en question[37]), et les fréquences théoriques reconstituées. Mais surtout, l'indice d'inégalité C est déduit de la pente de la droite d'ajustement, ce qui donne lieu à de grands tableaux comparatifs et à une intervention outillée dans le débat qui s'est formé autour des enjeux de l'inégalité.

En ce qui concerne les *revenus*, la première chose qui frappe, et qui confirme le premier énoncé de Pareto, est la faible variabilité de cet indice. Un tableau récapitulatif pour l'Europe et les Etats-Unis (p.137) fait apparaître que cet indice ne descend jamais au dessous de 80 et ne dépasse jamais 150 avec une moyenne légèrement supérieure à 100. La variabilité totale, spatiale et temporelle est donc très faible (un coefficient de variation de l'ordre de 15%) malgré la différence des régimes économiques, des niveaux de développement. Plus étonnante encore la faible variabilité chronologique, qui semble marquer une certaine insensibilité aux conditions historiques : pour la France de 1919 à 1927, l'indice oscille entre 94 et 103, pour la Prusse de 1852 à 1911, il reste dans l'intervalle 128-148. Encore ces faibles oscillations semblent-elles suivre de près l'activité cyclique des affaires comme l'avaient déjà

[37] Gibrat note à ce propos que "*le désir de chaque puissance d'augmenter le rendement de son système fiscal, et par suite de frapper tout le revenu est pour nous une garantie que les diverses définitions fiscales du revenu ne sont pas trop éloignées les unes des autres*" (p. 121).

remarqué Schmoller en Allemagne, mais aussi Lescure[38] en France. Mais la mesure de Gibrat a l'avantage de mieux séparer, dans le raisonnement qu'ils faisaient, ce qui relève d'un appauvrissement général, d'une diminution du nombre de contribuables, et d'une modification de la répartition, et lui permet d'annoncer de possibles et futures études plus précises sur ce lien. Curieusement l'inégalité des *fortunes*, d'après la statistique sur les impôts ou les successions, donne lieu à un tableau très semblable (p.160) avec un indice plutôt supérieur à 100 mais toujours inférieur à 160. La valeur de 100 pour l'indice C correspond à une sorte d'inégalité universelle des revenus que Gibrat formule ainsi :

> *"Un quart des individus possède moins du tiers du revenu médian et moins du douzième du revenu moyen. A peine un cinquième des individus dépasse le revenu moyen, le tiers dépasse la moitié du revenu moyen.(...) 5,19% des individus se partagent la moitié de la fortune totale. Le quart de celle-ci est possédée par les 1,07% les plus riches ou par les 81,7% les plus pauvres"*.[39]

Les distributions de *salaires* sont par contre beaucoup plus égalitaires, mais aussi plus variables d'une branche à l'autre, d'une profession à l'autre, d'un âge à l'autre. Les indices C, que Gibrat déduit ici de différences (ou rapports) entre quartiles calculées par Dugé de Bernonville, sont d'un autre ordre de grandeur : 16,8 et 14,6 pour le bâtiment au Royaume-Uni et en France, et plus faible encore si l'on reste dans une catégorie : 4 pour les maçons, 7 pour les plombiers, et 10 pour les "garçons briqueteurs" au Royaume-Uni. Gibrat "ne retrouve pas la stabilité qu'avait cru voir M. March pour l'inégalité des salaires." Les profits (*C* de l'ordre de 20 à 30) semblent encore plus instables et liés au cycle des affaires.

La caractérisation par le même indice *C* de la concentration des entreprises est peut-être plus novatrice encore que l'étude des revenus. Le terme de concentration renvoie aux mêmes ambiguïtés que le terme d'inégalité : désigne-t-il un état de la distribution de la taille des entreprises ou une dynamique du capitalisme ? La concentration augmente-t-elle quand le nombre des grosses entreprises augmente, comme l'inégalité avec le nombre des riches ? Les mêmes ambiguïtés entourent les premières approches statistiques de cette notion par des mesures de pourcentages que Gibrat passe au moulin de la critique : si, de la décroissance du nombre de personnes occupées dans les petites entreprises dont le nombre croît dans le même temps, l'économiste Ansiaux déduit un peu vite que la concentration s'accroît, que penser de la stabilité de l'indice que Gibrat lui oppose, quand on voit que son ajustement est fait sur deux points seulement, parce qu'il n'y a que trois classes ! Heureusement des données françaises plus fines lui donnent l'occasion d'une étude convaincante, qui exploite toutes les ressources des statistiques professionnelles introduites par Lucien March dans le recensement : la forte concentration (C=177 à 235) des branches *tissage, forges, tréfilerie, automobile* contraste avec la faible concentration (100 à 133) des *industries chimiques, métallurgiques, du livre, du vin, de la restauration*, et la très faible concentration (75 à 100) *de la chocolaterie, la banque, la boucherie et les carrières de pierre*.

A la fin de sa partie théorique, Gibrat énonçait 4 avantages de sa loi sur celles de Pareto :

> *1. L'approximation est meilleure pour les revenus comme le montrent les comparaisons que nous avons faites*
> *2. La loi de l'effet proportionnel se vérifie pour un grand nombre de répartitions où la loi de Pareto n'existe plus : salaires, profits, successions....Elle a une plus grande généralité.*

---

38 LESCURE, *Crises générales et périodiques de surproduction*, Paris, 1923.

39 R. GIBRAT, *Les Inégalités...*, p.186-187.

3. L'indice tiré de la loi de l'effet proportionnel peut se relier à toutes les méthodes employées jusqu'ici.
4. Enfin, et c'est là plutôt une base de sa réussite que de son emploi, il a une base rationnelle et la formule de la loi de l'effet proportionnel se relie directement à la loi de Gauss, comme le souhaitait intuitivement M. Perroux pour les profits".
Gibrat ajoute, citant Borel (*JSSP*, 1922), *"que l'utilisation de la fonction de Gauss ne présente aucune difficulté spéciale, il n'est pas plus difficile de se servir des tables de la fonction de Gauss que d'utiliser des tables de logarithmes"*.[40]

L'ingénieur Gibrat a réussi là une belle opération de *modélisation* - le terme naît dans ce contexte économique dans les mêmes années - c'est-à-dire de traduction d'une problématique minée par les conflits de doctrine, dans une formule qui permet enfin d'objectiver la question des inégalités. En proposant une telle formule qui joint ces quatre avantages, il a toutes chances de séduire le public des économistes, et de jouer ainsi un rôle clé dans la rénovation de cette discipline quelque peu déconsidérée par la récente crise. Souvenons-nous de son programme de recherche et de ses motivations. Les avantages de la méthode qu'il met en avant sont tous de nature à séduire les économistes de sa génération, puisqu'il leur offre un outil plus performant et restant à leur portée. Faut-il encore qu'il ne tente pas de se substituer à leur propre expertise. Gibrat est d'une grande prudence dans l'usage qu'il fait lui-même de sa formule. Qu'il s'agisse par exemple de la tendance à long terme qui caractériserait l'inégalité, et Gibrat se situe à mi-chemin des socialistes et des libéraux comme Leroy-Beaulieu ou le baron Mourre, chicanant ce dernier pour avoir tenté "d'écraser les thèses socialistes sous des arguments mathématiques", et faisant preuve lui-même d'une parfaite neutralité dans ce débat : "*Dans l'état actuel de la technique statistique il est impossible d'admettre que l'inégalité des fortunes ou celle des revenus présentent une tendance vers une augmentation ou une diminution*"[41]. Il refuse tout autant de trancher entre l'absence de causes - le *hasard* ou la *conjoncture* de Lassalle - et le lien étroit avec la répartition des facultés mis en avant par Pareto et Ammon, les deux interprétations étant compatibles entre elles et avec la loi de l'effet proportionnel, puisque "*tout se passe comme si le logarithme du revenu d'un individu était proportionnel à ses aptitudes*" mais que cette loi traduit aussi "*le fait que de nombreuses causes toutes dépendantes du hasard, influencent le revenu*" et nous apprend "*comment le logarithme du revenu dépend directement de ce "hasard"*". Une note de bas de page à ce dernier mot réitère son souci de ne pas forcer les économistes à adopter tel ou tel argument en faveur de sa loi :

"Nous avons séparé nettement l'interprétation de la loi de l'effet proportionnel de son utilisation : nous avons observé en effet des difficultés très fortes que cette interprétation présentait pour des économistes sans formation mathématique. Nous remarquerons encore une fois que les deux choses sont indépendantes".

Cette phrase en dit long en particulier sur les réticences encore très fortes des économistes à une interprétation stochastique des données de la statistique économique. C'est en ce sens que les travaux de Gibrat nous semblent marquer le gué étroit qui les conduira d'une vision "pléthométrique" de l'économie quantitative, bien illustrée par d'autres ingénieurs comme March, Pareto et Divisia, aux schèmes probabilistes de l'économétrie codifiés par Haavelmo. En 1931, Gibrat donne le choix aux économistes d'interpréter sa loi de l'effet proportionnel comme un résultat de calcul des probabilités ou comme le simple résumé d'un procédé d'interpolation. Examinons maintenant ce qu'ils feront de ce choix.

---

[40] R. GIBRAT, *Les Inégalités...*, p.113-115.
[41] R. GIBRAT, *op. cit.*, p.190.

RÉCEPTION ET EXTENSIONS DE LA LOI DE GIBRAT

La première réponse vient comme un écho d'un mathématicien, et non des moindres puisqu'il s'agit de Paul Levy qui commence ainsi un assez long compte-rendu de l'ouvrage dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*[42] :

> *"Je noterai pour commencer qu'un mathématicien a réussi là où tant d'économistes avaient échoué. Ce n'est pas d'ailleurs que les connaissances mathématiques indispensables à cette étude soient d'un caractère très élevé (et l'auteur nous prouve par quelques remarques accessoires qu'il pourrait aller beaucoup plus loin), mais il faut une assimilation parfaite des principes pour raisonner avec justesse dans ces questions un peu délicates : la formation mathématique plus que les connaissances précises de tel ou tel théorème me semble avoir joué un rôle essentiel dans les recherches de M. Gibrat."*

Paul Levy s'attache ensuite à minimiser la nouveauté de cette approche, signalant sans acrimonie excessive d'ailleurs qu'il a lui-même préparé la voie : "*il suffit de rappeler que dans mon calcul des probabilités, j'ai développé (p.129-133) la théorie du gain moral, proportionnel à l'accroissement relatif de la fortune, et qu'à la page73, à propos de la théorie des erreurs, j'ai indiqué qu'il arrive souvent que ce soit logx et non x qui obéisse à la loi de Gauss. Mais cela ne saurait diminuer en rien le mérite de M. Gibrat qui ne s'est pas contenté d'une indication théorique, mais par l'étude patiente d'un grand nombre de documents a contrôlé l'application de sa formule, (...) et consulté plus de 600 répartitions; et le résultat a prouvé l'exactitude de ses prévisions théoriques*". Curieusement, le mérite d'un ancien élève et polytechnicien n'est pas d'avoir mis en œuvre certaines mathématiques mais c'est essentiellement d'avoir appliqué de bon principe - cela est certifié - à "des questions étrangères aux mathématiques", que Paul Levy ne souhaite d'ailleurs pas discuter. C'est comme pion avancé sur un territoire étranger et marécageux que le maître salue son élève alors qu'on aurait pu s'attendre à ce qu'il ancre un peu plus l'innovation de Gibrat dans le terreau des lois stables dont il s'est lui-même fait le théoricien depuis 1925. Bref, de probabilité et de loi limite il n'est pas question dans la critique de Paul Levy. C'est bien son travail d'interpolation de données statistiques - Levy évoque explicitement Kepler - qui est davantage reconnu dans la découverte d'une loi des revenus.

La brève critique de Barriol dans le *JSSP* suggère que le coup a porté - "*il est incontestable que ce procédé éclaire la question d'une manière tout à fait satisfaisante*" - mais que l'on retient surtout la démonstration d'une extraordinaire stabilité de l'inégalité. Quant au procédé -*une idée tout à fait nouvelle* - de ramener toute distribution de richesses à la loi célèbre de Laplace, il intrigue et inquiète tout autant qu'il promet. L'économiste qui a le plus vite saisi l'intérêt du travail de Gibrat est bien évidemment son camarade polytechnicien François Divisia. A cette date celui-ci est déjà enseignant d'économie industrielle et statistique au CNAM, mais aussi d'économie politique à Polytechnique et aux Ponts et Chaussées. C'est en pleine résonance avec la thèse de Gibrat qu'il entre tout au long d'une critique de près de quarante pages publiées dans la *REP* de 1932[43]. Il est vrai qu'une assez longue introduction occupe le premier tiers du texte et présente les propres conceptions de Divisia de ce que doit être la place de la statistique en économie : pas la première au sens où seule la théorie économique peut suggérer une définition et une explication - une conception purement statistique de l'épargne, d'un indice des prix, d'un mouvement séculaire, du chômage lui paraît inconsistante - mais une place fondamentale quand même puisqu'il s'interdit de manipuler toute entité conceptuelle qui n'aurait pas son correspondant statistique

---

[42] Année 1932, n°2.

[43] François DIVISIA, "Economique et Statistique. A propos d'un livre récent", *Revue d'Economie Politique*, Sept-Oct. 1932, p. 1457-1495. Extraits dans *Bulletin X-Crise*, 14-15, 1933-1934.

dans une grandeur observable, fut-ce avec quelque marge d'erreur. Divisia, comme Gibrat, évoque le lien à la "courbe en cloche" mais délaisse vite "l'explication" que fournit le calcul des probabilités pour n'y voir qu'un réservoir "d'heureuses formules", dont celle-ci qui représente convenablement un grand nombre de répartitions économiques, et surtout "fournit une définition" de l'inégalité. Pourtant c'est à l'explication de Kapteyn et Gibrat qu'il revient, non pas comme spécification d'une loi du hasard, mais comme mécanisme de dépendance. C'est bien l'idée d'effet proportionnel que Divisia trouve générale en économie, depuis la loi de la demande qui, sous la forme d'une élasticité mesure un rapport d'accroissements relatifs, jusqu'aux variations de prix dont il est persuadé, après la lecture du livre de Maurice Olivier, qu'ils suivent la même loi de l'effet proportionnel. Explorant la spécificité économique de cette loi, Divisia note assez facilement que sous cette hypothèse on pourra "*compléter les données fragmentaires*" et s'en servir "*d'instrument de purification des données d'observation*", retrouvant ainsi comme Quetelet et Pareto un usage normatif de la loi de Gibrat. Mais il note aussi, plus subtilement, que l'argument peut être retourné puisque toute erreur de mesure, pourvu qu'elle soit petite et d'effet proportionnel à la grandeur étudiée - comme par exemple les dissimulations de revenus - se fondra dans les autres causes d'écart, et ne modifiera en rien la distribution : *"cela explique que toutes les statistiques de revenus aient donné à l'auteur de bonnes vérifications, alors que certaines de ces statistiques sont indiscutablement erronées."* Divisia pense qu'il en sera de même des erreurs à effet constant, et que seules des erreurs systématiques pourront donc être repérées. Une autre conséquence de la généralité de cette loi en économie est une sorte de réciproque des propriétés de la transformation d'Edgeworth : si un lien fonctionnel existe entre deux variables ou plus (autre que la multiplication pour laquelle la loi est stable), seule l'une des variables, en situation privilégiée de variable fondamentale influencée par une multitude de causes aléatoires à effet proportionnel suivra la loi log-normale tandis que les autres suivront des lois dérivées forcément distinctes. Réciproquement, on pourra donc repérer ces variables "fondamentales" par le fait qu'elles suivent la loi de Gibrat. Il y a là tout un programme de recherche nouveau pour la statistique économique. Enfin, la généralité de cette loi incite Divisia à pratiquer une sorte de "log-queteletisme" : la loi de Gibrat témoigne d'une population homogène et concentrée et *légitime* "l'introduction généralisée de la moyenne statistique dans les études économiques". L'*homo economicus* est encore une sorte d'homme moyen, un log-homme moyen. Mais Divisia est trop peu probabiliste pour repérer, ce qu'avait pourtant fait Galton, que c'est la moyenne géométrique, ou encore la médiane, qui sont ici pertinentes. Car ce que Divisia apprécie dans le travail de Gibrat c'est d'abord et avant tout qu'il ait mis à la portée de tous les résultats d'une étude de statistique mathématique : "*la méthode statistique étant simplement un instrument, doit avoir la qualité de tout instrument : être à la portée de ceux qui sont appelés à s'en servir.* Comme Alfred Marshall, comme Bowley, comme Divisia lui-même dans son *Economique rationnelle,* Gibrat avait reporté tous les calculs dans une annexe de sa thèse précédée de l'exergue platonicienne, chère aux polytechniciens : "*Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre*". Divisia précise : "*Or cette porte interdite au profane, il n'est nullement nécessaire de la franchir pour avoir une idée suffisamment complète de la question. (...) Elle n'est qu'une porte de service, comme celles qui, au théâtre, permettent de visiter la machinerie; nous pouvons nous servir des résultats de ce calcul sans en connaître le détail, de même que nous pouvons conduire une auto sans connaître à fond sa mécanique*". Pourtant, en exonérant les économistes non polytechniciens des fondements mathématiques et probabilistes de la statistique économique, les ingénieurs-économistes favorisent leur accès à une boite à outils qui fonctionne comme une boîte noire : le prix à payer pour profiter de ses bienfaits est la renonciation à une connaissance critique de ces outils, à leurs mécanismes. La métaphore du théâtre est à prendre au sérieux, et l'économiste "profane" en mathématiques risque tout simplement d'être le jouet d'un spectacle, d'une série d'illusions dont quelques experts sont les metteurs en scène. Comment mieux définir en effet la place et le rôle d'expert en "mécanique" sociale, que revendique implicitement Divisia pour les ingénieurs économistes auprès des économistes. Il y a là bien sûr le germe de l'idée de technocratie qui s'imposera au cours des années 1930, et apparaît comme une composante majeure du mouvement X-Crise auquel Gibrat comme Divisia ont participé.

Que la loi de l'effet proportionnel ait été mise à jour par un ingénieur eut une autre conséquence plus immédiate, à savoir l'extension de son domaine d'application dans le domaine classique d'intervention des ingénieurs qui est, avant ou en même temps que celui des relations économiques, celui des objets techniques. Gibrat lui-même fut le vecteur d'un premier transfert technologique peu habituel de la recherche économique aux techniques industrielles. Gibrat est ingénieur des Mines, professeur d'Electricité industrielle et Directeur à l'Ecole de Saint-Etienne, et ingénieur-conseil de la Société générale d'Entreprises. La question de l'aménagement hydroélectrique des cours d'eau a sans doute surgi d'études faites à l'un ou plusieurs de ces titres. Il publie dès 1932 dans une revue professionnelle[44], et plus brièvement dans un nouveau compte-rendu à l'Académie[45], les résultats tout à fait prometteurs de nouvelles applications de la loi de l'effet proportionnel aux débits des cours d'eau. Les statistiques utilisées, provenant des sociétés qui exploitent la force motrice de ces rivières, sont celles des débits de la Truyère, ou de la Loire dans son cours supérieur, observés quotidiennement pendant plusieurs années, ce qui représente un très grand nombre d'observations. Par exemple les mesures du débit de la Truyère faites au pont de la Cadène que nous reproduisons couvrent 4383 jours, et au pont de Lanau, elles ont été faites depuis 1893, soit pendant 38 années ou 13878 jours.

TABLEAU I. — *Débits classés, en mètres cubes par seconde, de la Truyère, au pont de la Cadène, d'après les résultats de 1917 à 1928 (4 383 jours).*

NOMBRE DE JOURS	DÉBIT observé	DÉBIT calculé	NOMBRE DE JOURS	DÉBIT observé	DÉBIT calculé
371	4	2,9	3 933	90	88,2
533	5	4,8	4 003	100	96,6
668	6	6,2	4 071	110	106,5
777	7	7,4	4 150	120	122,3
890	8	8,5	4 193	130	134,0
990	9	9,6	4 227	140	146,1
1 092	10	10,6	4 260	150	160,8
1 858	20	19,7	4 319	200	220,5
2 495	30	29,6	4 348	250	254,7
2 974	40	40,2	4 358	300	285,8
3 265	50	48,8	4 369	350	341,6
3 532	60	59,8	4 375	400	404,4
3 690	70	68,5	4 377	450	429,7
3 836	80	78,9	4 379	500	488,5

	observé	calculé
Débit moyen	39,3	39,4
Débit médian (semi-permanent) ..	24,4	24,5
Débit maximum caractéristique....	152	161,5
Moyenne des 360 plus forts débits...	160,5	164,4

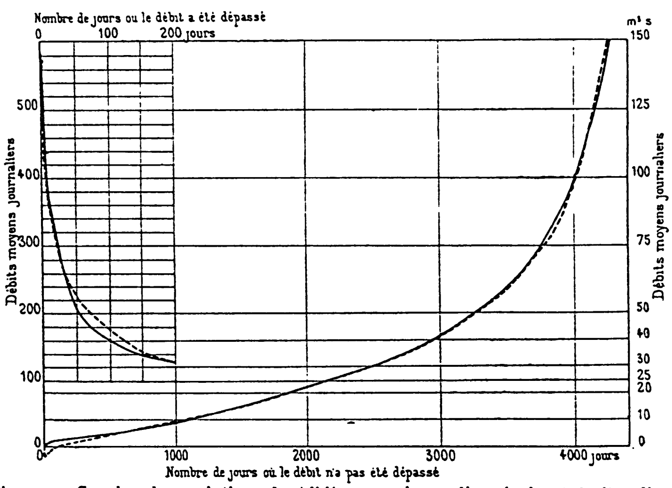


Fig. 1. — Courbes des variations du débit moyen journalier résultant de l'application de la formule de l'effet proportionnel aux débits de la Truyère, au pont de la Cadène, d'après les résultats relevés de 1917 à 1928 : trait plein, courbe expérimentale ; trait interrompu, courbe ajustée par la formule de l'effet proportionnel.

figure 4. Ajustement log-normal du débit de la Truyère

Les débits, de façon analogue à des flux de revenus, sont très bien ajustés par une loi log-normale, c'est-à-dire que la fréquence relative cumulée t/T des jours pour lequel le débit reste inférieur à q est assimilable au fractile d'une loi normale centrée réduite d'une variable $z = a\log_{10}(q-q_o) + b$, les trois paramètres a, b, q_o caractérisant la distribution, et s'interprètant comme irrégularité, débit moyen, et débit minimum.

[44] R. GIBRAT, "Aménagement hydroélectrique des cours d'eau : statistique mathématique et calcul des probabilités", *Revue générale d'électricité*, Octobre 1932, p.493-501 et 525-532.

[45] R. GIBRAT, "Sur l'ajustement mathématique des courbes de débits d'un cours d'eau", *CRAS*, 7 mars 1932., T. CXCIV, p. 843-845.

On voit peut-être mieux ici qu'en économie que la traduction statistique de notions, grandeurs, et relations entre grandeurs ne les formalise pas *ex nihilo,* mais conduit à une vaste opération de révision et de réinterprétation de "formules professionnelles" qu'une longue pratique industrielle a préalablement constitué comme résumé d'un savoir technique opératoire sur ces objets. En ce qui concerne le débit des cours d'eau et leur utilisation énergétique, un vocabulaire, mais aussi une métrologie "pré-statistique" pas toujours unifiée, existent déjà, et Gibrat doit s'employer "*à rattacher les définitions empiriques de l'hydraulique à celles plus rationnelles de la statistique*". Par exemple le "débit caractéristique d'étiage" désigne dans la tradition des hydrauliciens celui au-dessous duquel le cours d'eau descend dix jours dans l'année, mais aussi parfois la moyenne des trente débits les plus bas de l'année. Gibrat propose d'introduire plutôt "décils" et "quartils". La bonne mesure de l'irrégularité du cours d'eau est bien évidemment pour lui l'inégalité de la distribution au sens du coefficient $C=100/a$. L'ajustement de la série présente l'énorme avantage de "*remplacer le traitement fastidieux de nombreux chiffres par des calculs mathématiques toujours plus élégants et plus rapides*" ce qui est "*très commode pour étudier l'utilisation industrielle d'un cours d'eau*". Mais tous les ajustements ne se valent pas, et Gibrat montre que les ajustements empiriques de formules de type parabolique que les ingénieurs ont proposé avant lui n'ont ni la précision ni la fécondité de sa loi de l'effet proportionnel. Car non seulement la formule ajustée permet une dérivation immédiate des principales caractéristiques statistiques (mode, moyenne, médiane...) et industrielles (débits moyens industriels, coefficients d'utilisation), mais elle fournit une explication causale des débits comme sommes d'une série de corrections aléatoires dq proportionnelles au débit déjà atteint $q-q_0$. Si les débits d'un cours d'eau suivent la loi log-normale, c'est évidemment que la pluviométrie des bassins versants qui les alimentent suit aussi cette loi : Gibrat montre effectivement, sur l'exemple de moyennes mensuelles de relevés faits à Cahors sur 80 ans[46], que c'est le cas, et que cet ajustement représente un progrès par rapport aux tentatives faites à l'*Office national météorologique* par Montessus de Ballore, d'y ajuster deux demi courbes normales. Il montre aussi que la distribution des 80 moyennes annuelles n'est plus log-normale mais normale, ce qu'il n'interprète pas par le théorème central limite, mais comme une approximation de la vrai loi log-normale pour une valeur faible de la variabilité.

Dernier atout enfin de la formule, elle permet des prévisions, en particulier pour les crues exceptionnelles, ce qu'une observation statistique directe des maxima annuels (méthode de Füller) ne permet pas. En se fondant uniquement sur un lien empirique entre débit de crue maximum et maximum annuel moyen sur quelques dizaines d'années, on sous-estime fortement le risque de crue. Et Gibrat remarque qu'entre un risque de destruction de l'ouvrage sous évalué et un coût des évacuateurs de crues surévalué, il faut arbitrer plus précisément qu'il n'est fait dans la pratique, où "*le degré de sécurité des ouvrages varie sans raison apparente dans des proportions fantastiques.*" La loi de l'effet proportionnel permet cet arbitrage, puisqu'elle donne précisément la probabilité d'un débit instantané (quotidien) supérieur à une valeur donnée. Il reste par la formule de Poisson à donner pour 100 ans donc n=36500 la probabilité que cet événement survienne 1 fois, 2 fois ou plus. Ce calcul lui permet même de ridiculiser la directive ministérielle qui fixe le débit maximum à évacuer au barrage de Sarrans (alors en projet) à 2400 m^3 : cette valeur donne à l'ouvrage une durée probable de 15000 ans, une probabilité que cette crue se produise dans le siècle d'à peine 7 pour mille, et une valeur actualisée du coût de la catastrophe de un pour mille soit une prime d'assurance inférieure à 2000F. Ces valeurs sont ridiculement faibles et devraient conduire à réviser à la baisse la spécification[47].

---

[46] Gibrat retrouve sur ces données un cycle d'une trentaine d'années correspondant à la loi de Brückner (*Archives des Sciences physiques et naturelles,* Genève, 1888) pour les climats.

[47] Les travaux de E.J. Gumbel sur la statistique des extrêmes en 1933-1935 s'appuient sur les recherches de P. Levy et M. Fréchet sur les lois stables et trouvent des applications hydrologiques sur la prévision des crues et des étiages qui prolongent les découvertes de Gibrat. (Voir l'article de Sébastien Hertz, Matapli, janvier 1995).

On voit bien par cet exemple comment la loi de l'effet proportionnel devient un outil d'une politique de travaux publics qui doit arbitrer entre risque majeur et coût des ouvrages. D'ailleurs Gibrat fournit pour finir une abaque donnant pour diverses valeurs de la caractéristique a du débit le débit maximum à prévoir pour une période T à choisir. Une autre indication de l'industrialisation de la méthode est l'apparition des papiers gausso-logarithmiques. Nous n'avons pu établir la date de leur apparition commerciale. Mais on trouve dans le *JSSP* de 1937 un court article de J. d'Harcourt présentant trois applications utiles aux électriciens de la loi de Gibrat pour lesquelles un tel papier est utilisé (qu'il désigne par "quadrillage spécial"). Aussi bien dans la fin de l'article de Gibrat dans la *Revue Générale d'Electricité* que dans cet article du *JSSP*, on voit se dessiner un dernier avantage de la loi log-normale qui est de permettre la mise en équivalence d'arguments techniques et d'arguments économiques, et donc de se présenter comme un instrument de calcul économique aléatoire. Les trois applications industrielles de J. d'Harcourt concernent respectivement la loi des débits de la Truyère, la répartition de la consommation annuelle des abonnements d'éclairage domestiques, et la répartition des bénéfices des charges et offices, et l'auteur souligne l'importance de cette loi pour l'étude des tarifs de vente. Le transfert de technologie opéré par Gibrat dans le domaine technique ne nous a donc pas éloigné de notre souci des applications économiques du modèle linéaire. Nous y revenons par le biais d'un calcul économique particulier aux industries hydroélectriques dans lequel deux aléas distincts - l'un climatique donc naturel, l'autre économique donc social - président à la détermination de l'offre et de la consommation d'énergie.

Un des derniers prolongements de la "découverte de Gibrat" est d'ailleurs la modélisation et l'optimisation par Massé de ce marché particulier de l'énergie hydroélectrique qui le mènera dans les années 1940 à un renouvellement du calcul économique par la théorie de l'espérance marginale. Pierre Massé a raconté dans son autobiographie[48] les circonstances dans lesquelles il a fait cette découverte. Après un passage au Cabinet de Monzie, Ministre des TP, cet ingénieur X-Ponts entre en 1927 dans une société hydroélectrique suisse pour mettre au point la transformation de lacs en réservoirs, et devient assez vite le chef du département hydroélectrique de l'Union d'Electricité. En 1939, la nécessité d'économiser le charbon, le conduit à rechercher un optimum économique fondé sur une équivalence entre l'économie immédiate d'un déstockage et l'économie future et incertaine de déstockages ultérieurs. A l'exode de mai 1940, il se retrouve dans le massif central avec Halphen et Gibrat, qu'il a connu "sur la Truyère" : "*Yvonne Paraf, notre amie, qui avait quitté Paris avec nous, travaille le matin avec Gibrat, et m'aide l'après-midi à vérifier et transcrire sur du papier quadrillé l'algorithme, apparu dans un éclair, de la régulation par les réservoirs".*[49]"C'est le début de ce que Massé appelle "sa rencontre avec l'aléa" et dont on voit la part qu'y joue Robert Gibrat. L'objectif étant "*d'égaliser autant que possible l'utilité marginale attachée à l'eau destockée et l'espérance marginale attachée à l'eau gardée en réserve*", la difficulté est que cette espérance dépend des aléas naturels mais aussi des décisions futures inconnues ; l'algorithme en question consiste donc à définir une règle conditionnelle (ou stratégie) fondée sur un optimum, puis à déterminer, en remontant le cours du temps, une chaîne d'espérances optimales liées entre elles. Il ne reste alors qu'à démontrer la convergence de ces itérations. Cette méthode de programmation dynamique aléatoire, était décrite et exploitée dans l'*Annuaire hydrologique pour 1940* (publié en 1943) et dans le *JSSP* de 1944[50]. Elle est aujourd'hui considérée comme une technique de recherche opérationnelle, et une forme primitive du principe d'optimalité de Richard Bellman[51]. L'article du *JSSP* considère que la loi des débits de Gibrat est le point de départ de

---

[48] P. MASSE, *Aléas et Progrès. Entre Candide et Cassandre*, Paris, Economica, 1984.

[49] P. MASSE, *op. cit.*, p.55.

[50] P. MASSE, "Application dse probabilités en chaîne à l'hydrologie statistique et au jeu des réservoirs", *Journal de la Société de Statistique de Paris*, 1944, p.204-219.

[51] Voir l'adresse présidentielle de K. Arrow le 27-12-1956 à "l'Econometric Society", *Econometrica*, oct, 1957.

l'hydrologie statistique sur laquelle peut se construire un calcul économique. Halphen est d'après lui responsable de la seconde étape en montrant que les logarithmes des débits mensuels suivent un processus discret gaussien (de type AR(1)) que l'on peut considérer comme une approximation d'un processus continu (dont Massé donne l'équation différentielle stochastique) qui n'est pas le processus réel des débits mais un "équivalent fictif". Les réservoirs saisonniers apparaissant comme des intégrateurs de débit, et leur gestion optimale repose donc en partie sur la caractérisation de ces débits par une loi de Gibrat-Halphen. La loi de l'effet proportionnel peut donc être considérée comme le chaînon fondamental entre une statistique descriptive et statique interprétée comme simple résumé d'une suite nombreuse de mesures, et une modélisation dynamique et stochastique des événements qui réintroduit à la fois le principe de l'aléa et celui de la dépendance intertemporelle. Abandonnant cette lignée de travaux hydroélectriques au seuil des méthodes pratiques de calcul optimal développées par Massé dans la suite de son article, nous noterons pour finir que ce futur Directeur d'EDF fut aussi Commissaire au Plan de 1956 à 1966. Dès 1946, il développe une méthodologie analogue pour la régulation des flux et stocks de la macro-économie, et la planification des politiques économiques, dans un livre dont le seul titre évoque ce que ces notions doivent à la gestion des réservoirs d'énergie hydroélectrique, et dont la première phrase est : *"C'est par la mise en réserve que l'homme se libère du hasard".* Au bout du chemin ouvert par Gibrat, et que Massé emprunte beaucoup plus loin, il y a donc une seconde révolution probabiliste dans laquelle l'aléa n'est plus seulement l'erreur de nos mesures ou l'imprécision de notre connaissance, mais devient constitutif des phénomènes naturels (*aléas du premier degré*) et des décisions elles-mêmes (*aléas du second degré*) :

> *"Le caractère aléatoire des processus économiques tient à la nature des choses. Il ne provient pas seulement de notre ignorance des données, et ne serait pas éliminé par le développement des informations. Le déroulement de la vie agricole, industrielle, financière, comporte des incertitudes fondamentales tenant à l'aléa des pluies, des températures, des saisons et des récoltes, aux accidents politiques et sociaux, aux caprices imprévisibles du goût, à l'instabilité des destins humains. Le nez de Cléopâtre, s'il eut été plus court, toute la face de la terre aurait été changée".*[52]

Cette nouvelle reconnaissance d'un aléa économique rompt bien sûr avec l'anti probabilisme de la plupart des statistiques économiques d'avant 1920, mais aussi avec une statistique mathématique postérieure à 1930 qui use du calcul des probabilités comme base de la statistique inférentielle, mais pas comme d'un modèle possible des phénomènes eux-mêmes. Massé transpose donc son analyse marginale aléatoire des problèmes de régulation des ressources hydroélectriques à ceux qui concernent les ressources économiques. La méthode, combinant calcul à la marge et espérance mathématique, devient l'instrument d'optimisation des flux et des stocks d'une économie, où les produits et les revenus remplacent les rivières, et l'épargne prend le rôle des réservoirs. L'analogie développée depuis longtemps par les économistes entre système économique et modèles réduits hydrostatiques - que l'on pense par exemple aux machines hydrauliques qui figurent en face de chaque système d'équations dans la thèse d' Irvin Fisher (1890) - se précise et se prolonge sous une forme dynamique, et permet de déborder les questions de l'équilibre statique, pour exploiter "des entreprises d'arbitrage dans le temps" selon une formule de Massé. Si le problème de la régulation naît de ressources naturelles aléatoires et de besoins sociaux déterminés, il est une seconde catégorie d'aléas dit Massé *"où les ressources sont déterminées et les besoins aléatoires : c'est le cas des assurances, dont le fonds de risque est alimenté par des primes déterminées et doit faire face au règlement de sinistres imprévisibles. Ainsi la régulation proprement dite et l'assurance se déduisent l'une de l'autre*

[52] P. MASSE, *op. cit.*, p.12.

en inversant le sens des flux. Elles ne s'excluent d'ailleurs pas, le hasard pouvant intervenir à la fois dans la ressource et dans la dépense, à l'entrée et à la sortie de la réserve : c'est le cas de l'épargne; c'est aussi celui d'une usine-barrage qui doit régulariser la production d'un ensemble d'usines au fil de l'eau aménagées sur d'autres rivières."

En réintroduisant le schéma de Kapteyn comme explication de la formation d'une grandeur économique aussi fondamentale que le revenu, Gibrat introduit dans les raisonnements des économistes un *principe ergodique* qui peut les réconcilier avec l'aléa, et que Massé place au centre de ses recherches. Celui-ci affirme que "l'effacement des conditions initiales par la répétition du hasard conduit, et conduit seul, à des lois universelles" - comme la loi de l'effet proportionnel - et se trouve réaffirmé dans des travaux contemporains de Maurice Fréchet. Par son souci d'un double ancrage - empirique et ergodique - de son modèle de distribution, Gibrat est bien un précurseur important de l'économétrie. Ses chroniques régulières dans la revue du CPEE et son rôle important dans le mouvement X-Crise le confirment. En entrant un peu plus dans les contenus, nous avons donné une idée de l'importance des échanges et traductions entre les champs mathématiques, économiques, et industriels, qui sont mis en œuvres autour de l'idée simple d'effet proportionnel . La force de cette idée simple n'est pas dans les deux lignes qui donnent la syntaxe mathématique du modèle, mais dans la multiplicité des éléments sémantiques et pragmatiques qui lui sont associés, et permet de mieux comprendre pourquoi la catégorie très étroite des ingénieurs économistes pouvait seule être à même de gérer un réseau d'associations aussi vaste.

ÉPILOGUE

Deux modèles statistiques de la distribution des revenus sont apparus dans le contexte de l'économie statistique puis des débuts de l'économétrie comme susceptibles d'ajuster des distributions empiriques de façons rivales. Jusque vers 1930 la courbe de Pareto semble en effet jouir de propriétés plus intéressantes que les fonctions plus complexes ajustées par la méthode des moments, sans pour autant trouver davantage de justification théorique. En 1930, la loi de Gibrat semble le seul modèle fondé sur un schème probabiliste. Celui-ci est d'ailleurs plusieurs fois critiqué et amendé. Kalecki par exemple remarque dans un article de l'après-guerre[53] que le processus défini par la relation $X_j = X_{j-1}(1+\varepsilon_j)$ qu'illustre la machine de Kapteyn n'est pas stationnaire, au sens où la variance de X_j augmente continûment avec j, ce qui ne rend pas compte de manière réaliste des distributions économiques, comme celle des revenus, dont la variance empirique est a peu près stable dans le temps. Il propose donc de modifier la seconde des hypothèses du modèle, à savoir l'indépendance des causes, et de supposer que la modification $y_j = log(1+\varepsilon_j)$ est négativement corrélée avec $Y_j = logX_j$. Cette corrélation est déterminée dans les deux cas d'une stabilité parfaite de la variance ou d'une légère évolution due soit à des chocs aléatoires, soit à des contraintes économiques. Il en résultera dans les deux cas une loi de Gibrat transformée pour laquelle Y_n est encore normalement distribuée.

Après 1930, la loi de Pareto va recevoir elle aussi une interprétation probabiliste. Après la démonstration due à Lindeberg[54] du théorème central limite pour des variables

[53] M. KALECKI, "On the Gibrat distribution", *Econometrica*, 13, 1945, p.161-170.

[54] J.W. LINDEBERG, "Eineneue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitrechnung", *Mathematische Zeitschrift*, vol. 15, 1922, p.211-225.

identiquement distribuées ayant une variance finie, Paul Levy[55] en a donné une seconde démonstration au moyen de la fonction caractéristique de Cauchy, qu'il a précisée au cours d'une controverse avec Maurice Fréchet sur l'additivité des effets partiels[56]. Mais surtout, Paul Levy a pour la première fois développé une théorie générale de l'addition des variables aléatoires, qui dépasse l'univers normal, et qui introduit l'idée plus générale des lois stables, c'est-à-dire de lois invariantes pour la somme et la moyenne[57], dont la loi normale, la loi de Cauchy et la loi de Pareto sont des cas particuliers. Paul Levy a démontré que toute loi stable - la loi normale faisant maintenant figure de seule exception - est asymptotiquement paretienne, dans le sens où $P(X > x) \xrightarrow{x \to \infty} Cx^{-\alpha}$. C'est pour finir, son élève Benoît Mandelbrot, qui dans les années 1960, redonne une jeunesse économique à la loi de Pareto. Il considère ces lois asymptotiquement paretiennes (qu'il baptise lois de Pareto-Levy) comme particulièrement adaptées à la distribution des agrégats économiques, en étant invariantes dans l'addition et dans la combinaison linéaire, mais aussi dans l'opération maximum. Daniel Zadjenweber, lui-même disciple de Mandelbrot, montre[58] que les conditions de convergences des lois stables sans variance (démontrées par Gnedenko) sont plus conformes à certains mécanismes économiques que le théorème de Laplace : un agrégat peut être le résultat d'une composante aléatoire qui domine les autres et que l'on peut donc considérer comme causale. De plus, Rao a étendu encore l'usage possible de ces lois en économétrie, en montrant en 1949 que la condition nécessaire et suffisante pour que la régression d'une variable $X_1=aX+T$ sur une variable $X_2=bX+Z$ soit linéaire est plus large que la normalité : il faut et il suffit que X et Z soient des lois stables avec $1<\alpha<2$. Mandelbrot lui-même a d'abord appliqué cette théorie des lois paretiennes aux distributions de revenus dans des travaux menés à partir de 1957[59]. Sa première étude proposait une modélisation de la répartition instantanée du revenu par une loi de Pareto-Levy qui pouvait s'interpréter comme somme de plusieurs composantes. Sous cette forme statique, la loi "faible" de Pareto retrouvait donc une justification génétique qu'elle n'avait jamais eu. Dans la seconde étude, reprenant en les renforçant des hypothèses stochastiques proposées par Champernowne (1953) - un processus markovien des logarithmes du revenu[60] avec indépendance des taux de variation par rapport au niveau du revenu -, Mandelbrot se donne un modèle dynamique de la formation des revenus sous forme d'un processus de diffusion. Une autre modification des conditions de Champernowne menait cependant Sargan (1957), et Mandelbrot (1960) à une distribution de type log-normale. Les ajustements concurrents de Pareto et Gibrat recevaient donc une nouvelle interprétation dans le double cadre théorique des lois stables et des processus.

---

[55] Paul Levy (1886-1971) reçu second à Polytechnique et premier à Normale a choisi la première et y a fait ensuite l'essentiel de sa carrière comme examinateur puis professeur d'analyse, de 1913 à 1959. Son intérêt pour le calcul des probabilités date de 1919 : *"Carvallo, le directeur des études lui ademandé de faire trois conférences sur les probabilités et de les rédiger. Il accepta avec enthousiasme. Il regarda la littérature qui existait sur le sujet, trouva qu'elle était assez importante, mais qu'elle ne contenait pas grand chose. Il écrivit à sa femme : "les probabilités sont au fond à peu près inexistantes; j'ai deux mois pour les rédiger; ce n'est pas assez pour avoir le temps de lire cette littérature, mais c'est largement assez pour avoir le temps de tout retrouver". Et c'est en effet à peu près ce qu'il fit"* (L. Schwartz, *Asterisque*, 157-158, 1988, p.19).

[56] P. LEVY, *Calcul des probabilités*, Paris, Gauthier-Villars, 1925 ; cf *Bulletin des Sciences Mathématiques*, mai 1928 et janvier 1929. *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Paris, Gauthier-Villars, 1937 ; 2ème ed. 1954.

[57] Une loi est stable si sa fonction caractéristique (x) est de la forme :

$$Log\varphi(x) = i\delta x - \gamma|x|^{\alpha}\left[1 + i\beta\frac{x}{|x|}\tan\frac{\alpha\pi}{2}\right] \text{ avec } 0 < \alpha \leq 2, \quad -1 \leq \beta \leq 1, \quad \gamma \geq 0$$

[58] D. ZAJDENWEBER, *Hasard et Prévision*, Paris, Economica, 1976.

[59] B. MANDELBROT, "The Pareto-Levy law and the distribution of income", *International Economic Review*, vol 4., 1960, Janvier, p.79-106. "Stable paretian random functions and the multiplicative variation of income", *Econometrica*, vol. 29, 1961, n°4, p.517-543. (*"dédié à mon maître, Monsieur Paul Lévy"*).

[60] Ce que Champernowne appelait "income power" et Fréchet "fortune morale" en souvenir de Bernoulli.

Notons encore que les lois stables paretiennes ont été utilisées par Mandelbrot et ses élèves (Fama, Zadjenweber) pour la modélisation des marchés spéculatifs, en modifiant la théorie du mouvement brownien due à Louis Bachelier, pour mieux tenir compte des valeurs extrêmes.

En dehors des interprétations en terme de processus, la loi log-normale a été l'objet après-guerre de nombreux travaux sur les techniques d'estimation. Nous devons signaler deux extensions importantes de son usage. A la suite des publications de Gibrat, le modèle log-normal a servi de point de départ à un renouvellement de l'analyse des lois d'Engel[61]. Le second prolongement est constitué par l'analyse des *probits* et *logits*. Développée d'abord par Gaddum (1933) et Bliss (1934) avant d'être systématisée par Finney (1952), la méthode permet d'analyser des réponses qualitatives et même binaires (Oui/Non) à un stimulus quantitatif, selon un modèle simple qui suppose que la réponse est oui quand un certain seuil est dépassé. Si la répartition de ce seuil dans la population est log-normale, on a une filiation évidente avec la loi de Gibrat. Le taux d'équipement des ménages en un certain bien durable a été modélisé de cette façon en France par Christian Rault[62]. Michel Fansten a développé dans les années 1970 une théorie mathématique de l'opinion[63], lui permettant d'analyser les questionnaires de conjoncture auprès des chefs d'entreprise, dans laquelle l'opinion (favorable/défavorable) apparaît comme une réponse qualitative fondée sur des indicateurs économiques (prix, chiffres d'affaires...) distribués log-normalement.

Mais ces prolongements, rapidement évoqués pour faire le lien avec des problématiques contemporaines, sortent largement de notre période d'étude, bornée aux années 1940. La loi de Gibrat s'est révélée être pour cette période un thème carrefour des questions de la statistique économique : lien entre distribution des revenus et distribution normale des capacités, utilisation des théorèmes limites, comparaison des différentes méthodes d'interpolation, mesure de l'inégalité par un résumé lié à cet ajustement, avantages à disposer d'un "modèle" mais difficultés de l'interprétation de ses termes, évaluation et interprétation des écarts entre modèle et observations. Tous les thèmes d'une transition entre statistique économique et économétrie sont là.

BIBLIOGRAPHIE

AITCHISON J. and BROWN J.A.C., *The Lognormal Distribution,* Cambridge, Cambridge University Press, 1957.

AMMON O., 1900 (1895), *Die Gesellschaftsordnung und ihre natürlichen Grundlagen*, Jena, 1895 ; traduction française par H. Muffang, *l'ordre social et ses bases naturelles*, Paris, A. Fontemoing, 1900.

ARMATTE M., *Histoire du modèle linéaire. Formes et usages en statistique et en économétrie jusqu'en 1945*, Thèse de doctorat, Paris, EHESS, 1995.

ARNOLD B.C., *Pareto distributions*, Fairland (Maryland), Internat. Cooperative Publishing House, 1983.

BARBUT M., "Distributions de type paretien et représentations des inégalités", *Math. Inf. Sci. hum.*, n°106, 1989, p.53-69.

---

[61] Voir AITCHISON et BROWN, *op. cit.*, chap. 12, et le chapitre 10 de notre thèse.

[62] C. RAULT, "Etude économétrique de la possession d'un ensemble de biens durables de consommation", *Annales de l'INSEE*, n°1, mai 1969.

[63] M. FANSTEN, "Introduction à une théorie mathématique de l'opinion", *Annales de l'INSEE*, n°21, 1976, p.3-55.

BOWLEY A.L. (1901), *Elements of Statistics*, London, King and Son. 2ème ed 1902, 335 p.; 4ème ed. 1920, 454 p.; Traduction française sur la 5ème edition par L. Suret et G. Lutfalla, 1929.
DIVISIA F., 1932, "Economique et Statistique. A propos d'un livre récent", *Revue d'Economie Politique*, Sept-Oct. 1932, p. 1457-1495. Extraits dans *Bulletin X-Crise*, 14-15, 1933-34.
DURAND J.M. "Robert Gibrat. 1904-1980", *Journal de la Société de Statistique de Paris*, 1980.
EDGEWORTH F.Y. et BOWLEY A.L., 1902, "Methods of representing statistics of wages and other groups not fulfilling the normal law of error", *Journal of the Royal Statistical Society*, 65, p.325-354.
EDGEWORTH F.Y., 1898-1900, "On the representation of statistics by mathematical formulae", *Journal of the Royal Statistical Society*, 61, p.671-700 ; 62, p.125-140, 373-385, 534-555 ; 63 (Suppl.), p.72-81.
FANSTEN M., "Introduction à une théorie mathématique de l'opinion", *Annales de l'INSEE,* n°21, 1976, p.3-55.
FRECHET M., "Une nouvelle représentation analytique de la répartition des revenus, *Bulletin de l'Institut International de Statistique*, tome XXII, fasc. 3, 1917.
FRECHET M., "Sur les formules de répartition des revenus", *Revue de l'Institut International de Statistique*, n°3, 1939.
FRECHET M.et HALBWACHS M., *Le calcul des probabilités à la portée de tous*, Paris, Dunod, 1924.
GALTON F., "The geometric mean in vital and social statistics", *Proceedings of the Royal Society of London*, 29, 1879, p.365-367.
GIBRAT R., 1930, "Une loi des répartitions économiques : l'effet proportionnel", *Bulletin de la Statistique Générale de la France*, 1929-30, p.469-514.
GIBRAT R., "Les inégalités économiques", *Revue industrielle des Mines,* Saint-Etienne, 15 juillet 1931.
GIBRAT R., *Les inégalités économiques,* Thèse en Droit de l'Université de Lyon soutenue le 28 janvier 1931, Paris, Sirey, 296 p.
GIBRAT R., "Aménagement hydroélectrique des cours d'eau: statistique mathématique et calcul des probabilités", *Revue générale d'électricité*, Octobre 1932, p.493-501 et 525-532.
GIBRAT R., "La loi de l'effet proportionnel", *Compte-Rendus de l'Académie des Sciences*, pour 1932, p.843-845 ; présenté par E. Jouguet le 7 mars 1932.
GIBRAT R. "Sur l'ajustement mathématique des courbes de débits d'un cours d'eau", *Compte-Rendus de l'Académie des Sciences*, 7 mars 1932., T. CXCIV, p.843-845.
GIBRAT R., "Notes sur l'économétrie", *Bulletin CPEE / X-Crise*, n° 17-32, 1934-1937.
GIBRAT R., *L'énergie des marées,* Paris, *Presses Universitaires de France*, 1966.
HARCOURT (d') J., "La loi de l'effet proportionnel", *Journal de la Société Statistique de Paris*, 1937, p.249-253.
JORDAN C., *Statistique Mathématique*, Paris, Gauthier Villars, 1927, 340 p.
KALECKI M., "On the Gibrat distribution", *Econometrica*, 13, 1945, p.161-170.
KAPTEYN J.C., *Skew Frequency Curves in Biology and Statistics,* Astronomical Laboratory, Groningen, 1903.
LEROY-BEAULIEU, *Essai sur la répartition des richesses et sur la tendance à une moindre inégalité des conditions*, 4ème édition, 1896, Guillaumin.
LEVY P.,*Calcul des probabilités,* Paris, Gauthier-Villars, 1925.
LEVY P., "Compte rendu des *Inégalités économiques* de R. Gibrat, *Bulletin des Sciences Mathématiques.*, 1932.
LEVY P., 1937, *Théorie de l'addition des variables aléatoires,* Paris, Gauthier-Villars. 2è ed. 1954.
LIESSE A., 1905, *La Statistique. Ses difficultés. Ses procédés. Ses résultats*, Paris, Guillaumin et Alcan, 1905 ; 2ème édition 1912 ; 3ème ed. 1919 ; 4ème ed. 1933.

MAC ALISTER D., "The law of geometric mean", *Proceedings of the Royal Society of London*, 29, 1879, p.367-375.
MANDELBROT B., "The Pareto-Levy law and the distribution of income", *International Economic Review*, vol 4., Janvier 1960, p.79-106.
MANDELBROT B., "Stable paretian random functions and the multiplicative variation of income", *Econometrica*, vol. 29, n° 4, 1961, p.517-543
MANSFIELD E., "Gibrat's Law, innovation and the growth of firms", *American Economic Review*, 1962, p.1022
MANSFIELD E., "Gibrat Robert René Louis", *Palgrave Dictionary of Economics* , 1987.
MARCH L., "Salaires, quelques exemples de leur distribution", *Journal de la Société de Statistique de Paris*, 1898, p.193-206 et 241-248.
MASSE P., "Application des probabilités en chaîne à l'hydrologie statistique et au jeu des réservoirs", *Journal de la Société de Statistique de Paris*, 1944, p.204-219.
MASSE P., *Les réserves et la régulation de l'avenir dans la vie économique*, Paris, Hermann, 2 vol, 1946.
MASSE P., "Aléas et progrès. Entre Candide et Cassandre", *Economica*, Paris, 1984.
MOURRE C. (Baron), "Des variations de l'inégalité des revenus et du revenu moyen", *Journal de la Société de Statistique de Paris*, 1922, p.215.
MOURRE C. (Baron), "La courbe des revenus", *Journal de la Société de Statistique de Paris*, 1929, p.285.
PARETO V., "La legge della demanda", *Giornale degli Economisti*, janvier 1895.
PARETO V., 1897 (1964), "Cours d'Economie Politique", Lausanne, F.Rouge et Paris, F.Pichon; *Œuvres Complètes*, Dir. Giovanni Busino, Tome 1, Genève, Droz.
PEARSON K., 1895 "Skew variation in homogeneous material. (Contribution to the mathematical theory of evolution II)", *Phil.Trans.of the Royal Society*, 186A, p.343-414.
RAULT C., "Etude économétrique de la possession d'un ensemble de biens durables de consommation", *Annales de l'INSEE*, n°1, mai 1969.
RISSER R., 1935-1937, "Les principes de la statistique mathématique", *Journal de la Société de Statistique de Paris,* 1935, p.281-315 ; 1936, p.337 ; 1937, p.40.
SEAILLES J., *La répartition des fortunes d'après les statistiques successorales en France*, Thèse, Paris, 1909.
ZAJDENWEBER D., "Hasard et prévision", *Economica*, Paris, 1976.