MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

MARC BAILLEUL
RÉGIS GRAS

L'implication statistique entre variables modales

Mathématiques et sciences humaines, tome 128 (1994), p. 41-57
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1994__128__41_0>

Math. Inf. Sci. hum. (32e année, n°128, *1994*, pp.41-57)

L'IMPLICATION STATISTIQUE ENTRE VARIABLES MODALES

Marc BAILLEUL et Régis GRAS[1]

RÉSUMÉ — *L'implication statistique, selon R.Gras, permet d'associer à un ensemble de variables binaires ou fréquentielles un préordre représentable par un graphe non symétrique et par une hiérarchie ascendante. L'analyse d'un questionnaire à modalités totalement ordonnées nous contraint, pour conserver l'information maximale, à étendre cette notion à des variables modales et, par suite et a fortiori, à des variables ordinales qui s'y ramènent. A la suite de cette construction, on examine les contributions d'individus ou de catégories de sujets à certains chemins du graphe ou à certaines classes de la hiérarchie. Une nouvelle catégorisation des individus en découle, induite par des comportements comparables à l'égard de ces variables modales.*

SUMMARY — Statistical implication between modal variables
If we refer to the research carried out by R.Gras, the statistical implication allows to combine a representable pre-order with a set of binary variables by means of a non symetrical graph, using an ascending hierarchy. Analysing a questionnaire based on orderly displayed modalities means that we have to widen this very notion to modal variables, then, a fortiori to ordinal variables, if we want to keep the full meaning of the whole thing. Next, we go through the individual contributions from either individuals or classified subjects, pointing up either some branches of the graph or some classes appearing in the hierarchical organization. So that we can clearly get a new categorization of individuals inferred by behavior similar to those stemming from these modal variables.

INTRODUCTION

Nous avons présenté la notion d'implication statistique entre variables dans cette Revue [10] et mis en évidence son originalité par rapport :

* d'une part, aux méthodes d'analyses de données des ressemblances,
* d'autre part, aux approches récentes d'analyses non symétriques visant à rendre compte d'une inférence ou d'une inclusion.

Les premières sont basées sur des indices de similarité ou des distances et sont donc nécessairement symétriques. Les secondes, qui nous sont connues à l'heure actuelle[2], utilisent essentiellement la notion de probabilité conditionnelle et la relation de Bayes, permettant, le plus souvent, de faire des études simplement locales (liaison entre deux variables) et ne disposant pas d'un seuil d'acceptabilité de la relation mise en évidence.

Nous cherchons, au moyen de l'implication statistique, à structurer un ensemble de variables, de nature variée, en un graphe non symétrique, transitif et pondéré par des indices probabilistes, l'idée intuitive primitive et paradigmatique étant d'organiser un ensemble de

---

[1] Institut de Recherche Mathématique de Rennes, Campus de Beaulieu - 35042 RENNES CEDEX

[2] Citons, par exemple, J.LOEVINGER [15], E.DIDAY [6], J.PEARL [16], S.ACID et als [1], A.GAMMERMAN ET Z.LUO [7], J-.G.GANASCIA [8], S.AMARGER et als [3].

variables binaires, par la relation "si a alors b", sur la base d'observations de la relation dans une population de sujets ou d'objets. Cette structure peut être étendue à des classes de variables et conduire, comme dans les méthodes symétriques, à une hiérarchie ascendante.

Nous présenterons brièvement les principes de la méthode telle qu'elle s'est développée après la thèse de R.Gras [9], sous sa direction, à travers les propres thèses de A.Larher [12], S.AG Almouloud [2], A. Totohasina [18] et H. Ratsimba-Rajohn [17]. Puis, nous développerons les extensions de cette méthode à l'examen de la contribution des sujets à des classes de variables agrégées par un indice de cohésion implicative, toujours non symétrique, extensions au crédit de la thèse récente de M.Bailleul [4], en droite ligne des précédentes.

1. PRINCIPES GÉNÉRAUX DE L'IMPLICATION STATISTIQUE

1.1 Le cas paradigmatique : variables binaires

Un ensemble de variables binaires V étant donné, on examine les réalisations de ces variables sur une population E de sujets (ou d'objets). Intuitivement, si A (resp. B) représente dans E la sous-population vérifiant ou satisfaisant la variable a (resp. b), la qualité de l'implication a=>b sera d'autant meilleure que l'inclusion de A dans B sera proche de l'inclusion parfaite, eu égard aux tailles de A et B. Plus précisément, X et Y étant deux parties de E, choisies aléatoirement et indépendamment dans l'ensemble des parties de cardinaux respectivement égaux à ceux de A et B, si α est un seuil de probabilité :

DÉFINITION 1
a=>b est **admissible au niveau de confiance 1-α** si et seulement si

$$\Pr\left[card\left(X \cap \overline{Y}\right) \leq card\left(A \cap \overline{B}\right)\right] \leq \alpha$$

Notons n, n_a, $n_{\bar{b}}$, $n_{a\wedge\bar{b}}$, les cardinaux respectifs de E, A, $\overline{B}$, A $\cap$ $\overline{B}$. Il est démontré dans [14], que la variable aléatoire $card\left(X \cap \overline{Y}\right)$, réalisée à travers $n_{a\wedge\bar{b}}$, suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}$. Dans de bonnes conditions cardinales, la variable aléatoire centrée réduite :

$Q(a,\bar{b}) = (card(X \cap \overline{Y}) - n_a n_{\bar{b}}/n) \Big/ \sqrt{\frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}}$ suit approximativement la loi normale N(0,1).

Soit $q(a,\bar{b})$ la réalisation de $Q(a,\bar{b})$ et $\varphi(a,\bar{b}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{q(a,\bar{b})}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$\cong$ 1-Pr[$Q(a,\bar{b}) \leq q(a,\bar{b})$].

DÉFINITION 2
Soit a et b deux variables binaires. On appelle **intensité d'implication** de a sur b le nombre $\varphi(a,\bar{b})$. L'implication a=>b est dite admissible au niveau α si et seulement si : $\varphi(a,\bar{b}) \geq 1-\alpha$.

Dans la pratique, on retient généralement le niveau de confiance 0,95, mais ce niveau peut être modifié en fonction des conditions expérimentales.

On démontre aisément que si $n_a \leq n_b$, alors $\varphi(a,\bar{b}) \geq \varphi(b,\bar{a})$, résultat conforme avec l'intuition. De plus, on établit dans [10], les relations existant entre le χ^2 d'indépendance, le coefficient de corrélation linéaire et le paramètre $q(a,\bar{b})$, relations qui prouvent la non-coïncidence des concepts.

1.2 Extension à d'autres variables

Une même interrogation sur l'implication entre variables peut être portée sur deux autres types :

* des variables numériques: par exemple, le nombre de fois où un certain caractère apparaît chez un sujet,

* des variables modales : par exemple, la valeur de vérité ou l'intensité d'un certain prédicat chez un sujet. Ce nombre de l'intervalle [0,1] peut aussi représenter une variable ordinale grâce à une segmentation discrète de l'intervalle. Cette situation est traitée dans la thèse de M.Bailleul [4] où il considère des degrés d'accord de sujets avec des propositions. Nous y reviendrons par la suite.

Un indice d'implication est défini sur ces variables, unifiées sous le vocable "fréquentielles" [10], et sa restriction aux variables binaires coïncide avec l'indice défini plus haut.

1.3 Implication entre classes de variables

Rendre compte d'une dynamique implicative, d'une sorte de flux implicatif, au sein d'un ensemble de variables, avec une approche permettant, comme pour des couples de variables, de conserver le plus significatif, le "presque vrai", est l'objectif de cette généralisation. Celle-ci doit intégrer les relations inter-variables et favoriser le regroupement, au sein d'une même classe, des variables les plus liées.

Deux concepts cherchent à satisfaire ces contraintes :

* la cohésion d'une classe de variables construite sur la notion d'entropie "implicative",

* l'intensité d'implication d'une classe sur une autre, prenant en compte la qualité de cohésion de chacune d'elles et une relation implicative extrémale entre elles.

Posons: $p = \max [\varphi(a,\bar{b}), \varphi(b,\bar{a})]$ et supposons $n_a \leq n_b$. L'entropie de l'expérience où peut ou non se réaliser l'événement $[Q(a,\bar{b}) \geq q(a,\bar{b})]$ est alors:

$$\mathfrak{I} = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p)$$

DÉFINITION 3

On appelle **cohésion de la classe** (a,b) le nombre : $c(a,b) = \sqrt{1-\mathfrak{I}^2}$ si $p > 0{,}5$ et $c(a,b)=0$ sinon.

Si $n_{a1} \leq \ldots \leq n_{ar}$, on appelle cohésion de la classe **A**= $(a_1, \ldots, a_r)$, la moyenne géométrique des classes à deux éléments ordonnés de A, à savoir:

$$C(\mathbf{A}) = [\prod c(a_i, a_j)]^{2/r(r-1)} \text{ pour } i \in \{1, \ldots, r-1\}, j \in \{2, \ldots, r\}, j>i.$$

Ainsi, la cohésion d'une classe croît avec l'absence de désordre implicatif entre ses éléments et ceci, d'autant plus que la classe est de grand effectif.

DÉFINITION 4

On appelle **implication de la classe** A de cardinal r **sur la classe B** de cardinal s le nombre:

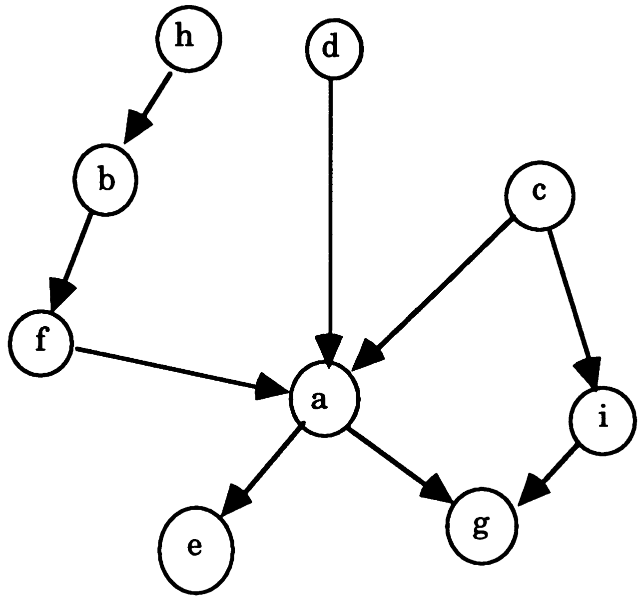
$$\Psi(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \{ \sup_{i \in \{1,\ldots,r\},\ j \in \{1,\ldots,s\}} \varphi(a_i, \bar{b}_j)\}^{rs} \times [C(\mathbf{A}) \times C(\mathbf{B})]^{1/2}$$

L'implication entre deux classes est donc d'autant plus forte que la cohésion de celles-ci (leur "crédibilité implicative") et leur liaison maximale sont elles-mêmes fortes , et que leurs effectifs sont faibles (car ils affectent la liaison maximale).

1.4 Les représentations graphiques associées

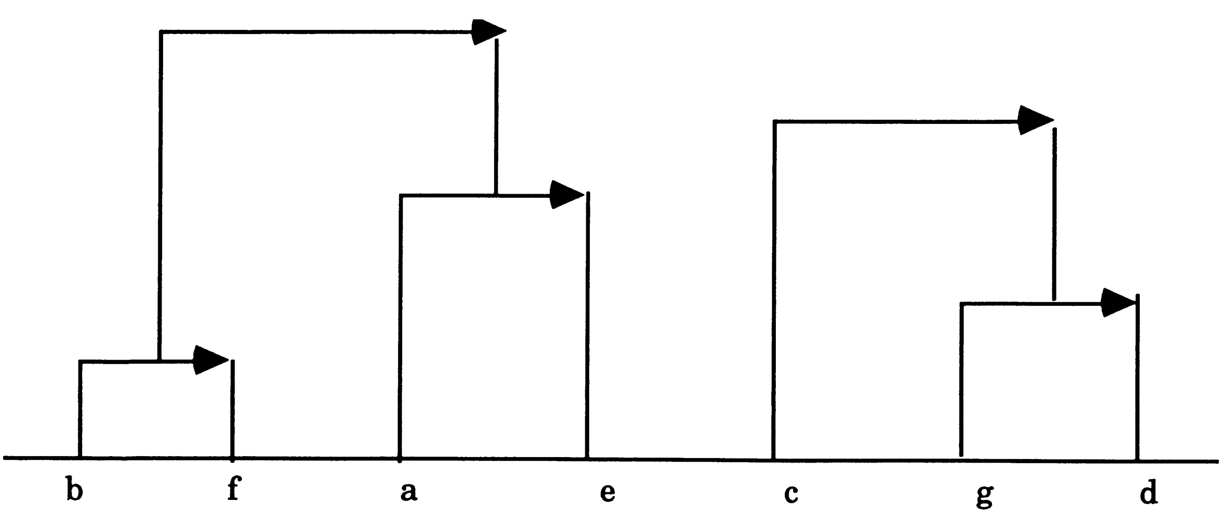
L'approche que nous avons adoptée pour définir une "quasi-implication" entre variables de l'ensemble V nous permet de munir V d'une structure de préordre partiel sous la condition d'admettre la transitivité à partir d'un seuil d'intensité d'implication pris en général égal à 0,5 (valeur indifférente par rapport à l'implication). On peut donc associer à ce préordre un *graphe transitif, non symétrique, pondéré par les intensités d'implication*, dont les noeuds sont les éléments de V et les arcs des flèches implicatives. Ce graphe est un très bon outil pour l'usager car il lui permet d'embrasser simultanément les sous-structures totalement ordonnées de la structure de V.

Exemple :



Remarque.
Si, au lieu de pondérer le graphe à l'aide des intensités d'implication, nous le faisons au moyen des cohésions des couples (origine, extrémité) de chaque arc, l'ensemble des arcs, fermetures transitives comprises, admet ses pondérations dans l'intervalle [0,1] .
Il est possible également de représenter selon une *hiérarchie ascendante* classique une autre structuration de V obtenue par l'examen de l'implication entre classes de variables. Cette hiérarchie se construit selon le critère de la cohésion des classes. Par exemple, au premier niveau se réunissent en une classe les deux variables dont la cohésion est maximale. Au niveau suivant, une classe à trois éléments se constitue selon ce même critère, à moins qu'une nouvelle classe à deux éléments n'y ait une meilleure cohésion. La classification s'arrête dès qu'il s'avère impossible de trouver une nouvelle classe de cohésion non nulle.

Exemple :



2. ÉLÉMENTS MAJEURS D'UN GRAPHE OU D'UN ARBRE IMPLICATIFS

Les notions qui suivent vont, d'une part, quantifier la significativité des représentations de la structure de l'ensemble des variables, et, d'autre part, faire le lit de la relation des sujets à ces représentations. Tous les concepts introduits conduisent à des algorithmes, programmés dans le logiciel C.H.I.C [5] qui permet d'effectuer tous les calculs et les représentations graphiques afférents.

2.1 Nœuds significatifs

Pour définir cette notion, nous procèderons comme I.-C.Lerman dans le cas de la ressemblance [13], à ceci près que nous considèrerons plutôt les couples que les paires de variables en raison de notre objectif de dissymétrisation poursuivi [17]. En effet, la cohésion calculée sur l'ensemble des classes de variables (a,b) telles que $n_a \leq n_b$ et $a \neq b$ (donc $c(b,a) \leq c(a,b)$), permet de définir sur cet ensemble une préordonnance Ω de graphe $G(\Omega)$ dans VxV. A chaque niveau de la hiérarchie implicative obtenue précédemment, on peut associer un indice signifiant un certain accord, une certaine résonance entre la partition de l'ensemble des variables relative à ce niveau et la préordonnance initiale. Cet indice est basé sur le nombre de couples déjà réunis et celui des couples séparés conformément à cette préordonnance. Il varie d'un niveau au suivant et sert de critère brut d'adéquation de la partition avec Ω. Précisons.

Soit Π_k la partition de V observée au niveau k de la hiérarchie implicative. Des couples sont réunis à ce $k^{ième}$ niveau et d'autres sont encore séparés. Notons $R\Pi_k$ et $S\Pi_k$ les ensembles respectifs correspondants. L'ensemble $G(\Omega) \cap [S\Pi_k \times R\Pi_k]$ contient les couples de couples qui, au niveau k, respectent la préordonnance initiale. Associons alors, comme nous le faisons pour card $(A \cap \bar{B})$, l'indice aléatoire card $\left[G(\Omega^*) \cap [S\Pi_k \times R\Pi_k]\right]$ où Ω^* est une préordonnance aléatoire dans l'ensemble l'ensemble uniformément réparti des préordonnances définissables sur V avec des propriétés cardinales comparables à celles de Ω. Cette variable aléatoire admet pour espérance 1/2 card $[S\Pi_k \times R\Pi_k]$ et pour écart-type $\left[\text{card } [S\Pi_k \times R\Pi_k] \text{ x card } G(\Omega)\right]^{1/2}$. L'indice centré et réduit $s(\Omega, k)$ correspondant varie d'un niveau à l'autre de façon non monotone et c'est lui qui est retenu comme critère de significativité d'un "bon ordre" de la hiérarchie au niveau k.

> DÉFINITION 5
> On appelle **niveau significatif** tout niveau de la hiérarchie correspondant à un maximum local de l'indice d'accord $s(\Omega, k)$ et Π_k est dite en **résonance** avec Ω.

Ce sont les niveaux significatifs que retiendra plus particulièrement l'utilisateur à des fins d'analyse attentive.

2.2. Chemin significatif du graphe implicatif -Puissance de ce chemin

A travers ces notions, nous voulons porter intérêt à la consistance d'un chemin du graphe défini dans le § 1.4. Nous savons que le graphe est, par construction, transitif puisque toute fermeture transitive admet une pondération égale à l'intensité d'implication au moins égale à 0,50 (cohésion ≥ 0). Par contre, la pondération de ses arcs peut être variable de 0,50 à 1,00.

> DÉFINITIONS 6
> Un chemin du graphe est dit **φ_0-significatif** si tous ses arcs simples sont pondérés par des intensités d'implication au moins égales à φ_0.
>
> **Le vecteur puissance d'un chemin de longueur r** (donc joignant r+1 sommets) est le vecteur de $[0,1]^r$ dont les composantes sont égales aux intensités d'implication successives de l'origine du chemin à son extrémité.

Ce sont les chemins significatifs qui, pour une valeur de φ_0 relativement élevée, par exemple 0,95, crédibiliseront l'analyse en termes de filiation implicative, même si rien ne garantit une bonne qualité des fermetures transitives à ce niveau [12].

Afin de quantifier la "rigidité" globale d'un chemin, on pourra associer à un chemin la moyenne géométrique des composantes de son vecteur puissance, donc de ses pondérations.

2.3 Vecteur puissance d'une classe

Supposons qu'une classe **C** de variables apparaisse à un niveau k de la hiérarchie implicative. Elle est le fruit d'agrégations successives de classes plus petites formées à des niveaux inférieurs et, en particulier, à l'agrégation de deux classes, **A** et **B** au niveau k-1, telles que **A=>B** au sens du § 1.3.

DÉFINITION 7

Le couple (a,b) tel que : $\forall\, i\in$ **A**, $\forall\, j\in$ **B** $\varphi(a,\bar{b})\geq \varphi(i,\bar{j})$ est appelé **couple générique** de **C** et le nombre $\varphi(a,\bar{b})$ est l'**intensité d'implication générique** de **C**.

Dans la formule de la définition 4, le couple (a,b) est celui qui conduit au sup. de la liaison implicative de **A** sur **B**. Mais, au cours de la genèse de **C**, d'autres sous-classes se sont formées, les classes **A** et **B** par exemple et d'autres antérieurement à elles, par l'agrégation de classes plus petites. A chaque niveau d'agrégation correspond donc, comme au niveau k, un couple générique porteur de la liaison maximale au sein de la classe constituée à ce niveau. Soit $g\leq k-1$ le nombre de couples génériques qui ont donc précédé le couple (a,b).

DÉFINITION 8

Le vecteur $(\varphi_1,\varphi_2,\ldots.,\varphi_g)$, élément de $[0,1]^g$, est appelé **vecteur puissance implicative** de **C.**

Ce vecteur est un élément de représentation que l'on attachera à la classe **C**.

Ces différentes images vectorielles des graphe et hiérarchie vont permettre d'introduire une métrique sur des espaces de représentation où les sujets - comme il est fait de façon duale en analyse factorielle des correspondances - pourront être projetés.

3. LA QUESTION DE LA CONTRIBUTION DES INDIVIDUS

L'approche probabiliste développée dans le paragraphe ci-dessus laisse apparaître l'absence de réponse au sujet de la "responsabilité" des individus dans l'apparition des phénomènes représentatifs obtenus (classes cohésitives ou chemins du graphe). En analyse factorielle des correspondances, le problème se résoud au moyen de la projection des variables supplémentaires ou des individus sur les plans factoriels des variables principales. En analyse hiérarchique des similarités, on calcule les contributions des individus ou des catégories d'individus à une partition choisie [13] . Un questionnement du même type "peut-on évaluer la part des individus dans les phénomènes implicatifs ?" est apparu fin 91, début 92 simultanément chez deux chercheurs, H. Ratsimba-Rajohn et M. Bailleul pour des variables binaires pour le premier et modales pour le second.

3.1 L'approche de H. Ratsimba-Rajohn

Cet auteur présente dans sa thèse [17], la notion de respect d'une implication entre variables binaires de la façon suivante :

- un individu x contredit l'implication entre deux variables α et β s'il a attribué à α la valeur 1 et à β la valeur 0, ou encore si la variable β n'est pas satisfaite par x alors que α l'est,

- l'individu respecte l'implication $\alpha \Rightarrow \beta$ s'il a attribué à β la valeur 1, quelle que soit la valeur attribuée à α,

- si x a attribué à α et à β la valeur 0, l'auteur "mesure" alors le respect de l'implication (vraie du strict point de vue de la logique binaire) par un nombre compris entre 0 et 1 qu'il fixe arbitrairement à 0,5, interprété comme un signe de neutralité par rapport à l'implication.

Une imprécision apparaît en ce qui concerne le respect de l'implication où deux comportements différents (attribution au couple (α,β) des valeurs (0,1) ou (1,1)) seront appréciés de la même façon.

3.2. Extension aux variables modales

Cette proposition, si on l'étend à des variables modales, conduit à un manque de finesse, voire à des incohérences. Examinons l'exemple suivant où x_1 , x_2 ,..., x_5 sont des sujets et a,b,...,f des variables.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
a => b	(0.33;0.66)	(1;1)	(0;0)	(0.66;0)	(1;0)
c => d	(0;1)	(1;1)	(0.33;0.33)	(0.33;0)	(1;0.33)
e => f	(1;1)	(0.33;1)	(0;0.33)	(1;0)	(1;0)

On voit ici que les individus x_1 , x_2 et x_3 ont globalement le même comportement par rapport aux trois implications (valeur attribuée à la première variable inférieure ou égale à celle qui est attribuée à la deuxième) et que les individus x_4 et x_5 ont l'attitude inverse. Ces comportements globalement identiques traduisent-ils néanmoins des intérêts, ou des désintérêts aussi marqués pour les trois relations implicatives ? On peut en douter en regardant les poids affectés par les individus aux différents items.

Pour lever l'ambiguïté, qui conduit, si on apprécie d'une seule et même façon le respect (ou la contradiction) de l'implication, lorsqu'on calcule les distances des individus à la classe formée des trois implications ci-dessus (cf. paragraphes suivants), à des valeurs égales pour ces distances relativement à x_1 , x_2 et x_3 d'une part, x_4 et x_5 d'autre part, malgré des réponses fort différentes, M. Bailleul [4] a procédé en deux temps :

– ordonner l'ensemble des couples de réponses possibles,
– lier la valeur qui mesure le respect ou la contradiction de l'implication à l'intensité de cette implication.

Cette stratégie a été féconde puisqu'elle a permis de lever l'ambiguïté relevée ci-dessus et d'intégrer le cas des variables binaires.

4. NOTION DE DEGRÉ D'ADHÉSION A UNE IMPLICATION

On se place par la suite dans le cas de variables modales où, si n est le nombre total de modalités qu'il est possible d'affecter à chaque variable, chacune d'entre elles se verra attribuer un poids variant de 1, la plus forte, à 0 par fraction de "$(\frac{1}{n-1})$ème".

On notera VAL l'ensemble des poids attribués ainsi aux variables.

$$VAL = \left\{ \frac{0}{n-1} , \frac{1}{n-1} , \ldots , \frac{n-2}{n-1} , \frac{n-1}{n-1} \right\}$$

4.1 Ordonner l'ensemble des couples de réponses ou de comportements

Nous allons, dans un premier temps, examiner un exemple, n = 4 , et proposer une méthode intuitive pour ordonner l'ensemble des couples de réponses ou attitudes possibles au regard d'une implication.

	a	b		
L'individu qui	1	0	écart maximum = 1	
attribue ces valeurs	1	0,33	écart = 2/3	**pour chaque valeur**
au couple (a,b)	0,66	0	écart = 2/3	**de l'écart, on fait décroître a**
contredit	0,66	0,33	écart = 1/3	de 1 à la valeur de
l'implication	0,66	0,33	écart = 1/3	cet écart
a => b	0,33	0	écart = 1/3	
	0	0	valeur de a = 0	
	0	0,33	valeur de a = 0	
L'individu qui	0	0,66	valeur de a = 0	**pour chaque valeur**
attribue ces valeurs	0	1	valeur de a = 0	**de a , on fait croître**
au couple (a,b)	0,33	0,33	valeur de a = 1/3	**l'écart**
adhère	0,33	0,66	valeur de a = 1/3	
à l'implication	0,33	1	valeur de a = 1/3	
a => b	0,66	0,66	valeur de a = 2/3	entre a et b
	0,66	1	valeur de a = 2/3	
	1	1	valeur de a = 1	

L'intuition, qui suit une logique "naturelle", décrite en langage naturel dans la colonne de droite de ce tableau, suit-elle aussi une certaine logique mathématique ? En d'autres termes, peut-on algorithmiser cette "logique naturelle" ?

– Les couples (a,b) vérifiant :

$$a = \frac{n - j}{n - 1} \quad ; \quad b = \frac{i - j}{n - 1}$$

où i est un entier naturel variant de 1 à n – 1 , j étant un entier naturel variant de 1 à i , contredisent l'implication a => b .

– Le rang du couple $\left(\frac{n-j}{n-1}, \frac{i-j}{n-1}\right)$ est $\left(\sum_{k=1}^{i-1} k\right) + j$, c'est-à-dire $\frac{i\,(i-1)}{2} + j$.

– Les couples (a,b) vérifiant :

$$a = \frac{n - i}{n - 1} \quad ; \quad b = \frac{n - i + j}{n - 1}$$

où i est un entier décroissant de n à 1 avec un pas de (– 1), j étant un entier variant de 0 à i – 1, adhèrent à l'implication a => b .

– Le rang du couple $\left(\frac{n-j}{n-1}, \frac{n-i+j}{n-1}\right)$ est

$$\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n-1} k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)} - \left(\sum_{k=1}^{i} k\right) + j + 1$$

c'est-à-dire $$n^2 - \frac{i\,(i+1)}{2} + j + 1$$

Remarque 1

Le nombre de cas de contradiction de l'implication a => b est $\left(\sum_{k=1}^{n-1} k \right) \left(= \frac{n(n-1)}{2} \right)$

le nombre de cas d'adhésion à l'implication a => b est $\left(\sum_{k=1}^{n} k \right) \left(= \frac{n(n+1)}{2} \right)$.

On retrouve bien le nombre total de couples de valeurs possibles n^2.

Remarque 2
Le cas des variables binaires n'est qu'un cas particulier de ce cas général.
Vérifions-le. Pour les variables binaires, on a n = 2.

i = 1 ; j = 1	(a,b) = (1,0)	rang 1 contradiction de a => b
i = 2 ; j = 0	(a,b) = (0,0)	rang 2 position neutre
i = 2 ; j = 1	(a,b) = (0,1)	rang 3 adhésion à a => b
i = 1 ; j = 0	(a,b) = (1,1)	rang 4 adhésion maximale

Cet ordre sur l'ensemble des couples de valeurs qu'il est possible d'attribuer aux variables correspond bien à l'ordre que suggère la logique naturelle et lève alors les ambiguïtés rencontrées par H. Ratsimba-Rajohn.

4-2 Le degré d'adhésion à une implication
On va chercher à apprécier l'adhésion d'un individu à une implication entre variables par une formule qui prendra en compte la notion de rang proposée ci-dessus et l'intensité elle-même de l'implication entre les deux variables, c'est-à-dire la "crédibilité" de cette relation.

On considère deux variables a et b de V.
Sur VxV est définie la relation d'implication, appréciée par une application de VxV dans [0,1] qui, à tout couple d'éléments de V, associe l'intensité de l'implication $\varphi(a,\bar{b})$.
Appelons Ψ_a l'application suivante : $I \rightarrow VAL$

$x \rightarrow \Psi_a(x)$ valeur donnée à la variable a par l'individu x.

DÉFINITION 9
On appellera **degré d'adhésion de l'individu x à l'implication (a => b)**, noté $deg_{a,b}(x)$ le nombre défini par :

$$deg_{a,b}(x) = \frac{rg(\Psi_a(x), \Psi_b(x)) - 1}{n^2 - 1} \varphi(a,\bar{b})$$

Ainsi, le degré d'adhésion d'un individu à une implication donnée entre deux variables est nul si le rang du couple de valeurs qu'il a affectées à ces deux variables est 1 (le plus petit rang) ; il est maximal et égal à $\varphi(a,\bar{b})$ si le rang du couple de valeurs qu'il a affectées aux deux variables est n^2 (le rang le plus élevé).

Remarque : La difficulté soulevée plus haut dans l'exemple disparaît. En effet, les positionnements différents de deux individus x_1 et x_2 par rapport au couple de variables (a,b) seront "appréciés" par deux nombres distincts puisque, dans ce cas : $rg(\Psi_a(x_1), \Psi_b(x_1)) \neq rg(\Psi_a(x_2), \Psi_b(x_2))$.

5. DISTANCE D'UN INDIVIDU A UNE CLASSE OU A UN CHEMIN SIGNIFICATIF

5.1 Vecteur puissance implicative d'un individu par rapport à une classe

DÉFINITION 10
Etant donnés une classe $C = \{a_1, \ldots, a_t\}$ à s "étages", $r_1, r_2, \ldots, r_s$ les implications génériques de C et $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$ les s coefficients d'implication qui leur sont associés, on appelle :
"vecteur puissance implicative de l'individu x par rapport à la classe C" le vecteur de $\mathbf{R}^s$ dont les composantes sont les degrés d'adhésion de x aux relations génériques de C, dans l'ordre de leur apparition dans la construction de C.

5.2 Distance d'un individu à une classe

Etant donnés une classe $C = \{a_1, \ldots, a_t\}$ à s "étages, $r_1, r_2, \ldots, r_s$ les s implications génériques de C et $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$ les s coefficients coefficients d'implication qui leur sont associés, on note $\vec{V}c$ le vecteur puissance de C et $\vec{V}c(x)$ le vecteur puissance de l'individu x par rapport à la classe C.

$$\vec{V}c = (\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$$

$$\vec{V}c(x) = (\deg_{r_1}(x), \ldots, \deg_{r_s}(x))$$

On appelle distance de l'individu x à la classe C, notée d (x,C), une distance du type χ^2 entre $\vec{V}c$ et $\vec{V}c(x)$.
Le choix de cette distance permet de pondérer les contributions euclidiennes avec le complément à 1 des φ_i afin de mettre en relief un phénomène qui sera d'autant plus important que le coefficient φ_i sera voisin de 1, c'est-à-dire que la relation générique de la sous-classe d'indice i sera intense.
On pose donc la définition qui précise la précédente en se substituant à elle :

DÉFINITION 11
On appelle **distance de l'individu x à la classe C**

$$d(x,C) = \left[\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{i=s} \frac{(\varphi_i - \deg_{ri}(x))^2}{1-\varphi_i} \right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{i=s} \frac{((1-\varphi_i) - (1-\deg_{ri}(x)))^2}{1-\varphi_i} \right]^{1/2}$$

d apparaît comme une distance du χ^2 entre les deux distributions $(1 - \varphi_i)$ et $(1 - \deg_{r_i}(x))$.

Remarquons que, si $\varphi_i = 1$, alors $\deg_{r_i}(x) = 1$ pour tout individu x de I, sinon φ_i ne serait pas égal à 1 (φ_i ne peut être strictement égal à 1 que si tous les individus adhèrent totalement à la relation définie sur l'ensemble des variables).
On peut alors poser, par prolongement par continuité, d (x,C) = 0.

5.3 Distance d'un individu à un chemin significatif

Considérons un chemin $Ch = (v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_s)$.
Par généralisation de ce qui précède, on appellera distance d'un individu x au chemin Ch, une distance du type χ^2 entre le vecteur puissance implicative du chemin \o($\overrightarrow{Vch}$ et le

vecteur puissance implicative de l'individu x par rapport à ce chemin $\vec{V}_{Ch}(x)$).

$\vec{V}_{Ch}$ a pour composantes les $\frac{s(s-1)}{2}$ coefficients $\varphi_{i,j}$, intensités des implications qui composent le chemin, i variant de 1 à s–1 , j étant supérieur à i.

$\vec{V}_{Ch}(x)$ a pour composantes les $\frac{s(s-1)}{2}$ degrés d'adhésion de l'individu x aux implications qui composent le chemin, i variant de 1 à s–1 , j étant supérieur à i.

DÉFINITION 12

On appelle **distance d'un individu x au chemin Ch** :

$$d(x,Ch) = \left[\frac{1}{s}\sum_{i=1,j>i}^{s-1}\frac{(\varphi_{i,j}-\deg_{i,j}(x))^2}{1-\varphi_{i,j}}\right]^{1/2}$$

où $\varphi_{i,j}$ est l'intensité d'implication de $v_i \to v_j$

et $\deg_{i,j}(x)$ est le degré d'adhésion de l'individu x à $v_i \to v_j$

5.4 Retour sur l'exemple

Nous allons illustrer les notions ci-dessus en reprenant l'exemple du paragraphe 3.2. On peut supposer que les implications a => b , c => d et e => f sont les implications génériques d'une classe C (avec e = a et f = d par exemple).

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\varphi_{a,b} = 0{,}95$	a => b	(0.33;0.66)	(1;1)	(0;0)	(0.66;0)	(1;0)
	$rg(\Psi_a(x_i),\Psi_b(x_i))$ $\deg_{a,b}(x_i)$	12 0,7	16 0,95	7 0,38	3 0,13	1 0
$\varphi_{c,d} = 0{,}9$	c => d	(0;1)	(1;1)	(0.33;0.33)	(0.33;0)	(1;0.33)
	$rg(\Psi_c(x_i),\Psi_d(x_i))$ $\deg_{c,d}(x_i)$	10 0,54	16 0,9	11 0,6	6 0,3	2 0,01
$\varphi_{e,f} = 0{,}85$	e =>f	(1;1)	(0.33;1)	(0;0.33)	(1;0)	(1;0)
	$rg(\Psi_e(x_i),\Psi_f(x_i))$ $\deg_{e,f}(x_i)$	16 0,85	13 0,68	8 0,4	1 0	1 0

Les degrés d'adhésion sont arrondis au centième.

On aura alors :

$$\vec{V}_C \begin{pmatrix}0{,}95\\0{,}9\\0{,}85\end{pmatrix} \quad \vec{V}_C(x_1)\begin{pmatrix}0{,}70\\0{,}54\\0{,}85\end{pmatrix} \quad \vec{V}_C(x_2)\begin{pmatrix}0{,}95\\0{,}9\\0{,}68\end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_C(x_3)\begin{pmatrix}0{,}38\\0{,}6\\0{,}40\end{pmatrix} \quad \vec{V}_C(x_4)\begin{pmatrix}0{,}13\\0{,}3\\0\end{pmatrix} \quad \vec{V}_C(x_5)\begin{pmatrix}0\\0{,}01\\0\end{pmatrix}$$

et $d(x_1, C) = 0{,}7978$ $d(x_2, C) = 0{,}21946$ $d(x_3, C) = 1{,}47885$

$d(x_4, C) = 2{,}33798$ $d(x_5, C) = 2{,}77433$

Les ambiguïtés relevées au 3.2 sont maintenant levées et les distances calculées correspondent bien à ce qu'on en attend intuitivement.

6. CONTRIBUTION D'UN INDIVIDU A LA CONSTITUTION D'UNE CLASSE OU D'UN CHEMIN

6.1 Individu neutre

On dira que l'individu x_n est **neutre pour la classe C** s'il a affecté la valeur 0 à toutes les variables en relation par les implications génériques r_i.
On dira que l'individu x_n est **neutre pour le chemin Ch** s'il a affecté la valeur 0 à toutes les variables qui composent ce chemin.

6.2 Propriétés imposées à la notion de contribution

Nous allons fixer à cette contribution, à définir, des contraintes "intuitives".
(c_1) : elle devra être maximale et égale à 1 pour un individu x dont la distance à la classe C est nulle,
(c_2) : elle devra être nulle pour un individu neutre,
(c_3) : elle devra être négative pour tout individu "plus éloigné de C" que ne l'est un individu neutre.

6.3 Définition de la contribution d'un individu à la constitution d'une classe ou d'un chemin

DÉFINITION13
La contribution d'un individu x à la classe C est :

$$\gamma(x,C) = 1 - \frac{d(x,C)}{d(x_n, C)}$$

- (c_1) est respectée : $\gamma(x,C) = 1$ si $d(x,C) = 0$
- (c_2) est respectée : $\gamma(x_n, C) = 0$
- $\gamma(x,C)$ est une fonction décroissante de $d(x,C)$.
- Vérifions la condition (c_3) en recherchant la valeur minimale de $\gamma(x,C)$.

$$\gamma(x,C) \text{ est minimale} \iff d(x,C) \text{ est maximale} \iff \forall i = 1,\dots,s \quad deg_{r_i}(x) = 0$$

d'où
$$\max_{\text{individus}} d(x,C) = \left[\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{s}\frac{\varphi_i^2}{1-\varphi_i}\right]^{1/2}$$

Calcul de $d(x_n, C)$

On a par définition de d :
$$d(x_n, C) = \left[\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{s}\frac{(\varphi_i - deg_{ri}(x_n))^2}{1-\varphi_i}\right]^{1/2}$$

et, d'après la définition du degré d'adhésion de x à une implication φ_i, on a donc :

$$d(x_n, C) = \left[\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{s}\frac{\varphi_i^2}{1-\varphi_i}\left(1 - \frac{rg(r_i(x_n))^{-1}}{n^2-1}\right)^2\right]^{1/2}$$

On a $\forall\, i = 1,\ldots, s$, $rg(r_i(x_n)) = c^{ste} = rg_n$.

D'où :
$$d(x_n, C) = \left(1 - \frac{rg_n - 1}{n^2 - 1}\right)\left[\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{s}\frac{\varphi_i^2}{1-\varphi_i}\right]^{1/2}$$

$$d(x_n, C) = \frac{n^2 - rg_n}{n^2 - 1} \cdot \max_{\text{individus}} d(x,C)$$

et
$$\min_{\text{individus}} \gamma(x,C) = 1 - \frac{\max_{\text{individus}} d(x,C)}{\dfrac{n^2 - rg_n}{n^2 - 1} \max_{\text{individus}} d(x,C)}$$

$$\min_{\text{individus}} \gamma(x,C) = \frac{1 - rg_n}{n^2 - rg_n}$$ où rg_n est le rang du couple "neutre" (0,0)

Si l'on se reporte à l'algorithme d'ordonnancement des paires de valeurs qu'il est possible d'affecter aux items (3.1), on peut calculer rg_n.
Le couple (0,0) s'obtient en prenant la deuxième partie de l'algorithme avec $i = n$ et $j = 0$.
Le rang est alors déterminé par $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} + 0 + 1$, c'est-à-dire $\frac{n^2 - n + 2}{2}$.
On trouve alors finalement : $\min_{\text{individus}} \gamma(x,C) = \frac{-n}{n+2}$, relation dans laquelle n désigne le nombre de valeurs qu'on peut attribuer aux items.

On en conclut que la condition (c_3) est bien respectée.

Remarque : si $n \to +\infty$, alors $\min_{\text{individus}} \gamma(x,C) \to -1$.

6.4 Retour sur l'exemple
On a ici $n = 4$, donc $rg_n = 7$.

Il s'ensuit : $d(x_n, C) = \frac{4^2 - 7}{4^2 - 1}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{0{,}95^2}{1 - 0{,}95} + \frac{0{,}90^2}{1 - 0{,}90} + \frac{0{,}85^2}{1 - 0{,}85}\right)\right]^{1/2} \cong 1{,}66943$

On obtient pour finir :
$\gamma(x_1, C) \cong 0{,}5221$, $\gamma(x_2, C) \cong 0{,}8685$, $\gamma(x_3, C) \cong 0{,}1141$, les contributions de x_1, x_2 et x_3 sont positives, ils adhèrent à la classe C .
$\gamma(x_4, C) \cong -0{,}4004$, $\gamma(x_5, C) \cong -0{,}6618$, les contributions de x_4 et x_5 sont négatives, ils contredisent la classe C.

7. UNE SITUATION TRAITÉE

Dans une recherche récente [4], nous avons travaillé avec des questionnaires de type choix ordonné de mots dans un corpus donné pour tenter de saisir les représentations que les enseignants de mathématiques avaient de l'enseignement de leur discipline. Nous leur avons, de plus, demandé de se placer de quatre points de vue différents :

– l'enseignement des mathématiques tel qu'ils pensent que l'Institution l'attend,
– l'enseignement des mathématiques tel qu'ils le perçoivent autour d'eux,
– leur idéal de l'enseignement des mathématiques,
– leur propre enseignement des mathématiques.

Les réponses ordonnées des répondants ont été transformées en réponses modales (cf. plus haut) sur lesquelles nous avons mené des analyses implicatives dont nous avons traduit graphiquement les résultats sous forme de graphes implicatifs. Dans ces graphes, apparaissent des "structures", c'est-à-dire des ensembles organisés de mots. Le travail d'interprétation nous a amenés à caractériser chacune de ces structures.

Pour ce qui concerne le lycée, trois structures apparaissent dans chacun des quatre points de vue. On en trouve un récapitulatif ci-dessous.

L'enseignement des mathématiques tel que l'Institution l'attend de moi

Structure I_{In} : l'enseignement illustration du fonctionnement interne des mathématiques
Structure II_{In} : le discours "généreux" de l'institution sur l'enseignement des mathématiques
Structure III_{In} : le statut mal défini du problème

Mon idéal de l'enseignement des mathématiques

Structure I_{Id} : la dimension psycho-sociologique du "pourquoi l'élève apprend"
Structure II_{Id} : l'enseignement au service des mathématiques explicatrices de l'univers par le "penser"
Structure III_{Id} : l'enseignement des "mathématiques–découverte"

L'enseignement des mathématiques autour de moi

Structure I_A : la demande sociale vis-à-vis de l'enseignement des mathématiques
Structure II_A : l'enseignement des mathématiques comme réplique du fonctionnement du savoir constitué
Structure III_A : l'enseignant à la recherche de stratégies "motivantes"

Mon enseignement des mathématiques

Structure I_M : l'enseignant tentant de s'adapter à la demande sociale et aux élèves
Structure II_M : l'enseignement des mathématiques fonctionnant presque idéalement : des savoirs au Savoir
Structure III_M : les "mots flous"

Il a été possible de calculer les contributions de chaque répondant à chacune des structures. On peut ensuite mener sur ces contributions des investigations relativement à des variables supplémentaires indépendantes, le grade par exemple. Ainsi il apparaît qu'au lycée, les agrégés contribuent significativement plus que les certifiés aux structures des points de vue INST et IDEAL dans lesquelles l'enseignant ménage une place plus importante à l'élève : II_{In} et III_{Id} . Peut-on lire ici le fait qu'une plus grande maîtrise (théoriquement au moins) du savoir strictement disciplinaire permet au professeur de proposer des situations d'enseignement dans lequel le "risque" qu'il prend, en laissant une marge d'initiative à l'élève, est plus grand que dans des situations d'enseignement plus guidées, voire fermement balisées ?

Si cette constatation est relativement abrupte, il convient cependant de la pondérer en précisant qu'elle ne porte que sur ce que **des** enseignants de mathématiques **disent penser** et ne préjuge pas de ce qui se passe **effectivement** dans la classe avec les élèves. On en a une illustration dans le fait que, si la contribution globale des certifiés est significativement plus forte que celle des agrégés à la structure II_M , centrée sur le fonctionnement "quasi-idéal" de l'enseignement des mathématiques, on n'a pas de différence significative inverse en faveur des agrégés pour la structure I_M caractérisée comme enseignement qui tend à s'adapter simultanément à la demande sociale et aux élèves.

Les outils mathématiques présentés ci-dessus nous semblent ainsi être efficaces pour l'investigation des représentations, en ce sens qu'ils permettent :
– dans un premier temps, de mettre en évidence des réseaux organisés de variables,
– dans un deuxième temps, d'évaluer la "responsabilité" des répondants ou de groupes de répondants dans l'apparition de ces réseaux organisés.

8. CONCLUSION

La construction théorique que nous venons d'exposer doit son existence à des questions posées par des problèmes réels apparus en didactique des mathématiques chez les chercheurs et les formateurs d'enseignants[11]. Connaître les difficultés qu'on y rencontre, les analyser, intégrer leur connaissance dans une pratique, nécessitent de disposer d'indices permettant de les identifier et de formuler des diagnostics. Des questionnaires, des enquêtes, des observations nous y aident à condition de disposer d'outils d'analyse assez souples pour que différents types d'indices restituent des nuances comportementales. C'est le cas des réponses modales. L'approche théorique précédente le permet en les structurant de façon dynamique en raison de la dissymétrie de leur considération. En outre, reconnaître quels descripteurs sont plus particulièrement associés aux éléments de structure ou en sont responsables, c'est-à-dire reconnaître quels individus y contribuent permet de fournir des informations sur la stratification de la population étudiée : la théorie de la contribution des individus satisfait cette attente. Il est bien évident que le champ des applications peut s'élargir à d'autres disciplines que la didactique : citons, en particulier, la médecine, la psychologie et la sociologie.

ANNEXE
Variables binaires comme cas particulier de variables modales

Supposons que nous travaillions avec des variables binaires. Reprenons, dans ce cas, l'exemple présenté. Le tableau du 5-4 devient alors le tableau ci-dessous :

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\varphi_{a,b} = 0{,}95$	a =>b	(1;1)	(1;1)	(0;0)	(1;0)	(1;0)
	$rg(\Psi_a(x_i),\Psi_b(x_i))$ $deg_{a,b}(x_i)$	4 0,95	4 0,95	2 0,32	1 0	1 0
$\varphi_{c,d} = 0{,}9$	c => d	(0;1)	(1;1)	(1;1)	(1;0)	(1;1)
	$rg(\Psi_c(x_i),\Psi_d(x_i))$ $deg_{c,d}(x_i)$	3 0,6	4 0,9	4 0,9	1 0	4 0,9
$\varphi_{e,f} = 0{,}85$	e => f	(1;1)	(1;1)	(0;1)	(1;0)	(1;0)
	$rg(\Psi_e(x_i),\Psi_f(x_i))$ $deg_{e,f}(x_i)$	4 0,85	4 0,85	3 0,57	1 0	1 0

$\vec{V}c \begin{pmatrix} 0{,}95 \\ 0{,}9 \\ 0{,}85 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{Vc}(x_1) \begin{pmatrix} 0{,}95 \\ 0{,}6 \\ 0{,}85 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{Vc}(x_2) \begin{pmatrix} 0{,}95 \\ 0{,}9 \\ 0{,}85 \end{pmatrix}$

$\vec{Vc}(x_3) \begin{pmatrix} 0{,}32 \\ 0{,}9 \\ 0{,}57 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{Vc}(x_4) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{V}c(x_5) \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}9 \\ 0 \end{pmatrix}$

$d(x_1, C) = 0{,}47434$ $\quad d(x_2, C) = 0$ $\quad d(x_3, C) = 1{,}45436$
$d(x_4, C) = 2{,}78238$ $\quad d(x_5, C) = 2{,}39095$

$d(x_n, C) = 1{,}85492$

$\gamma(x_1, C) = 0{,}74428$ $\quad \gamma(x_2, C) = 1$ $\quad \gamma(x_3, C) = 0{,}21594$
$\gamma(x_4, C) = -0{,}5$ $\quad \gamma(x_5, C) = -0{,}2889$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ACID S., de CAMPOS L.M., GONZALEZ A., MOLINA R., PEREZ de la BLANCA N., *Learning with Castle in Symbolic and quantitative approaches to uncertainty,* Springer-Verlag, 1991, 99-106.

[2] AG ALMOULOUD S., *L'ordinateur, outil d'aide à l'apprentissage de la démonstration et de traitement de données didactiques*, Thèse de l'Université de Rennes 1, Mathématiques et applications, 1992.

[3] AMARGER S., DUBOIS D., PRADE H., Imprecise quantifiers and conditional probabilities - in *Symbolic and quantitative approaches to uncertainty* (R. KRUSE, P. SIEGEL), Springer-Verlag, 1991, 33-37.

[4] BAILLEUL M., *Analyse statistique implicative : variables modales et contribution des sujets. Application à la modélisation de l'enseignant dans le système didactique.* Thèse de l'Université de Rennes 1, Mathématiques et applications, 1994.

[5] *C.H.I.C. ou Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive : logiciel d'analyse de données,* IRMAR, Université de Rennes 1.

[6] DIDAY E., *Towards a statistical theory of intentions for knowledge analysis,* Rapport de recherche 1494, I.N.R.I.A.., Rocquencourt, 1991.

[7] GAMMERMAN A., LUO Z., *Constructing Causal Trees from a medical database,* Technical Report TR 91 002, Department of Computer Sci., Heriot-Watt Univ., Edimburgh.

[8] GANASCIA J.G., Charade : Apprentissage de bases de connaissances, *Induction symbolique -numérique à partir de données, CEPADUES* , 1991.

[9] GRAS R., *Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques*, Thèse d'Etat Mathématiques et Applications, Université de Rennes 1, 1979.

[10] GRAS R. et LARHER A., "L'implication statistique, une nouvelle méthode d'analyse de données", *Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines,* 120, 1992, 5-31.

[11] GRAS R., TOTOHASINA A., AG ALMOULOUD S., RATSIMBA-RAJOHN H., BAILLEUL M., La méthode implicative en didactique. Applications. *Actes du Colloque "20 ans de la Didactique des Mathématiques en France", La Pensée Sauvage,* Grenoble, 1994, 349-363.

[12] LARHER A., *Implication statistique et applications à l'analyse de démarches de preuve mathématique*, Thèse de l'Université de Rennes 1, Mathématiques et Applications, 1991.

[13] LERMAN I-C., *Classification et analyse ordinale des données,* Dunod, Paris, 1981.

[14] LERMAN I-C., GRAS R., ROSTAM H., "Elaboration et évaluation d'un indice d'implication pour des données binaires", *Mathématiques et Sciences Humaines,* 74, 1981, 5-35 et 75, 1981, 5-47.

[15] LOEVINGER J., A systematic approach to the construction and evaluation of tests of ability, *Psychological Monographs,* 61, n°4, 1947.

[16] PEARL J., *Probabilistic Reasoning in intelligent systems,* Morgan Kaufmann, San Mateo, 1988.

[17] RATSIMBA-RAJOHN H., *Contribution à l'étude de la hiérarchie implicative, application à l'analyse de la gestion didactique des phénomènes d'ostension et de contradiction*, Thèse de l'Université de Rennes 1, Mathématiques et Applications, 1992.

[18] TOTOHASINA A., *Méthode implicative en analyse de données et application à l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle,* Thèse de l'Université de Rennes 1, Mathématiques et Applications, 1992.