MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

JEAN CALMES

Structures naturelles des demi-groupes et des anneaux réguliers ou involutés

Mathématiques et sciences humaines, tome 128 (1994), p. 15-39
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1994__128__15_0>

Math. Inf. Sci. hum. (32e année, n°128, *1994*, pp.15-39)

STRUCTURES NATURELLES DES DEMI-GROUPES ET DES ANNEAUX REGULIERS OU INVOLUTÉS

Jean CALMES[1]

RÉSUMÉ — *Certaines relations binaires sont définies sur les demi-groupes et les demi-groupes à involution. On examine comment elles peuvent en ordonner les éléments: notamment les idempotents, les éléments réguliers au sens de von Neumann, ceux qui possèdent un inverse ponctuel ou de Moore-Penrose ; et en fonction aussi de conditions sur l'involution. Ces relations peuvent alors coïncider avec les ordres naturels des idempotents et des demi-groupes inverses, avec les ordres de Drazin et de Hartwig : elles en sont des extensions. On s'attache à définir sur les demi-groupes et les anneaux, mais aussi sur les modules de matrices, les conditions de ces ordres, celles de leur compatibilité et de leur égalité. Le sujet est inscrit dans le thème des ensembles ordonnés et ses applications aux sciences sociales : l'accent est mis sur la possibilité de disposer en Analyse de tableaux numériques d'un riche réseau de relations binaires, compatibles avec l'ordre semi-défini positif et présentant une affinité particulière avec les différentes formes de projections.*

SUMMARY — Natural structures on semigroups and rings with regular conditions or with involutions.
Some binary relations are defined on semigroups and semigroups with involutions. We show how they may order their elements : especially idempotents, regular elements in von Neumann's sense, elements that possess Moore-Penrose or pointwise inverses ; according to the nature of involutions as well. In these cases, the relations may coincide with the natural orders on the set of idempotents and on inverse semigroups, with the orders of Drazin and Hartwig ; and so they extend them. We look for conditions of these ordering relations and for conditions of their compatibility and equality, on semigroups and rings but also on modules of matrices. The subject is included in the general theme of order sets and its applications in social sciences : we place emphasis on the possibility in data analysis to dispose of a rich network of binary relations, which are compatible with the positive-semi-definite order and possess close links with projections of different kinds.

PRÉSENTATION

Sous ce titre paraît le premier volet d'une contribution au thème des ordres naturels et leurs applications, dans un contexte très général puisqu'il s'agit d'abord des demi-groupes ou groupoïdes associatifs.

Le rôle majeur que jouent les idempotents dans l'économie des demi-groupes est bien connu, et lorsqu'il est question de leurs propriétés latticielles et au sujet de la régularité au sens de von Neumann. Dans son article fondateur de 1936, von Neumann situait son analyse par rapport aux travaux contemporains de Birkhoff... Mais c'est le développement de la théorie des demi-groupes inverses, dans l'Après-guerre, qui a définitivement scellé les deux problématiques : celle de la régularité et celle des ensembles ordonnés.

1. Département de Mathématiques et Informatique Appliquées à l'Université Paul Valéry, B.P. 5043, 34032 Montpellier Cedex 1.

Au-delà de l'intérêt spécifique que présente l'étude des structures ordonnées pour le spécialiste des M.a.s.h. (Barbut et Monjardet (1970)) - et dans les champs les plus divers que la revue a consacrés, dont ceux qui relèvent des demi-groupes : monoïdes, demi-groupes des relations binaires, demi-groupes inverses, anneaux booléens, anneaux de matrices, etc... -, l'intérêt de ce thème pour les sciences humaines a été souligné dernièrement par Mallol *et al.* (1985). (Dans le même sens, Boyd (1983), Degenne (1988),...) On poursuit le sujet notamment en prenant en compte les apports de Drazin et de Hartwig. Les relations que définissent ces deux auteurs peuvent être comprises, en effet, comme des extensions radicales à tout demi-groupe, pourvu qu'il soit simplement involuté ou régulier, de l'ordre naturel qui structure les demi-groupes inverses ; et donc comme le moyen d'échapper aux contraintes jugées souvent excessives de ces derniers.

On sait aussi quel fut, dans les années soixante-dix - à la suite de la redécouverte, par Penrose en 1955 et Bjerhammar en 1958, des résultats restés éclipsés de Moore à propos de son "general reciprocal" (1920) -, le foisonnement des publications sur l'emploi des inverses généralisés des applications linéaires dans la sphère des mathématiques appliquées, et singulièrement en statistique où cet emploi est devenu courant. (Par exemple, Timm (1975) et Pollock (1979) pour les sciences sociales.) Là s'impose la référence à l'Ecole indienne, par la part qu'elle y prit et puisque la définition des g-inverses proposée en 1962 par C.R. Rao répond précisément à celle de la régularité de von Neumann - quoique dans un cadre non couvert par cette dernière (matrices rectangulaires).

La raison de ce succès tient notamment à ce que la condition de régularité est alors une condition linéaire qui permet de résoudre les systèmes d'équations linéaires, qui autorise l'expression et le calcul des opérateurs de projection (dans leur diversité), et qui fournit un substitut commode aux décompositions canoniques (spectrale et autres) lorsque l'hypothèse d'inversibilité n'est pas de mise. S'agissant des sciences sociales, cependant, l'adoption de cette généralisation de la notion d'inverse paraît avoir été moindre en économétrie qu'ailleurs, par exemple en comparant des revues comme Psychometrika et Econometrica...

En statistique et en analyse des données, quand le modèle linéaire est choisi, la relation d'ordre dont l'usage est le plus fréquent, et des plus féconds, est certainement l'ordre semi-défini positif ou entre formes quadratiques. (Avant l'ordre du cumul, mais sans doute avec le préordre du balayage plus généralement en statistique...; *cf.* Petit et Terouanne (1992).) On pense que les ordres naturels définis ou étudiés ici pourraient être introduits tout aussi utilement dans ce domaine. (Ils sont du reste compatibles avec l'ordre semi-défini positif, sous quelque condition). C'est ce qu'illustrera le deuxième volet (en préparation) de cet essai consacré aux modèles linéaires en analyse multidimensionnelle.

INTRODUCTION

La relation de base entre idempotents d'un demi-groupe S, l'ordre canonique ou naturel (des idempotents) noté b[n]a, est définie par a=ab=ba, a et b appartenant donc à E : l'ensemble des idempotents de S. Lorsqu'il est commutatif, E est un inf-demi-treillis relativement à [n], avec $a \wedge b = ab$ (*e.g.* Clifford et Preston (1961) p.24). Et, si une involution est définie, [n] donne lieu à l'ordre partiel usuel des projections : b[p]a ssi a=ab, avec [p]=[n] pour les projecteurs.(*Cf.* Kaplanski (1968) p.29 ou Berberian (1972) p.4.)

On connaît encore le rôle fondamental de l'ordre naturel de Vagner dans la description de la structure même des demi-groupes inverses : tout demi-groupe inverse admet cet ordre noté [v], qui est une extension de [n] et qui peut être défini par $a^{-1}a=a^{-1}b$, où a^{-1} est l'inverse ponctuel ou inverse de a : l'unique solution des équations a=axa et x=xax. Un demi-groupe inverse, S_{-1} , étant par définition un demi-groupe dont chaque élément possède un inverse ponctuel, on montre aisément que $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$ et $(a^{-1})^{-1}=a$ pour tout a,b de S_{-1} $((.)^{-1}$ est une involution) , et que [v] et [n] coïncident pour les idempotents de S_{-1}. Pour la raison qui vient d'être rappelée, les caractéristiques de [v] ont été intensivement étudiées et il sera donc fait appel à elles simplement en renvoyant aux traités sur les demi-groupes (inverses). On signale cependant Mitsch (1978) où est établie, entre autres, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un demi-groupe inverse soit totalement ordonné par [v] : pour tout a,b, a=ab=ba ou b=ab=ba (voir son théorème 5)...

Un élément $a \in S$ est régulier au sens de von Neumann s'il possède au moins un inverse généralisé noté a^- : une solution de l'équation a=axa. Un demi-groupe régulier, S_- , est un demi-groupe dont chaque élément est régulier, et S_{-1} est régulier, bien sûr, comme l'ensemble des idempotents.

Les extensions aux demi-groupes réguliers et aux demi-groupes munis d'une involution des ordres naturels : [n], [p] et [v] est en effet notre objet, en liaison avec les définitions des ordres proposés par Drazin et Hartwig.
Ces définitions sont rappelées :
• En 1978, Drazin a établi que sur un demi-groupe involuté, S_* (à savoir un demi-groupe sur lequel est défini un antiautomorphisme involutif, ou involution, $(.)^*$: S –>S tel que $(a^*)^*=a$ et $(ab)^*=b^*a^*$), les relations binaires :

$$b[d^*]a \quad \text{ssi} \quad a^*a=a^*b \quad \text{et} \quad aa^*=ba^*$$
$$b[d^+]a \quad \text{ssi} \quad a^+a=a^+b \quad \text{et} \quad aa^+=ba^+$$

définissent un ordre ;
- la première, notée $[d^*]$, lorsque pour tout $a,b \in S_*$, $aa^*=a^*b=b^*b$ implique a=b. Drazin introduit cette condition que Foulis (1963) posait en théorie des demi-groupes de Baer. S sera qualifié de "d-involuté" s'il est muni d'une involution qui satisfait à la condition précédente, s'il est muni d'une "d-involution".
- Et la deuxième, $[d^+]$, sur les demi-groupes $*$-réguliers, S_+ ; lesquels sont les demi-groupes involutés dont les éléments possèdent l'inverse de Moore-Penrose.

• En 1980, Hartwig a montré que l'expression de $[d^+]$ écrite avec un inverse généralisé réflexif de a , à la place de l'inverse de Moore-Penrose, définit un ordre différent de $[d^+]$:

$$b[h^=]a \quad \text{ssi} \quad a^=a=a^=b \quad \text{et} \quad aa^==ba^=.$$

Un inverse réflexif de a, noté $a^=$, est une solution des équations a=axa et x=xax.
L'inverse de Moore-Penrose de a, nécessairement unique (lorsqu'il existe), est l'inverse réflexif de a qui est solution des équations $ax=(ax)^*$ et $xa=(xa)^*$. Il est noté a^+. (*Cf.* Berberian (1972) pp.18 et 29 ou Deheuvels (1981) p.280.)
En outre, Hartwig soulignait alors que la condition des d-involutions n'est pas nécessaire pour que $[d^+]$ définisse un ordre.

On propose ici des "relations binaires canoniques" sur S et S_*. Ces relations sont définies par des conditions simples sur les trois relations élémentaires de division dans un demi-groupe : à gauche, à droite et bilatère. (Ces trois dernières sont transitives sur S et sont des préordres sur les monoïdes.) Brièvement décrites dans leur contexte, elles sont considérées ensuite dans les domaines restreints des demi-groupes réguliers et $*$-réguliers. L'introduction des conditions relatives à la régularité révèle que certaines d'entre elles coïncident avec les ordres de Drazin et de Hartwig, et que d'autres définissent de nouveaux ordres sur S_+, compatibles avec l'ordre de Hartwig et avec lesquels l'ordre de Drazin est compatible.
Parmi elles, se distingue la relation canonique que l'on notera [e], qui est égale à [v] sur S_{-1} et à $[h^=]$ sur S_- , et puisque [e] est un ordre déjà sur S.

Les relations canoniques, qui aident donc à situer le contexte de ces ordres, facilitent l'établissement de leurs conditions et rendent manifestes leurs liens de compatibilité. Elles représentent les "expressions directes" de ces ordres. Dans le cadre de la théorie des demi-groupes inverses, l'expression directe de [v] (*i.e.* l'expression de [v] dans laquelle n'intervient pas d'inverse) et son rôle sont connus : b[v]a si et seulement si un idempotent u existe tel que a=ub (Petrich (1984) p.79, *e.g.*). Elle permet, par exemple, d'établir simplement que [v] est un ordre - en sachant qu'un demi-groupe inverse est aussi un demi-groupe régulier dont les idempotents commutent...

L'examen de ces nouveaux ordres définis sur S_+ met en évidence cinq relations binaires sur S_* qui leur sont égales sur S_+ et dont deux sont des ordres lorsque l'involution est une d-involution, à l'instar de [d*]. Deux autres sont sans condition des ordres de S_*.

En somme, il s'agit dans un mouvement qui part des relations canoniques, sortes de "UrRelationen" définies dans les contextes les plus généraux, d'examiner comment leurs expressions évoluent et s'enrichissent lorsque la contrainte est modulée aux différentes classes de demi-groupes envisagées, et d'identifier les relations d'ordre propres à chaque classe, en fixant leurs conditions, celles de leur compatibilité et de leur égalité. (Une attention particulière étant portée à préciser le champ nouveau des demi-groupes d-involutés).

Ainsi se trouvent définies les structures ordonnées des demi-groupes réguliers (§2), $*$-réguliers (§3) et involutés ou d-involutés (§4) ; structures qui "fusionnent" avec celle des demi-groupes inverses si la contrainte est ressérée à cette classe.

Le même mouvement est continué en spécialisant l'analyse aux anneaux réguliers (§5) et aux anneaux involutés (§6), puis à propos des anneaux, modules et espaces vectoriels de matrices (§7 et §8).

Plusieurs conditions de chacun de ces ordres sont ainsi obtenues sur les anneaux. (Par exemple, l'ordre de Hartwig, b[h⁼]a, y est équivalent à l'existence d'un inverse généralisé commun à b, b-a et a.)

La nature des d-involutions, avec lesquelles la relation de Drazin [d*] et deux autres relations sont des ordres, est précisée ; et notamment par rapport à la notion de $*$-régularité, puisqu'il est montré qu'un anneau est régulier et d-involuté si et seulement si il est $*$-régulier. Une condition (baptisée de s-involution) est trouvée pour que ces trois relations ordonnent les matrices $m{\times}n$ définies sur un anneau ; cette même condition, jointe à l'hypothèse de régularité de l'anneau, est par ailleurs équivalente à la $*$-régularité des matrices.

On a cherché plus généralement comment les structures ordonnées décrites sur les demi-groupes puis sur les anneaux pouvaient demeurer dans le cadre matriciel, et donc pour l'Analyse de tableaux numériques (où elles se conservent en totalité, moyennant quelques adaptations).

Les domaines et les conditions de compatibilité des relations canoniques et de l'ordre semi-défini positif sont définis (ces conditions sont satisfaites dans les emplois classiques de ce dernier en statistique qui font appel à sa version : ordre entre formes quadratiques), et des caractéristiques nouvelles de cet ordre sont présentées.

On termine en établissant quelques liaisons entre le thème des ordres naturels et ceux de la commutativité des sous-espaces, des inverses contraints et des projecteurs de Rao.

1. LES RELATIONS BINAIRES CANONIQUES SUR S ET S_*

Définitions.
Sur un demi-groupe S,

b[u]a	ssi	u et v existent tels que a=ub=bv
b[e]a	ssi	u et v existent tels que a=ub=bv=ubv
b[f_1]a	ssi	u et v existent tels que a=ub=bv=bvv
b[f_2]a	ssi	u et v existent tels que a=ub=uub=bv
b[g_1]a	ssi	u et un idempotent v existent tels que a=ub=bv
b[g_2]a	ssi	v et un idempotent u existent tels que a=ub=bv
b[h]a	ssi	des idempotents u et v existent tels que a=ub=bv.

Sur un demi-groupe à involution S_*,

$b[c_1]a$ ssi u et un projecteur v existent tels que a=ub=bv
$b[c_2]a$ ssi v et un projecteur u existent tels que a=ub=bv
$b[d_1]a$ ssi un idempotent u et un projecteur v existent tels que a=ub=bv
$b[d_2]a$ ssi un idempotent v et un projecteur u existent tels que a=ub=bv
$b[d]a$ ssi des projecteurs u et v existent tels que a=ub=bv.

(Dans ce cadre, un élément $a\in S_*$ est appelé un projecteur s'il est un idempotent tel que $a=a^*$.)

Remarque.
b[u]a est donc l'intersection des deux relations de division : $a\in Sb$ et $a\in bS$, que l'on note respectivement b[Suf]a et b[Pref]a : $[u] = \mathrm{Suf}\cap\mathrm{Pref}$.
Le rôle important que cette intersection fondamentale joue dans les structures étudiées justifie sa présence en exergue dans les Définitions.

Note.
Dans le même sens, la notation [r] distingue les relations principales (essentiellement les relations canoniques et des relations parentes) ; leur place et leur permanence dans la description des structures ordonnées en question en font les sujets de cette étude.
Les autres relations ne sont notées de même qu'en infixe : b[r]a ; les crochets sont absents lorsqu'elles sont prises absolument.

PROPOSITION 1.

1.1 $[h] = [g_1] \cap [g_2]$, $[g_i] \subseteq [f_i] = [e] \subseteq [u]$ $i = 1,2$
1.2 sur S_* , $[c_i] \subseteq [g_i]$ et $[d_i] = [c_i] \cap [h]$ $i = 1,2$
1.3 $[d] = [d_1] \cap [d_2] = [c_1] \cap [c_2]$
1.4 les relations canoniques autres que [u] sont antisymétriques et réflexives
1.5 [e] est une *relation d'ordre* sur S
1.6 sur S_*, $b[r]a$ ssi $b^*[r]a^*$ avec r pour u, e, h ou d ,
$b[g_1]a$ ssi $b^*[g_2]a^*$, $b[c_1]a$ ssi $b^*[c_2]a^*$, $b[d_1]a$ ssi $b^*[d_2]a^*$,
et donc : $[g_i]=[h]$ et $[c_i]=[d_i]=[d]$ $i = 1,2$ si $a=a^*$ et $b=b^*$.

A partir des définitions, ces propositions sont des plus immédiates.
Seule l'antisymétrie (1.4) est montrée et, d'après 1.1, 1.2 et 1.3, il suffit à cet effet d'établir l'antisymétrie de [e] :
si b[e]a, alors u existe tel que a=ub=ua, alors ax=ubx pour tout x,
si a[e]b, alors x existe tel que b=bx=ax, alors ub=ubx pour tout u.

2. STRUCTURES NATURELLES DES DEMI-GROUPES REGULIERS

Les relations canoniques définies sur S sont considérées en premier lieu sur les demi-groupes réguliers S_-.

PROPOSITION 2. Sur S_-,

2.1 b[Suf]a ssi $a=wb$ et $w=ab^-$
2.2 b[Pref]a ssi $a=bx$ et $x=b^-a$
2.3 si $a=ab^-b$ (si $a=bb^-a$) pour un inverse généralisé de b, alors $a=ab^-b$ (alors $a=bb^-a$) pour tout inverse généralisé de b
2.4 si b[Suf]a et b[Pref]c, alors ab^-c est invariant, quel que soit b^-
2.5 b[u]a ssi $a=bb^-ab^-b$
2.6 Suf, Pref et donc [u] sont des préordres.

En effet, si $a=ab^-b$ pour un inverse généralisé de b, alors b[Suf]a. Et, si u existe tel que $a=ub$, alors $a=ubb^-b$ pour tout b^- et donc $a=ab^-b$ pour tout b^-.
Si u et v existent tels que $a=ub$ et $c=bv$, alors $ab^-c=ubb^-bv=ubv$, quel que soit b^-.
Suf est transitive, et réflexive sur S_- .
Les propositions relatives à Pref sont également établies (par dualité gauche-droite).

Introduisons les relations auxiliaires :
b[Ind]a ssi $b^{(-)} \cap a^{(-)} \neq \varnothing$, *i.e.* l'ensemble des inverses généralisés de b et celui de a ne sont pas disjoints,
b[ind]a ssi $b^{(=)} \cap a^{(-)} \neq \varnothing$, où $b^{(=)}$ est l'ensemble des inverses généralisés réflexifs de b,
b[Idem]a ssi l'un au moins des éléments ab^-, b^-a est un idempotent.
(La relation $[h^=]$ a été définie plus haut.)

PROPOSITION 3. $[u]\cap \mathrm{ind} \subseteq [u]\cap \mathrm{Ind} \subseteq [u]\cap \mathrm{Idem} \subseteq [h^=]$.
La première inclusion est évidente puisque $b^{(=)} \subseteq b^{(-)}$. Si $b^{(-)} \cap a^{(-)} \neq \varnothing$, alors pour tout élément x de cette intersection $a=axa$ et donc ax et xa sont des idempotents.
Si $a=ab^-b=bb^-a$ et si ab^- est un idempotent, alors $a=ab^-ab^-b=ab^-a$ et b^-ab^- est donc un inverse généralisé réflexif de a. Ainsi, $(b^-ab^-)a=(b^-ab^-)b$ et $a(b^-ab^-)=b(b^-ab^-)$, et donc $b[h^=]a$.
Pour b^-a idempotent, de même, car alors $a=bb^-ab^-a=ab^-a$.

Définissons la relation : $b[h^-]a$ ssi $a^-a=a^-b$ et $aa^{\bullet}=ba^{\bullet}$, où a^- et $a^{\bullet}$ sont des solutions, éventuellement confondues, de l'équation $a=axa$.

PROPOSITION 4. $[h^=] \subseteq [h^-] \subseteq [h]$.
En effet, $a^{(=)} \subseteq a^{(-)}$ et donc $[h^=] \subseteq [h^-]$. Si $b[h^-]a$, alors $a=aa^-b=ba^{\bullet}a$ et donc b[h]a.

Deux autres relations auxiliaires sont définies.
b[Lin]a ssi $b^{(-)} \subseteq a^{(-)}$ et b[lin]a ssi $b^{(=)} \subseteq a^{(-)}$.

PROPOSITION 5. $[e] \subseteq [u]\cap \mathrm{Lin} \subseteq [u]\cap \mathrm{lin}$.
En effet, si u et v existent tels que $a=ub=bv=ubv$, alors $a=ubxbv=axa$ pour tout x solution de $b=bxb$. Ainsi, $b^{(-)} \subseteq a^{(-)}$. La deuxième inclusion est évidente, à nouveau $b^{(=)} \subseteq b^{(-)}$.

THÉORÈME 1. Les relations [e], $[f_1]$, $[f_2]$, $[g_1]$, $[g_2]$, [h], $[h^-]$, $[h^=]$, $[u]\cap\mathrm{Ind}$, $[u]\cap\mathrm{ind}$, $[u]\cap\mathrm{Idem}$, $[u]\cap\mathrm{Lin}$ et $[u]\cap\mathrm{lin}$ (1) sont égales sur S_-, (2) ordonnent les éléments réguliers de S, (3) sont égales à [v] sur les demi-groupes inverses et (4) sont égales à [u] et à [n] sur les idempotents de S.

Démonstration.
Pour (1), les Propositions 3 et 4 donnent lieu à une suite de relations d'inclusion :
$\mathrm{ind}\cap[u] \subseteq \ldots \subseteq [h]$, que complètent la Proposition 5 et la Proposition 1.1 selon laquelle :
$[h] \subseteq [g_i] \subseteq [f_i] = [e]$ $i = 1,2$. Evidemment $\mathrm{lin} \subseteq \mathrm{ind}$, et (1) est établie.
Pour (2), [e] est une relation d'ordre sur S.
Pour (3), [h]=[v] car b[v]a ssi un idempotent u existe tel que $a=ub$ ssi un idempotent v existe tel que $a=bv$ (*cf.* Petrich (1984) p.79).
Pour (4), $[n] \subseteq [h]$ puisque b[n]a ssi $a=ab=ba$, et $[u] \subseteq [n]$ car $b\in b^{(-)}$ (*cf.* 2).

Remarques.
1) L'égalité $[h^-]=[h^=]$ signifie que sont superflues, à la fois, les conditions de la réflexivité et de l'identité des inverses généralisés présents dans l'expression de $[h^=]$. Par ailleurs, on ne connaît pas une autre démonstration que celle de Hartwig de ce que $[h^=]$ soit un ordre, et cette démonstration semble longue.
2) Sur S_- , si $b[e]a$ alors, pour tout b^-, ab^- et b^-a sont des idempotents (*cf.* 3).

3. STUCTURES NATURELLES DES DEMI-GROUPES ∗-RÉGULIERS

La Proposition 6, préliminaire, est propre aux demi-groupes réguliers et involutés, classe dont font partie les demi-groupes ∗-réguliers, S_+, objets du paragraphe.
Etant donnée une relation $b[r]a$ sur S_+, $b^+[r]a^+$ sera notée $b[r_+]a$.

PROPOSITION 6. Sur S_{-*}, $[d_1] = [c_1]$ et $[d_2] = [c_2]$.
6 résulte directement de 1.2 donnée sur S_*, et du Théorème 1 selon lequel $[g_1]=[g_2]=[h]$ sur S_-.

PROPOSITION 7. Sur S_+,
7.1 $b[Suf]a$ ssi $a=wb$ et $w=ab^+$
7.2 $b[Pref]a$ ssi $a=bx$ et $x=b^+a$
7.3 $Suf=Pref_+$ et donc $Pref=Suf_+$ et $[u]=[u_+]$
7.4 $Suf=Pref=[u]=[n]=[p]$ sur les projecteurs
7.5 $b[Pref]a$ ssi $bb^+[p]aa^+$.

7.1 et 7.2 sont des corollaires de la Proposition 2, car $b^+\in b^{(-)}$.
$a=ab^+b$ ssi $a^+a=a^+ab^+b$ ssi $a^+a=b^+ba^+a$ ssi $a^+=b^+ba^+$, d'où $Suf=Pref_+$.
Si a et b sont des projecteurs, alors $b=b^+$ et donc $b[Suf]a$ ssi $b[Pref]a$ ssi $a=ab$ ssi $b[p]a$ (selon le Théorème 1, $[u]=[n]$). Pour 7.5, $a=bb^+a$ ssi $aa^+=bb^+aa^+$ ssi $aa^+=aa^+bb^+$.

Introduisons les relations auxiliaires : $b[idem]a$ ssi l'un au moins des éléments ab^+, b^+a est un idempotent, $b[aut]a$ ssi $b^+a=(b^+a)^*$, $b[aut^*]a$ ssi $ab^*=ba^*$,
$b[aut^-]a$ ssi b^- existe tel que $b^-a=(b^-a)^*$. Et $Aut \equiv aut \cup aut^* \cup aut^- \cup aut_+$.

PROPOSITION 8. Sur S_+,
8.1 $[u]\cap aut = [u]\cap aut^* = [u]\cap aut^-$
8.2 $[e] = [u]\cap idem = [u]\cap Idem$
8.3 $[c_1] \subseteq [e]\cap aut$.

Pour la première égalité de 8.1, en effet, $ab^*=bb^+ab^* = (b(b^+a)b^*)^* =ba^*$, et en sens inverse $(ab^* =ba^*) \Rightarrow (b^+(ab^*)b^{*+}=b^+(ba^*)b^{*+}) \Rightarrow (b^+(ab^+b)=(b^+ab^+b)^*) \Rightarrow (b^+a=(b^+a)^*)$.
Evidemment, $aut \subseteq aut^-$. Et, si $b[u]a$ et $b[aut^-]a$, alors $b^+a=b^+(bb^-a)=(b^-ab^+b)^*=(b^-a)^*=(b^+a)^*$ et donc $b[aut]a$ (car $b[u]a$ ssi $a=bb^-a=ab^+b$, selon 2.2 et 7.1).
8.2 est un corollaire du Théorème 1 selon lequel $[e] = [u]\cap Idem$, car $b^+\in b^{(-)}$.
Pour 8.3, si u et un projecteur v existent tels que $a=ub=bv$, alors $a=av$, $a^+=va^+$, $a^+a=va^+a$ et donc $b^+(a)va^+a=b^+a=b^+(bv)va^+a=(b^+a)^*$.

PROPOSITION 9. Sur S_+, $[e]\cap aut = [e]\cap aut_+ \subseteq idem_+$.
Selon le Théorème 1, $[e] \subseteq lin$. Ainsi $b[e]a$ implique $a=ab^+a$, sur S_+.
Il sera fait appel aussi à l'égalité $a^{+*} = (a^+aa^+)^* =aa^+a^{+*}$.

Si $b[e]a$ et $b[aut]a$, alors
$ba^+=ba^+(ab^+a)a^+=b(b^+aa^+a)^*a^+=bb^+aa^+=aa^+$, et donc $b[aut_+]a$ et $b[idem_+]a$.
Si $b[e]a$ et $b[aut_+]a$, alors
$b^+a=b^+(ab^+b)a^+a=b^+(ab^+a^{+*}b^*)a=b^+(ab^+aa^+a^{+*}b^*)a=b^+(ba^+)a=(b^+a)^*$.

PROPOSITION 10. $[e_+]$ est une relation d'ordre sur S_+.

Comme $[e]$ en effet, $[e_+]$ est un préordre sur S_+. $[e]$ est antisymétrique sur S, donc sur S_+ ; d'où $b^+[e]a^+$ et $a^+[e]b^+$ impliquent $a^+=b^+$. Or $a^+=b^+$ ssi $a=b$ sur S_+ : $[e_+]$ est un ordre sur S_+.

THÉORÈME 2. Sur S_+,
(1) $[e_+]$, $[c_1]$ et $[d_1]$ sont des relations d'ordre ,
(2) $[d_1] = [c_1] \subseteq [e_+] \subseteq [u]$, (3) $[u]=[u_+]$ et $[c_1]=[c_{1+}]$,
(4) $[c_1] = [u] \cap (\mathrm{Idem} \cup \mathrm{idem} \cup \mathrm{idem}_+) \cap \mathrm{Aut} = [e] \cap \mathrm{Aut} = [e_+] \cap \mathrm{Aut}$,
(5) $[c_1]=[e_+]=\mathrm{Suf}=[p]$ sur les projecteurs.

Démonstration.
Pour (1), $[c_1]$ est réflexive et antisymétrique (*cf.* 1).
Et pour la transitivité, si $a=ub$ et $b=yc$ avec u et y des projecteurs, alors $a=ua$, $aa^+=aa^+u$, $a=aa^+b$ et de même $b=bb^+c$. Alors, $a=aa^+bb^+c=aa^+c$ avec le projecteur aa^+.
Ainsi, $[c_1]$, égale à $[d_1]$, est un ordre sur S_+, comme $[e_+]$ (*cf.* 6 et 10).
Pour (2), (3) et (4),
selon 8.2, $[e] = [u] \cap \mathrm{idem} = [u] \cap \mathrm{Idem}$ et donc $[e_+] = [u] \cap \mathrm{idem}_+$ (car $[u]=[u_+]$, *cf.* 7.3). D'où $[e] \cap \mathrm{aut} = [e] \cap (\mathrm{aut}^* \cup \mathrm{aut}^-)$ et $[e_+] \cap \mathrm{aut} = [e_+] \cap (\mathrm{aut}^* \cup \mathrm{aut}^-)$, selon 8.1.
Et, d'après 8.3 et 9, $[c_1] \subseteq [e] \cap \mathrm{aut} = [e] \cap \mathrm{aut}_+ \subseteq \mathrm{idem}_+$,
d'où $[c_{1+}] \subseteq [e_+] \cap \mathrm{aut}_+ = [e_+] \cap \mathrm{aut} \subseteq \mathrm{idem}$.
Or, *a)* si $[e] \cap \mathrm{aut}_+ \subseteq \mathrm{idem}_+$, alors $[e] \cap \mathrm{aut}_+ \subseteq [u] \cap \mathrm{aut}_+ \cap \mathrm{idem}_+ = [e_+] \cap \mathrm{aut}_+$
car $[e] \subseteq [u]$, et de même si $[e_+] \cap \mathrm{aut} \subseteq \mathrm{idem}$, alors $[e_+] \cap \mathrm{aut} \subseteq [e] \cap \mathrm{aut}$.
Ainsi $[e] \cap \mathrm{Aut} = [e_+] \cap \mathrm{Aut}$.
Et, *b)* si $b[e]a$ et $b[aut]a$ alors, selon 7.1 et 7.2, $a=wb=bx$ avec x un projecteur, *i.e.* $b[c_1]a$.
Ainsi $[e] \cap \mathrm{aut} \subseteq [c_1]$, donc $[e_+] \cap \mathrm{aut}_+ \subseteq [c_{1+}]$.
(2), (3) et (4) sont obtenues. Pour (5), il suffit de montrer $[p] \subseteq [c_1]$, selon (2) et 7.4, et c'est immédiat. Le Théorème 2 est démontré.

Prenons la duale de Aut : $\underline{\mathrm{Aut}} \equiv \underline{\mathrm{aut}} \cup \underline{\mathrm{aut}}^* \cup \underline{\mathrm{aut}}^- \cup \underline{\mathrm{aut}}_+$, avec $b[\underline{\mathrm{aut}}]a$ ssi $ab^+=(ab^+)^*$, $b[\underline{\mathrm{aut}}^*]a$ ssi $b^*a=a^*b$ et $b[\underline{\mathrm{aut}}^-]a$ ssi b^- existe tel que $ab^-=(ab^-)^*$.

COROLLAIRE 2. Sur S_+, (1) $[c_2]$, $[d_2]$ et $[d]$ sont des relations d'ordre ,
(2) $[d_2] = [c_2] \subseteq [e_+]$, (3) $[c_2] = [c_{2+}]$ et $[d] = [d_+]$,
(4) $[c_2] = [u] \cap (\mathrm{Idem} \cup \mathrm{idem} \cup \mathrm{idem}_+) \cap \underline{\mathrm{Aut}} = [e] \cap \underline{\mathrm{Aut}} = [e_+] \cap \underline{\mathrm{Aut}}$,
(5) $[d] = [u] \cap (\mathrm{Idem} \cup \mathrm{idem} \cup \mathrm{idem}_+) \cap \mathrm{Aut} \cap \underline{\mathrm{Aut}} = ([e] \cup [e_+]) \cap \mathrm{Aut} \cap \underline{\mathrm{Aut}}$,
(6) $[c_2]=[d]=\mathrm{Suf}=[p]$ sur les projecteurs .

A partir du Théorème, les propositions relatives à $[c_2]$ sont établies par dualité, et celles portant sur $[d]=[c_1] \cap [c_2]$ s'en déduisent. Pour (6), se reporter à 1.6 .

4. STRUCTURES NATURELLES DES DEMI-GROUPES INVOLUTÉS

Drazin (1978) présente deux expressions pour l'ordre qu'il propose. On les a notées $[d^*]$ et $[d^+]$. Toutes les deux supposent que S soit muni d'une involution. Mais $[d^*]$ est un ordre si S est d-involuté, et $[d^+]$ est définie sur S_+ (*cf. supra*).

On présente des expressions similaires à propos de $[e_+]$, $[c_1]$, $[c_2]$, $[d_1]$ et $[d_2]$. Celles, analogues à $[d^+]$, qui sont définies sur S_+ permettent de mettre en évidence les relations $[b^*]$, $[c_1{}^*]$, $[c_2{}^*]$, $[d_1{}^*]$ et $[d_2{}^*]$ qui sont définies plus généralement sur S_*.

Introduisons les relations auxiliaires :
b[Plus]a ssi $a^+=a^+ba^+$ et b[Plus*]a ssi $aa^*a=ab^*a$,
b[Sufr]a ssi $a^+a=a^+b$ et b[Sufr*]a ssi $a^*a=a^*b$,
b[Prefr]a ssi $aa^+=ba^+$ et b[Prefr*]a ssi $aa^*=ba^*$.

Définitions.
$[b^*]\equiv[u]\cap$ Plus*, $[c_1{}^*]\equiv$ Suf$\cap$Prefr* et $[c_2{}^*]\equiv$ Pref$\cap$Sufr*, $[d_1{}^*]\equiv[e]\cap$Prefr* et $[d_2{}^*]\equiv[e]\cap$Sufr*.

PROPOSITION 11. Sur S_+,

11.1 Plus = Plus*, Prefr = Prefr* et Sufr = Sufr*
11.2 $[e_+] = [b^*] = [u]\cap$Plus
11.3 $[c_1] = [c_1{}^*] =$ Suf$\cap$Prefr et $[c_2] = [c_2{}^*] =$ Pref$\cap$Sufr
11.4 $[d_1] = [d_1{}^*]$, $[d_2] = [d_2{}^*]$ et $[d] = [d^*] = [d^+]$.

Plus=Plus*, car si $a^+=a^+ba^+$, alors $(a^*a)a^+(aa^*)=(a^*a)a^+ba^+(aa^*)$ et donc $a^*aa^*=a^*ba^*$.
En général, $a^+=a^+aa^+=a^+(aa^+)^*=a^+a^{+*}a^*$, et $a^+=a^*a^{+*}a^+$. D'où, si $a^*aa^*=a^*ba^*$, alors $a^+=a^+ba^+$ (en composant à gauche par a^+a^{+*}, et à droite par $a^{+*}a^+$).
11.2 suit, car $b[e_+]a$ ssi u et v existent tels que $a^+=ub^+=b^+v=ub^+v=ub^+bb^+v$, ssi b[u]a et $a^+=a^+ba^+$ (car $[u]=[u_+]$).
Pour 11.1 et 11.3, si $aa^*=ba^*$, alors $aa^+=ba^+$ (en composant à droite par $a^{+*}a^+$).
Si $aa^+=ba^+$, alors $a=(aa^+)a=bv$ avec v un projecteur.
Si a=bv avec un projecteur v, alors a=bvv=av, $a^*=va^*$ et donc $aa^*=bva^*=ba^*$.
Ainsi, Prefr=Prefr*. Mais aussi $[c_1]=[c_1{}^*]=$Suf$\cap$Prefr, car par définition $b[c_1]a$ ssi un projecteur v existe tel que a =bv et b[Suf]a.
Et par dualité Sufr=Sufr* et $[c_2]=[c_2{}^*]=$Pref$\cap$Sufr.
Pour 11.4, sur S_+, [e]=[h] (*cf.* Th.1), et b[Prefr*]a ssi un projecteur v existe tel que a=bv (voir ci-dessus). Par conséquent, $[d_1{}^*]=[e]\cap$Prefr*$=[d_1]$. (De même, $[d_2{}^*]=[d_2]$).
Enfin, $[d]=[c_1]\cap[c_2]=[c_1{}^*]\cap[c_2{}^*]$. Et [d]=Sufr$\cap$Prefr, car Sufr$\subseteq$Suf et Prefr$\subseteq$Pref.
Il suit que $[d]=[d^*]=[d^+]$.

Remarques.
Les égalités $[d]=[d^*]=[d^+]$ montrent que b[d]a est bien l'expression directe de l'ordre de Drazin (1978) sur S_+, et qu'ainsi la Proposition 1 et le Corollaire 2 concernent cet ordre.
$[b^*]$, $[c_1{}^*]$, $[c_2{}^*]$, $[d_1{}^*]$ et $[d_2{}^*]$ sont incluses dans Suf ou (et) Pref, suivant le cas. Dans ce qui suit, on supposera que ces deux relations sont réflexives.

PROPOSITION 12. Sur S_*, $[b^*]$ est un préordre. Sur les isométries partielles, $[b^*]=[e]=[h]$ et $[b^*]$ est un ordre.

En effet, la relation $aa^*a=ab^*a$ est réflexive, et $[b^*]$ est transitive car si u et v existent tels que a=ub=bv et $aa^*a=ab^*a$, et si $bb^*b=bc^*b$, alors $aa^*a=ab^*a=ubb^*bv=ubc^*bv=ac^*a$.
Sur les isométries partielles (*i.e.* les éléments $a\in S_*$ tels que $a=aa^*a$), si u et v existent tels que a=ub=bv, alors $ab^*a=ubb^*bv=ubv$ et donc $[b^*]=[e]$. Les isométries partielles étant régulières, $[b^*]$ est un ordre et [e]=[h] , d'après le Théorème 1.

Note.
Drazin (1978) et Hartwig (1980) s'intéressent aussi au cas des isométries partielles, dont en particulier les projecteurs : ils notent que [d*] est alors un ordre. Dans ce cas cependant $a^*=a^+$; on est ainsi ramené dans le contexte du paragraphe 3, S_+. Ce sont donc des thèmes dont on ne poursuivra pas l'examen.

THÉORÈME 3. Sur S_*, (1) $[c_1] \subseteq [d_1^*] \subseteq [c_1^*] \cap \mathrm{Pref} \subseteq [b^*] \subseteq [u]$,
(2) $[c_1^*]$ et $[b^*]$ sont des préordres et $[d_1^*]$ est un ordre,
(3) $[c_1^*]$ et donc $[c_1^*] \cap \mathrm{Pref}$ sont des ordres , si S est d-involuté,
(4) $b[b^*]a$ ssi $b^*[b^*]a^*$, $b[c_1^*]a$ ssi $b^*[c_2^*]a^*$, $b[d_1^*]a$ ssi $b^*[d_2^*]a^*$.

Démonstration.
Si u et un projecteur v existent tels que a=ub=bv, alors $a^*=va^*$ et donc $aa^*=ba^*$.
Ainsi, $[c_1] \subseteq \mathrm{Prefr}^*$ et donc $[c_1] \subseteq [d_1^*]$ (car $[c_1] \subseteq [e]$ selon 1).
Et $[d_1^*]=(\mathrm{Prefr}^* \cap [u]) \cap [e] \subseteq [c_1^*] \cap \mathrm{Pref}$ (car $[e] \subseteq [u]$).
Si a=ub=bv et $aa^*=ba^*$, alors $aa^*a=ab^*a$ et donc $b[b^*]a$.
Pour la transitivité de $[c_1^*]$, si u et w existent tels que a=ub, b=wc, et si $aa^*=ba^*$ et $bb^*=cb^*$, alors $aa^*=bb^*u^*=cb^*u^*=ca^*$.
Et $[d_1^*]$ est un ordre comme intersection d'un préordre et d'un ordre,
car $[e] \cap [c_1^*] = [e] \cap \mathrm{Sufr}^* = [d_1^*]$.
Si S est d-involuté (*cf. supra*), alors $[c_1^*]$ est antisymétrique. Alors, en effet, si $a^*a=a^*b=b^*a$ et $b^*b=b^*a$, alors a=b. (4) est aisément obtenue.

COROLLAIRE 3.1. Sur S_*, (1) $[c_2] \subseteq [d_2^*] \subseteq [c_2^*] \cap \mathrm{Suf} \subseteq [b^*]$,
(2) $[c_2^*]$ est un préordre et $[d_2^*]$ est un ordre,
(3) $[c_2^*]$ et donc $[c_2^*] \cap \mathrm{Suf}$ sont des ordres , si S est d-involuté.

Le Corollaire est établi (par dualité).

COROLLAIRE 3.2. Sur S_*, (1) $[d] \subseteq [d^*] \cap [r]$ avec [r] pour chacune des relations canoniques, (2) $[d^*] \cap [u] \subseteq [b^*]$, (3) $[d^*] \cap [e]$ est un ordre, (4) [d*] et $[d^*] \cap [u]$ sont des préordres, et sont des ordres si S est d-involuté.

Le Corollaire procède immédiatement du Théorème 3 et de son premier Corollaire. Que [d*] soit un ordre, si S est d-involuté, est donc le résultat de Drazin (1978).

La proposition 13, suivie de quelques observations, ferme la partie consacrée aux demi-groupes. Elle porte à titre principal sur la condition des d-involutions, laquelle ne paraît avoir été véritablement introduite que par l'article de Drazin. Le fait que ce soit avec elle que les préordres $[d^*]=\mathrm{Sufr}^* \cap \mathrm{Prefr}^*$, $[c_1^*]$ et $[c_2^*]$ deviennent des ordres de S_* conduit à s'interroger sur cette condition, qui est équivalente à l'antisymétrie de Sufr* (et de Prefr*) comme le souligne 13.1. Son examen sera prolongé en théorie des anneaux.

PROPOSITION 13.

13.1 S est d-involuté ssi Sufr* (ou Prefr*) est antisymétrique
13.2 S_+ est d-involuté ssi la relation a=ub, où u est un projecteur, est antisymétrique
pour tout $a,b \in S_+$, ssi $(a^+a=a^+b=b^+a=b^+b) \Rightarrow (a=b)$ pour tout $a,b \in S_+$
13.3 les demi-groupes inverses S_{-1}, dont les groupes, sont d-involutés
13.4 sur S_{-1}, Lin=lin=Ind=ind=[e].

En effet, b[Sufr*]a est antisymétrique ssi $a^*a=a^*b$ et $b^*b=b^*a=(b^*a)^*=a^*b$ impliquent a=b, ssi S est d-involuté, ssi b[Prefr*]a est antisymétrique (car b[Prefr*]a ssi b*[Sufr*]a*).

Pour 13.2, $Sufr^*=Sufr$ sur S_+ , et b[Sufr]a ssi un projecteur u existe tel que $a=ub$ (comme montré à propos de 11.1 et par dualité).
Si b[Suf]a et a[Suf]b, alors $a^+a=a^+(ab^+b)=(b^+ba^+a)^*=b^+b$ (*cf.* 7.1).
Ainsi, b[Sufr]a et a[Sufr]b ssi $a^+a=a^+b=b^+a=b^+b$ (car Sufr $\subseteq$ Suf).
Pour 13.3, $(.)^{-1}$ est une d-involution ssi $a^{-1}a=a^{-1}b$ est une relation antisymétrique, selon 13.1. Or, b[v]a ssi $a^{-1}a=a^{-1}b$, et [v] est antisymétrique.
Quant à 13.4, sur S_- , $[e]\subseteq Lin\subseteq lin\subseteq ind\subseteq Ind$, avec b[Ind]a ssi b^- existe tel que $a=ab^-a$. Si un tel b^- existe, alors b^-ab^- est un inverse réflexif de a, et est aussi solution de l'équation $x=xbx$.
Sur S_{-1}, où tout élément possède un inverse réflexif unique : $b^-ab^-=a^{-1}$ et donc $a^{-1}=a^{-1}ba^{-1}$.
Ainsi, $a^{-1}b$ est un idempotent, et $a^{-1}a=a^{-1}ba^{-1}a=a^{-1}aa^{-1}b=a^{-1}b$ (les idempotents commutent sur S_{-1}). D'où $Ind\subseteq[v]=[e]$, et 13.4 est atteinte, de par le Théorème 1 .

Remarques.
1) A quelle condition 13.4, qui a été donnée sur S_{-1}, reste-t-elle vraie lorsque l'on s'affranchit de l'exigence de l'unicité des inverses réflexifs des éléments de S_- (unicité qui caractérise S_{-1}) ? Une réponse partielle sera apportée par le Théorème 6.
2) Les termes du théorème de Wolk (*cf.* Schein (1976), Mallol *et al.* (1985)) sont rappelés : une relation binaire réflexive et antisymétrique est régulière si et seulement si elle est transitive.
Ce théorème permet ici de lier les conditions de régularité des éléments à celles des relations. Par exemple, si b est régulier, alors $[g_1]$ est régulière (et a est régulier). En effet, $[g_1]$ est antisymétrique et réflexive (*cf.* 1.4), et si b est régulier alors $[g_1]$ est un ordre : $[g_1]$ est idempotente, donc régulière. Dans quelle mesure la régularité de b est-elle équivalente à la transitivité de $[g_1]$?
3) Les définitions des relations binaires canoniques demandent l'existence d'éléments u et v satisfaisant à certaines conditions... On a noté que, pour chacune d'elles (et sur S_- ou S_+ suivant le cas), il est possible en bref de remplacer u par ab^- et v par b^-a, sujets aux mêmes conditions.
4) - Certaines des treize relations qui sont l'objet du Théorème 1 stipulent la régularité de a, tandis que chacune des autres l'implique dès lors que b est régulier. Et on peut lire son énoncé avec la condition de la seule régularité de b à la place de la référence à S_-.
- Il en est de même à propos de la $*$-régularité, mais d'une façon qu'une étude en cours devra préciser. On peut en tout cas substituer la condition $a,b\in S_+$ à la référence à S_+.
(Cette double observation vaut pour les énoncés qui vont être donnés sur les anneaux).
Essentiellement, les relations canoniques ordonnent des éléments réguliers ou $*$-réguliers ([e] et [u] mises à part) ; tout comme les relations de Hartwig et de Drazin $[d^+]$ qui ne peuvent être des ordres sans que b soit lui aussi régulier ou (resp.) $*$-régulier (puisque a l'est par hypothèse).
5) Enfin, une c.n.s. pour qu'un demi-groupe S_* soit $*$-régulier est que, pour tout $a\in S_*$, a^*a et aa^* soient tous deux réguliers - d'après Drazin (1978). Une hypothèse est que la régularité de l'un suffise pour que $[c_1]$ ou $[d_1]$ soient des ordres, ou pour que ces relations soient égales. Et la régularité de l'autre, de même, pour $[c_2]$ et $[d_2]$.

5. STRUCTURES NATURELLES DES ANNEAUX RÉGULIERS

Les relations canoniques définies sur S sont considérées d'abord sur les anneaux réguliers A_-, où il apparaît qu'elles sont intimement liées à la notion d'inverse contraint, puis - en continuant la spécialisation - sur les anneaux réguliers et premiers. ([e] représentera les relations qui lui sont égales sur S_-.)
On rappelle que, lorsque l'on passe aux anneaux, le support se trouve muni d'une seconde loi interne : +, qui est une loi de groupe abélien d'élément neutre 0, par rapport à laquelle la première loi est distributive à gauche et à droite. Son introduction dicte la considération de 14, qu'il est utile d'expliciter d'emblée.

PROPOSITION 14. b[r]a ssi b[r]b-a , avec [r] pour chacune des relations canoniques sur A unitaire , avec [r] pour [u] et [e] sur A_- , et avec [r] pour [c_1], [c_2] et [d] sur A_+ .

La vérification de ces assertions est aisée. On en montre des exemples.

Si b[e]a, alors b-a=(1-u)b=b(1-v)=(1-u)b(1-v) et donc b[e]b-a (en notant 1, l'élément unité).
De même sur A_- , où [e]=[u]$\cap$Ind. Si b[e]a, alors $a=ab^-b=bb^-a=ab^-a$,
et donc $b-a=(b-a)b^-b=bb^-(b-a)$ et $b-a=b - bb^-a - ab^-b + ab^-a=(b-a)b^-(b-a)$; d'où b[e]b-a .
Les réciproques s'ensuivent, car si b[r]a implique b[r]b-a pour tout a,b, alors b[r]c implique b[r]b-c avec c=b-a.

THÉORÈME 4. Sur A_-, b[e]a est équivalente à (1) $b^{(-)} \cap a^{(-)} \cap (b-a)^{(-)} \neq \varnothing$,
(2) $b^{(=)} \cap a^{(-)} \cap (b-a)^{(-)} \neq \varnothing$, (3) $b^{(-)} \subseteq a^{(-)} \cap (b-a)^{(-)}$, (4) $b^{(=)} \subseteq a^{(-)} \cap (b-a)^{(-)}$,
et (5) b[Lin]a ou b[lin]a, et b[r]b-a avec r pour Lin, lin, Ind ou ind.

Démonstration.
Sur A_-, b[e]a ssi b[e]b-a , selon 14. b[e]a implique donc (5) (dont explicitement (3) et (4)) et (2), d'après le Théorème 1. Et, il est manifeste que (5) et (2) impliquent chacune (1).
Si (1) , alors b^- existe tel que $a=ab^-a$ et $b-a=(b-a)b^-(b-a)$. Alors ab^- et b^-a sont des idempotents,
$b-a=b - bb^-a - ab^-b + ab^-a$ et donc $bb^-a + ab^-b=a + a$.
Et, en composant à gauche par ab^- et à droite par b^-a : $ab^-bb^-a + ab^-b= a + a =bb^-a + ab^-bb^-a$.
Il suit des trois égalités précédentes que $ab^-b=bb^-a=a$; d'où b[u]a.
Le Théorème est démontré, car [e]=[u]$\cap$Idem (*cf.* Th.1).

Ordres naturels et inverses contraints

Définition.
Un "inverse de a contraint par b" est un inverse généralisé de a qui est solution de l'équation axb=0 .
On s'intéresse à l'ensemble des inverses de a contraints par b-a, noté $a^{(\sim)}$, et à celui des inverses de b-a contraints par a, noté $(b-a)^{(\sim)}$.

Note.
Ces deux seuls ensembles seront ici définis ; ce qui explique cette notation simplifiée qui oublie les références. (Cette remarque la justifierait autrement : les lignes qui suivent montrent la proximité de la définition bien établie des inverses contraints de celle des ordres naturels, et quelques conséquences en seront tirées en conclusion. Mais la définition suivante pourrait être proposée sur S : un inverse de a restreint par b est un inverse de a qui est solution de l'équation a=axb. Alors, $(.)^{\sim}$ signifierait dans chaque cas qu'il s'agit d'un inverse "restreint par b"...)

PROPOSITION 15. Sur A_-, $a^{(\sim)} \neq \varnothing$ ssi $(b-a)^{(\sim)} \neq \varnothing$ ssi il existe un idempotent u tel que a=ub.

D'après la définition, en effet, $a=aa^{\sim}a=aa^{\sim}b$, où $aa^{\sim}$ est donc un idempotent. Si un idempotent u existe tel que a=ub, alors $a=ua=aa^-ub$ et donc $a^-u \in a^{(\sim)}$. Et de même en remplaçant a par b-a.

PROPOSITION 16. Sur A_-, $a^{(\sim)} \cap (b-a)^{(\sim)} \subseteq b^{(-)}$.

En effet, si $x \in a^{(\sim)}$, alors a=axa, ax(b-a)=0 et donc a=axb.
Et, si $x \in (b-a)^{(\sim)}$, alors b-a=(b-a)x(b-a), (b-a)xa=0 et donc b-a=bxb-axb. Ainsi, pour tout élément x de l'intersection, b=bxb.

PROPOSITION 17. Sur A_-,

17.1 $b^{(-)} \subseteq a^{(\sim)}$ ssi b[Lin]a et b[Suf]a
17.2 $b^{(-)} \subseteq (b-a)^{(\sim)}$ ssi b[Lin]b-a et b[Suf]a.

Si $b^{(-)} \subseteq a^{(\sim)}$, alors $b^{(-)} \subseteq a^{(-)}$ (car $a^{(\sim)} \subseteq a^{(-)}$) et b[Suf]a (car alors $a^{(\sim)} \neq \varnothing$, *cf.* 15).

Si $b^{(-)} \subseteq a^{(-)}$ et b[Suf]a, alors pour tout b^- : $a=ab^-a$ et $ab^-(b-a)=0$ (*cf.* 2.1), *i.e.* $b^{(-)} \subseteq a^{(\sim)}$.
De même pour 17.2, et puisque b[Suf]a ssi b[Suf]b-a sur A_{--}.

THÉORÈME 5. Sur A_{-}, b[e]a est équivalente à (1) $a^{(\sim)} \cap (b-a)^{(\sim)} \neq \varnothing$,
(2) $b^{(-)} = a^{(\sim)} \cap (b-a)^{(\sim)}$, (3) $a^{(\sim)} \neq \varnothing$ et b[Pref]a, (4) $(b-a)^{(\sim)} \neq \varnothing$ et b[Pref]a,
(5) $b^{(-)} \subseteq a^{(\sim)}$ et b[Pref]a, et (6) $b^{(-)} \subseteq (b-a)^{(\sim)}$ et b[Pref]a.

Démonstration.
L'équivalence de (3) et celle de (4) avec b[e]a sont justifiées par 15, car b[g_2]a ssi un idempotent u existe tel que a=ub et b[Pref]a, et puisque [e]=[g_2] sur A_- (*cf.* Th.1).
L'équivalence de (5) et celle de (6) avec b[e]a procèdent de 17 et du Théorème 1 selon lequel [e]=Lin$\cap$Suf$\cap$Pref (b[e]a ssi b[e]b-a selon 14).
(5) et (6) impliquent (2), selon 16. Et (2) implique (1).
Si (1), alors $a^{(\sim)} \cap (b-a)^{(\sim)} \cap b^{(-)} \neq \varnothing$ selon 16, alors $a^{(-)} \cap (b-a)^{(-)} \cap b^{(-)} \neq \varnothing$,
et donc b[e]a d'après le Théorème 4.

Ordres naturels et anneaux premiers

Les deux Propositions et le Théorème qui suivent sont relatifs aux anneaux premiers.
A est premier ssi, pour $a,c \in A$, ahc=0 pour tout $h \in A$ implique a=0 ou c=0.
(*Cf.* Mc Coy (1966) p.72, *e.g.*).

PROPOSITION 18.

18.1 A est premier ssi ab^-c est invariant pour tout b^- et b=0 impliquent a=0 ou c=0.
18.2 Sur A_- premier, si ab^- (b^-a, ab^-b ou bb^-a) est nul pour tout b^-, alors a=0 ou b=0.

0 est un élément régulier et $0^{(-)}= A$. Ainsi, 18.1 reformule la condition des anneaux premiers, car si ahc est nul pour tout $h \in A$, alors $ah_1c=ah_2c$ pour tout $h_1, h_2 \in A$.
Réciproquement, si ahc est invariant pour tout $h \in A$, alors ahc=a0c=0 pour tout $h \in A$.

Pour 18.2. Soit b^- une solution (particulière) de l'équation b=bxb. La solution générale est bien connue : $b^-+h - b^-bh+k - kbb^-$ pour tout $h,k \in A$.

Si ab^- est nul pour tout b^-, alors de même pour ab^-b. Alors, en particulier (k=0) :
$a(b^-+h - b^-bh)b=ahb=0$ pour tout $h \in A$, et donc a=0 ou b=0, A étant premier.
Egalement, si b^-a est nul pour tout b^-, alors de même pour bb^-a. Alors, en particulier (h=0), bka=0 pour tout $k \in A$, et donc a=0 ou b=0.

PROPOSITION 19. Pour tout a,b et c non nuls d'un anneau premier et régulier,

19.1 b[Suf]a et b[Pref]c ssi ab^-c est invariant pour tout b^-
19.2 ab^-c est invariant pour tout b^- ssi $ab^=c$ est invariant pour tout $b^=$.

Seules les réciproques sont à montrer selon 2.4 et puisque $b^{(=)} \subseteq b^{(-)}$.
Pour 19.1 (la solution générale de l'équation b=bxb ayant été rappelée à propos de 18.2), si ab^-c est invariant pour tout b^-, alors en particulier (k=0) :

$ab^-c=a(b^-+h - b^-bh)c=ab^-c+(a - ab^-b)hc$, pour tout $h \in A$. Ainsi $(a - ab^-b)hc=0$ pour tout $h \in A$, et donc $a=ab^-b$ (d'où b[Suf]a) car c est non nul. (De même, b[Pref]c, obtenue avec h=0).

Pour 19.2, a, b et c sont non nuls, donc aussi $ab^{\boldsymbol{-}}b$ et $bb^{\boldsymbol{-}}c$ pour certains inverses généralisés de b, par contraposition de 18.2. Par ailleurs, $b^{(=)}=\{xby : x,y \in b^{(-)}\}$.

Ainsi, l'invariance de $ab^{=}c$ pour tout $b^{=}$, est celle de $a(b^{-}bb^{-})c=(ab^{\boldsymbol{-}}b)b^{-}c=ab^{-}(bb^{\boldsymbol{-}}c)$ pour tout b^{-} ; 19.1 est applicable (deux fois) et ainsi b[Suf]a et b[Pref]c. D'où l'invariance de $ab^{-}c$ pour tout b^{-}.

Remarque.
En des termes équivalents, 19.1 est semi-classique pour les matrices réelles. (Rao et Mitra (1971) la donnent (p.43) sans la condition que les matrices ne soient pas les matrices nulles.) *Cf.* Mitra (1980), par exemple.

THÉORÈME 6. Sur A_{-} premier,

(1) b[u]a ssi $ab^{-}a$ est invariant pour tout b^{-} ssi $ab^{=}a$ est invariant pour tout $b^{=}$,

(2) b[e]a ssi $b^{(-)} \subseteq a^{(\sim)}$ ssi $b^{(=)} \subseteq a^{(\sim)}$,

(3) Lin = lin = [e] .

Démonstration.
(1) est un corollaire de 19, pour a et b non nuls. Si a=0, alors b[u]a, car a=ub=bv, avec $u=k - kbb^{-}$ et $v=h - b^{-}bh$. Si b=0, alors a=0 selon 18.1.

(3) suit, car b[lin]a ssi $a=ab^{=}a$ pour tout $b^{=}$. En effet, Lin$\subseteq$lin$\subseteq$[u] selon (1), et donc Lin=lin=[e] d'après le Théorème 1.

Quant à (2), si $b^{(-)} \subseteq a^{(\sim)}$, alors $b^{(=)} \subseteq a^{(\sim)}$ et donc $b^{(=)} \subseteq a^{(-)}$, *i.e.* b[lin]a.

Or lin=[e] selon (3). Par conséquent, si $b^{(-)} \subseteq a^{(\sim)}$, alors b[e]a .
Et (2) est alors justifiée par (5) du Théorème 5.

COROLLAIRE 6. Sur A - premier,
(1) si $b^{(=)} = a^{(-)}$, alors $b^{(=)} = a^{(-)} = a^{(\sim)}$,
(2) si $b^{(=)} = a^{(\sim)}$, alors $b^{(-)} = a^{(\sim)}$ et donc $b^{(=)} = b^{(-)}$,
(3) si $b^{(-)} = a^{(\sim)}$, alors $a^{(\sim)} \subseteq (b-a)^{(\sim)}$,
(4) si $b^{(-)} = a^{(-)}$, alors $b = a$.

Démonstration.
Pour (1), si $b^{(=)} = a^{(-)}$, alors $b^{(-)} \subseteq a^{(\sim)}$ (selon (2) et (3) du Théorème) ; par conséquent :

$a^{(-)} = b^{(=)} \subseteq b^{(-)} \subseteq a^{(\sim)} \subseteq a^{(-)}$.

Pour (2), si $b^{(=)} = a^{(\sim)}$, alors $a^{(\sim)} = b^{(=)} \subseteq b^{(-)} \subseteq a^{(\sim)}$ (selon (2) du Théorème).
Pour (4), si $b^{(-)} = a^{(-)}$, alors b[Lin]a et a[Lin]b, et donc a = b (Lin, égale à [e], étant anti-symétrique ; *cf.* Théorèmes 1 et 6). Enfin, (3) résulte directement de (2) du Théorème 5.

6. STRUCTURES NATURELLES DES ANNEAUX INVOLUTÉS

L'analyse précédente et, à son tour, celle des paragraphes 3 et 4 sont continuées sur les anneaux involutés, A_*. La définition des involutions est alors complétée par l'égalité $(a+b)^*=a^*+ b^*$.

PROPOSITION 20. Sur A_*,

20.1 Deux de ces conditions impliquent la troisième : b[Prefr*]a, a[Prefr*]b, 0[Prefr*]b-a
20.2 Prefr* est antisymétrique ssi 0[Prefr*]u implique u=0 pour tout u.

Pour 20.1, en effet, 0[Prefr*]b-a ssi $(aa^*- ba^*)+(bb^*- ab^*)=0$.
Pour 20.2, si (0[Prefr*]b-a)$\Rightarrow$(a=b), alors Prefr* est antisymétrique, selon 20.1. Et, puisque toujours u[Prefr*]0, si Prefr* est antisymétrique, alors (0[Prefr*]u)$\Rightarrow$(u=0).

PROPOSITION 21.

21.1 Si A est $*$-régulier, alors A est d-involuté

21.2 A est d-involuté ssi $uu^*=0$ implique $u=0$ pour tout u

21.3 sur A d-involuté, si $ba^*a=0$, alors $ba^*=0$.

0[Prefr*]u ssi $uu^*=0$; 21.2 est donc justifiée par 20.2 et 13.1.
Pour 21.1, $u=uu^+u=u(u^+u)^*=(uu^*)u^{+*}$. Ainsi, $(uu^*=0)\Rightarrow(u=0)$ sur A_+.
Pour 21.3, si $ba^*a=0$, alors $ba^*ab^*=ba^*(ba^*)^*=0$ et donc $ba^*=0$.

Remarque.
La condition des d-involutions est donc équivalente à une condition classique en théorie des anneaux. Ainsi, sont d-involutés, notamment, les anneaux booléens, les anneaux commutatifs sans élément nilpotent (autre que zéro), les anneaux des opérateurs linéaires bornés sur les espaces complexes de Hilbert et l'anneau des matrices complexes d'ordre n.

PROPOSITION 22. Sur A d-involuté,

22.1 b[Prefr*]a ssi $aa^*a=ba^*a$

22.2 $([e]\cup\text{Plus}^*)\cap\text{aut}^* \subseteq \text{Prefr}^*$.

En effet, si $aa^*=ba^*$, alors $aa^*a=ba^*a$. Et, si $aa^*a=ba^*a$, alors $(b-a)a^*a=0$ et donc $(b-a)a^*=0$ selon 21.3. Pour 22.2, si b[e]a et b[aut*]a, alors $a=ub=ua$, $ab^*=ba^*$ et donc :
$aa^*a=a(ub)^*a=ab^*u^*a=ba^*u^*a=ba^*a$; si b[Plus*]a et b[aut*]a, alors $aa^*a=ab^*a=(ba^*)a$.

Introduisons une dernière relation.
Sur A_*, b[l]a ssi il existe un élément x tel que $b-a=xx^*$.

Définition.
A est p-involuté ssi A est muni d'une involution $(.)^*$ telle que (1) si $aa^*+bb^*=0$ alors $a=b=0$, et (2) pour tout $a,b\in A$, il existe $x\in A$ tel que $aa^*+bb^*=xx^*$.

A est d-involuté, si A est p-involuté.
Que A soit p-involuté, est une condition "naturelle" pour que [l] soit un ordre, en ce sens que [l] est antisymétrique avec (1) et transitive avec (2). En effet, si b[l]a et a[l]b, alors x et y existent tels que $b-a=xx^*=-yy^*$. Et, si b[l]a et c[l]b, alors x et y existent tels que :
$c-a=(c-b)+(b-a)=xx^*+yy^*$.

PROPOSITION 23. Si b[Prefr*]a , alors bb^*[l]aa^* sur A_*, et bb^*[u]aa^* sur A_+.

En effet, b[Prefr*]a ssi $aa^*=ba^*=ab^*$, par définition.
Si b[Prefr*]a , alors $bb^*-aa^*=bb^*-ba^*-ab^*+aa^*=(b-a)(b-a)^*$.
Sur A_+, si b[Prefr*]a , alors $aa^*=ab^*=a(bb^+b)^*=ab^+bb^*=ubb^*$;
ainsi bb^*[Suf]aa^*, et bb^*[u]aa^* (car, en général, b[Suf]a ssi b^*[Pref]a^*).

THÉORÈME 7.

(1) Sur A_* unitaire ou régulier, si b[e]a, b[l]0 et $a=a^*$, alors b[l]a et a[l]0.

(2) Sur A d-involuté , $\text{Prefr}^*=\text{Plus}^*\cap\text{aut}^*$, $[c_1^*]\cap\text{Pref}=[b^*]\cap\text{aut}^*$, $[d_1^*]=[e]\cap\text{aut}^*$, et $b[c_1^*]a$ ssi $aa^*a=ba^*a$ et b[Suf]a.

(3) Un anneau est $*$-régulier ssi il est d-involuté et régulier.

Démonstration.
Pour (1), b[l]0 ssi x existe tel que $b=xx^*$. Si b[l]0, $a=a^*$ et b[e]a, alors x et u existent tels que $a=ub=bu^*=ubu^*=ux(ux)^*$, et donc a[l]0.
Selon 14, b[e]a ssi b[e]b-a . Ainsi, si b[l]0, $a=a^*$ et b[e]a, alors x et v existent tels que :
$b-a=vbv^*=vx(vx)^*$, et donc b[l]a.

Pour (2), $[d_1^*]=[e]\cap$Prefr* par définition. Et manifestement Prefr*$\subseteq$Plus*$\cap$aut* sur S_*. Ainsi, Prefr*=Plus*$\cap$aut* et $[d_1^*]=[e]\cap$aut*, selon 22.2. Le reste est alors déduit simplement des définitions de $[c_1^*]$ et de [b*], et de 22.1.
Pour (3), seule la réciproque de 21.1 est à établir. D'après le lemme 6.4 de Berberian (1972), si (uu*=0)$\Rightarrow$(u=0) pour tout u d'un anneau régulier, alors cet anneau est $*$-régulier (*cf.* 21.2).

COROLLAIRE 7.1. Sur A d-involuté,
(1) Sufr*=Plus*$\cap\underline{\text{aut}}$*, $[c_2^*]\cap$Suf=[b*]$\cap\underline{\text{aut}}$*, $[d_2^*]=[e]\cap\underline{\text{aut}}$*,
et $b[c_2^*]a$ ssi aa*a=aa*b et b[Pref]a,
(2) [d*]=Plus*$\cap$aut*$\cap\underline{\text{aut}}$* et b[d*]a ssi aa*a=aa*b=ba*a.
(3) $b[c_2]a$ ssi $a^+\in a^{(\sim)}$ et b[Pref]a, sur A_+.

(1) est vraie par dualité. (2) s'ensuit car [d*]=Prefr*$\cap$Sufr*, par définition, et selon 22.1.
Pour (3), $a^+\in a^{(\sim)}$ ssi $aa^+(b-a)=0$ ssi $a^+(b-a)=0$ ssi b[Sufr*]a.

Remarques.
1) Le Théorème 7 (joint à la Proposition 1) donne donc les conditions (b[l]0 et a=a*) de la compatibilité de chacune des relations binaires canoniques, autres que [u], avec [l].
Quid de [u] et [l] ? Une réponse sera apportée par le Théorème 8 et Corollaire.
2) Hartwig (1980) montre que $[d^+]$ est un ordre de S_+ sans que S soit d-involuté. La même conclusion a été atteinte à propos de $[c_1]$ et de $[c_2]$ (Th.2 et Corollaire). Ce n'est plus vrai sur les anneaux qui sont d-involutés dès lors qu'ils sont $*$-réguliers. *A contrario*, un anneau d-involuté n'étant pas nécessairement $*$-régulier : l'égalité $[d_1^*]=[e]\cap$aut* est remarquable car valable aussi sur S_+ (selon le Théorème 2 où, sur S_+, $[d_1^*]=[d_1]$).

Le Corollaire 7.2 est relatif à des relations entre les éléments particuliers b et cb. Il fait intervenir la condition a=ca qui est satisfaite notamment si c est un idempotent.

COROLLAIRE 7.2. Soit a=cb.
(1) Sur A d-involuté,
$b[c_1^*]a$ ssi bb*[e]aa* et a=ca, ssi bb*[l]aa* et a=ca, ssi b[aut*]a et a=ca.
(2) Sur S, b[e]a ssi b[Pref]a et a=ca.
Sur S_+, si c=c*, alors b[Pref]a ssi b[$\underline{\text{aut}}$]a (*i.e.* $ab^+=(ab^+)^*$).

Démonstration.
$b[c_1^*]a$ ssi b[Prefr*]a, ssi aa*=ba*=ab* par définition.
D'où aa*=bb*c*=cbb*=cbb*c* et donc bb*[e]aa*. Et bb*[l]aa* suit, selon le Théorème 7.
Si x existe tel que bb*- aa*=xx*, alors cxx*c*, cx et donc cxx* sont nuls, A étant d-involuté (*cf.* 21.2). Alors, caa*=cbb* et aa*=ab*. D'où ab*=(ab*)*=ba* et donc b[aut*]a.
Enfin, si b[aut*]a et a=ca, alors (ab*)c*=(ba*)c* et donc aa*=ba*, *i.e.* b[Prefr*]a.
Pour (2), si u et v existent tels que a=ub=bv=ubv, alors a=cb=cbv=ca.
Réciproquement, si v existe tel que a=ca=bv, alors a=ca=cb=bv=cbv et donc b[e]a.
Sur S_+, si $a=bb^+a$ (*cf.* 7.2) et a=cb, alors $ab^+=bb^+cbb^+=(bb^+cbb^+)^*$.
Et, si $bb^+c=(cbb^+)^*=cbb^+$, alors $bb^+cb=cbb^+b=cb$ et donc b[Pref]a.

7. STRUCTURES NATURELLES DES ANNEAUX DE MATRICES

Les Propositions précédentes - depuis la première - ont valeur, évidemment, sur les anneaux, A, dès lors qu'ils satisfont aux conditions stipulées dans les différents énoncés (régularité,$*$-régularité, définition d'une involution, etc.). Il en est donc ainsi de l'anneau A_n des matrices d'ordre n dont les éléments (ou coefficients) appartiennent à A.
On se propose de préciser la mesure dans laquelle A_n hérite des particularités de A auxquelles on s'est intéressé. A cet effet, 25 rassemblera des propositions connues, pour la plupart.

La même précision est apportée à propos de $A_{m,n}$, l'ensemble des matrices rectangulaires m×n ; fixant ainsi les conditions pour que les analyses de cet essai restent valables pour les éléments de cet ensemble.
Dans ce contexte, des compléments sont apportés sur les relations binaires.

Définition.
A est s-involuté ssi A est muni d'une involution (.)* telle que, pour n=1,2,3,...,
$(\sum_{i=1}^{n} a_i a_i^* = 0) \Rightarrow (a_i = 0,\ i=1 \text{ à } n)$.

PROPOSITION 24. A est s-involuté ssi A_n est d-involuté pour toute valeur de n.

Soient $U \in A_n$ la matrice d'éléments $u_{ij} \in A_*$, $V \in A_n$ la matrice d'éléments u_{ij}^* et U^* la transposée de V. On s'assure aisément que $U \longmapsto U^*$ est un antiautomorphisme involutif.
Soient encore m_{ij} (i,j=1 à n) : les éléments de la matrice-produit $M=UU^*$.
Selon 21.2, A_n est d-involuté ssi $m_{ij}=0$ (pour tout i,j) implique $u_{ij}=0$ (pour tout i,j).
Pour n=1,2,3,..., si $m_{ij}=0$ (pour tout i,j), alors $m_{ii}=\sum_{j=1}^{n} u_{ij}\, u_{ij}^* =0$ (pour tout i), et donc : $u_{ij}=0$ (pour tout i,j) lorsque A est s-involuté.
Pour la réciproque, si A_n est d-involuté pour tout n, alors A (isomorphe à A_1) est involuté.
Soit $N \in A_n$, la matrice dont les éléments d'une des lignes sont a_i (i=1 à n) ; tous ses autres éléments étant nuls. Alors, $\sum_{i=1}^{n} a_i a_i^*$ est un élément de la matrice-produit NN^*, et tous les autres éléments sont nuls.
Si A_n est d-involuté, alors $(NN^*=0) \Rightarrow (N=0)$ selon 21.2. Ainsi, A est s-involuté, si A_n est d-involuté pour n=1,2,3,... .

PROPOSITION 25. (1) A_n est involuté si A est involuté, (2) A_n est régulier (premier) ssi A est régulier (premier), (3) A_n est $*$-régulier pour tout n ssi A est régulier et s-involuté, (4) A_n est $*$-régulier pour tout n ssi A est $*$-régulier et s-involuté, (5) A_n est p-involuté si A est p-involuté et régulier, (6) A (A_n) est d-involuté si A (A_n) est s-involuté. Et, A (A_n) est s-involuté si A (A_n) est p-involuté.

(1) a été précisée à propos de 24. (2) est classique. Le théorème 4.28 de Mc Coy (1966) la donne à propos des anneaux premiers. Quant à la régularité, (2) était déjà notée par von Neumann (1936). (3) résulte de (2), de 24 et du Théorème 7 selon lequel A (A_n) est $*$-régulier ssi A (A_n) est régulier et d-involuté. (4) s'ensuit. En substance, (5) est l'objet du Théorème 3 de Prijatelj et Vidav (1971). (6) est évidente.

Des assertions analogues concernant $A_{m,n}$ peuvent être déduites de 25. Elles supposent quelques précisions : on dit que $A_{m,n}$ est régulier ($*$-régulier) ssi il existe au moins un inverse généralisé $A^- \in A_{n,m}$ (ssi l'inverse de Moore-Penrose $A^+ \in A_{n,m}$ existe) pour toute $A \in A_{m,n}$.
De même, $A_{m,n}$ est premier ssi, pour toutes $A, C \in A_{m,n}$, $AHC=0$ pour toute $H \in A_{n,m}$ implique A=0 ou C=0. (Les matrices nulles sont notées 0).

PROPOSITION 26. (1) $A_{m,n}$ est involuté si A est involuté, (2) $A_{m,n}$ est régulier (premier) ssi A est régulier (premier), (3) $A_{m,n}$ est $*$-régulier pour tout m,n ssi A est régulier et s-involuté, (4) $A_{m,n}$ est $*$-régulier pour tout m,n ssi A est $*$-régulier et s-involuté, (5) A est s-involuté ssi $AA^*=0$ implique A=0 pour toute $A \in A_{m,n}$ et tout m,n.

La justification peut emprunter plusieurs voies, dont la suivante. (Par commodité, on note ici $A_{n,m}$ au lieu de $A_{m,n}$.) Soit $A \in A_{n,m}$, on peut toujours définir $N=(A{:}0) \in A_n$ (ou $N=\begin{pmatrix} A \\ O \end{pmatrix} \in A_m$, dans l'autre cas (m<n) dont le traitement est similaire). L'application des règles de calcul des

matrices partitionnées (ou de blocs) permet alors de montrer simplement que les propositions relatives à N valent également pour sa sous-matrice A.
(1) est évidente. Pour (2), si A est régulier, alors N^- existe (selon 25) et peut être ainsi partitionnée $N^-=\begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}$ avec $G_1 \in A_{m,n}$. Alors $NN^-N=(AG_1A:0)=N$, et A admet donc G_1 pour inverse généralisé.
Si A est premier, alors (selon 25) pour toutes $A,C \in A_{n,m}$ et $(A:0),(C:0) \in A_n$:
$(A:0)\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}(C:0)=(AH_1C:0)=0$ pour toute $H_1 \in A_{m,n}$ implique $(A:0)=0$ ou $(C:0)=0$ et donc $A=0$ ou $C=0$. Ainsi, $A_{n,m}$ est alors premier.
Pour (3), (4) et (5), si A est s-involuté, alors (selon 24) A_n est d-involuté pour tout n, et donc (selon 21.2) : $(A:0)(A:0)^*=AA^*=0$ implique $(A:0)=0$ et $A=0$ pour toute $A \in A_{n,m}$ (et tout n,m). Alors, pour toutes $A,B \in A_{n,m}$, $(BA^*A=0) \Rightarrow (BA^*=0)$ comme pour 21.3, et $(A^*AB^*=0) \Rightarrow (AB^*=0)$.
Soit $P \equiv A^*(AA^*)^+A(A^*A)^+A^*$. On peut montrer à présent que, pour toute $A \in A_{n,m}$, les quatre conditions pour que $P=A^+$ sont vérifiées et qu'ainsi $A_{n,m}$ est $*$-régulier, si A est régulier et s-involuté.
En effet, si A est régulier et s-involuté, A_n est $*$-régulier selon 25 (P est donc définie), $A_{n,m}$ est régulier, $[AA^- - AA^*(AA^*)^+]AA^*=0$ et $A^*A[A^-A - (A^*A)^+A^*A]=0$.
D'où $A=AA^*(AA^*)^+A=A(A^*A)^+A^*A$, et donc $APA=A$ et $PAP=P$. Et, directement $(AP)^*=AP$ et $(PA)^*=PA$.
Enfin, ce qui est vrai des matrices rectangulaires l'est, en particulier, des matrices carrées. Les réciproques sont donc fournies par 25, et par 24 pour (5).

Remarques.
• La démarche suivie pour justifier 26 revient à - permet de - définir les opérations d'addition et de multiplication de matrices non nécessairement carrées, mais de dimensions adéquates.
$A_{m,n}$ muni de l'addition est un groupe abélien, et la multiplication, ainsi définie, est distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition et associative. L'associativité est une conséquence de l'associativité de la composition des fonctions. On a, précisèment, $A(BC)=(AB)C$ pour toutes $A \in A_{m,n}$, $B \in A_{n,p}$ et $C \in A_{p,q}$.
(Soient $B \in A_n$ et $C \in A_m$, les matrices scalaires dont chaque élément diagonal est égal à b et à c (resp.). En bref, il suffit alors de poser $B=bI_m$ et $C=I_nc$ pour définir les multiplications scalaires et ainsi $A_{m,n}$ comme un *(A,A)-bimodule*, *i.e.* $A_{m,n}$ est un module à gauche et à droite, et $b(Ac)=(bA)c$ pour tout $b,c \in A$ et toute $A \in A_{m,n}$ (*cf.* Adkins et Weintraub (1992) *e.g.*)...)

• Ainsi, et selon 26, toutes les Propositions précédentes (jusqu'à 24) peuvent être écrites avec des matrices $A,B \in A_{m,n}$, sans modifier les précisions que portent leurs énoncés sur l'anneau, A, auquel appartiennent les éléments de ces matrices, et sans condition supplémentaire. *A l'exeption* de celles qui concernent les d-involutions, et donc la $*$-régularité, pour lesquelles A doit être s-involuté. (Bien sûr, S étant remplacée par A dans les énoncés donnés sur les demi-groupes.)
En particulier, on relève que $[d^*]$, $[c_1{}^*]$ et $[c_2{}^*]$ sont des ordres sur $A_{m,n}$, si A est s-involuté (*cf.* Théorème 3 et Corollaire).

La définition de la relation B[l]A, qui suppose que A et B soient carrées, admet une variante adaptée au cadre matriciel.

Définition.
Pour les matrices $A,B \in A_n$ dont les éléments appartiennent à A_*,
$B[l]A$ ssi il existe une $X \in A_{n,m}$ telle que $B-A=XX^*$.
($X \in A_{n,m}$, où n est fixé par l'appartenance de A et B à A_n.)

Pour le Théorème 8, on définit la matrice $M \equiv \begin{bmatrix} B & A \\ A & A \end{bmatrix}$.

THÉORÈME 8. Pour toutes $A,B \in A_n$ dont les éléments appartiennent à $A\_$ s-involuté,

(1) $[l]$ est un ordre, (2) si $B[l]A$ et $A[l]0$, alors $B[u]A$ et $B[l]0$,

(3) $B[l]A$ et $A[l]0$ ssi il existe $X,Y \in A_{n,m}$ telles que $A=XX^*=XY^*$ et $B=YY^*$,

(4) $B[l]A$ et $A[l]0$ ssi $M[l]0$,

(5) sur les projecteurs A,B de A_n : $B[l]A$ ssi $B[p]A$ ssi $B[r]A$,

avec [r] pour chacune des relations canoniques.

Démonstration.
En commençant par (4), si C et D existent telles que $A=CC^*$ et $B-A=DD^*$, alors $M=TT^*$ avec $T=\begin{bmatrix} AA^+C & D \\ C & 0 \end{bmatrix}$. Si $T\equiv\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$ existe telle que $M=TT^*$, alors $M=\begin{bmatrix} YY^* & YX^* \\ XY^* & XX^* \end{bmatrix}$ avec $Y=(E{:}F)$ et $X=(G{:}H)$. Alors $B=YY^*$, $A=XX^*=YX^*$ et donc $Y[Prefr^*]X$.
D'où $B[l]A$ et $B[u]A$, selon 23, et $A[l]0$ et $B[l]0$. (2), (3) et (4) sont démontrées.
Pour (1), si $B[l]A$ et $A[l]B$, alors X et Y existent telles que $B-A=XX^*=-YY^*$ et $XX^*+YY^*=(X{:}Y)(X{:}Y)^*=0$. Alors $(X{:}Y)=0$ et donc $A=B$, selon 26.
Si $B[l]A$ et $C[l]B$, alors X et Y existent telles que $C-A=XX^*+YY^*=(X{:}Y)(X{:}Y)^*$.
Pour (5), sur les projecteurs de A_n, $[e]\subseteq[l]\subseteq[u]$ selon (2) et le Théorème 7 (car si A et B sont des projecteurs, alors $A[l]0$ et $B[l]0$). Les Théorèmes 1, 2 et Corollaire permettent de compléter (5).

Notes.
1) La définition de $[l]$ ne coïncide pas avec celle de [1] donnée précédemment, car cette dernière demande l'existence d'une X appartenant au même ensemble, A_n, que A et B. Mais, évidemment, si $X\in A_n$ existe telle que $B-A=XX^*$, alors $B[l]A$. (La réciproque est vraie pour $m\leq n$, car alors pour $Y\in A_{n,m}$, on peut définir $X=(Y{:}0)\in A_n$; mais pas en général.) Ainsi, $[1]\subseteq[l]$.
2) Le Théorème 8 couvre le cas des anneaux, avec $n=1$. Alors, par définition, $b[l]a$ ssi il existe une $X\in A_{1,m}$ telle que $b-a=XX^*$. Mais, $XX^*=\sum_{i=1}^{m} x_i x_i^*$ (avec x_i : les éléments de X), et donc $[l]=[1]$ si A est p-involuté (si A est p-involuté, en effet, il existe $y\in A$ tel que $\sum_{i=1}^{m} x_i x_i^* = yy^*$).
Le Corollaire 8 peut être donné.

COROLLAIRE 8. (1) $[1] \subseteq [l]$. (2) $[1] = [l]$ sur les anneaux p-involutés.
(3) Avec [1] à la place de $[l]$: (1),(2),(3) et (4) du Théorème, pour $A,B\in A_n$ dont les éléments appartiennent à A - p-involuté et, dans le cas des anneaux, avec $n=1$.

A propos de (2), on a noté que A_n est p-involuté, si A est régulier et p-involuté (*cf.* 25).

Remarques.
Avec [1], la relation $[l]$ correspond à l'ordre semi-défini positif usuel ou ordre de Loewner - ou Löwner - (*e.g.* Gaffke et Krafft (1982), Nordström (1989)), défini pour les matrices complexes (réelles) et considéré le plus souvent dans les applications avec A et B hermitiennes (symétriques) et même semi-définies positives.
Sur les matrices complexes, une c.n.s. de $B[l]A$ est que $B-A$ soit hermitienne et que ses valeurs propres (alors nécessairement réelles) soient positives ou nulles.

On rappelle cette conséquence remarquable due à Loewner (1934) - et qui permet, par exemple, d'obtenir directement les théorèmes de séparation de Poincaré-Sturm... Avec A et B hermitiennes et d'ordre n, si B[l]A, alors $\lambda_i(B) \geq \lambda_i(A)$ i=1 à n (les valeurs propres de B étant ordonnées comme celles de A : $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq ...$) ; *cf.* Marshall et Olkin (1979) p.510.

8. STRUCTURES NATURELLES DES ESPACES VECTORIELS DE MATRICES

En totalité, les Propositions de cet article sont valables, en particulier, sur $C_{m,n}$, l'ensemble des matrices complexes m×n, lequel étant à la fois $*$-régulier, premier et d-involuté ; C_n est p-involuté. Dans ce domaine, Hartwig et Styan (1986) ont étudié les relations entre les ordres de Drazin et de Hartwig. (A cet effet, ils définissent des conditions sur le caractère hermitien de différents produits matriciels, conditions qui sont des cas particuliers de certaines des relations qui définissent Aut au paragraphe 2 .)

Le contexte habituellement choisi en statistique et en analyse des données numériques est celui des applications linéaires entre espaces vectoriels réels de dimension finie ou de même celui des matrices réelles. Le thème des ordres naturels est donc adapté à ce cadre. Les quelques suppléments apportés ici à ce thème, avec des précisions sur les notions de projection, montrent davantage cette adaptation.

Le Théorème 9 est relatif à l'espace vectoriel $K_{m,n}$. Selon 26 , les matrices définies sur un corps quelconque, K, sont régulières. (Le sous-espace engendré par les colonnes de A sera noté Im(A).)

PROPOSITION 27. Pour toutes $A,B \in K_{m,n}$ et toute idempotente $U \in K_m$,

$\mathrm{Im}(UA) \cap \mathrm{Im}(B-UB)=\{0\}$ et équivalemment Rang(UA)+Rang(B-UB)=Rang(UA:B-UB).

S'il n'en était pas ainsi, en effet, des vecteurs-colonnes v et w existeraient tels que :
$UAv=(B-UB)w \neq 0$ (vecteur nul). Or, en prémultipliant par I-U, il vient (B-UB)w=0. Pour la deuxième égalité, Rang(X)+Rang(Y)=Rang(X:Y)+dim $\mathrm{Im}(X) \cap \mathrm{Im}(Y)$ pour toutes $X,Y \in K_{m,n}$.

PROPOSITION 28. Pour toutes $A,B \in K_{m,n}$ et toute idempotente $U \in K_m$,

28.1 Rang(UB)+Rang(B-UB)=Rang(UB:B) et équivalemment $\mathrm{Im}(UB) \cap \mathrm{Im}(B-UB)=\{0\}$
28.2 Rang(UB)+Rang(B-UB)=Rang(B) ssi B[Pref]UB ssi B[e]UB.

En effet, Rang[(UB:B-UB)W]=Rang(UB:B) avec la matrice inversible (non singulière) $W=\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix}$
(où I est d'ordre n), et 28.1 est donc un corollaire de 27 (avec A=B).
Im(UB:B)=Im(UB)+Im(B). D'où $\mathrm{Im}(UB) \subseteq \mathrm{Im}(B)$ ssi Im(UB:B)=Im(B).
L'inclusion est équivalente à B[Pref]UB (*cf.* la définition de Pref). Et l'égalité est équivalente à Rang(UB:B)=Rang(B) (car $\mathrm{Im}(B) \subseteq \mathrm{Im}(UB:B)$, et ses deux sous-espaces sont donc égaux s'ils sont de même dimension). 28.2 est établie, de par 28.1, et de par (2) du Corollaire 7.2 pour la deuxième équivalence.

THÉORÈME 9. Pour toutes $A,B \in K_{m,n}$,

(1) S'il existe une idempotente U telle que A=UB , alors $\mathrm{Im}(A) \cap \mathrm{Im}(B-A)=\{0\}$,

(2) B[e]A est équivalente à (1) $\mathrm{Im}(A) \cap \mathrm{Im}(B-A)=\{0\}$ et B[Pref]A,
(2) $\mathrm{Im}(B)=\mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Im}(B-A)$, (3) Rang(B-A)=Rang($B-AA^-B$) et B[Pref]A,
(4) Rang(A:B)=Rang(A)+Rang(B-A) et B[Pref]A, (5) Rang(B)=Rang(A)+Rang(B-A).

(2) $\mathrm{Im}(B)=\mathrm{Im}(A)\oplus\mathrm{Im}(B-A)$, (3) $\mathrm{Rang}(B-A)=\mathrm{Rang}(B-AA^-B)$ et $B[\mathrm{Pref}]A$,

(4) $\mathrm{Rang}(A{:}B)=\mathrm{Rang}(A)+\mathrm{Rang}(B-A)$ et $B[\mathrm{Pref}]A$, (5) $\mathrm{Rang}(B)=\mathrm{Rang}(A)+\mathrm{Rang}(B-A)$.

Démonstration.
(1) résulte de 28.1.
Pour (2), $B[e]A$ ssi il existe une idempotente U telle que $A=UB$ et $B[\mathrm{Pref}]A$, puisque $[e]=[g_2]$ selon le Théorème 1. Si $B[e]A$, alors (1) et (4), d'après 28.1.
- Si (1) alors (2), et si (2) alors (5).
- Si (4) alors (5), car $B[\mathrm{Pref}]A$ ssi $\mathrm{Rang}(A{:}B)=\mathrm{Rang}(B)$ (*cf.* l'établissement de 28).

Si (5), alors $B[h^=]A$ d'après le Théorème 2 de Hartwig (1980). Et $[h^=]\subseteq[e]$ selon le Théorème 1.
Enfin, (3) et (4) sont équivalentes parce que, sans condition aucune :
$\mathrm{Rang}(A)+\mathrm{Rang}(B-AA^-B)=\mathrm{Rang}(A{:}B-AA^-B)$ selon 27 (avec $U=AA^-$ et A^- quelconque),
et $\mathrm{Rang}[(A{:}B-AA^-B)W]=\mathrm{Rang}(A{:}B)$ avec la matrice inversible $W=\begin{bmatrix} I & I+A^-(B-A) \\ 0 & I \end{bmatrix}$ (où I est d'ordre n).

Note.
Dans les Propositions 27 et 28, et dans le libellé du Théorème, la condition de l'idempotence de U peut être remplacée par la condition plus faible : $UA=UUA$.

Ordres naturels et commutativité des sous-espaces

Le Corollaire 9.1 relie la notion de sous-espaces linéaires commutatifs ou de sous-espaces "commutants" introduite par Birkhoff et von Neumann (1936) dans un contexte plus général, au thème des ordres naturels. Il suppose quelques définitions.
Soient V un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire non dégénéré, V_i ($i=1,2,\ldots$) ses sous espaces, T la totalité de ses sous-espaces, et $\{V_i\}$ un ensemble fini de sous-espaces de V. Le supplémentaire orthogonal de V_i est noté $V_i^{\perp}$.
On peut montrer que T satisfait aux axiomes qui définissent un treillis modulaire et plus précisément orthomodulaire (*cf.* Barbut (1961) et Birkhoff (1967) p.52).
La définition est donnée dans ce cadre.

Définition.
Les sous-espaces $\{V_i\}$ commutent ssi $V_i=(V_i\cap V_j^{\perp})+(V_i\cap V_j)$ pour tout $i, j, i>j$.

Les Corollaires 9.1 et 9.2 sont énoncés à propos de $C_{m,n}$. Pour le Corollaire 9.1, on note P_a, P_b, P_{ab} et P_{ab° les projecteurs orthogonaux sur $\mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Im}(B)$, $\mathrm{Im}(A)\cap\mathrm{Im}(B)$ et $\mathrm{Im}(A)\cap\mathrm{Ker}(B^*)$ resp. (le produit scalaire est classique, et B^* est la transconjuguée de B).

COROLLAIRE 9.1. Pour toutes $A\in C_{m,n}$ et $B\in C_{m,p}$,

$B[e]P_aB$ est équivalente à (1) $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Im}(B)$ commutent,

(2) $\mathrm{Rang}(B)=\mathrm{Rang}(B-P_aB)+\mathrm{Rang}(A^*B)$, (3) $\mathrm{Rang}(B-P_aB)=\dim\mathrm{Ker}(A^*)\cap\mathrm{Im}(B)$,

(4) $P_a=P_{ab^\circ}+P_{ab}$, (5) $P_aP_b=P_bP_a$, (6) $B[\mathrm{Pref}]P_aB$, (7) $\mathrm{Im}(B^*P_a)\cap\mathrm{Im}(B^*-B^*P_a)=\{0\}$.

Démonstration.
$\mathrm{Rang}(A^*B)=\mathrm{Rang}(B^*A)=\mathrm{Rang}(B^*AA^+A)\leq\mathrm{Rang}(B^*P_a)\leq\mathrm{Rang}(B^*A)$, puisque AA^+ est une des expressions de P_a. Ainsi, $\mathrm{Rang}(P_aB)=\mathrm{Rang}(A^*B)$.
$B[e]P_aB$ est donc équivalente à (2) selon le Théorème 9, à (5) et à (6) selon (2) du Corollaire 7.2.
Et, $B[e]P_aB$ ssi $B^*[e]B^*P_a$, selon 1.6.
D'où $B[e]P_aB$ ssi $\mathrm{Im}(B^*P_a)\cap\mathrm{Im}(B^*-B^*P_a)=\{0\}$, *i.e.* (7), d'après le Théorème 9.
(2) ssi (3), d'après la formule $\mathrm{Rang}(B)=\mathrm{Rang}(A^*B)+\dim\mathrm{Ker}(A^*)\cap\mathrm{Im}(B)$
(*e.g.* Lesieur *et al.* (1978) p.27).

Evidemment, (1) et (4) sont équivalentes $(\mathrm{Ker}(B^*)=\mathrm{Im}^{\perp}(B))$.
Enfin, (4) ssi (5), car si $P_a=P_{ab^\circ}+P_{ab}$, alors $P_aP_b=P_{ab^\circ}P_b+P_{ab}P_b=P_{ab}$.
Et, $P_aP_b=P_{ab}$ ssi $P_aP_b=P_bP_a$, selon le Théorème 4 de Rao et Yanai (1979).
D'où, si (5) alors $(I-P_b)P_a=P_a(I-P_b)=P_{ab^\circ}$ et donc $P_a=P_a(I-P_b)+P_aP_b=P_{ab^\circ}+P_{ab}$.
Note.
La commutativité de Im(A) et Im(B) est impliquée par leur emboîtement (loi orthomodulaire) et par leur orthogonalité. Il s'agit bien sûr d'une relation symétrique, mais (5) suffirait à l'établir.
(Ainsi $B[e]P_aB$ ssi $A[e]P_bA$ ssi $\mathrm{Im}(A) = (\mathrm{Im}(A)\cap \mathrm{Ker}(B^*)) + (\mathrm{Im}(A)\cap\mathrm{Im}(B))$).

Ordres naturels et décomposition des matrices semi-définies positives

COROLLAIRE 9.2. Soient $A,B \in C_n$ et $B[l]0$,

9.2.1 Si $B[e]A$, alors (1) $B = A^*(AB^-A^*)^-A + (B-A)[(B-A)^*B^-(B-A)]^-(B-A)^*$, avec des inverses généralisés quelconques, et (2) dans cette égalité : C (D) peut être substituée à A (à B-A) dès lors que Im(C)=Im(A) (que Im(D)=Im(B-A)).
9.2.2 Si $B[u]A$, alors l'égalité de 9.2.1 implique $B[e]A$.

Démonstration.
- Soient $r\equiv\mathrm{Rang}(B)$, et $B^+=FF^*$ la décomposition de rang plein de B^+ ($F\in C_{n,r}$ et Rang(F)=r).
Et soient $G^*\equiv AF$ et $H\equiv F^*(B-A)$.
Si $B[u]A$, alors Rang(G)=Rang(A) et Rang(H)=Rang(B-A), car d'après 7.1 et 7.2 :
$\mathrm{Rang}(A)=\mathrm{Rang}(AB^+B)\leq\mathrm{Rang}(AF)\leq\mathrm{Rang}(A)$
et $\mathrm{Rang}(B-A)=\mathrm{Rang}[BB^+(B-A)]\leq\mathrm{Rang}[F^*(B-A)]\leq\mathrm{Rang}(B-A)$.
Si $B[e]A$, alors $B[u]A$ et $AB^-(B-A)=AB^+(B-A)=0$ pour tout B^- (car $B^+\in B^{(-)}\subseteq A^{(\sim)}$, *cf.* Th.6).
- Par conséquent, si $B[e]A$,
alors a) $G^*H=0$, et r - Rang(G)=Rang(H) (selon (2) du Théorème),
donc b) $\mathrm{Im}(H)=\mathrm{Ker}(G^*)$ (car $G,H\in C_{r,n}$),
et c) $I - G(G^*G)^-G^*=H(H^*H)^-H^*$ pour des inverses quelconques ; à savoir les projecteurs orthogonaux sur Ker(G*) et sur Im(H) sont égaux (*cf.* Yanai (1990) pour l'expression de ces projecteurs, *e.g.*). Et (1) est atteinte :
$BFF^*B=BFG(G^*G)^-G^*F^*B+BFH(H^*H)^-H^*F^*B$, $BFG=BB^+A^*=A^*$ et $BFH=B-A$.
Pour (2), la démonstration ne change pas si on définit : $G^*\equiv CF$ et $H\equiv F^*D$.
Pour 9.2.2, si $B[u]A$, alors B^- peut être remplacé par B^+ dans l'égalité donnée en 9.2.1 (*cf.* 2.4). Alors, $I = F^*BF = G(G^*G)^-G^*+ H(H^*H)^-H^*$.
D'où Rang(B)=Rang(G)+Rang(H)=Rang(A)+Rang(B-A), et $B[e]A$ selon (2) du Théorème.

Notes.
1) Sous les conditions du Corollaire 9.2, on peut donc remplacer $(.)^-$ par $(.)^+$ (l'inverse de Moore-Penrose) dans l'expression donnée à B. En postmultipliant alors cette expression par B^+, on obtient $BB^+=P_1+P_2$, avec des notations évidentes.
BB^+ est une des expressions du projecteur orthogonal sur Im(B).
Et, P_1 et P_2 sont les B^+-projecteurs orthogonaux (ou projecteurs orthogonaux dans la semi-norme "induite" par B^+) sur Im(A*) et sur Im(B-A), respectivement.
Cette remarque permet-elle de simplifier la démonstration du Corollaire 9.2 ?
2) En notant T_1 et T_2 les termes de la somme du membre de droite de l'égalité donnée sous 9.2.1 ($B=T_1+T_2$), on observe que : si $B[e]A$, alors $B[r]T_1$ et $B[r]T_2$ avec r pour u, *l* et e.
En effet, alors $T_1[l]0$ et $T_2[l]0$. Et $[l]\subseteq[u]$ selon le Théorème 8. $B[e]T_i$ (i=1,2) reste à montrer : on vérifie aisément que $T_i=T_iB^-T_i$, *i.e.* $B[\mathrm{Ind}]T_i$. ($[e]=[u]\cap\mathrm{Ind}$, selon le Théorème 1.)

Ordres naturels et projections généralisées

Un commentaire né du Théorème 9 conclut le développement.
La notion d'inverse contraint semble avoir été introduite par Bott et Duffin en 1953. Le thème a

1) La définition des inverses de A contraints par B est assortie de la condition préalable suivante $\mathrm{Im}(A) \cap \mathrm{Im}(B) = \{0\}$ $(A, B \in R_{m,n})$.
2) Cette analyse relie la notion d'inverse contraint à celle de "projection généralisée", promue également par Rao. On précise cette dernière.

Lorsque $\mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Im}(B) = R_m$ (sous-espaces supplémentaires), il est bien connu que $PA=A$ et $PB=0$ est une c.n.s. pour que P soit un projecteur sur $\mathrm{Im}(A)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(B)$.
Rao a repris cette condition, mais en demandant seulement $\mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Im}(B) \subseteq R_m$.

Le commentaire donne lieu à deux Propositions. Essentiellement, la première adapte des résultats précédents sur les inverses de A contraints par $B\text{-}A$, notés $A^{\sim}$, à propos des inverses de A contraints par B. On note $A^{(\wedge)}$ l'ensemble de ces derniers. (Les résultats en question ont valeur pour $A, B \in R_{m,n}$, comme déjà noté.)

PROPOSITION 29. Soient $A, B \in R_{m,n}$,

29.1 $A^{(\wedge)} \neq \varnothing$ ssi il existe une idempotente U (V) telle que $A=U(A+B)$ (telle que $B=V(A+B)$)
29.2 si $A^{(\wedge)} \neq \varnothing$, alors $\mathrm{Im}(A) \cap \mathrm{Im}(B) = \{0\}$
29.3 si A et B sont symétriques, ou si $A+B[\mathrm{Pref}]A$, alors :
$A+B[e]A$ ssi $A^{(\wedge)} \neq \varnothing$ ssi $\mathrm{Im}(A) \cap \mathrm{Im}(B) = \{0\}$ ssi $\mathrm{Rang}(A+B) = \mathrm{Rang}(A) + \mathrm{Rang}(B)$.

En effet, d'après 15, il existe un inverse de A (de $B\text{-}A$) contraint par $B\text{-}A$ (par A) ssi il existe une idempotente U telle que $A=UB$, ssi il existe une idempotente V telle que $B\text{-}A=VB$; d'où 29.1 (B à la place de $B\text{-}A$, $A+B$ à la place de B). Et 29.2 est alors offerte par (1) du Théorème 9.
Pour 29.3, la dernière équivalence est présentée par le Théorème 9 lorsque $A+B[\mathrm{Pref}]A$.
Et en général, si $\mathrm{Im}(A) \cap \mathrm{Im}(B) = \{0\}$, alors $A+B[\mathrm{Suf}]A$; or $A+B[\mathrm{Suf}]A$ ssi $A+B[\mathrm{Pref}]A$ lorsque A et B sont symétriques. Si $A+B[e]A$, alors $A^{(\wedge)} \neq \varnothing$ d'après le Théorème 5.
29.2 et (2) du Théorème 9 donnent les autres équivalences.

Ainsi, l'égalité $\mathrm{Im}(A) \cap \mathrm{Im}(B) = \{0\}$ est impliquée par l'existence d'un inverse de A contraint par B (quel qu'il soit), et n'a donc pas à être posée comme condition préalable à la définition de cet inverse. 29.3 présente des conditions pour qu'il y ait équivalence.

PROPOSITION 30. Si $B[e]A$, alors AB^- est un "projecteur généralisé" sur $\mathrm{Im}(A)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(B\text{-}A)$, pour tout B^-.

Par définition, $A^\wedge$ est un inverse de A contraint par B ssi $AA^\wedge A=A$ et $AA^\wedge B=0$. Et, $AA^\wedge$ est un "projecteur généralisé" sur $\mathrm{Im}(A)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(B)$, selon 29.2.
Pour 30, et selon le Théorème 6, $B[e]A$ ssi $B^{(-)} \subseteq A^{(\sim)}$ ssi tout inverse généralisé de B est un inverse de A contraint par $B\text{-}A$. C'est-à-dire , $B[e]A$ ssi $AB^-A=A$ et $AB^-(B\text{-}A)=0$ pour tout B^-.

Notes.
1) $B[e]A$ implique que les produits AB^- sont des idempotents. (Les "projecteurs généralisés" ne sont pas nécessairement des idempotents.)
2) Par ailleurs, l'équivalence $\mathrm{Im}(A) \cap \mathrm{Im}(B) = \{0\}$ ssi $\mathrm{Rang}(A+B) = \mathrm{Rang}(A) + \mathrm{Rang}(B)$ a été donnée sous conditions par 29.3. On peut la trouver présentée sans condition et ainsi de façon erronée. (Comme montré par le Théorème 9 : à $\mathrm{Im}(A) \cap \mathrm{Im}(B) = \{0\}$, il faut joindre la condition $A+B[\mathrm{Pref}]A$, ou bien $\mathrm{Im}({}^tA) \cap \mathrm{Im}({}^tB) = \{0\}$, pour qu'il y ait équivalence...).

REMERCIEMENTS

L'auteur remercie un "référent" anonyme pour ses très utiles commentaires qui ont permis d'améliorer substantiellement le texte, de mieux situer le sujet et de le mettre en perspective.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADKINS W.A., WEINTRAUB S.H., *Algebra : an approach via module theory*, New York, Springer Verlag, 1992.

[2] BARBUT M., "Ensembles ordonnés", *Rev. franç. Rech. Opération.*, 20 (1961), 175-198.

[3] BARBUT M., MONJARDET B., *Ordre et classification, Algèbre et combinatoire*, Paris, Hachette, 1970.

[4] BERBERIAN S.K., *Baer* $*$*-rings*, Berlin, Springer Verlag, 1972.

[5] BERBERIAN S.K., "The regular ring of a finite Baer $*$-ring", *J. Alg.*, 23 (1972), 35-65.

[6] BIRKHOFF G., *Lattice theory*, Providence, Amer. Math. Soc., 1967.

[7] BIRKHOFF G., VON NEUMANN J., "The logic of quantum mechanics", *Ann. of Math.*, 37 (1936), 823-842.

[8] BOYD J. P., "Structural similarity, semi groups and idempotents", *Social networks*, 5 (1983), 157-182.

[9] CLIFFORD A., PRESTON G., *The algebraic theory of semigroups*, Providence, Amer. Math. Soc. , 1961 (vol. I), 1967 (vol. II).

[10] DEGENNE A., "Un domaine d'interaction entre les mathématiques et les sciences sociales: les réseaux sociaux", *Math. Inf. Sci. hum.*, 104 (1988), 5-18.

[11] DEHEUVELS R., *Formes quadratiques et groupes classiques*, Paris, Presses Universitaires de France, 1981.

[12] DRAZIN M.P., "Natural structures on semigroups with involution", *Bul. Amer. Math. Soc.*, 84 (1978), 139-141.

[13] FOULIS D.J., "Relative inverses in Baer $*$-semigroups", *Michigan Math. J.*, 10 (1963), 65-85.

[14] GAFFKE N., KRAFFT O. , "Matrix inequalities in the Löwner ordering", *in* KORTE B, *Modern applied mathematics : optimization and operations research*, Amsterdam, North Holland, 1982, pp. 595-622.

[15] GUÉNOCHE A., MONJARDET B., "Méthodes ordinales et combinatoires en analyse des données", *Math. Sci. hum.*, 100 (1987), 5-47.

[16] HARTWIG R.E., "How to partially order regular elements", *Math. Japonica*, 25 (1980), 1-13.

[17] HARTWIG R.E., STYAN G.P.H., "On some characterizations of the star partial ordering for matrices and rank subtractivity", *Linear Alg. Appl.*, 82 (1986), 145-161.

[18] KAPLANSKY I., *Rings of operators*, New-York, W.A. Benjamin Inc., 1968.

[19] LESIEUR L., TENAM R., LEFEBVRE J., *Compléments d'algèbre linéaire*, Paris, Armand Colin, 1978.

[20] MAC COY N.E., *The theory of rings*, New York, Mc Millan, 1966.

[21] MALLOL C., OLIVIER J.-P., SERRATO D., "Groupoïds, idempotents and pointwise inverses in relational categories", *J. Pure Appl. Alg.*, 36 (1985), 23-51.

[22] MARSHALL A., OLKIN I., *Inequalities : Theory of majorization and its applications*, New York, Academic Press, 1979.

[23] MITRA S.K., "Generalized inverse of matrices and applications to linear models", *in* KRISHNAIAH P.R., *Handbook of Statistics*, vol. I, Amsterdam, North Holland, 1980, pp. 471-512.

[24] MITSCH H., "Inverse semigroups and their natural order", *Bull. Austral. Math. Soc.*, 19 (1978), 59-65.

[25] NASHED M., VOTRUBA G., "An unified approach to generalized inverses of linear operators : I Algebraic, topological and projectional properties", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 80 (1974), 825-830.

[26] NASHED M., VOTRUBA G., "An unified approach to generalized inverses of linear operators : II External and proximal properties", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 80 (1974), 831-835.

[27] NORDSTROM K., "Some further aspects of the Löwner-ordering antitonicity of the Moore-Penrose inverse", *Comm. Statist. Theory Meth.*, 18, 12 (1989), 4471-4489.

[28] PETIT J.-L., TEROUANNE E., "Balayage et cumul", in *Séminaire Math. & Info. appl.*, Montpellier, Université Paul Valéry, 1992, pp. 24-56.

[29] PETRICH M., *Inverse semigroups,* New York, Wiley, 1984.

[30] POLLOCK D.S., *The algebra of econometrics*, New York, Wiley, 1979.

[31] PRIJATELJ N., VIDAV I., "On special $*$-regular rings", *Michigan Math. J.*, 18 (1971), 213-221.
[32] RAO C.R., MITRA S.K., *Generalized inverse of matrices and its applications*, New York, Wiley, 1971.
[33] RAO C.R., YANAI H., "General definition and decomposition of projectors and some applications to statistical problems", *J. Statist. Plan. Inference*, 3 (1979), 1-17.
[34] SCHEIN B.M., "Regular elements of the semigroup of all binary relations", *Semigroup forum*,13 (1976), 95-102.
[35] TIMM N.H., *Multivariate analysis with applications in education and psychology*, Monterey (Californie), Brooke-Cole, 1975.
[36] VON NEUMANN J., "On regular rings", *Proc. of the National Acad. of Sci. U.S.A.*, 22 (1936), 296-300.
[37] YANAI H., "Some generalized forms of least squares g-inverses, minimum norm g-inverse, and Moore-Penrose inverse matrices", *Comput. Statist. & Data Anal.*, 10 (1990), 251-260.