MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

PASCAL BOLDINI

Structuration cognitive et logique intrinsèque

Mathématiques et sciences humaines, tome 121 (1993), p. 49-70

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1993__121__49_0>

Math. Inf. Sci. hum., (31e année, n° 121, *1993*, p. 49-70)

STRUCTURATION COGNITIVE ET LOGIQUE INTRINSÈQUE

Pascal BOLDINI[1]

RESUMÉ — *A travers l'étude d'un modèle de représentation des connaissances comme catégorie de faisceaux de traits localement définis ; ce texte montre que la théorie des topoï permet de décrire formellement l'émergence d'une logique intrinsèque à partir d'une approche relationnelle, qu'elle soit structurale ou cognitive. On peut alors caractériser mathématiquement le défaut d'intensionnalité des modèles classiques, et montrer qu'une solution est dans la mathématisation de structures entièrement relationnelles.*

ABSTRACT — Cognitive structuration and intrinsic logic
Through the study of a knowledge representation model as a sheaf category of locally defined features ; this paper shows that topos theory enables us to describe formally the emergence of an intrinsic logic from a relational approach, whatever it may be, structural or cognitive. Then we can mathematically characterize the lack of intensionality in classical models, and show that a solution is the mathematization of fully relational structures.

1. INTRODUCTION

L'approche cognitive qui s'est développée dans de nombreux secteurs des sciences humaines est un pas de plus dans la remise en cause des conceptions logicistes ; et de manière inattendue la démarche cognitiviste se rapproche de la tradition structurale, en mettant en avant les problèmes de structure et de structuration.

Il ne s'agit pas de sous-estimer les différences fondamentales entre approche structurale et approche cognitive (soulignées par Rastier dans [17]), d'autant que cette dernière est loin d'avoir atteint la rigueur conceptuelle de la première ; mais d'insister sur des convergences. En linguistique, toutes deux nient les séparations classiques entre syntaxe et sémantique et prennent comme primitives des ensembles structurés de relations. Evidemment, les relations sont de nature radicalement différentes : dans le premier cas, le sens est positionnel, défini à un niveau linguistique autonome, il émerge des oppositions de traits distinctifs (qui sont des unités linguistiques) dans des classes minimales (Rastier [16]) ; dans le deuxième cas, c'est des relations conceptuelles que dérivent le sens et en dernier lieu la grammaire (Langacker [11]).

La psychologie aussi, à travers l'étude des phénomènes de catégorisation et la discussion de modèles comme celui de Rosch (Rosch [18], Lakoff [10]), nous oblige à penser les processus de structuration de manière différente. Il faut en effet renoncer à considérer les catégories

[1]Laboratoire d'Intelligence Artificielle et Systèmes Cognitifs, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications de Bretagne.

comme des ensembles définis par des conditions d'appartenance nécessaires et suffisantes, et envisager des formes d'organisation diverses faisant intervenir le rôle générateur et/ou agrégatif d'éléments particuliers comme les prototypes. Quelle que soit l'option théorique choisie, on ne peut plus faire l'impasse sur les processus génétiques qui président à la formation des catégories ; ceci entraîne le rejet des approches logico-symboliques pour des approches mathématiques seules capables de générativité.

Pour autant il ne s'agit pas de rejeter tout niveau logico-symbolique, car grande est la nécessité d'établir une logique véritablement intensionnelle (Desclés [2]). Un des apports de notre recherche est de fournir une mesure précise du défaut d'intensionnalité des logiques qui se prétendent telles ; et pour y remédier, on verra qu'il faut revenir à des mathématiques qui comme la théorie des topoï permettent la construction de logiques intrinsèques.

Tout ceci fait qu'une réflexion abstraite sur les rapports entre structures nous semble nécessaire. Elle permettrait d'évaluer dans quelle mesure une structure peut émerger d'une autre structure, et gagner peu à peu son autonomie, et si de plus on peut envisager un passage formel d'un niveau symbolique à un niveau logico-symbolique. Un cadre adéquat nous semble être la théorie mathématique des catégories, que l'on peut voir comme la théorie des constructions mathématiques. Le travail présenté ici, qui s'insère dans une réflexion plus large sur les processus d'émergence et la théorie des catégories (Boldini & Barthélemy [1]), essaie de montrer qu'il est possible d'aborder les problèmes cognitifs et sémantiques en termes de structure[1] ; et que de la logique émerge de cette structuration.

Précisément, la structure sera appréhendée en termes topologiques et modélisée par un faisceau ; l'évolution de ce faisceau se fera au sein de la catégorie des faisceaux sur l'espace topologique considéré ; cette dernière étant un topos, on s'intéressera à la logique interne de celui-ci. On voit donc que ce cadre théorique nous permet de traiter naturellement les principaux problèmes évoqués : articulation local/global et émergence d'un niveau logico-symbolique.

Le chapitre suivant est consacré à la présentation du modèle, baptisé *modèle des faisceaux de traits*, qui à ce stade de développement relève davantage du prototype ou de la maquette, que de la modélisation achevée, mais qui nous permet d'aborder certains points fondamentaux, et d'indiquer des issues prometteuses.

2. PRÉSENTATION DU MODÈLE

2.1. *Le modèle des faisceaux de traits*

Il repose sur un postulat : les objets sur lesquels portent la connaissance et le discours sont cognitivement structurés. Cette structuration est locale et différente de la classe au sens ensembliste du terme. A ces objets sont associés des traits, des descripteurs, définis localement ; c'est à dire *localement pertinents.*

Dans ces conditions la structure mathématique qui s'impose est celle de *faisceau.* Ceci nous oblige à considérer l'espace primitif des objets comme un espace topologique, et les traits comme des fonctions booléennes définies localement. Un faisceau représente donc une stucturation de la connaissance relative aux objets donnés. La théorie mathématique des catégories et particulièrement la *théorie des topoï* font une place essentielle aux catégories de faisceaux et ont permi d'obtenir des résultats remarquables. En particulier, à la catégorie des

[1] Il est réconfortant de constater que des préoccupations identiques conduisent au même cadre théorique (Thiopoulos [19]).

faisceaux sur un espace topologique, on peut associer de manière intrinsèque un langage logique qui la décrit : *son langage interne*. Le fait que cette logique soit ***nécéssairement*** intuitionniste souligne le caractère fondamentalement constructif de cette approche.

Nous serons donc amenés à reprendre l'ensemble de cette démarche, pour éventuellement l'appliquer à notre cas particulier: la catégorie des faisceaux de fonctions booléennes localement définies.

La restriction d'une structure ne va jamais sans problème. Nous montrerons qu'a priori cette catégorie ne forme pas un topos, et discuterons des conditions suffisantes pour qu'elle le devienne. Cependant, tous les objets qui caractérisent les topoï parmi les catégories s'interprètent aisément dans cette dernière ; et le fait qu'elle soit dans tous les cas une sous-catégorie d'un topos lui permet d'hériter de la logique intuitionniste de celui-ci.

Notons qu'à ce stade d'élaboration rien n'est dit sur la nature de la topologie adoptée ; nous nous contenterons d'une vague idée de proximité cognitive. De même, nous assumons la séparation artificielle entre objets et traits (ou descripteurs). Ces présupposés insupportables pour une modélisation intéresssante, doivent être élucidés dans un même mouvement. Notre conviction est que les notions d'objets et de propriétés émergent conjointement d'un réseau de relations qui forme la structure topologique de l'espace de référence. C'est l'ambition de mettre en forme cette intuition qui nous a conduit vers le formalisme catégorique utilisé ici.

2.2. *Structure et logique*

L'évocation de structures engendrant une logique intuitionniste rappelle immédiatement la "sémantique des mondes possibles" de Kripke ([7], [8]). A ce propos nous voudrions faire deux remarques.

Tout d'abord, nous opérons un renversement de perspective : la sémantique de Kripke a été proposée à l'origine *pour* la logique intuitionniste du premier ordre ; c'est à dire suivant la démarche qui va d'une syntaxe cohérente à une sémantique. Dans la théorie des topoï, la catégorie est première, elle engendre le langage dont elle est un modèle. Plus fondamentalement, si la sémantique présentée a des allures de sémantique de Kripke, c'est pour des raisons mathématiques profondes. Il se trouve que la sémantique proposée par Kripke est un cas particulier correspondant à un topos spécifique : celui des foncteurs entre un ensemble préordonné et la catégorie des ensembles. Certes, les faisceaux sont des foncteurs, mais des foncteurs particuliers : leur structure est enrichie localement.

Enfin, on peut dire que la sémantique de Kripke est ensembliste, comme le montrent les applications qui en sont faites dans la Grammaire de Montagüe (Dowty & *alii* [3]) : les objets primitifs sont les individus, les propriétés sont des ensembles, les propriétés de ces dernières étant des ensembles d'ensembles. Ce que notre modèle montre, c'est qu'il est possible de casser la dualité extension/intension en partant de termes généraux (les traits) portant sur des objets, et d'établir une logique qui prenne en compte la structuration topologique de l'ensemble des objets.

3. CADRE FORMEL

Nous supposerons connus les concepts fondamentaux de la théorie des catégories qui sont exposés dans les ouvrages classiques cités en référence, mais nous donnons cependant les principales définitions en annexe. Dans ce paragraphe on présente les définitions et résultats[1] de

---

[1]L'essentiel du matériel mathématique présenté ici est issu du remarquable ouvrage de Lambek et Scott [14].

la théorie des topoï pertinents pour notre approche. Ceux-ci forment le cadre mathématique dans lequel s'insère notre construction. Nombre de définitions et de théorèmes sont d'une interprétation difficile ; ils sont cependant mentionnés pour que le lecteur mesure l'aspect remarquablement synthétique de cette théorie. C'est au paragraphe suivant, dans un cas particulier, que seront données les interprétations indispensables.

3.1. *Catégories et systèmes déductifs*

En considérant les objets comme des formules et les flèches comme des preuves, une catégorie est un système déductif (Lambek [12], [13]) dans lequel les preuves vérifient les équations suivantes :

$$f1_A = f,\ 1_Bf = f,\ (hg)f = h(gf),\ \text{pour tout } f\colon A\to B,\ g\colon B\to C,\ h\colon C\to D.$$

Ainsi, à partir d'un système déductif quelconque, on obtient une catégorie en imposant une relation d'équivalence (une égalité) entre les preuves.

3.2. *Catégories cartésiennes fermées*

DÉFINITION 3.2.1. Une *catégorie cartésienne fermée* est une catégorie $\mathfrak{C}$ possédant des produits finis (elle a donc un objet terminal) et telle que, pour tout objet B de $\mathfrak{C}$, le foncteur $(-)\times B\colon \mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$ a un adjoint droit, noté $(-)^B\colon \mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$. Ce qui veut dire que pour tout objet A, B et C de $\mathfrak{C}$, il existe un isomorphisme: $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A\times B, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, C^B)$

De plus, cet isomorphisme est naturel en A, B et C.

NOTATIONS 3.2.2.
- L'objet terminal d'une catégorie est noté 1.
- L'unique flèche entre l'objet A et 1 est notée O_A.
- Soit les flèches $f\colon C\to A$ et $g\colon C\to B$, l'unique flèche de C vers le produit $A\times B$ (s'il existe) est notée $\langle f, g\rangle$.

  Les projections canoniques sont notées $\pi_{A,B}\colon A\times B\to A$ et $\pi'_{A,B}\colon A\times B\to B$.
- Si $g\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A\times B, C)$, on note $g\#$ l'homomorphisme associé dans $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, C^B)$.
- La flèche $\varepsilon_{A,B}\colon A^B\times B\to A$ est appelée la fonction d'évaluation.

En tant que système déductif, une catégorie cartésienne fermée est un calcul intuitionniste positif vérifiant les équations :

E1 : $f1_A = f,\ 1_Bf = f,\ (hg)f = h(gf)$, pour tout $f\colon A\to B,\ g\colon B\to C,\ h\colon C\to D$.

E2 : $f = O_A$, pour tout $f\colon A\to 1$;

E3a : $\pi\langle f, g\rangle = f$;

E3b : $\pi'\langle f, g\rangle = g$;

E3c : $\langle\pi h, \pi' h\rangle = h$, où $h\colon C\to A\times B$;

E4a : $\varepsilon_{A,B}\langle h\#\pi_{C,B}, \pi'_{C,B}\rangle = h$;

E4b : $(\varepsilon_{A,B}\langle k\pi_{C,B}, \pi'_{C,B}\rangle)\# = k$, pour tout $h\colon C\times B\to A$ et $k\colon C\to A^B$.

INTERPRÉTATION 3.2.3.
- L'objet terminal 1 est un terme représentant le "vrai".
- Le produit $\times$ est interprété comme la conjonction $\wedge$.
- Les projections et la règle E3 correspondent à l'élimination de $\wedge$.

- B^A correspond à $A \Rightarrow B$.
- E4 correspond au théorème de la déduction.

En adjoignant une flèche indéterminée $x: A_0 \to A$ au graphe sous-jacent à une catégorie $\mathcal{C}$, et en considérant la catégorie librement engendrée par ce graphe, on obtient une catégorie polynômiale $\mathcal{C}[x]$. Des conditions appropriées sur les flèches font de $\mathcal{C}[x]$ une catégorie cartésienne fermée dans le cas où $\mathcal{C}$ est elle-même cartésienne fermée. Les flèches de la catégorie $\mathcal{C}[x]$ peuvent être vues alors comme des polynômes en x.

Du point de vue système déductif, les formules de $\mathcal{C}[x]$ sont les objets de $\mathcal{C}$, et les preuves de $\mathcal{C}[x]$ sont formées à partir des flèches de $\mathcal{C}$ et de la nouvelle flèche $x: A_0 \to A$ par les règles d'inférences. Les flèches de la catégorie $\mathcal{C}[x]$ sont donc des preuves sous l'hypothèse x.

L'égalité des preuves dans cette catégorie sera notée $=_x$.

Cette construction s'étend sans difficulté aux polynômes de plusieurs variables.

THÉORÈME 3.2.4. (Complétude fonctionnelle des catégories cartésiennes fermées). Pour tout polynôme $\varphi(x): B \to C$ d'indéterminée $x: 1 \to A$ sur une catégorie cartésienne fermée $\mathcal{C}$, il existe une flèche unique $f: A \times B \to C$ dans $\mathcal{C}$ telle que $f\langle xO_B, 1_B\rangle =_x \varphi(x)$.

3.3. *Topoï*

DÉFINITION 3.3.1. Un *topos (élémentaire)* $\mathcal{T}$ est une catégorie cartésienne fermée dont le foncteur de sous-objets est représentable. Ce qui s'exprime par l'existence d'un objet Ω, appelé le *classificateur de sous-objets*, et d'un isomorphisme naturel : $\mathrm{Sub} \cong \mathrm{Hom}(-,\Omega)$.

Plus précisément, cela signifie qu'il existe une flèche : $\top \to \Omega$ (appelée *vrai*) telle que pour tout objet A, et tout monomorphisme *m*: $B \to A$, il existe une flèche unique *char m* telle que le diagramme ci-dessous soit un produit fibré.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "m"] \arrow[d, "O_B"'] & A \arrow[d, "\text{char } m"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

L'objet Ω^A noté aussi PA peut-être interprété comme "l'ensemble" des sous-objets de A. Des exemples de topoï nous sont fournis par certaines catégories de foncteurs.

DÉFINITION. 3.3.2. Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite *petite* si les classes de ses objets et de ses morphismes sont des ensembles.

THÉORÈME 3.3.3. La catégorie $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}$ des foncteurs d'une petite catégorie $\mathcal{C}$ dans la catégorie des ensembles est un topos.

A tout topos $\mathcal{T}$ on peut associer un langage interne $\mathcal{L}(\mathcal{T})$ qui est une théorie intuitionniste des types. En bref, les types sont les objets, les termes sont les flèches, et ils vérifient les axiomes intuitionnistes classiques. On généralise ainsi ce qui est connu en logique sous le nom de correspondance de Curry-Howard.

NOTATION 3.3.4. En suivant Lambek & Scott ([14]) nous distinguerons l'égalité interne notée $\bullet{=}\bullet$ qui vaut entre les flèches du topos, de l'égalité externe = qui vaut entre les termes de $\mathcal{L}(\mathcal{T})$.

DÉFINITION 3.3.5. Le langage interne $\mathcal{L}(\mathcal{T})$ d'un topos $\mathcal{T}$ a pour types les objets de $\mathcal{T}$.
Il possède comme termes de type A en les variables x_i de type A_i ($i = 1, \ldots, n$) les polynômes $\varphi(x_1, \ldots, x_n)\colon 1 \to A$ en les indéterminées $x_i\colon 1 \to A_i$. En particulier :

- les variables de type A sont les flèches indéterminées $x\colon 1 \to A$;
- $*$ est $1 \to 1$;
- $\langle a, b\rangle$ est $\langle a, b\rangle : 1 \to A \times B$;
- $a = a'$ est la composée de $\langle a, a'\rangle\colon 1 \to A \times A$ et de $\delta_A\colon A \times A \to \Omega$ où $\delta_A \equiv \mathrm{char}\langle 1_A, 1_A\rangle$;
- $a \in \alpha$ est la composée de $\langle \alpha, a\rangle\colon 1 \to PA \times A$ et de $\varepsilon_A\colon PA \times A \to \Omega$ où $\varepsilon_A \equiv \varepsilon_{\Omega,A}$;
- $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$ est $\lambda_{x\in A}\varphi(x)$, l'unique flèche $\alpha\colon 1 \to PA$ telle que $x \in \alpha \bullet{=}\bullet_x \varphi(x)$.

Le résultat le plus important dit que le topos $\mathcal{T}$ est un modèle, une sémantique, de cette logique intuitionniste d'ordre supérieur. Cette sémantique peut-être considérée comme une généralisation de la sémantique de Kripke pour la logique intuitionniste du premier ordre[1]. Nous expliciterons cette sémantique dans le cas particulier qui nous intéresse : les catégories de faisceaux. Mais il peut être utile d'en saisir l'esprit dès à présent.

3.4. *Sémantique dans un topos*

Soit $\mathcal{T}$ un topos, $\mathcal{L}(\mathcal{T})$ son langage interne, et O la relation binaire de déductibilité dans $\mathcal{L}(\mathcal{T})$.

O p dans $\mathcal{L}(\mathcal{T})$ signifie que $p \bullet{=}\bullet \dagger$ en tant que flèches dans $\mathcal{T}$; ce qui sera noté également $\mathcal{T} \models p$, on dira alors que *$\mathcal{T}$ satisfait la proposition p* ou que *p est vraie dans $\mathcal{T}$*.

De la même manière O $\varphi(x)$ signifie que $\varphi(x) \bullet{=}\bullet_x \dagger$ en tant que flèches.

En utilisant la complétude fonctionnelle d'un topos, on sait qu'il existe une flèche $f\colon A \to \Omega$ telle que $\varphi(x) \bullet{=}\bullet_x fx$., alors O $\varphi(x)$ signifie que pour tout $a\colon C \to A$ on a: $fa \bullet{=}\bullet TO_C$.

Pour une flèche $a\colon C \to A$ dans $\mathcal{T}$ on écrit $\varphi(a) \equiv fa$ par abus de notation, et on considère a comme *un élément généralisé de A au stade C*. On écrit $C \Vdash \varphi(a)$ pour $fa \bullet{=}\bullet TO_C$ et on dit que *$\varphi(a)$ est vrai au stade C* ou que *C force $\varphi(a)$*.

---

[1]Lambek et Scott proposent la dénomination "sémantique de Beth-Kripke-Joyal".

On voit donc que *la vérité dans un topos est équivalente à la vérité à tous les stades et pour tous les éléments généralisés* ([14]).

En fait, on peut restreindre l'ensemble des stades à un ensemble d'objets générateurs du topos.

3.5. *Faisceaux d'ensembles*

DÉFINITION 3.5.1. Un *préfaisceau d'ensemble* F sur un espace topologique $(X, \mathcal{O}(X))$ est un foncteur contravariant entre la catégorie $\mathcal{O}(X)$ des ouverts de X (le seul morphisme étant l'inclusion) et la catégorie des ensembles.
On peut considérer aussi des préfaisceaux de groupes, d'anneaux, *etc...*
Comme F est contravariant, l'application F_{UV}: $F(U)\to F(V)$ existe lorsque $V\subseteq U$ et est appelée *restriction*. Un élément s de F(U) s'appelle une *section* sur U, et on note $F_{UV}(s) = s|_V$.

DÉFINITION 3.5.2. Un faisceau F est un préfaisceau si pour tout recouvrement d'ouverts $U = \cup_{i\in I}U_i$, on a les propriétés :
(F1) Soit s et t deux éléments de F(U): $(s|_{U_i} = t|_{U_i}, \forall\, i \in I) \Rightarrow s = t$.
(F2) Pour toute famille $(s_i)_{i\in I}$, $s_i\in F(U_i)$, vérifiant : $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$ $\forall i,j \in I$, il existe un recollement ; c'est-à-dire un élément s de F(U) tel que : $s|_{U_i} = s_i$, $\forall\, i \in I$.

THÉORÈME 3.5.3. La catégorie $Set^{\mathcal{O}(X)^{op}}$ des préfaisceaux sur l'espace topologique X est un topos.

THÉORÈME 3.5.4. La catégorie Sh(X) des faisceaux sur l'espace topologique X est un topos.

On est en mesure maintenant de présenter la sémantique du langage interne du topos Sh(X).

3.6. *La sémantique de* Sh(X)

Nous rappelons tout d'abord le lemme de Yoneda.

LEMME 3.6.1. (Yoneda 1954) Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite (i.e la classe des morphismes entre deux objets est un ensemble), et A un objet de $\mathcal{C}$. On note h_A le foncteur contravariant $Hom_{\mathcal{C}}(-,A)$.

Si $F:\mathcal{C}^{op}\to Set$ est un foncteur contravariant, alors $Nat(h_A,F)$ la classe des transformations naturelles entre F et h_A (ici la classe des morphismes de faisceau) est en correspondance biunivoque avec F(A).

NOTATION 3.6.2. Soit a: $h_A\to F$ une transformation naturelle, on notera a* l'objet de F(A) qui lui est associé par le Lemme de Yoneda.
Le théorème sur lequel reposera notre construction s'énonce :

THÉORÈME 3.6.3. Soit F un faisceau sur X, U un ouvert de X, a: $h_U\to F$. Alors :
(0) $U \Vdash a$ ssi $a^* = U$, dans le cas $F = \Omega$;
(1) $U \Vdash b\in\beta$ ssi $\beta^*(U)(b^*) = U$, où b: $h_U\to F$ et β: $h_U\to \Omega^F$;
(2) $U \Vdash \top$ toujours ;

(3) $U \Vdash \perp$ ssi $U = \emptyset$;
(4) $U \Vdash \varphi(a) \wedge \psi(a)$ ssi $U \Vdash \varphi(a)$ et $U \Vdash \psi(a)$;
(5) $U \Vdash \varphi(a) \vee \psi(a)$ ssi $U = V \cup W$ avec $V, W \in \mathcal{O}(X)$ tels que $V \Vdash \varphi(a|_V)$ et $W \Vdash \psi(a|_W)$;
(6) $U \Vdash \varphi(a) \Rightarrow \psi(a)$ ssi pour tout $V \subseteq U$, si $V \Vdash \varphi(a|_V)$ alors $V \Vdash \psi(a|_V)$;
(7) $U \Vdash \forall_{y \in G} \psi(y,a)$ ssi, pour tout $V \subseteq U$ et tout $b: h_V \to G$, $V \Vdash \psi(b,a|_V)$;
(8) $U \Vdash \exists_{y \in G} \psi(y,a)$ ssi il existe un recouvrement ouvert $U = \cup_{i \in I} U_i$ et des flèches $b_i : h_{U_i} \to G$ tels que $U_i \Vdash \psi(b_i, a|_{U_i})$ pour tout $i \in I$.

Par convention le prédicat $U \Vdash$ remplace $h_U \Vdash$, la famille des h_U formant un ensemble d'objets générateurs de Sh(X). L'interprétation de ce théorème occupera une place importante dans le paragraphe qui suit.

Remarquons cependant que la forme des conditions de satisfiabilité est bien du "style intuitionniste".

4. LA CATÉGORIE DES FAISCEAUX DE TRAITS

4.1. *Structure de faisceau*

DÉFINITION 4.1. Soit X un ensemble d'objets structuré en espace topologique $(X, \mathcal{O}(X))$, et Y un ensemble de fonctions booléennes - les traits -. On définit un faisceau F sur X en associant à tout ouvert U, un ensemble F(U) de fonctions booléennes définies sur U - les traits pertinents sur U -.

C'est ici qu'il faut prendre la mesure des engagements ontologiques que cette structuration implique. Il est certain que les propriétés caractéristiques des faisceaux imposent des contraintes qui doivent être justifiées. Nous l'avons dit : ce surcroît de structure n'a d'intérêt que parce qu'il est *local*, et présente de grandes capacités *génératives*.

4.2. *Généralisation locale*

La propriété de préfaisceau est trivialement vérifiée : si V est un ouvert contenu dans U, il est clair que $F(U) \subseteq F(V)$.

C'est évidemment la propriété de recollement qui pose le plus de problèmes.
Soit une famille de traits $(s_i)_{i \in I}$, $s_i \in F(U_i)$, vérifiant : $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U} \ \forall\, i, j \in I$, existe-il un trait s défini sur U tel que : $s|_{U_i} = s_i, \forall\, i \in I$?

D'un point de vue extensionnel ceci est trivialement vérifiée, une fonction booléenne étant entièrement définie par son graphe. Du point de vue intensionnel ceci impose l'existence d'un *trait synthétique* chaque fois qu'il existe une famille de traits se recoupant localement. Ce mécanisme de généralisation est entièrement dicté par la structure mathématique choisie ; en ce sens c'est un artefact. Comme dans toute entreprise modélisatrice, il faut que le gain en analycité compense la perte en vraisemblance. Dans ce cas, la trivialité mathématique de la propriété de recollement nous incite à croire que le sacrifice n'est pas trop lourd. Evidemment, on peut toujours arguer du fait que si la propriété de recollement est triviale, c'est parce que le type de fonctions choisies (les fonctions booléennes) est excessivement simple ; et renvoyer ainsi le modélisateur à ces partis pris initiaux.

Nous récusons cet argument pour trois raisons :

- il est universel et s'applique à tout effort modélisateur ;
- choisir un autre type de fonctions que les fonctions booléennes renvoie nécessairement à des structures plus contraignantes, dont la pertinence cognitive est encore plus difficile à mettre en évidence ;
- un des objectifs de ce travail est de mettre en œuvre de manière conséquente des parties substantielles[1] d'une théorie mathématique ; ceci ne peut se faire qu'en se donnant les moyens mathématiques nécessaires.

4.3. *Les connecteurs logiques*

F(U) se trouvera également muni de la structure de monoïde, ou plus précisément d'inf demi-treillis, pour la conjonction $\wedge$. Ceci implique l'existence d'un élément neutre c'est à dire d'un trait noté χ_U (la fonction caractéristique de U) satisfait par tous les objets de U ; ce trait "universel" signale simplement l'appartenance à un même ouvert. Nous ne définirons pas sur F(U) l'opération de disjonction $\vee$ pour des raisons d'économie et de pertinence cognitive.

Ce dernier point demanderait à être amplement développé, mais nous nous contenterons de quelques indications. Les recherches récentes sur la genèse et la structure des catégories (Kanellos & Desclés [7]), liées au phénomène de typicalité, mettent en avant le rôle essentiel des processus de détermination par spécification. Cette conception, si elle s'accorde avec une interprétation du connecteur $\wedge$ comme un opérateur de détermination, laisse peu de place à un rôle cognitif joué par $\vee$. Si $\vee$ a un rôle à jouer c'est probablement à un autre niveau - plus conceptuel - où s'effectuent des opérations proprement logiques. Par exemple dans la construction des treillis conceptuels proposée par Wille ([21]), c'est lors de la caractérisation des concepts qu'apparaissent les connecteurs logiques.

4.4. *La catégorie* $\mathfrak{F}$(X)

Chaque faisceau de traits représente une structure de connaissance sur les objets de X. La pluralité des faisceaux manifeste la diversité des points de vue, l'évolution des connaissances (ou des descriptions), et permet l'existence de différents niveaux de connaissance (ou de description).

Les faisceaux de traits forment une sous-catégorie pleine de Sh(X) ; nous la noterons $\mathfrak{F}$(X). Notons, et c'est essentiel - la suite le prouvera -, qu'il n'est rien dit sur la nature des morphismes de cette catégorie. Ils gardent le statut général de morphismes de faisceau d'inf demi-treillis (de fonctions booléennes). On peut se demander si cette catégorie de faisceaux forme un topos, ce qui nous ferait hériter, de manière élégante, de l'ensemble des propriétés remarquables des topoï. Nous verrons qu'il n'en est rien ; à moins d'imposer des contraintes à une certaine classe de morphismes. C'est pourquoi nous reprenons tous les paliers de la construction qui va d'une catégorie à un topos, puis de celui-ci à sa sémantique. Ceci permettra en outre de donner une interprétation plus simple des objets mathématiques manipulés.

---

[1]. Cette dernière affirmation s'entend comme une critique de l'usage de la *notation* mathématique comme signe de scientificité.

5. LA STRUCTURE DE $\mathcal{F}$(X)

Etudions la structure de $\mathcal{F}$(X). Demandons-nous en particulier si elle possède des produits finis, une exponentiation et un classificateur de sous-objets. Pour ce faire nous reprenons les constructions faites dans Sh(X) ([14]) en les adaptant à $\mathcal{F}$(X).

5.1 *Produits finis*

LEMME 5.1.1 : La catégorie $\mathcal{F}$(X) possède des produits finis.

Démonstration : il suffit d'étudier le cas de deux faisceaux. Soit F et G deux faisceaux, on définit F×G par : $F{\times}G(U) = \{s\wedge t \mid s\in F(U) \text{ et } t\in G(U)\}$ pour tout ouvert U de X.

- F×G est un faisceau.

Soit $\subseteq$ U, comme $F(U) \subseteq F(V)$ et $G(U) \subseteq G(V)$, il est clair que $F{\times}G(U) \subseteq F{\times}G(V)$; F×G est donc un préfaisceau.

Soit $U = \cup_{i\in I} U_i$ un recouvrement de U, $(s_i)_{i\in I}$ et $(t_i)_{i\in I}$ deux familles de fonctions contenues respectivement dans F(U) et G(U) telles que pour tout i et j :

$$s_i\wedge t_i|_{U_i\cap U_j} = s_j\wedge t_j|_{U_i\cap U_j}.$$

Soit ω un élément de $U_i\cap U_j$,
si $s_i\wedge t_i(\omega) = 1$ alors : $s_i(\omega) = s_j(\omega) = t_i(\omega) = t_j(\omega) = 1$;
si $s_i\wedge t_i(\omega) = 0$ alors par exemple $s_i(\omega) = 0$, si $s_j(\omega) \neq 0$ c'est que $t_j(\omega) = 0$, la valeur de s_j en ω n'importe pas. On peut toujours trouver une fonction s'_j qui coïncide avec s_i sur $U_i\cap U_j$, et telle que $s_i\wedge t_i|_{U_i\cap U_j} = s'_j\wedge t_j|_{U_i\cap U_j}$.

En raisonnant de même avec t_j, on obtient deux familles $(s'_i)_{i\in I}$ et $(t'_i)_{i\in I}$ telles que $s_i\wedge t_i = s'_i\wedge t'_i$, $s'_i|_{U_i\cap U_j} = s'_j|_{U_i\cap U_j}$ et $t'_i|_{U_i\cap U_j} = t'_j|_{U_i\cap U_j}$. On utilise alors le fait que F et G sont des faisceaux pour effectuer les recollements de $(s'_i)_{i\in I}$ et $(t'_i)_{i\in I}$ par s et t respectivement. Le recollement de la famille $(s_i\wedge t_i)_{i\in I}$ est réalisé par $s\wedge t$.o

- F×G est le produit de F et G.

On définit les projections π et π' par : $\pi(U)(s\wedge t) = s$ et $\pi'(U)(s\wedge t) = t$, avec $U\in\mathcal{O}(X)$, $s\in F(U)$, et $t\in G(U)$.

Pour f: H→F et g: H→G deux morphismes de faisceaux il existe alors un unique morphisme <f,g> défini par : $\langle f,g\rangle(U)(s) = f(U)(s)\wedge g(U)(s)$ qui rend le diagramme ci-dessous commutatif.

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "{\langle f,g\rangle}"] & F \\
G & F\times G \arrow[l, "\pi'"] \arrow[u, "\pi"']
\end{tikzcd}$$

o

5.2. Le classificateur de sous-objets

DÉFINITION 5.2.1. Dans le topos Sh(X) le classificateur de sous-objets est défini par : $\forall U \in \mathcal{O}(X), \Omega(U) \equiv \{V \in \mathcal{O}(X) \mid V \subseteq U\}$.
La flèche *vrai* : $\mathsf{T} \to \Omega$ est donnée par : $\mathsf{T}(U)(*) \equiv U$.

REMARQUE 5.2.2. Le faisceau peut être considéré comme un faisceau de fonctions booléennes : à tout ouvert on associe sa fonction caractéristique.

Il est instructif de vérifier que Ω est un classificateur de sous-objets.
Si m: $G \to F$ est un monomorphisme, c'est à dire si G est un sous-faisceau de F, on définit (char m): $F \to \Omega$ par :
pour tout ouvert U et tout $s \in F(U)$, (char m)(U)(s) = W, où W est la réunion des ouverts V de X contenus dans U tels que $s|_V \in G(V)$.

Le morphisme (char m) associe à tout trait de F, pertinent sur un ouvert U, le plus grand ouvert contenu dans U sur lequel s est également un trait de G.

Il est clair que :
si $s \in G(U) \subseteq F(U)$, (char m)(U)(s) = U = $\mathsf{T}(U)(*)$.
si $s \in F(U)-G(U)$, (char m)(U)(s) = $\emptyset$.
(char m) est bien la fonction caractéristique du sous-faisceau G.❑

DÉFINITION 5.2.3. Pour tout morphisme f: $F \to \Omega$, on définit *le noyau de f*, noté Ker f, par :

$$\forall U \in \mathcal{O}(X), (\mathrm{Ker}\ f)(U) \equiv \{s \in F(U) \mid f(U)(s) = U\}.$$

On vérifie aisément que Ker f est un sous-objet de F, c'est à dire un sous-faisceau de F. Ainsi on a bien la bijection annoncée en (2.3.1) entre les sous-objets de F et les morphismes de F dans Ω.

5.3. *Exponentiation*

5.3.1. Lemme de Yoneda
Le lemme de Yoneda est essentiel à la définition de l'exponentiation dans les catégories de foncteurs. En effet si F, G: $\mathfrak{C} \to$ Set sont deux foncteurs, on s'attend à ce que $G^F(A) \cong \mathrm{Nat}(h_A G^F) \cong \mathrm{Nat}(h_A \times F, G)$; ce qui conduit à poser : $G^F(A) \equiv \mathrm{Nat}(h_A \times F, G)$.

On rappelle que h_A est le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(-, A)$.

DÉFINITION 5.3.1.1. Dans la catégorie des faisceaux h_U est défini par :

$$\forall U \in \mathcal{O}(X) \qquad h_U(V) = \{*\} \text{ si } V \subseteq U, \quad h_U(V) = \emptyset \text{ sinon.}$$

$\{*\}$ désigne un singleton quelconque fixé, objet terminal de la catégorie des ensembles. Entre les ouverts de $\mathcal{O}(X)$ il n'y a qu'un seul morphisme possible : l'inclusion. $*$ peut donc être un objet quelconque puisqu'elle ne fait qu'indiquer une éventuelle inclusion entre ouverts.

Cette définition de h_U reste inchangée dans $\mathfrak{F}(X)$, $\{*\}$ est un singleton fixé dans la catégorie des ensembles de fonctions booléennes. On peut voir $*$ comme la fonction booléenne égale à 1 sur tout X. Remarquons que l'objet terminal de $\mathfrak{F}(X)$, noté 1, est défini par :

$1(U) = \{*\}$. L'unique morphisme existant entre un faisceau F et 1 est celui qui pour tout U envoie les éléments de F(U) sur $*$.

Enfin, il est trivial de vérifier que le Lemme de Yoneda reste valable dans $\mathfrak{F}(X)$, nous en retiendrons l'existence pour toute transformation naturelle a: $h_U \rightarrow F$ d'un élément a* de F(U) qui la caractérise. Cet élément est : $a^* = a(U)(*)$.

5.3.2. *La définition de* G^F

On définit classiquement G^F par : $G^F(U) \equiv Nat(F|_U, G|_U)$, où $F|_U$ désigne la restriction de F à $\mathcal{O}(U)^{op}$. En théorie des faisceaux (Godement [5]) G^F s'appelle *le faisceau des germes d'homomorphismes de F dans G.*

On montre aisément que G^F est un faisceau ; il est donc un *objet* de Sh(X). Pouvons nous étendre ceci à $\mathfrak{F}(X)$? Pour ce faire il faut que $Nat(F|_U, G|_U)$ soit identifiable à un ensemble de fonctions booléennes définies sur U. En d'autres termes, il faut qu'un morphisme entre faisceaux restreints à U soit identifiable à un trait défini sur U.

5.4. *Les morphismes*

On peut, en effet, identifier certains morphismes à des traits : ajout ou suppression d'un trait, changements de valeurs d'un trait donné, *etc.*. Nombre de morphismes peuvent aussi se ramener à des compositions de ces morphismes élémentaires, au prix il est vrai d'opérations logiques dont il faut mesurer la pertinence cognitive à ce niveau.

A côté de ceux-ci, il est une classe particulièrement importante de morphismes : les morphismes entre un faisceau et le classificateur de sous-objets Ω. Constituants fondamentaux de la structure logique de la catégorie, c'est de leur nature dont dépend la structure de $\mathfrak{F}(X)$.

On verra en (6.2.3), qu'une propriété portant sur les traits d'un faisceau est définie extensionnellement par le sous-faisceau des traits qui la vérifient. Formellement, un sous-faisceau du faisceau F est le noyau d'un morphisme f: $F \rightarrow \Omega$; ceci entraine qu'un élément de $Nat(F|_U, \Omega|_U)$ n'est identifiable à un trait pertinent sur U que si l'on montre que toute propriété des traits pertinents sur U est indentifiable à un trait pertinent sur U. Comme il n'y a pas d'isomorphisme entre la catégorie des sous-faisceaux d'un faisceau restreint à un ouvert U et la catégorie des traits définis sur U, nous nous contenterons de prouver qu'on peut associer de manière canonique un trait à tout sous-faisceau.

5.5. *Une correspondance de Galois*

Pour ce faire on va utiliser une méthode classique : on va prouver qu'il y a une relation d'adjonction (il s'agit ici d'une correspondance de Galois contravariante) entre la catégorie des sous-faisceaux d'un faisceau restreint à un ouvert U et la catégorie des traits définis sur U.

DEFINITION 5.5.1. Soit G un sous-faisceau de $F|_U$. On définit une fonction booléenne $\eta(G)$ définie sur U par :

$$\forall \omega \in U,\ \eta(G)(\omega) = 1 \text{ ssi } \forall V \subseteq U, \text{ V contenant } \omega,\ \forall t \in G(V),\ t(\omega) = 1$$

En d'autres termes un objet ω vérifie le trait $\eta(G)$ si tout trait de G défini en ω est vérifié par ce dernier. On peut dire aussi que $\eta(G)$ est la fonction caractéristique de *l'extension* de G.

DEFINITION 5.5.2. Réciproquement, si s est un trait défini sur U, on va lui associer le faisceau $\varepsilon(s)$ défini par : $\forall V \subseteq U$,
si $\forall \omega \in V$, $s(\omega) = 0$, $\varepsilon(s)(V) = F(V)$;
sinon $\varepsilon(s)(V) = \{t \in F(V) | \, t(\omega) = 1$, pour tout $\omega \in V$ tel que $s(\omega) = 1\}$.

$\varepsilon(s)$ est le faisceau des traits vérifiés par les objets qui vérifient s ; $\varepsilon(s)$ est *l'intension* de s. Ces interprétations sont réductrices si l'on omet de dire que dans les deux cas on prend en compte la structure topologique de U.

L'ensemble des sous-faisceaux de $F|_U$ est un ensemble partiellement ordonné par l'inclusion ; de même l'ensemble des fonctions booléennes définies sur U est partiellement ordonné par la relation $\leq$ définie par :

$$s \leq t \text{ ssi } \forall \omega \in U, s(\omega) = 1 \Rightarrow t(\omega) = 1.$$

Il s'agit alors de prouver le lemme suivant :

LEMME 5.5.3. Pour tout sous-faisceau G de $F|_U$ et pour toute fonction booléenne s définie sur U: $[s \leq \eta(G)] . \Leftrightarrow [G \subseteq \varepsilon(s)]$.

Démonstration :

On vérifie tout d'abord que $\varepsilon(s)$ est un sous-faisceau de $F|_U$.

Soit $V' \subseteq V$, dans tous les cas il est clair que $\varepsilon(s)(V) \subseteq \varepsilon(s)(V')$.

Si $\cup_{i \in I} V_i$ est un recouvrement ouvert de V et si $(t_i)_{i \in I}$ est une famille de fonctions, $t_i \in \varepsilon(s)(V_i)$, vérifiant la propriété habituelle, comme $F|_U$ est un faisceau il existe un recollement $t \in F(V)$. Soit $\omega \in V$ tel que $s(\omega) = 1$, il existe $i \in I$ tel que $\omega \in V_i$; on en déduit que

$$t(\omega) = t|_{V_i}(\omega) = t_i(\omega) = 1, \text{ ce qui prouve que } t \in \varepsilon(s)(V). \square$$

Montrons à présent l'équivalence : $[s \leq \eta(G)] . \Leftrightarrow [G \subseteq \varepsilon(s)]$.

- On suppose que : $s \leq \eta(G)$.

Soit V un ouvert contenu dans U :
si $\forall \omega \in V$ $s(\omega) = 0$, on a $\varepsilon(s)(V) = F(V)$, donc $G(V) \subseteq \varepsilon(s)(V)$.
si $\exists \omega \in V$ tel que $s(\omega) = 1$, alors $\eta(G)(\omega) = 1$ et $\forall t \in G(V)$, $t(\omega) = 1$; ce qui entraine que $\forall t \in G(V)$, $t \in \varepsilon(s)(V)$.$\square$

- Réciproquement, supposons que : $G \subseteq \varepsilon(s)$.

Soit $\omega \in U$ tel que $s(\omega) = 1$, et V un ouvert de U contenant ω. Considérons $t \in G(V)$, on a

$$t(\omega) = 1 \text{ car } t \in \varepsilon(s)(V) \text{ ; on a donc prouvé que } \eta(G)(\omega) = 1. \square$$

REMARQUES 5.5.4. • Les foncteurs η et ε déterminent une équivalence entre les éléments fermés (les G tels que $\varepsilon(\eta(G)) = G$) de l'ensemble des sous-faisceaux de $F|_U$ et les éléments fermés (les s tels que $\eta(\varepsilon(s)) = s$) de l'ensemble des fonctions booléennes définies sur U.
De manière générale, on a les relations :

$$G \subseteq \varepsilon\eta(G) \text{ ;}$$
$$s \leq \eta\varepsilon(s) \text{ ;}$$
$$\varepsilon\eta\varepsilon\eta(G) = \varepsilon\eta(G) \text{ ;}$$
$$\eta\varepsilon\eta\varepsilon(s) = \eta\varepsilon(s).$$

• On a généralisé la construction faite par Wille ([21]), au cas de l'espace topologique U muni de la topologie induite par X. Dans sa terminologie, un couple de fermés (G, s) serait appelé un *concept*. On peut alors envisager une généralisation de sa notion de *treillis conceptuel*.

5.6. *Insuffisances*

Au faisceau de morphismes Ω^F on a donc associé de façon canonique un pré-faisceau $\mathbb{H}_F$ de fonctions booléennes défini par :

$$\forall\, U \in \mathcal{O}(X),\ \mathbb{H}_F(U) = \{\eta(G) \mid G \text{ est un sous-faisceau de } F|_U\}.$$

$\mathbb{H}_F$ n'est pas un faisceau, car si les fonctions d'une famille $(\eta(G_i))_{i\in I}$ vérifiant les conditions habituelles se recollent toujours en tant que fonctions booléennes, il n'y a aucune raison pour que s_0, la fonction booléenne obtenue, soit de la forme $\eta(G_0)$, G_0 étant un sous-faisceau de $F|_U$.

En fait, on a vu en (4.5.4) que le sous-faisceau canoniquement associé à s_0 est $\varepsilon(s_0)$, avec : $s_0 \leq \eta\varepsilon(s_0)$.

Cependant, à tout pré-faisceau on peut associer de manière canonique un faisceau : *le faisceau engendré*. Ce faisceau est le faisceau des germes des fonctions du pré-faisceau. Lorsque le préfaisceau vérifie l'axiome (F1) des faisceaux, comme c'est le cas ici, on montre aisément ([5]) qu'il y a plongement dans le faisceau engendré.

En conclusion, si l'on arrive bien à associer de manière canonique un faisceau de fonctions booléennes au faisceau Ω^F, on ne peut pas parler d'isomorphisme ; $\mathfrak{F}(X)$ n'est donc pas un topos.

Ce résultat négatif est décevant du point de vue de l'élégance mathématique, mais riche d'enseignements. On voit clairement que ce qui empêche notre catégorie d'être un topos c'est la séparation arbitraire entre objets et traits. En cherchant à identifier les propriétés des traits à des fonctions booléennes de notre catégorie, nous sommes obligés de "descendre" au niveau des objets, c'est-à-dire obligés d'adopter un point de vue extensionnel qui ne peut être équivalent à des propriétés intensionnelles.

On ne peut donc assigner à $\mathfrak{F}(X)$ une logique qui lui soit propre ; un moyen d'atteindre cet objectif sera d'exprimer les traits et les objets comme entités d'un même espace. Il n'en reste pas moins que $\mathfrak{F}(X)$ tel qu'il se présente hérite d'une structure logique extrêmement intéresante : celle du topos Sh(X).

5.7. *La nécessité de la logique intuitionniste*

La présentation en (3.3.5) du langage interne d'un topos comme théorie intuitionniste des types peut paraître arbitraire. Et en effet, sous certaines conditions, le langage interne du topos est en fait une logique classique, c'est-à-dire qu'il vérifie la loi du tiers exclu. De tels topoï sont appelés des topoï booléens, et sont caractérisés de multiples façons. L'une d'entre elles dit qu'un topos $\mathfrak{T}$ est booléen si et seulement si l'algèbre de Heyting qu'est Ω est une algèbre booléenne. En général l'ensemble des sous-faisceaux d'un faisceau ne forme pas une algèbre booléenne, et Sh(X) n'est donc pas un topos booléen.

6. LA LOGIQUE DE $\mathfrak{F}(X)$

Nous allons inverser l'approche classique qui d'un langage va à sa sémantique. En interprétant la sémantique que fournit $\mathfrak{F}(X)$ à une logique intuitionniste d'ordre supérieur, nous mettrons en évidence *tout ce qui est exprimable sur $\mathfrak{F}(X)$ dans cette logique.*

6.1. *La sémantique de* $\mathfrak{F}(X)$

Nous rappelons simplement le théorème énoncé en 3.6.3.

Soit F un faisceau sur X, U un ouvert de X, a: $h_U \to F$. Alors :
(0) $U \Vdash a$ ssi $a^* = U$, dans le cas $F = \Omega$;
(1) $U \Vdash b \in \beta$ ssi $\beta^*(U)(b^*) = U$, où b: $h_U \to F$ et β: $h_U \to \Omega^F$;
(2) $U \Vdash \top$ toujours ;
(3) $U \Vdash \bot$ ssi $U = \emptyset$;
(4) $U \Vdash \varphi(a) \wedge \psi(a)$ ssi $U \Vdash \varphi(a)$ et $U \Vdash \psi(a)$;
(5) $U \Vdash \varphi(a) \vee \psi(a)$ ssi $U = V \cup W$ avec V, W $\in \mathcal{O}(X)$ tels que $V \Vdash \varphi(a|_V)$ et $W \Vdash \psi(a|_W)$;
(6) $U \Vdash \varphi(a) \Rightarrow \psi(a)$ ssi pour tout $V \subseteq U$, si $V \Vdash \varphi(a|_V)$ alors $V \Vdash \psi(a|_V)$;
(7) $U \Vdash \forall_{y \in G} \psi(y,a)$ ssi, pour tout $V \subseteq U$ et tout b: $h_V \to G$, $V \Vdash \psi(b, a|_V)$;
(8) $U \Vdash \exists_{y \in G} \psi(y,a)$ ssi il existe un recouvrement ouvert $U = \cup_{i \in I} U_i$ et des flèches b_i: $h_{U_i} \to G$ tels que $U_i \Vdash \psi(b_i, a|_{U_i})$ pour tout $i \in I$.

6.2. Le prédicat $U \Vdash$

6.2.1 La famille $(h_U)_{U \in \mathcal{O}(X)}$

Nous avons donné en (2.4) la signification générale de $C \Vdash \varphi(a)$: dans la tradition intuitionniste on dit que la prédication est vraie au stade, au niveau, ou pour l'état C.

Dans le cas particulier qui est le notre cette signification va se trouver précisée de deux manières :
1°) on n'a pas besoin de considérer tous les états ;
2°) les états sont les ouverts de X, ils manifestent donc la structuration cognitive qui a porté sur les objets de X.

Le premier point est une propriété de Sh(X), dans laquelle la famille $(h_U)_{U \in \mathcal{O}(X)}$ est une famille d'objets générateurs.

Dans le cas général une famille $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{T}$ est génératrice si pour toute flèche f, g: $A \to B$, $f \bullet\!\!=\!\!\bullet g$ si et seulement si $fk \bullet\!\!=\!\!\bullet gk$, pour tout C de $\mathfrak{C}$ et tout k: $C \to A$. Traduit dans notre cas particulier, cela correspond au caractère extensionnel de l'égalité entre morphismes de faisceaux.

En effet, considérons f et g deux morphismes entre les faisceaux F et G. f et g sont égaux si et seulement si $f(U)(s) = g(U)(s)$ pour tout ouvert U, et tout élément s de F(U). C'est précisément ce que dit la définition ci-dessus dans son langage catégorique.

Soit k: $h_U \rightarrow F$, d'après le lemme de Yoneda k est identifiable à un élément k* de F(U) ; et fk •=• gk est donc équivalent à f(U)(k*) = g(U)(k*) ; ceci pour tout k, c'est à dire pour tout élément de F(U).□

La famille $(h_U)_{U \in \mathcal{O}(X)}$ étant génératrice, les prédications se feront au niveau de l'ouvert U une propriété sera vraie si elle est vraie au niveau de tous les ouverts. Ceci autorise la notation $U \Vdash \varphi(a)$ à la place de $h_U \Vdash \varphi(a)$.

6.2.2. *La relation* $U \Vdash \varphi(a)$
Nous parlons de propriétés et de prédications, mais de quel genre de propriétés s'agit-il ? Pour répondre il faut examiner de plus près l'expression $U \Vdash \varphi(a)$.

N'oublions pas que $\varphi(a)$ n'est qu'un abus de notation permis par le théorème de complétude fonctionnelle. En fait, à tout polynôme est associée une flèche f: $F \rightarrow \Omega$, et $\varphi(a) \equiv$ fa où a: $h_U \rightarrow F$.

D'après Yonéda, a est identifié à un élément a* de F(U) et fa à un élément (fa)* de Ω(U). De plus, il est clair que : (fa)* = (fa)(U)(*) = f(U)(a*).

Comme par ailleurs $U \Vdash \varphi(a)$ signifie fa •=• O_{h_U} (2.4), d'après le diagramme ci-dessous on a : (fa)(*) = (U)(*) = U.

$$\begin{tikzcd}
hU(U) \arrow[r, "a(U)"] \arrow[d, "OhU"'] & F(U) \arrow[d, "f(U)"] \\
1(U) \arrow[r, "T(U)"] & Ø(U)
\end{tikzcd}$$

On en déduit que f(U)(a*) = U. Ce qui prouve que a* appartient au noyau de f, c'est-à-dire à un sous-faisceau de F.

6.2.3. *Interprétation au premier ordre*
L'expression formelle $U \Vdash \varphi(a)$ exprime l'appartenance d'un trait (défini sur U) d'un faisceau F (on identifie a et a*) à un sous-faisceau de F. En d'autres termes, *une propriété portant sur les traits d'un faisceau est définie extensionnellement par le sous-faisceau des traits vérifiant la propriété.* On voit donc que la sémantique demeure ensembliste même si c'est à un niveau local.

6.2.4. *Interprétation pour les ordres supérieurs*
On a vu qu'une propriété d'un faisceau F est définie par le noyau d'un morphisme f: $F \rightarrow \Omega$. Dans cette vision extensionnelle, l'ensemble des propriétés de F est l'ensemble des sous-objets de F, c'est à dire l'objet Ω^F. Cet objet est un objet du topos, c'est à dire un faisceau qui possède à son tour des sous-objets. Ainsi se construisent les propriétés sur les propriétés ; processus récursif qui mène à une logique d'ordre supérieur.

Pour préciser cette interprétation générale, nous allons reprendre une à une les conditions figurant dans le théorème (3.5.5.)

6.3. *La condition* (0)

Nous avons : (0) U $\Vdash$ a ssi a* = U, dans le cas F = Ω

D'un point de vue logique, a est une proposition atomique au niveau U, la condition (0) nous donne donc les valeurs de vérité de la logique considérée. L'élément de représentant le vrai est U ; nous sommes en présence d'une logique possédant une infinité de valeurs de vérités locales ; la formule correspondante du langage interne, ici la formule atomique x, est vraie si a est vraie pour tout U.

Une autre manière de voir les choses nous dit que la seule propriété que l'on puisse affirmer sur U indépendamment de tout faisceau est la structure topologique de U. En effet a: $h_U \to \Omega$, est identifiable à a* mais aussi à la famille des $(a(V))_{V \subseteq U}$. D'après la commutativité du diagramme habituel, a(U)(*) = a* = U entraine a(V)(*) = V, donc : affirmer *a* au niveau U, c'est donner la famille des ouverts de X contenus dans U ; par conséquent, affirmer *a* pour tous les niveaux, c'est donner la topologie de X.

6.4. *La condition* (1)

Nous avons : (1) U $\Vdash$ b$\in\beta$ ssi β*(U)(b*) = U, où b: $h_U \to$ F et β: $h_U \to \Omega^F$.

b est identifiable à un élément b* de F(U), c'est à dire à un trait de F défini sur U. De la même manière β est identifiable à β* élément de Ω^F(U). Nous avons vu en (4.2.2) que β* est un morphisme entre $F|_U$ et $\Omega|_U$; l'égalité β*(U)(b*) = U dit que b* est un trait du noyau de β*.

Ainsi, (1) est la condition d'appartenance d'un trait (ou d'une propriété) à un sous-faisceau du faisceau restreint $F|_U$. Ceci permet donc *l'expression de propriétés locales*, qui sont *a priori* d'un autre type que les propriétés globales vérifiées localement.

6.5. *Les conditions* (5), (6), (7) *et* (8)

Les conditions (2), (3), et (4) sont classiques et ne nécessitent aucune interprétation. A partir de (5) c'est l'aspect intuitionniste qui est mis en avant. On retrouve en particulier pour $\vee$ et $\exists$ les exigences habituelles d'effectivité. Dans tous les cas, une propriété n'est vérifiée par un élément de F au niveau U, que si elle l'a été à tous les niveaux contenus dans U (ou sur un recouvrement ouvert de U pour (8)).

De notre point de vue, un élément d'un faisceau est une connaissance (ou description), élémentaire s'il s'agit d'un trait, ou plus élevée s'il s'agit d'une propriété d'ordre supérieur. Cet élément vérifiera une propriété au niveau U que s'il la vérifie en tant que connaissance restreinte à tous les ouverts contenus dans U, c'est à dire en tant que connaissance moins générale portant sur moins d'objets, mais en respectant leur structuration cognitive.

7. CONCLUSIONS ET PROBLÈMES OUVERTS

La construction ébauchée ici montre qu'il est possible de rompre avec la problématique ensembliste classique, tout en maintenant de solides fondations mathématiques. De plus, on a mis en évidence la possibilité d'un passage intrinsèque du topologique au logique. C'est, de notre point de vue, un exemple significatif d'émergence d'un système symbolique à partir d'un autre système symbolique. Pour reprendre un thème abordé dans l'introduction, on peut dire que cela constitue un argument de plus en faveur de *la primauté du structurel sur le logique ;*

thèse que semblent accréditer tant des raisons pratiques (les insuffisances de l'Intelligence Artificielle classique soulignées par nombre d'auteurs (Vignaux [20])), que des raisons philosophiques, mathématiques et logiques

Des philosophes de la logique, comme Pascal Engel ([4]), montrent la primauté du sémantique sur le syntaxique ; le problème de la logique, c'est avant tout la transmission de la vérité ; la croyance en l'existence de cette dernière étant une condition nécessaire a priori pour toute communication. Cette sémantique trouve une traduction précise en logique : c'est le modèle. Le modèle c'est une structure mathématique ; et même mieux c'est souvent une infinité de structures mathématiques. Quoi de plus réjouissant alors que de voir une entreprise suspectée d'embrigadement formalisateur, déboucher sur une telle diversité !

Quant au modèle proposé, les insuffisances évoquées dans l'introduction ont été techniquement précisées, même si l'on rompt avec la vision platement ensembliste, on demeure dans une approche extensionnelle. Si les propriétés sont structurées en faisceaux, les propriétés des propriétés sont définies de manière extensionnelle à partir de ces faisceaux ; la notion de sous-faisceau jouant un rôle analogue à celle de sous-ensemble.

Nous sommes donc loin de la logique véritablement intensionnelle où les objets seraient définis soit structuralement par des traits distinctifs, soit par des primitives cognitives. Pour avancer dans cette direction, le postulat de la structuration topologique des objets peut s'avérer fructueux car la "proximité" entre objets peut-être entendue de bien des façons. Enfin, le formalisme catégorique en permettant le passage aux niveaux supérieurs des relations du niveau inférieur, offre un cadre unifié où peuvent être abordées simultanément les problèmes structuraux et les problèmes logiques.

ANNEXE

Catégorie. Une catégorie $\mathfrak{C}$ est une collection de deux sortes d'entités des objets et des morphismes (ou flèches) entre ces objets vérifiant les conditions suivantes :

- deux morphismes $f: A \to B$ et $g: B \to C$ peuvent être composés en $gf: A \to C$;
- pour tout objet A il existe un morphisme $1_A: A \to A$ tel que pour tout

$$f: A \to B, \text{ on a: } f1_A = f = 1_B f ;$$

- pour tout $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$ on a : $(hg)f = h(gf)$.

Petite catégorie. Une catégorie $\mathfrak{C}$ est dite petite si les classes de ses objets et de ses morphismes sont des ensembles.

Catégorie localement petite. Une catégorie $\mathfrak{C}$ est dite localement petite si $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ la classe des morphismes entre deux objets quelconques A et B est un ensemble.

Sous-catégorie - Sous-catégorie pleine. Une sous-catégorie $\mathfrak{B}$ d'une catégorie $\mathfrak{C}$ est une catégorie dont les classes des objets et des flèches sont respectivement contenues dans celles de $\mathfrak{C}$. La sous-catégorie $\mathfrak{B}$ est dite pleine, si pour tous objets A et B de $\mathfrak{B}$, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$

Objet initial. Un objet initial dans une catégorie $\mathfrak{C}$ est un objet 0 tel que pour tout objet A il existe une flèche unique $0 \to A$.

Objet terminal. Un objet terminal dans une catégorie $\mathfrak{C}$ est un objet 1 tel que pour tout objet A il existe une flèche unique $A \to 1$.

Foncteur. Un foncteur covariant (resp. contravariant) F entre les catégories $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ est un morphisme qui envoie les objets de $\mathfrak{A}$ sur des objets de $\mathfrak{B}$ et les flèches de $\mathfrak{A}$ sur des flèches de $\mathfrak{B}$ de telle sorte que : $f: A \to A'$ est envoyée sur $F(f): F(A) \to F(A')$ (resp. $F(f): F(A') \to F(A)$)
En outre il doit préserver l'identité et la composition, c'est à dire :

$$F(1_A) = 1_{F(A)}, \text{ et } F(gf) = F(g)F(f).$$

La catégorie des catégories. La catégorie des catégories est la catégorie dont les objets sont les catégories et les morphismes les foncteurs.

Transformation naturelle. Une transformation naturelle t entre deux foncteurs $F, G: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, est une famille de flèches $t(A): F(A) \to G(A)$ dans $\mathfrak{B}$, une pour chaque objet de $\mathfrak{A}$, telles que le diagramme ci-dessous commute pour toute flèche $f: A \to B$.

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "t(A)"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "t(B)"'] & G(B)
\end{tikzcd}$$

La catégorie des foncteurs entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. On appelle catégorie des foncteurs entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs entre les catégories $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, et dont les morphismes sont les transformations naturelles entre ces foncteurs.

Adjonction. Une adjonction entre deux catégories $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est donnée par un quadruplet (F, G, η, ε), où F: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ et G: $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ sont des foncteurs, et η: $1_{\mathcal{A}} \rightarrow GF$ et ε: $FG \rightarrow 1_{\mathcal{B}}$ sont des transformations naturelles telles que :

$$(G\varepsilon)(\eta G) = 1_G, \ (\varepsilon F)(F\eta) = 1_F.$$

On dit que G est l'adjoint à droite de F, et que F est l'adjoint à gauche de G.

Correspondance de Galois. Une correspondance de Galois (covariante) est une adjonction entre deux ensembles pré-ordonnés $\mathcal{A}$ = (A, ≤) et $\mathcal{B}$ = (B, ≤) considérés comme des catégories. Cela revient à se donner un couple de foncteurs (F, G) tels que pour tout

$$a \in A \text{ et } b \in B: F(a) \leq b \text{ ssi } a \leq G(b).$$

Produit. Soit A et B deux objets d'une catégorie $\mathcal{C}$, on appelle produit de A et B la donnée d'un objet noté A×B et de deux projections π: A×B→A et π': A×B→B. tels que pour tout morphisme f: C→ A et tout morphisme g: C→ B il existe un morphisme unique <f,g>: C→A×B rendant le diagramme ci-dessous commutatif.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "{<f,g>}"] & A \\ B & A\times B \arrow[l, "\pi'"] \arrow[u, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

Produit fibré (pullback). Soit A, B et C des objets d'une catégorie $\mathcal{C}$ et f: A→C, g: B→C deux morphismes. On appelle produit fibré de A et B noté $A\times_C B$, la donnée d'un objet P et de deux morphismes p_1: P→ A, p_2: P→ B tels que pour tout triplet (T, x, y) rendant le carré ci dessous commutatif,

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "x"] \arrow[d, "y"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

il existe une flèche unique h: T→ P qui rende commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, "x"] \arrow[ddr, "y"'] & & \\
& P \arrow[r, "P_1"'] \arrow[d, "P_2"] & A \arrow[d, "f"] \\
& B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOLDINI P. & BARTHELEMY J. P., "Peut-on parler d'émergence dans les systèmes symboliques ?", actes du séminaire *Emergence dans les modèles de la cognition*, (1992), Telecom Paris, 145-153.

[2] DESCLES J. P., "La 'logique intensionnelle' est-elle vraiement intensionnelle?", *Histoire Epistémologie Langage*, tome 5, fascicule 2, (1983), 149-152.

[3] DOWTY D. R., WALL R. E., & PETERS S., Introduction to Montagüe semantics, Dordrecht, D. Reidel Publishing Company, 1981.

[4] ENGEL P., *La norme du vrai*, Paris, Gallimard, 1989.

[5] GODEMENT R., *Théorie des faisceaux*, Paris, Hermann, 1964.

[6] GOLDBLATT R., *Topoï, the categorial analysis of logic*, Amsterdam, North-Holland, 1979.

[7] KANELLOS I. & DESCLES J.P., "La notion de typicalité : une approche formelle", *Sémantique et Cognition*, sous la direction de Danielle DUBOIS, Editions du CNRS, (1989), 225-244.

[8] KRIPKE S. A., "Semantical analysis of Intuitionistic Logic I", in J. N. Crossley and M. A. E. Dummett (eds), *Formal Systems and recursive functions*, Amsterdam, North-Holland, 1965.

[9] KRIPKE S. A., *Naming and necessity*, Oxford, Blackwell, 1972, trad. fr., *La logique des noms propres*, Editions de Minuit, 1982.

[10] LAKOFF G., *Women, Fire, and Dangerous Things*, Chicago, The University of Chicago Press, 1987.

[11] LANGACKER R. W., *Foundations of Cognitive Grammar, volume I, Theoretical Prerequisites*, Stanford, Stanford University Press, 1987.

[12] LAMBEK J., "Deductive systems and Categories I", *J. Math. Systems Theory* 2, (1968), 278-318.

[13] LAMBEK J., "Deductive systems and Categories II", *Springer LNM 86*, 76-122.

[14] LAMBEK J. & SCOTT P.J., *Introduction to higher order categorical logic.*, Cambridge, Cambridge University Press, 1986.

[15] MAC LANE S., *Categories for the Working Mathematician*, New York, Springer-Verlag, 1971.

[16] RASTIER F., *Sémantique interprétative*, Paris, Presses Universitaires de France, 1987.

[17] RASTIER F., *Sémantique et recherche cognitive*, Paris, Presses Universitaires de France, 1991.

[18] ROSCH E.,"Natural Categories", *Cognitive Psychology* 4, (1973), 328-350.

[19] THIOPOULOS C., "Towards a logic of semiotic systems", *Mathématiques Informatique et Sciences Humaines 117*, (1992), 49-60.

[20] VIGNAUX G., *Les sciences cognitives, une introduction*, Paris, Editions la Découverte, 1991.

[21] WILLE R., "Restructuring lattice theory, an approach based on hierarchies of concepts", in I. Rival (ed.), *Ordered Sets*, Dordrecht, D. Reidel Publishing Company, 1982.