MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

CLAUDE FLAMENT

Sur la réunion des arbres maximaux d’un graphe totalement préordonné. Note auto-critique

Mathématiques et sciences humaines, tome 121 (1993), p. 35-40

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1993__121__35_0>

Math. Inf. Sci. hum. (31e année, n°121, *1993*, p.35-40)

SUR LA RÉUNION DES ARBRES MAXIMAUX D'UN GRAPHE TOTALEMENT PRÉORDONNÉ

- NOTE AUTO-CRITIQUE -

Claude FLAMENT

RÉSUMÉ — *Un algorithme pour la recherche de la réunion des arbres maximaux (RAM) d'un graphe préordonné était proposé dans un article précédent (Math. Inf. Sci. hum. n°114, 1991, 35-40). Cet algorithme, qui était incorrect, est complété, justifié et illustré par un exemple dans cette note.*

ABSTRACT — *On the Union of the Maximum Spanning Trees in a Completely Preordered Graph: a Self-Critical Note.*
For the research of the union of the maximal spanning trees of a completely preordered graph, an algorithm was proposed in a previous paper (Math. Inf. Sci. hum. n°114, 1991, 35-40). This algorithm was uncorrect. In this note, it is completed, justified, and illustrated in an example.

Dans un précédent article (Flament, 1991), j'ai proposé un algorithme destiné à produire la réunion des arbres maximaux (RAM) d'un graphe préordonné. Sans preuve : la validité de l'algorithme me semblait évidente ; ce sentiment d'évidence a dû s'imposer à la direction de la revue et aux experts qu'elle a dû solliciter, puisque la publication a eu lieu. Or, cet algorithme est incomplet, comme le montrera un contre exemple.

Pour des applications en Sciences Humaines (cf. Degenne, 1985 ; Flament, 1981), nous travaillions sur des graphes préordonnés comme s'ils étaient ordonnés, en utilisant des algorithmes proposés par Rosenstiehl (1967) : en machine, l'algorithme 1 (dit : Kruskal - I d'origine), basé sur la liste des arêtes du graphe dans l'ordre décroissant ; et, à la main (car cela s'avère nécessaire, même avec la popularisation des micro-ordinateurs) l'algorithme 5 (dit Kruskal - III d'origine) basé sur l'ensemble des cocycles "ponctuels" (successivement, chaque sommet opposé à tous les autres).

Cet algorithme (dont l'histoire est ancienne : Boruvka, 1926) consiste en deux phases

1) Par lecture de la table de valuation des arêtes du graphe, on trouve une partie (au moins) de l'arbre maximum : chaque ligne décrit un cocycle ponctuel, et la valeur maximum de la ligne désigne l'arête maximum du cocycle.

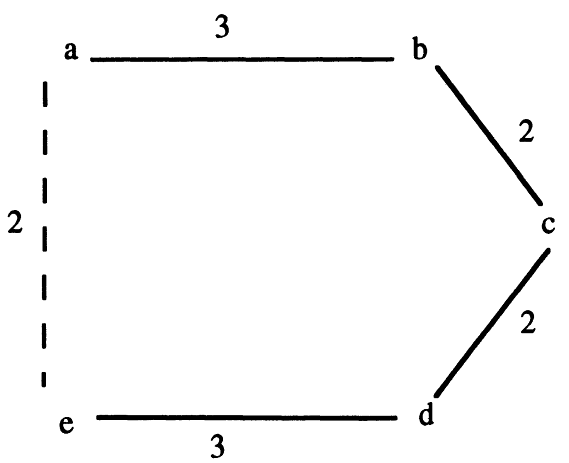
2) En général, le graphe ainsi construit n'est pas connexe ; alors, on prend les sommets d'une composante connexe (n'importe laquelle) qui, opposés aux autres sommets, donnent un cocycle dont l'arête maximum est retenue ; ainsi, on réduit le nombre de composantes connexes ; on recommence la phase 2 jusqu'à ce qu'on obtienne un graphe connexe, qui est l'arbre maximum recherché.

L'analyse de certaines données empiriques nous ayant montré qu'il pouvait être dangereux de faire comme si le graphe était ordonné, alors qu'il est préordonné, nous avons pensé généraliser correctement l'algorithme, pour l'essentiel, en remplaçant le singulier (l'arête maximum) par le pluriel (les arêtes maximales). Mais c'était une illusion, comme le montre l'exemple suivant (qui n'implique que la phase 1, ce qui est suffisant pour rejeter l'algorithme).

Tableau 1 :

	a	b	c	d	e
a	\	$\boxed{3}$	1	1	$\boxed{2}$
b	$\boxed{3}$	\	$\boxed{2}$	1	1
c	1	$\boxed{2}$	\	$\boxed{2}$	1
d	1	1	2	\	$\boxed{3}$
e	2	1	1	$\boxed{3}$	\

Figure 1 :



A partir de a (comme de b), on a (ab) ; c donne (bc) et (cd) ; d et e donnent (ed). Et l'algorithme s'arrête. Or (*cf.* zone grisée dans le tableau 1), (ae) est maximum, en même temps que (bc), dans le cocycle (ab/cde) que l'algorithme ne saurait prendre en considération. Il faut donc modifier l'algorithme.

Rappelons des propriétés bien établies (cf. Flament, 1975, Propriétés 2 et 3 ; Flament et Leclerc, 1983, Lemme 5-1 et § 6-3) :

A - Toute arête maximum dans un cocycle fait partie de la RAM ;

B - Toute arête *seule* minimum dans un cycle ne fait *pas* partie de la RAM ;

C - Tout cycle de la RAM a *au moins deux* arêtes minimums.

Établissons la propriété :

D - Soit u une arête, et G un sous-graphe connexe de la RAM, tel que : 1) u n'y figure pas ; 2) toutes les arêtes de la RAM supérieures à u figurent dans G ; 3) G contient toute autre arête de la RAM qu'on voudra ; alors, si $G \cup \{u\}$ ne comporte pas de cycle où u est seule minimum, u fait partie de la RAM.

En effet, supprimons de G toutes les arêtes équivalents à u ; le graphe G' résultant est déconnecté et tel que les extrémités de u sont dans des composantes connexes distinctes ; opposons les sommets de la composante contenant l'une des extrémités de u à tous les autres sommets. Soit C le cocycle ainsi défini ; par construction, $G' \cap C = \varnothing$. Soit v une arête maximale de C. On ne peut avoir $v > u$, car alors on aurait $v \in G' \cap C$; donc $v \equiv u$, et u, étant maximale dans un cocycle, appartient à la RAM.

Reprenons l'algorithme des cocycles (au pluriel : on prend les arêtes maximales) et, après la phase 2, ajoutons :

3) Soit G le graphe alors produit, et s la valeur d'une arête minimum de G ; par lecture de la table, on identifie les arêtes de valeur supérieure ou égale à s, et qui ne figurent pas déjà dans G. On préordonne ces arêtes de façon décroissante (opération généralement facile, car portant sur peu d'arêtes*) ; on lit cette liste, et on retient l'arête considérée si et seulement si elle n'est *seule* minimum dans aucun des cycles qu'elle engendre en s'ajoutant au graphe déjà construit.

Dans notre exemple (fig. 1 et tab. 1), on a s = 2, et la table nous fait considérer l'arête (ae), qu'on retient. P. Vergés a généralisé au préordre l'algorithme basé sur la liste ordonnée de toutes les arêtes du graphe (dans les problèmes de taille réelle, c'est cette opération qui fait problème à la main : on se trompe toujours quelque part !) : on ordonne de façon décroissante *les classes* d'arêtes équivalentes dans le préordre ; à chaque étape, on partage la classe rencontrée en deux classes (dont une peut être vide) : les arêtes "homogènes" (une arête homogène a ses deux extrémités dans une même composante connexe du graphe construit à l'étape précédente), et les arêtes "hétérogènes" (les autres) ; ce sont ces dernières qu'on retient.

L'exemple suivant est peut-être le plus petit qui présente les divers cas rencontrés dans cet article et le précédent.

---

* L'expérience montre que, si il y a beaucoup d'arêtes équivalentes dans les valeurs fortes, c'est que les données empiriques sont douteuses (par exemple le nombre de sujets est trop faible) ; alors, machine ou pas, il vaut mieux s'interroger sur les données que s'acharner à des calculs fastidieux dont les résultats ne sauraient avoir plus de valeur que les données traitées.

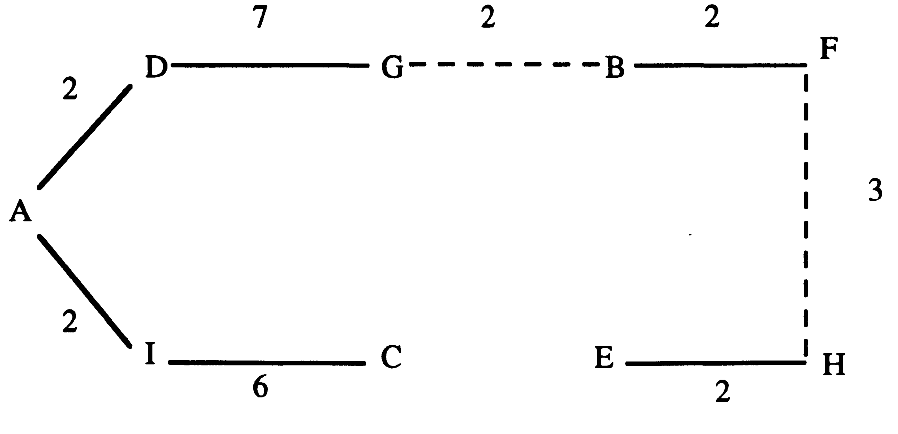
Tableau 2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A	\	1	1	$\boxed{2}$	1	1	1	1	$\boxed{2}$
B	1	\	1	1	2	$\boxed{5}$	3	1	1
C	1	1	\	1	1	1	2	1	$\boxed{6}$
D	$\boxed{2}$	1	1	\	1	1	$\boxed{7}$	4	1
E	1	2	1	1	\	1	1	$\boxed{6}$	1
F	1	$\boxed{5}$	1	1	1	\	1	3	1
G	1	3	2	$\boxed{7}$	1	1	\	1	1
H	1	1	1	4	$\boxed{6}$	3	1	\	1
I	$\boxed{2}$	1	$\boxed{6}$	1	1	1	1	1	\

ALGORITHME DES COCYCLES :

Phase 1. Les valeurs maximales dans chaque ligne (encadrées dans le tableau 2) donnent six arêtes (en *traits pleins* figure 2).

Figure 2



Phase 2. On prend l'une des composantes connexes, par exemple {B,F}, qui définit le cocycle (BF/ACDEGHI) (tableau 3).

	A	C	D	E	G	H	I
B	1	1	1	2	$\boxed{3}$	1	1
F	1	1	1	1	1	$\boxed{3}$	1

On trouve les arêtes (BG) et (FH), en *tirets* figure 2, ce qui donne un graphe connexe : un arbre, en fait ; mais ce n'est pas le seul arbre maximum, comme va le montrer la dernière phase.

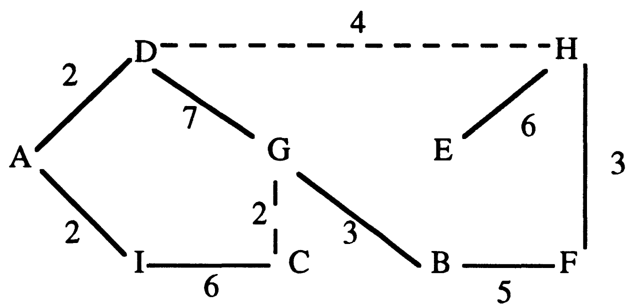
Phase 3. Dans le graphe de la figure 2, les arêtes minimales donnent s = 2. La lecture de la tab. 2 donne les arêtes de valeur égale ou supérieure à s, et qui ne figurent pas dans la figure 2 : (BE) = 2 , (CG) = 2 , (DH) = 4 ; d'où le préordre décroissant :

$$(DH) > (BE) \equiv (CG).$$

(N.B. L'ordre de prise en considération des arêtes équivalentes est sans influence sur les résultats ; cf. Propriété D).

Ajoutée au graphe de la figure 2, (DH) engendre le cycle (DGBFHD), où (DH) n'est pas minimale : on retient cette arête ; (BE) engendre (BFHEB) où elle est *seule* minimale : on rejette cette arête ; enfin (CG) n'est *pas seule* minimale dans les cycles (CIADGC) et (CIADHFBGC) ; on retient donc cette arête, et on obtient la RAM (Figure 3).

Figure 3



ALGORITHME DES ARÊTES PRÉORDONNÉES :

Soit la liste :
(DG) = 7
(CI) ≡ (EH) = 6
(BF) = 5
(DH) = 4
(BG) ≡ (FH) = 3
(AD) ≡ (AI) ≡ (BE) ≡ (CG) = 2
et toutes les autres arêtes de valeur 1.

Les *étapes 1,2 et 3,* retiennent successivement (DG), puis (CI) et (EH), puis (BF), comme à chaque fois, "hétérogènes" ; le graphe résultant a 5 composantes connexes : {A}, {DG}, {C,I}, {E,H} et {B,F}.

Étape 4 : (DH) est "hétérogène", et crée la composante {D,G,E,H}.

Étape 5 : (BG) et (FH) sont "hétérogènes" par rapport au graphe produit par l'étape 4 ; elles sont toutes les deux retenues, et créent la composante {D,G,E,H,B,F,}. (N.B. Une seule des deux arêtes suffit à créer cette composante, mais les deux arêtes doivent être retenues).

Étape 6 : (BE) est "homogène", et rejetée ; les autres arêtes de valeur 2 sont "hétérogènes", et toutes retenues : on obtient le graphe de la figure 3 ; celui-ci étant connexe, il n'y a pas d'étape ultérieure.

BIBLIOGRAPHIE

BORUVKA, O., 1926, *On a minimal problem*, Prace Moraské Pridovedecké Spolecnosti 3.

DEGENNE, A., 1985, L'analyse de similitude, *Numéro spécial, Informatique et Sciences humaines,* 15 (67).

FLAMENT, C., 1975, Arêtes maximales des cocycles d'un graphe préordonné, *Mathématiques et Sciences humaines*, 13, 5-12.

FLAMENT, C., 1981, L'analyse de similitude : une technique pour l'étude des représentations sociales, *Cahiers de Psychologie Cognitive*, 1, 375-395.

FLAMENT, C., 1991, Le traitement des ex-aequo en analyse de similitude : la réunion des arbres maximaux ou RAM, *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines*, 29, (114) 35-40.

FLAMENT, C., LECLERC, B., 1983, Arbres minimaux d'un graphe préordonné, *Discrete Mathematics*, 46, 159-171.

ROSENSTIEHL, P., 1967, L'arbre minimum d'un graphe, in P. ROSENSTIEHL (Ed.), *Théorie des Graphes*, Paris, Dunod, 357-368.