MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

SVEN BERG
DOMINIQUE LEPELLEY

Note sur le calcul de la probabilité des paradoxes du vote

Mathématiques et sciences humaines, tome 120 (1992), p. 33-48
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1992__120__33_0>

Math. Inf. Sci. hum., (30e année, n°121, *1993*, p.33-48)

NOTE SUR LE CALCUL DE LA PROBABILITÉ DES PARADOXES DU VOTE

Sven BERG [1] et Dominique LEPELLEY [2]

RÉSUMÉ — *De nombreux travaux se sont efforcés au cours des années récentes de calculer la probabilité des paradoxes ou des difficultés que la théorie des choix collectifs a mis en évidence. On passe en revue dans cette note les principaux modèles de calcul utilisés dans ces travaux. On applique en outre l'un des modèles présentés au calcul de la probabilité de quelques paradoxes bien connus de la théorie du vote.*

ABSTRACT — Note on the computation of the voting paradoxes probability.
A number of papers have recently attempted to calculate the probability of the paradoxes or difficulties that social choice theory has discovered. We review in this note most of the probabilistic models which have been used in these papers. Furthermore, we apply one of these models to the computation of the probability of some well known voting paradoxes.

1. INTRODUCTION

On sait depuis Condorcet (1785) les difficultés que présente l'agrégation d'opinions individuelles en un choix collectif : la relation majoritaire associée aux préférences des individus n'est pas transitive (il peut arriver que l'option a soit préférée à l'option b par une majorité d'individus, l'option b à l'option c par une autre majorité, et l'option c à l'option a par une troisième majorité). L'occurrence d'une telle intransitivité constitue ce que l'on appelle aujourd'hui le *paradoxe de Condorcet* ou, suivant Guilbaud (1952), l'*effet Condorcet*. Le théorème d'Arrow (1963) et, d'une manière générale, les théorèmes d'impossibilités de la théorie contemporaine des choix collectifs, ont généralisé la découverte de Condorcet en montrant qu'il n'existe pas de règles d'agrégation capables de satisfaire à un ensemble minimal de propriétés qu'il paraît raisonnable de vouloir imposer à de telles règles (la transitivité de la relation de préférence collective obtenue pouvant constituer l'une de ces propriétés). Ainsi, *toutes* les règles de choix collectif sont susceptibles de produire des résultats contraires à certains principes de rationalité, d'équité ou de nature démocratique (voir, par exemple, Niemi et Riker (1976) ou Kreweras (1962)).

Face à ces théorèmes d'impossibilité, une réaction naturelle consiste à s'interroger sur la fréquence des difficultés qu'ils mettent en évidence. Quelle est, en d'autres termes, l'importance réelle de ces théorèmes pour la pratique des choix collectifs ? A la suite du théorème d'Arrow, de nombreux auteurs ont tenté de répondre à cette question en calculant la probabilité du paradoxe

[1] Department of Statistics, University of Lund, Lund, Sweden. S. Berg exprime sa reconnaissance au H.S.F.R. pour son soutien financier.

[2] C.R.E.M.E. U.R.A.- C.N.R.S. D 1273, Université de Caen, 14032 Caen Cedex.

de Condorcet. On peut trouver dans Gehrlein (1983) un panorama très complet de ces tentatives. Des recherches de même nature (quoiqu'en nombre nettement plus restreint) ont suivi le théorème de Gibbard (1973) et Satterthwaite (1975) qui établit que toutes les règles de choix collectif sont manipulables : il s'agissait dans ce cas de calculer la fréquence des opportunités de choix stratégiques (cf. Peleg (1979), Lepelley et Mbih (1987), Berg et Lepelley (1990)).

D'autres travaux ont développé des calculs de probabilité qui, tout en restant liés au caractère négatif des principaux résultats de la théorie des choix collectifs, relève d'une approche un peu différente. L'idée générale qui sous-tend ces analyses peut se résumer de la manière suivante : puisqu'il n'existe pas de règle de choix collectif totalement satisfaisante, il faut étudier les mérites comparés des diverses procédures et choisir la moins mauvaise. Supposons alors qu'un ensemble de règles ait pour caractéristique commune de ne pas vérifier une propriété particulière, et convenons d'appeler "paradoxe" le viol de cette propriété. Dans ce cas, et toutes choses égales d'ailleurs, la règle la moins mauvaise sera celle pour laquelle la probabilité du paradoxe sera la plus faible. Ce point de vue comparatif est à l'origine des calculs de probabilité menés par Paris (1975), Gehrlein (1981, 1982), Gehrlein et Fishburn (1978, 1979, 1983), Fishburn et Gehrlein (1982), Gillett (1977, 1980), Nitzan (1985), Nurmi et Uusi-Heikkila (1985), Merrill (1988), Lepelley (1989), Lepelley et Mbih (1992).

L'objet principal de ce texte est de fournir une présentation unifiée des principaux modèles de calcul qui ont été utilisés dans les travaux précités (nous excluons toutefois du champ de notre analyse les recherches qui, comme celle de Merrill (1988), se situent dans le cadre de la théorie spatiale du vote). La section 2 est consacrée à cette présentation; on s'efforce d'y mettre en évidence les mérites d'un modèle particulier, fondé sur la condition dite de "culture neutre et anonyme". Dans la section 3, nous appliquons la version asymptotique de ce modèle au calcul de la probabilité de quelques paradoxes ou anomalies susceptibles de survenir lorsque la règle de choix utilisée est le vote à la majorité simple ou le vote majoritaire à deux tours.

2. MODÈLES DE CALCUL

2.1. Définitions et notations

Soient N l'ensemble des individus (ou votants) qui prennent part à la décision collective, et $X = \{a,b,c,...\}$ l'ensemble des options (ou candidats) soumises au choix. Nous notons n et m le cardinal des ensembles N et X, respectivement. Les préférences de chaque individu s'expriment par l'intermédiaire d'une relation binaire définie sur X. $\mathcal{P}_i$ désigne la relation de préférence de l'individu i, et nous supposerons que $\mathcal{P}_i$ est un ordre strict (i.e. une relation asymétrique, transitive et complète sur X) pour tout $i \in N$. Un *profil de préférences* est une liste $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, ..., \mathcal{P}_n)$ de n ordres de préférence individuels. L'ensemble de tous les profils possibles est noté $\Pi(m,n)$, et l'on a $|\Pi(m,n)| = m!^n$.

Supposons que les m! ordres de préférence possibles sur X soient numérotés de 1 à $M = m!$, et notons x_j le nombre de votants qui ont l'ordre de préférence numéro j. Une *situation de vote* (ou, simplement, une *situation*) est un vecteur $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_M)$ avec bien entendu $\sum_{j=1}^{M} x_j = n$. La notion de situation de vote rend compte de l'état de l'opinion, au même titre que celle de profil de préférences ; mais à la différence de cette dernière, elle ne tient pas compte de l'identité des votants. Il est clair dans ces conditions qu'à chaque profil on peut associer une et une seule situation de vote. A l'inverse, chaque situation correspond à $n!/(x_1!x_2!...x_M!)$ profils distincts. Nous noterons $S(m,n)$ l'ensemble de toutes les situations possibles. Le cardinal de cet ensemble correspond au nombre de solutions (entières) de l'équation $\Sigma\, x_j = n$, et nous avons (voir par exemple Feller (1957) p.36) :

$$|S(m,n)| = \binom{n+M-1}{n}$$

Dans la suite de ce travail, nous privilégierons le cas où seules trois options sont en présence. Les six ordres de préférence possibles sur X = {a,b,c} seront alors numérotés comme suit :

1. $a \mathcal{P} b \mathcal{P} c$	2. $a \mathcal{P} c \mathcal{P} b$	3. $b \mathcal{P} a \mathcal{P} c$
4. $b \mathcal{P} c \mathcal{P} a$	5. $c \mathcal{P} a \mathcal{P} b$	6. $c \mathcal{P} b \mathcal{P} a$

Le processus de décision va consister à agréger les opinions individuelles en un choix collectif. Nous supposerons que ce processus est anonyme. Par conséquent, le choix collectif peut être déduit de la situation de vote, sans qu'il soit nécessaire d'avoir connaissance du profil de préférences. Dans ces conditions, si l'on considère le processus de décision comme une expérience aléatoire, un événement relatif à l'élection - tel que la victoire d'une option possédant certaines propriétés - va pouvoir se caractériser par la spécification des situations $\mathbf{x}$ qui conduisent à son apparition. La probabilité d'un événement E s'écrit ainsi $\Pr(E) = \sum_{\mathbf{x} \in E} \Pr(\mathbf{x})$, et il reste, pour obtenir des valeurs numériques, à spécifier la distribution de probabilité de la variable $\mathbf{x}$.

2.2. Deux modèles élémentaires.

La plupart des travaux relatifs à la probabilité des paradoxes du vote sont fondés sur une hypothèse d'équiprobabilité : tous les états de l'opinion sont supposés avoir la même probabilité d'occurrence. Cette hypothèse, qui se justifie par le manque d'information a priori sur les préférences des votants, peut cependant conduire à deux modèles distincts selon qu'elle s'applique aux profils de préférence ou aux situations de vote. Si l'on considère que tous les *profils* ont la même probabilité d'apparition (condition dite de "culture neutre"), nous obtenons

$$\Pr(\mathbf{x}) = \frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_M!} M^{-n} \qquad \text{(modèle 1)}$$

Si en revanche l'hypothèse d'équiprobabilité porte sur les *situations de vote* (condition de "culture neutre *et* anonyme"), alors

$$\Pr(\mathbf{x}) = \frac{n!\,(M-1)!}{(n+M-1)!} \qquad \text{(modèle 2)}$$

Le modèle 1 est, de loin, celui des deux modèles que l'on rencontre le plus souvent dans la littérature. En particulier, toutes les tentatives de calcul de la probabilité du paradoxe de Condorcet parues à la fin des années soixante et au début des années soixante dix sont fondées sur le modèle 1 (ou sur la formule multinômiale qui le généralise). Cette prédominance tient vraisemblablement au fait que l'approche en termes de profils est beaucoup plus courante que l'approche en termes de situations dans la théorie des choix collectifs (la notion de profil est plus générale que celle de situation puisqu'elle permet d'envisager des procédures de décision collective éventuellement non anonymes). Elle s'explique sans doute aussi par l'évidente adaptabilité du modèle 1, qui n'est rien d'autre qu'un cas particulier de la loi multinômiale : il suffit, pour prendre en compte une éventuelle information sur les préférences des individus, d'introduire un vecteur $\mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_M)$ tel que $0 \leq p_j \leq 1$ et $\Sigma\, p_j = 1$, p_j s'interprétant comme la probabilité pour un individu de choisir l'ordre de préférence numéro j. Si l'on suppose que chacun des votants choisit son ordre de manière indépendante, alors nous obtenons la formule multinômiale bien connue :

$$\Pr(\mathbf{x}) = n! \prod_{j=1}^{M} (p_j^{x_j} / x_j!) \qquad \text{(modèle 1bis)}$$

et l'on retrouve le modèle 1 en prenant $p_j = 1/M$ pour tout j.

En dépit de cette prédominance du modèle 1, il existe d'assez solides arguments en faveur du modèle 2 [3]. L'une des raisons pouvant conduire au choix de ce modèle s'appuie sur une interprétation particulière qu'en a donnée Gehrlein (1984) (voir aussi Lepelley (1984)). Gehrlein fait observer que l'expression de Pr(**x**) dans le modèle 1bis peut être considérée comme une probabilité conditionnelle, liée à la donnée d'un vecteur **p**. Si le vecteur **p** est à son tour traité comme une variable aléatoire, on peut envisager de calculer la probabilité espérée, ou probabilité moyenne, d'une situation **x**. Soit $\overline{\Pr}(\mathbf{x})$ cette probabilité. Son expression dépend évidemment de la densité de probabilité de la variable **p**. Si **p** est distribuée uniformément sur le simplexe défini par $\Sigma\, p_j = 1$ et $p_j \geq 0$, alors on obtient

$$\overline{\Pr}(\mathbf{x}) = n!(M-1)! \,/\, (n+M-1)!$$

retrouvant ainsi l'expression du modèle 2. Ce résultat permet à Gehrlein de conclure que "the probability of an event with model 2 corresponds to the expected probability of that event with model 1bis". Ainsi, contrairement au modèle 1 qui impose l'utilisation du vecteur **p** = (1/6,...,1/6), le modèle 2 ne privilégie aucun vecteur et conduit à un résultat moyen. Cette propriété peut constituer un argument en sa faveur, notamment dans le cadre des analyses comparatives (voir sur ce point Lepelley (1984) p.25).

Un deuxième argument est d'ordre technique et tient à la simplicité du modèle 2. De manière générale, la formule multinômiale conduit à des expressions complexes et souvent inopérantes, même dans sa version la plus élémentaire (modèle 1). Le modèle 2 permet en revanche, au moins dans certains cas, d'obtenir des formules particulièrement simples. On peut illustrer cette supériorité du modèle 2 en considérant la probabilité qu'il existe un *vainqueur de Condorcet*, c'est-à-dire une option capable de l'emporter sur chacune des autres dans des confrontations par paires à la majorité des voix. Supposons que le nombre d'options soit limité à trois et que le nombre n de votants soit impair (dans ce contexte, l'existence d'un vainqueur de Condorcet est équivalente à l'absence de paradoxe de Condorcet), et notons E l'événement considéré. De nombreuses représentations analytiques de Pr(E) fondées sur le modèle 1 ont été proposées; parmi ces représentations, la plus simple est vraisemblablement celle de Gehrlein et Fishburn (1976a) :

$$\Pr(E) = 3^{-n+1} \sum_{x_{46}=0}^{\upsilon} \sum_{x_5=0}^{\upsilon - x_{46}} \sum_{x_3=0}^{\upsilon - x_{46}} \frac{n!}{x_{46}!x_5!x_3!x_{12}!} \tag{1}$$

expression dans laquelle on a posé $\upsilon = (n-1)/2$, $x_{46} = x_4 + x_6$ et $x_{12} = x_1 + x_2 = n - x_{46} - x_5 - x_3$. Dans un article paru la même année, Gehrlein et Fishburn (1976b) ont par ailleurs établi que la probabilité du même événement calculée sur la base du modèle 2 s'exprime ainsi :

$$\Pr(E) = \frac{15(n+3)^2}{16(n+2)(n+4)} \,. \tag{2}$$

La comparaison des relations (1) et (2) est suffisamment éloquente pour qu'il ne soit pas nécessaire de la commenter longuement. Nous nous contenterons de souligner que l'un des mérites de la relation (2) - et, d'une manière générale, des formules obtenues sur la base du modèle 2 - est qu'il est possible d'en déduire directement la limite de la probabilité considérée lorsque le nombre n d'individus tend vers l'infini. Bien que possible (cf. Guilbaud (1952)), le calcul d'une telle limite à partir de la relation (1) (ou d'une relation similaire) est nettement moins immédiat.

[3] Les principales contributions qui utilisent le modèle 2 sont dues à Gehrlein et Fishburn (1976b), Gehrlein (1982, 1990, 1991), Berg (1985a, 1985b), Berg et Bjurulf (1983), Lepelley (1989), Lepelley et Mbih (1987, 1992).

Un dernier argument est lié à l'hypothèse d'indépendance qui fonde les modèles 1 et 1bis. Commentant l'utilisation de la loi multinômiale pour le calcul de la probabilité du paradoxe de Condorcet, May (1971) écrit : "Perhaps the greatest single defect of the mathematical model of voting processes is that judges are treated as linearly independent; the individual rank orderings are not explicitly affected by interaction among judges". Nous allons voir dans le prochain paragraphe que le modèle 2 abandonne l'hypothèse d'indépendance et introduit un certain degré d'interaction entre les juges (individus), ce qui est un avantage si l'on adopte le point de vue de May. L'interaction introduite par le modèle 2 induit des préférences moins hétérogènes qu'avec le modèle 1. C'est cette moindre hétérogénéité qui permet de comprendre pourquoi - pour de petites valeurs du nombre m d'options [4] - la probabilité d'un paradoxe du vote obtenue sur la base du modèle 2 est généralement inférieure à la probabilité calculée à partir du modèle 1 (intuitivement, on peut concevoir qu'une plus grande homogénéité des préférences a pour conséquence de rendre moins probable l'occurrence des paradoxes du vote, qui requiert généralement un certain antagonisme des préférences individuelles). Dans le cas du paradoxe de Condorcet, les deux modèles donnent des résultats relativement proches : ainsi, pour trois options et un nombre infini d'individus, la probabilité du paradoxe est égale à $1 - (3/4 + 3/2\pi \sin^{-1}(1/3)) \simeq 0{,}0874$ (nombre de Guilbaud) avec le modèle 1, et à $1/16 = 0{,}0625$ avec le modèle 2.

2.3. Une généralisation : le modèle de Pólya-Eggenberger.

Une manière élégante de comparer les deux modèles du paragraphe précédent consiste à les faire apparaître comme deux versions particulières d'un modèle plus général, le modèle de Pólya-Eggenberger (pour une présentation d'ensemble de ce modèle, voir Johnson et Kotz (1977)). Soient A et α deux réels positifs et n un entier positif. On définit une factorielle ascendante généralisée de la manière suivante :

$$A^{[n,\alpha]} = A\,(A+\alpha)\,\ldots\,(A + (n-1)\,\alpha).$$

Compte tenu de cette définition, et des notations précédemment adoptées, la distribution de Pólya-Eggenberger s'écrit :

$$\Pr(\mathbf{x}) = n!\left(\prod_{j=1}^{M} A_j^{[x_j,\alpha]} / x_j!\right) / A^{[n,\alpha]} \qquad \text{(modèle 3)}$$

expression dans laquelle les A_j sont des nombres réels positifs et $A = \sum_{j=1}^{M} A_j$.

Posons $A_j = 1$ pour tout $j \in \{1,\ldots,M)$, ce qui implique $A = M$. On vérifie alors aisément que l'on retrouve le modèle 1 en prenant $\alpha = 0$ et le modèle 2 en prenant $\alpha = 1$ (le modèle 1bis est quant à lui obtenu en posant $A_j / A = p_j$ et $\alpha = 0$).

Le moyen le plus simple pour interpréter le modèle 3 consiste à considérer une urne contenant A boules, dont A_1 sont de type 1, A_2 de type 2,..., A_M de type M. Chaque individu détermine sa préférence en tirant au hasard une boule dans l'urne et, à chaque tirage, α boules du même type que celle qui vient d'être choisie sont ajoutées dans l'urne. La distribution de probabilité des situations de vote obtenues de cette manière est alors conforme au modèle 3.

Le modèle de Pólya-Eggenberger a été introduit dans la littérature relative aux processus de décision collective par Berg (1985a), qui l'a appliqué au calcul de la probabilité du paradoxe de Condorcet. D'autres applications ont été présentées par Berg (1990), et Gehrlein et Berg (1991). L'intérêt de ce modèle réside clairement dans sa grande souplesse. Il permet - comme le modèle multinômial - de prendre en compte d'éventuelles informations relatives aux chances des différents candidats : il suffit d'adapter en conséquence la composition initiale de l'urne (paramètres A_j). Il permet aussi - et c'est là son mérite spécifique - d'analyser les

[4] Berg et Bjurulf (1983) montrent que lorsque le nombre d'options s'élève, les modèles 1 et 2 tendent à coïncider.

phénomènes de contagion en introduisant une certaine dépendance entre les préférences individuelles par le biais du paramètre α : si $\alpha = 0$, les individus forment leurs opinions indépendamment les uns des autres ; si en revanche α est positif, alors le tirage d'un ordre de préférence particulier (d'une boule d'un certain type) augmente les chances que cet ordre a d'apparaître lors du tirage suivant. Prendre $\alpha = 1$ (comme dans le modèle 2) introduit un degré limité d'interaction entre les individus, et plus α est élevé, plus les préférences obtenues tendent à être homogènes. On peut ainsi, en faisant varier le paramètre α, étudier l'effet de différents niveaux de cohésion sociale sur la probabilité de tel ou tel événement.

Afin d'illustrer ce dernier point, nous avons calculé pour différentes valeurs du paramètre de cohésion α la probabilité d'avoir une option classée en première position par plus de la moitié des individus (ou probabilité d'éviter le second tour dans un vote majoritaire à deux tours). Nous avons supposé $m = 3$ (et donc $M = 6$), n impair ($\upsilon = (n-1)/2$) et $A_j = 1$ pour tout $j \in \{1,...,6\}$. Les formules analytiques que nous avons obtenues, ainsi que les résultats numériques auxquels elles conduisent dans le cas où le nombre de votants est infini, sont présentés dans la Table 1. Les différentes étapes du calcul sont données dans l'appendice A. Comme l'on pouvait s'y attendre, la probabilité de l'événement considéré apparaît très sensible au caractère plus ou moins homogène des préférences. On notera qu'ici, les modèles 1 ($\alpha = 0$) et 2 ($\alpha = 1$) conduisent à des résultats extrêmement différents : pour $\alpha = 0$, la probabilité d'éviter le second tour est nulle quand n tend vers l'infini (voir appendice A), et cette même probabilité est supérieure à 1/2 pour $\alpha = 1$.

Paramètre α	Formule de calcul	Probabilité limite
1/2	$\dfrac{3(\upsilon+7)(\upsilon+8)(58\upsilon^3 + 475\upsilon^2 + 1227\upsilon + 990)}{16(2\upsilon+11)(2\upsilon+9)(2\upsilon+7)(2\upsilon+5)(2\upsilon+3)}$	$\dfrac{87}{256} = 0{,}3398$
1	$\dfrac{3(3\upsilon+5)(\upsilon+4)}{4(2\upsilon+5)(2\upsilon+3)}$	$\dfrac{9}{16} = 0{,}5625$
2	$\dfrac{3(\upsilon+2)}{2(2\upsilon+3)}$	$\dfrac{3}{4} = 0{,}75$

Table 1. Probabilité d'avoir une option classée en première position par plus de la moitié des votants ($m = 3$, $\upsilon = (n-1)/2$)

2.4. Distribution asymptotique : le modèle de Dirichlet.

Le modèle de Pólya-Eggenberger ne permet pas toujours d'obtenir des formules du type de celles qui figurent dans la Table 1 (l'événement considéré était particulièrement simple à caractériser) ; il conduit le plus souvent à des expressions fort complexes, et peu opératoires dès que les valeurs de n s'élèvent. Il n'est donc pas inutile de s'interroger sur l'évolution asymptotique de ce modèle.

Posons $y_j = x_j / n$. Une situation de vote devient alors un vecteur $y = (y_1,...,y_M)$, avec $y_j \geq 0$ et $\sum_{j=1}^{M} y_j = 1$. Pour n suffisamment élevé, possible de remplacer les factorielles ascendantes généralisées par des nombres de Stirling généralisés, conformément à la formule suivante (cf. Feller (1957) p.64) :

$$A(A + \alpha) \dots (A + \alpha n) \simeq \frac{(2\pi)^{1/2}}{\Gamma(A/\alpha)} \alpha^{n+1} n^{n+A/\alpha+1/2} e^{-n}.$$

Si l'on applique cette relation au modèle 3, et si l'on fait tendre n vers l'infini, on obtient alors (en supposant $\alpha \neq 0$) la fonction de densité de probabilité de Dirichlet définie ci-dessous :

$$f(y) = \Gamma(A/\alpha) \prod_{j=1}^{M}(y_j^{A_j/\alpha - 1} / \Gamma(A_j/\alpha)) \qquad \text{(modèle 4)}$$

Le modèle de Dirichlet a été utilisé par Berg (1985b) et Berg et Lepelley (1990) pour calculer la probabilité de certaines difficultés susceptibles de se produire dans un vote à la majorité simple. Notons qu'il est possible, à l'aide de ce modèle, de vérifier les probabilités limites présentées dans la Table 1 (cf. appendice A).

Nous nous intéresserons dans la suite de ce travail à une version particulièrement simple du modèle 4, obtenue en posant $\alpha = 1$ et $A_j = 1$ pour tout $j \in \{1,...,M\}$. Nous avons alors :

$$f(y) = (M-1)! \qquad \text{(modèle 5)}$$

Il est clair que le modèle 5 n'est autre que la version asymptotique du modèle 2, dont nous avons souligné précédemment certains mérites. Lorsque seules trois options sont en présence, $(M - 1)! = 120$ et il suffit, pour obtenir la probabilité limite d'un événement donné, d'évaluer l'intégrale $\int 120\, dy$ sur le domaine dont la définition dépend de l'événement considéré. Nous appliquons dans la section suivante ce modèle élémentaire au calcul de la probabilité de quelques paradoxes bien connus de la théorie des choix collectifs.

3. APPLICATIONS.

Nous nous proposons dans cette section d'utiliser le modèle 5 pour comparer deux règles de choix collectif particulières, le vote à la majorité simple (ou règle de la pluralité) et le vote majoritaire à deux tours. Ces deux règles, d'un usage très courant, sont susceptibles de produire d'intéressants paradoxes.

3.1. Paradoxes du vote à la majorité simple.

Le vote à la majorité simple (noté VM1 dans ce qui suit) est vraisemblablement la règle de décision la plus fréquemment utilisée dans la pratique des choix collectifs : chaque individu indique l'option qu'il préfère et l'option choisie est celle qui recueille le plus grand nombre de voix. La faveur dont jouit cette règle - notamment dans le domaine électoral - s'explique par la facilité avec laquelle on peut la mettre en œuvre : le vainqueur de l'élection est choisi en une seule étape (un seul tour), et sa détermination ne contraint pas les votants à exhiber la totalité de leur ordre de préférence. On sait cependant depuis Borda (1781) et Condorcet (1785) que VM1 peut conduire à un choix qui est en contradiction avec l'opinion de la majorité des votants. Considérons, par exemple, la situation 1 présentée dans la Table 2 ; l'option c l'emporte dans un vote à la pluralité des voix, et cependant plus de la moitié des individus (54%) préfèrent b à c : dans un duel majoritaire, l'option b aurait battu l'option c. On note en outre que l'option b battrait aussi l'option a dans une confrontation majoritaire : b est le vainqueur de Condorcet. Le vote à la majorité simple viole ainsi le principe qui porte le nom de Condorcet et que l'on peut énoncer comme suit :

Condorcet : *Le vainqueur de Condorcet, lorsqu'il existe, doit constituer le choix collectif.*

Notons E_1 l'événement "le vainqueur de Condorcet est battu dans un vote à la majorité simple", et calculons la probabilité de cet événement dans le cas où trois options sont en présence. Nous supposerons que le nombre de votants peut être considéré comme infini, ce qui va nous permettre d'utiliser le modèle 5 et de négliger les problèmes posés par d'éventuels ex aequo. L'événement E_1 n'est pas réalisé lorsque le vainqueur de Condorcet est élu (événement E'), ou bien lorsqu'il n'existe pas de vainqueur de Condorcet (événement E"). Étant donné une situation, et compte tenu des notations que nous avons adoptées, l'option a est le vainqueur de Condorcet si :

$$y_1 + y_2 + y_3 > 1/2 \quad \text{et} \quad y_1 + y_2 + y_5 > 1/2 \tag{3}$$

D'autre part, l'option a est élue dans un vote à la majorité simple si

$$y_1 + y_2 > y_3 + y_4 \quad \text{et} \quad y_1 + y_2 > y_5 + y_6 \tag{4}$$

Par définition, toute situation doit en outre vérifier

$$y_j \geq 0 \;\text{ pour tout }\; j \in \{1,...,5\} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{6} y_j = 1 \tag{5}$$

L'application du modèle 5 implique alors

$$\Pr(\text{a vainqueur de Condorcet et élu}) = \int\!\!\int \underset{D}{\cdots} \int 120 \, dy_1 \, dy_2 \ldots dy_6$$

le domaine d'intégration D étant défini par les relations (3), (4) et (5). L'évaluation de cette intégrale multiple donne :

$$\Pr(\text{ a vainqueur de Condorcet et élu}) = 119/432.$$

L'hypothèse d'équiprobabilité qui sous-tend le modèle 5, jointe à la neutralité de VM1, nous autorisent à multiplier par trois la probabilité ci-dessus pour obtenir la probabilité de l'événement E'. Nous savons d'autre part que $\Pr(E'') = 1/16$ (cf. paragraphe 2.2). Nous avons donc :

$$\Pr(E_1) = 1 - 119/144 - 1/16 = 1/9.$$

Plus de 11% des situations de vote conduisent ainsi au choix d'une option différente du vainqueur de Condorcet. Notons que de telles situations ne sont pas véritablement paradoxales : elles mettent simplement en évidence la possibilité d'une contradiction entre deux principes distincts de détermination de la "meilleure" option. Il faut souligner d'autre part que l'adoption du principe de Condorcet entraîne certains inconvénients que les travaux de Young (1975) et de Moulin (1988) ont mis en évidence ; son caractère normatif peut donc être contesté. Il reste que le viol de ce principe constitue une incontestable difficulté, puisque dans cette éventualité, l'option élue peut être remise en cause par une majorité d'individus : il existe une option que plus de la moitié des individus préfèrent à l'option élue. Cette difficulté est particulièrement aiguë lorsque *chacune* des options non élues est préférée par une majorité de votants à l'option élue. La situation 1 de la Table 2 montre qu'une telle difficulté peut survenir avec VM1 : c, l'option élue, serait battue dans une confrontation par paire non seulement par l'option b (le vainqueur de Condorcet) mais aussi par l'option a. C'est Borda (1781) qui le premier a mis en évidence cette possibilité. Nous qualifierons de *minoritaire* une option battue par chacune des autres dans des duels majoritaires (on parle encore de perdant de Condorcet pour désigner une telle option). Cette définition permet d'énoncer le principe suivant, qu'il nous paraît légitime d'associer au nom de Borda :

Borda : *L'option minoritaire, lorsqu'elle existe, ne doit pas constituer le choix collectif.*

On peut considérer que le viol du principe de Borda constitue un véritable paradoxe puisqu'alors l'option choisie est précisément celle que l'on a de bonnes raisons de considérer comme la moins bonne. Berg (1985b) a montré, en utilisant les mêmes hypothèses que celles qui fondent la présente analyse (modèle 5 et $m = 3$), que la probabilité de ce paradoxe dans un vote à la majorité simple est égale à 1/36 (voir aussi Lepelley (1992)).

Une version extrême de ce paradoxe survient lorsque les majorités qui préfèrent chacune des options non élues à l'option élue sont constituées des *mêmes* individus. Ce cas de figure implique que plus de la moitié des votants classent l'option élue en dernière position. Dans la situation 1 de la Table 2, la majorité qui préfère a à c est distincte de celle qui préfère b à c. Dans la situation 2 en revanche, ces majorités sont constituées des mêmes individus : 54% des votants classent c en dernière position. Nous dirons d'une option classée en dernière position par plus de la moitié des individus qu'elle est *fortement minoritaire*. La situation 2 de la Table 2 montre que VM1 est susceptible d'élire une option fortement minoritaire. Notons E_2 un tel événement lorsque trois options sont en présence. La probabilité limite de E_2 peut être très facilement calculée. L'option a est fortement minoritaire si

$$y_4 + y_6 > 1/2. \qquad (6)$$

Nous avons donc :

$$\Pr(E_2) = 3 \iint \cdots \int_{D'} 120\, dy_1 \ldots dy_6$$

expression dans laquelle le domaine D' est défini par les relations (4), (5) et (6). On en déduit :

$$\Pr(E_2) = 5/216\,.$$

La comparaison de ce résultat et de la probabilité obtenue par Berg (1985b) permet de conclure que dans 83% (5/6) des situations où VM1 viole le principe de Borda, l'option élue est fortement minoritaire.

Ordres de préférence	a b c	a c b	b a c	b c a	c a b	c b a
Situation 1	24%	10%	20%	10%	15%	21%
Situation 2	34%	0%	30%	0%	15%	21%
Situation 3	24%	25%	20%	10%	0%	21%

Table 2. Exemples ($m = 3$, $n = \infty$)

3.2. Paradoxes du vote majoritaire à deux tours.

Le vote majoritaire à deux tours (noté VM2), bien connu des citoyens Français, est une variante du vote à la majorité simple dans laquelle une option doit recueillir une majorité absolue pour l'emporter dès le premier tour, et où un éventuel second tour départage les deux options les mieux placées. Il est clair qu'une telle procédure ne peut conduire à l'élection d'une option minoritaire (a fortiori, d'une option fortement minoritaire). VM2 peut en revanche, comme le vote à la majorité simple, choisir une option différente du vainqueur de Condorcet lorsque celui-ci existe. Ainsi, dans la situation 1 de la Table 2, le vainqueur de Condorcet (l'option b) est éliminé au premier tour. D'une manière générale, le vainqueur de Condorcet est battu dans un vote majoritaire à deux tours si et seulement s'il est éliminé au premier tour. Dans une situation qui met en jeu trois options et dans laquelle l'option a est le vainqueur de Condorcet, a sera donc battue si et seulement si

$$y_1 + y_2 < y_3 + y_4 \quad \text{et} \quad y_1 + y_2 < y_5 + y_6 \qquad (7)$$

La probabilité du viol du principe de Condorcet dans un vote majoritaire à deux tours portant sur trois options (événement noté E_3) calculée sur la base du modèle 5 va donc pouvoir s'écrire :

$$\Pr(E_3) = 3 \int \cdots \int_{D''} 120\, dy_1 \ldots dy_6$$

le domaine D" étant défini par les relations (3), (5) et (7). L'évaluation de cette expression donne

$$\Pr(E_3) = 17/576\,.$$

Si l'on compare ce chiffre (environ 3%) au résultat obtenu pour VM1 (11% environ), il apparaît que l'introduction du second tour améliore très nettement la "performance majoritaire" de cette procédure[5].

[5] Pour d'autres résultats concernant les performances majoritaires des deux règles considérées ou prenant en compte d'autres règles, le lecteur intéressé pourra consulter Lepelley (1989) ainsi que le travail récent de Gehrlein (1992).

L'introduction d'un second tour ne présente pas pour autant que des avantages : VM2 viole en effet un principe important de la théorie des choix collectifs, le principe de *monotonie* (principe que VM1 vérifie). Dans la définition qui suit, la règle de choix collectif est supposée donnée.

Monotonie : *Considérons un profil de préférence dans lequel l'option* a *l'emporte, et supposons que le classement de* a *s'améliore dans un ou plusieurs ordres individuels (la position relative des autres options demeurant inchangées). Alors l'option* a *doit encore l'emporter dans le nouveau profil ainsi obtenu.*

Le principe de monotonie exige une réponse non négative de la règle de choix collectif à une modification des préférences en faveur de l'option initialement gagnante. Le viol de ce principe est suffisamment contre intuitif pour que l'on puisse qualifier son occurrence de paradoxale (voir Fishburn (1982)). C'est semble-t-il Smith (1973) qui le premier a montré que VM2 est susceptible de donner lieu à un tel paradoxe. Afin d'en donner une illustration, considérons une fois encore la situation 1 décrite dans la Table 2 : l'option a l'emporte dans un vote majoritaire à deux tours (b est éliminé au premier tour et a bat c au second tour). Supposons alors que les 15% d'électeurs qui ont l'ordre de préférence c a b changent d'avis et décident de classer a en première position. Cette amélioration du classement de a va lui être fatale puisque dans la nouvelle situation (situation 3 de la Table 2), c'est l'option b qui l'emporte (c est éliminé au premier tour et b bat a au second tour). Nous dirons que la situation 1 est vulnérable au paradoxe de la non-monotonie, et nous nous proposons de calculer la fréquence de ce type de situation. Comme les précédents, ce calcul nécessite que nous caractérisions en termes des y_j les situations qui sont vulnérables au paradoxe. Cette caractérisation est cependant moins immédiate que dans les cas précédents (contrairement aux principes de Borda et de Condorcet, le principe de monotonie met en jeu deux profils distincts). La proposition suivante, dont la preuve est donnée dans l'appendice B, identifie les situations susceptibles de donner lieu au paradoxe de la non-monotonie dans les élections à trois candidats (afin d'en faciliter l'expression, nous notons Y_{uz} la proportion d'individus qui dans une situation donnée classent l'option u avant l'option z, et Y_z désigne la proportion d'individus qui classent z en première position).

PROPOSITION. Supposons que trois options a, b, c soient en présence, et considérons une situation dans laquelle l'option a l'emporte dans un vote majoritaire à deux tours. Cette situation est vulnérable au paradoxe de la non-monotonie si et seulement si

$$\exists\, z \in \{b,c\} \quad \text{tel que} \quad (Y_{az} < 1/2 \quad \text{et} \quad Y_z > 1/4) \tag{8}$$

Nous sommes alors en mesure de calculer la probabilité recherchée (dans le cas où trois options sont en présence). Dans un vote majoritaire à deux tours, l'option a l'emporte si

$$\begin{aligned} &Y_a > 1/2 \quad \text{ou} \quad (Y_b < Y_a\,,\, Y_b < Y_c \quad \text{et} \quad Y_{ac} > 1/2) \quad \text{ou} \\ &(Y_c < Y_a\,,\, Y_c < Y_b \quad \text{et} \quad Y_{ab} > 1/2) \end{aligned} \tag{9}$$

D'après la proposition, une situation vérifiant la relation (9) est vulnérable au paradoxe de la non-monotonie si

$$(Y_{ab} < 1/2 \quad \text{et} \quad Y_b > 1/4) \quad \text{ou} \quad (Y_{ac} < 1/2 \quad \text{et} \quad Y_c > 1/4) \tag{10}$$

De (9) et (10), on déduit aisément qu'une situation dans laquelle a l'emporte est vulnérable au paradoxe si et seulement si

$$(Y_b < Y_a\,,\, Y_b < Y_c\,,\, Y_{ac} > 1/2,\; Y_{ab} < 1/2 \quad \text{et} \quad Y_b > 1/4) \tag{11}$$

$$\text{ou} \quad (Y_c < Y_a\,,\, Y_c < Y_b\,,\, Y_{ab} > 1/2,\; Y_{ac} < 1/2 \quad \text{et} \quad Y_c > 1/4) \tag{12}$$

Par symétrie, la probabilité des situations vérifiant la relation (11) est égale à la probabilité des situations vérifiant la relation (12). Il en résulte que la probabilité de l'événement considéré (noté E_4) peut s'écrire

$$\Pr(E_4) = 3 \times 2 \int_{D'''}\!\!\cdots\!\int 120\, dy_1 \ldots dy_6$$

où D''' est défini par les relations (11) et (5) avec $Y_a = y_1 + y_2$, $Y_b = y_3 + y_4$, $Y_c = y_5 + y_6$, $Y_{ab} = y_1 + y_2 + y_5$ et $Y_{ac} = y_1 + y_2 + y_3$. Le calcul de cette expression donne

$$\Pr(E_4) = 13/288.$$

La Table 3 résume l'ensemble des résultats numériques présentés dans cette section

Règle de choix	C	B	B^-	M
Vote à la majorité simple	0,1111	0,0278	0,0231	0
Vote majorité à deux tours	0,0295	0	0	0,0451

C : non-élection du vainqueur de Condorcet
B : élection de l'option minoritaire;
B^- : élection de l'option fortement minoritaire;
M : viol (virtuel) du principe de monotonie.

Table 3. Probabilité de quelques paradoxes ou anomalies ($m = 3$, $n = \infty$)

Nous conclurons cet exposé par deux observations.

(i) Les chiffres relatifs aux principes de Borda et Condorcet d'une part, au principe de monotonie d'autre part, ont une signification légèrement différente. Les seconds concernent la fréquence des situations *susceptibles* de donner lieu à un paradoxe, alors que les premiers concernent des situations qui débouchent *effectivement* sur des paradoxes. Pour cette raison, il est permis de considérer qu'une évaluation globale de VM1 et VM2 fondée sur la Table 3 devrait accorder moins de poids aux 4,5% de situations qui peuvent donner lieu au paradoxe de la non-monotonie qu'aux 2,9% de situations qui conduisent à l'élection d'un perdant de Condorcet.

(ii) Les résultats numériques obtenus sont fondés sur une hypothèse d'équiprobabilité, dont le réalisme peut évidemment être mis en doute. Il serait imprudent, sans analyses complémentaires, d'en déduire quoi que ce soit quant aux fréquences réelles des paradoxes considérés dans la pratique électorale (voir sur ce point Nurmi (1990)). On peut cependant observer que la supériorité de VM2 sur VM1 face au principe de Condorcet est indépendante du modèle probabiliste utilisé. En effet, on vérifie aisément que la défaite d'un vainqueur de Condorcet dans un vote majoritaire à deux tours implique sa défaite dans un vote à la majorité simple.

APPENDICE A — A propos de la Table 1.

• Pour $m = 3$ et $A_j = 1$ pour tout $j \in \{1,...,6\}$, le modèle (3) s'écrit :

$$\Pr(x) = n! \left(\prod_{j=1}^{6} \frac{1^{[x_j,\alpha]}}{x_j!} \right) / 6^{[n,\alpha]} \qquad (A.1)$$

L'option a dispose d'une majorité absolue si et seulement si $x_1 + x_2 \geq \upsilon + 1$, avec $\upsilon = (n-1)/2$. Posons $z = x_1 + x_2$. La réalisation de l'événement qui nous intéresse dépend seulement de cette variable z. Compte tenu de la relation (A.1), nous avons

$$\Pr(z) = \binom{n}{z} 2^{[z,\alpha]} 4^{[n-z,\alpha]} / 6^{[n,\alpha]} \qquad (A.2)$$

On peut vérifier que la relation (A.2) s'écrit encore

$$\Pr(z) = \binom{z + 2/\alpha - 1}{2/\alpha - 1} \binom{n - z + 4/\alpha - 1}{4/\alpha - 1} \binom{n + 6/\alpha - 1}{6/\alpha - 1} \qquad (A.3)$$

L'équiprobabilité des différents ordres de préférence implique d'autre part que la probabilité de l'événement considéré est égale à

$$3 \sum_{z=\upsilon+1}^{2\upsilon+1} \Pr(z) \qquad (A.4)$$

D'après (A.3) et (A.4), la probabilité recherchée va donc s'écrire, en posant $w = n - z$

$$3 \sum_{w=0}^{\upsilon} \binom{2\upsilon - w + 2/\alpha}{2/\alpha - 1} \binom{w + 4/\alpha - 1}{4/\alpha - 1} / \binom{2\upsilon + 4/\alpha - 1}{6/\alpha - 1} \qquad (A.5)$$

Les formules de calcul présentées dans la deuxième colonne de la Table 1 sont déduites de la relation (A.5).

• Considérons maintenant le cas où le nombre n de votants tend vers l'infini. Si $\alpha = 0$, la relation (A.2) s'écrit

$$\Pr(z) = \binom{n}{z} (1/3)^z (2/3)^{n-z}$$

autrement dit, la variable z suit une loi binômiale. Si n est suffisamment élevé, z suit approximativement une loi normale et il est facile d'en déduire que la probabilité d'avoir $z < n/2$ tend vers 1. La probabilité de l'événement considéré est donc nulle.

Dans le cas général où α est différent de 0, la version asymptotique de la relation (A.2) s'écrit (en posant $\zeta = z/n$) :

$$f(\zeta) = \frac{\Gamma(6/\alpha)}{\Gamma(4/\alpha)\,\Gamma(2/\alpha)} \zeta^{2/\alpha-1} (1-\zeta)^{4/\alpha-1} \qquad (A.6)$$

soit une distribution bêta de paramètres $2/\alpha$, $4/\alpha$. La probabilité d'avoir une option disposant d'une majorité absolue est alors obtenue en évaluant l'expression

$$3 \int_{1/2}^{1} f(\zeta)\, d\zeta \qquad (A.7)$$

L'application des relations (A.6) et (A.7) pour $\alpha \in \{1/2,1,2\}$ permet de vérifier les valeurs numériques présentées dans la troisième colonne de la Table 1.

APPENDICE B — Preuve de la proposition.

1) *Observations préliminaires*. Étant donné une situation **y**, nous noterons VM2(**y**) l'option qui l'emporte dans un vote majoritaire à deux tours. Si VM2(**y**) = a, alors **y** doit vérifier l'une ou l'autre des relations suivantes :

$$[Y_{ab} > 1/2, Y_{ac} > 1/2 \quad \text{et} \quad (Y_a > Y_b \ \text{ ou } \ Y_a > Y_c)] \tag{B.1}$$

$$\text{ou} \quad [Y_{ab} > 1/2, Y_{ac} < 1/2, Y_c < Y_a \quad \text{et} \quad Y_c < Y_b] \tag{B.2}$$

$$\text{ou} \quad [Y_{ab} < 1/2, Y_{ac} > 1/2, Y_b < Y_a \quad \text{et} \quad Y_b < Y_c] \tag{B.3}$$

Les situations qui vérifient (B.1), (B.2) ou (B.3) seront dites de type 1, de type 2 ou de type 3 (respectivement).

Nous notons S_y l'ensemble des situations obtenues à partir de **y** en améliorant la position de a dans l'ordre de préférence d'un ou plusieurs individus (la préférence entre b et c demeurant inchangée). Pour tout $\mathbf{y}' = (y'_1, \ldots, y'_6) \in S_y$ il est aisé d'établir que l'on a

$$Y'_a \geq Y_a \, , \, Y'_b \leq Y_b \, , \, Y'_c \leq Y_c \, , \, Y'_{ab} \geq Y_{ab} \text{ et } Y'_{ac} \leq Y_{ac} \tag{B.4}$$

Soit **y** une situation telle que VM2(**y**) = a. Des relations (B.1) à (B.4), on peut déduire les observations suivantes :

(i) Si **y** est de type 1, alors VM2(Y') = a pour tout $y' \in S$

(ii) Pour tout $\mathbf{y}' \in S_y$, $Y'_b < 1/2$, $Y'_c < 1/2$ et $(Y'_a > Y'_b$ ou $Y'_b > Y'_c)$; autrement dit, l'option a ne peut être éliminée au premier tour.

2) *Nécessité*. Considérons une situation **y** telle que VM2(**y**) = a, et supposons que la condition (8) de la proposition ne soit pas vérifiée. Nous aurons alors

- soit $Y_{az} > 1/2$ pour tout $z \in \{b,c\}$,
- soit il existe $z \in \{b,c\}$ tel que $(Y_{az} < 1/2$ et $Y_z < 1/4)$.

Nous allons montrer que, dans chacun de ces deux cas, **y** n'est pas vulnérable au paradoxe de la non-monotonie, c'est-à-dire que VM2(**y**') = a pour tout $\mathbf{y}' \in S_y$.

• Supposons d'abord que l'on ait $Y_{az} > 1/2$ pour tout $z \in \{b,c\}$. La situation **y** est alors de type 1, et la conclusion recherchée découle de l'observation (i).

• Supposons maintenant qu'il existe une option - disons b - telle que $Y_{ab} < 1/2$ et $Y_b < 1/4$. La situation **y** est de type 3 et par (B.4) nous avons $Y'_{ac} > 1/2$; compte tenu de l'observation (ii), l'option c ne peut donc l'emporter en **y**' : VM2(**y**') ≠ c. Supposons que l'on ait VM2(**y**') = b. D'après l'observation (ii), cela impliquerait $Y'_a < 1/2$ et $Y'_c < Y'_a < Y'_a)$. Mais puisque $Y'_a + Y'_b + Y'_c = 1$, nous aurions alors $Y'_b > 1/4$, soit encore, par (B.4), $Y_b > 1/4$, ce qui contredirait notre hypothèse selon laquelle $Y_b < 1/4$. Donc VM2(**y**') ≠ b et l'on conclut que VM2(**y**') = a.

3) *Suffisance*. Supposons que la condition (8) soit remplie : il existe une option - disons b - telle que $Y_{ab} < 1/2$ et $Y_b > 1/4$. Nous allons montrer qu'alors il existe $\mathbf{y}' \in S_y$ tel que VM2(**y**') = b. Nous distinguerons deux cas, selon que le proportion y_6 d'individus ayant l'ordre de préférence c b a est supérieure ou non à 25%.

• Premier cas : $y_6 > 1/4$. Construisons une situation **y'** obtenue à partir de **y** de la manière suivante : $y'_1 = y_1$, $y'_2 = y_2 + y_5 + y_6 - 1/4$, $y'_5 = 0$, $y'_6 = 1/4$ et $y'_3 + y'_4 = y_3 + y_4$. Autrement dit, tous les individus qui avaient l'ordre de préférence c a b et une partie de ceux qui avaient l'ordre c b a adoptent maintenant l'ordre a c b. Par conséquent $\mathbf{y}' \in S_y$. D'autre part, $Y'_c = y'_5 + y'_6$ et $Y'_b = y'_3 + y'_4 = y_3 + y_4 > 1/4$ par hypothèse. Donc $Y'_a < 1/2$. De l'observation (ii), il résulte alors que l'option c est éliminée au premier tour. Au second tour, nous avons $Y'_{ba} = y'_3 + y'_4 + y'_6 = Y_b + 1/4 > 1/2$ (par hypothèse) et donc VM2(**y**') = b : la situation **y** est vulnérable au paradoxe de la non-monotonie.

• Deuxième cas : $y_6 \leq 1/4$. Construisons **y'** de la manière suivante $y'_1 = y_1$, $y'_2 = y_2 + y_5$, $y'_3 + y'_4 = y_3 + y_4$, $y'_5 = 0$ et $y'_6 = y_6$. Il est clair que $\mathbf{y}' \in S_y$ si et seulement si $y_5 > 0$. Or, par hypothèse, $Y_{ab} < 1/2$ et $Y_b > 1/4$: **y** est donc une situation de type 3 dans laquelle $Y_c = y_5 + y_6 > Y_b > 1/4$; comme nous avons supposé $y_6 \leq 1/4$, il en résulte que $y_5 > 0$; d'où $\mathbf{y}' \in S_y$. D'autre part, en observant que $Y'_{ab} = y'_1 + y'_2 + y'_5 = y_1 + y_2 + y_5 = Y_{ab} < 1/2$ par hypothèse, il est facile d'établir qu'en **y'** l'option b l'emportera au second tour, et la conclusion est la même que dans le cas précédent. □

BIBLIOGRAPHIE

ARROW K.J., *Social choice and individual value*, New York, Wiley, 1963.

BERG S., "Paradox of voting under an urn model : the effect of homogeneity", *Public Choice*, 47, (1985a), 377-387.

BERG S., "A note on plurality distorsion in large committees", *European Journal of Political Economy*, 1, (1985b), 271-284.

BERG S., "The probability of casting a decisive vote : the effects of a caucus", *Public Choice*, 64, (1990), 73-92.

BERG S. et B. BJURULF, "A note on the paradox of voting : anonymous preference profiles and May's formula", *Public Choice*, 40, (1983), 307-316.

BERG S. et D. LEPELLEY, "Voting cycles, plurality rule and strategic manipulation", *Annals of Operations Research*, 23, (1990), 247-256.

BORDA J.C. (de), "Mémoire sur les élections au scrutin", *Histoire de l'académie royale des sciences*, Paris, 1781.

CONDORCET M.J.A. (Marquis de), *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, Paris, 1785.

FELLER W., *An introduction to probability theory and its applications*, New York, Wiley, 1957.

FISHBURN P.C., "Monotonicity paradox in the theory of elections", *Discrete Applied Mathematics*, 4, (1982), 119-134.

FISHBURN P.C. et W.V. GEHRLEIN, "Majorities efficiencies for simple voting procedures", *Theory and Decision*, 14, (1982), 141-153.

GEHRLEIN W.V., "Single-stage election procedures for large electorates", *Journal of Mathematical Economics*, 8, (1981), 263-275.

GEHRLEIN W.V., "Condorcet efficiency and constant scoring rules", *Mathematical Social Sciences*, 2, (1982), 123-130.

GEHRLEIN W.V., "Condorcet's paradox", *Theory and Decision*, 15, (1983), 161-197.

GEHRLEIN W.V., *A variant interpretation of the impartial anonymous culture condition*, document dactylographié, University of Delaware, 1984.

GEHRLEIN W.V., "The expected likelihood of transitivity for a probabilistic chooser", *Annals of Operations Research*, 23, (1990), 235-246.

GEHRLEIN W.V., "Coincidence probabilities for simple majority and proportional lottery rules", *Economics Letters*, 35, (1991), 349-353.

GEHRLEIN W.V., "Condorcet efficiency and social homogeneity", papier presenté au *premier meeting de la "Society for Social Choice and Welfare"*, Caen, 1992.

GEHRLEIN W.V. et S. BERG, "The effect of social homogeneity on coincidence probabilities for pairwise proportional lottery and simple majority rule", à paraître dans *Social Choice and Welfare*, 1992.

GEHRLEIN W.V. et P.C. FISHBURN, "The probability of the paradox of voting : a computable solution", *Journal of Economic Theory*, 13, (1976a), 14-25.

GEHRLEIN W.V. et P.C. FISHBURN, "Condorcet's paradox and anonymous preference profiles", *Public Choice*, 26, (1976b), 1-18.

GEHRLEIN W.V. et P.C. FISHBURN, "Coincidence probabilities for simple majority and positionalist voting rules", *Social Science Research* 7, (1978), 272-283.

GEHRLEIN W.V. et P.C. FISHBURN, "Effects of abstentions on voting procedures in three-alternative elections", *Behavioral Science* 24, (1979), 346-354.

GEHRLEIN W.V. et P.C. FISHBURN, "Scoring rule sensitivity to weight selection", *Public Choice*,40, (1983), 249-261.

GIBBARD A., "Manipulation of voting schemes : a general result", *Econometrica*, 41, (1973), 587-601.

GILLETT R., "Collective Indecision", *Behavioral Science*, 22, (1977), 383-390.

GILLETT R., "The comparative likelihood of an equivocal outcome under plurality, Condorcet and Borda voting procedures", *Public choice*, 35, (1980), 483-491.

GUILBAUD G.Th., "Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation", *Économie Appliquée*, 5, (1952), 501-584.

JOHNSON N.L. et S. KOTZ, *Urns models and their application*, New York, Wiley, 1977.

KREWERAS G., "Les décisions collectives", *Mathématiques et Sciences Humaines*, 2, (1962), 25-35.

LEPELLEY D., *Remarques sur les calculs de probabilité dans la théorie des choix collectifs*, document dactylographié, Université de Caen, 1984.

LEPELLEY D., *Contribution à l'analyse des procédures de décision collective*, Thèse de doctorat, Université de Caen, 1989.

LEPELLEY D., "On the probability of electing the Condorcet Loser", à paraître dans *Mathematical Social Sciences*, 1992.

LEPELLEY D. et B. MBIH, "The proportion of coalitionally unstable situations under the plurality rule", *Economics Letters*, 24, (1987), 311-315.

LEPELLEY D. et B. MBIH, *The vulnerability of four social choice functions to coalitional manipulation of preferences*, document dactylographié, Université de Caen, 1992.

MAY R.M., "Some mathematical remarks on the paradox of voting", *Behavioral Science*, 16, (1971), 143-151.

MERRILL S., *Making multicandidate elections more democratic*, Princeton [University Press, 1988.

MOULIN H., "Condorcet's principle implies the no show paradox", *Journal of Economic Theory*, 45, (1988), 53-64.

NIEMI R.G. et W.H. RIKER, "The choice of voting systems", *Scientific American*, 234 (1976), 21-27

NITZAN S., "The vulnerability of point-voting schemes to preference variation and strategic manipulation", *Public choice*, 47 (1985) 249-270.

NURMI H., "Probability models in constitutional choice", *European Journal of Political Economy*, 6, (1990), 107-117.

NURMI H. et Y. UUSI-HEIKKILA, "Computer simulations of approval and plurality voting : the frequency of weak Pareto violations and Condorcet losers choice in impartial culture", *European Journal of Political Economy*, 2/1, (1985), 47-59.

PARIS D.C., "Plurality distorsion and majority rule", *Behavioral Science*, 20 , (1975), 125-133.

PELEG B., "A note on manipulability of large voting schemes", *Theory and Decision*, 11, (1979), 401-412.

SATTERTHWAITE M.A., "Strategy-proofness and Arrow's conditions : existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions", *Journal of Economic Theory*, 10, (1975), 187-217.

SMITH J.H., "Aggregation of preferences with variable electorates", *Econometrica*, 41, (1973), 1027-1041.

YOUNG H.P., "Social choice scoring functions", *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 28, (1975), 824-838.