MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

IRÈNE CHARON-FOURNIER
ANNE GERMA
OLIVIER HUDRY

Encadrement de l'indice de slater d'un tournoi à l'aide de ses scores

Mathématiques et sciences humaines, tome 118 (1992), p. 53-68
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1992__118__53_0>

Math. Inf. Sci. hum., (30e année, n°118, *1992*, p.53-68)

ENCADREMENT DE L'INDICE DE SLATER D'UN TOURNOI A L'AIDE DE SES SCORES

Irène CHARON-FOURNIER, Anne GERMA et Olivier HUDRY [1]

RÉSUMÉ — *Dans cet article, nous définissons un paramètre $\sigma(T)$ à partir des scores d'un tournoi T. Ce paramètre évalue un éloignement entre le tournoi T et les tournois transitifs de même ordre. Appelant i(T) le nombre minimum d'arcs à inverser pour rendre T transitif, nous montrons que l'on a $\sigma(T) \leq i(T)$. Nous déterminons ensuite des bornes sur la valeur maximum de i(T) pour les tournois T à σ donné. Nous en déduisons enfin, en fonction du nombre de sommets de T et de $\sigma(T)$, un encadrement de l'indice de Slater d'un tournoi quelconque.*

SUMMARY — Bounds of Slater's index of a tournament from its scores.
In this paper, we define a parameter $\sigma(T)$ from the scores of a tournament T. This parameter measures a remoteness between the tournament T and the transitive tournaments of same order. Calling i(T) the minimum number of arcs to reverse to make T transitive, we show the relation $\sigma(T) \leq i(T)$. Then we give bounds on the maximum value of i(T) for tournaments T with given value of σ. Last, according to $\sigma(T)$ and the number of vertices of T, we deduce bounds of i(T) for any tournament T.

1. INTRODUCTION

Un tournoi Tn d'ordre n est un graphe orienté complet antisymétrique à n sommets : entre toute paire de sommets distincts i et j, il existe un et un seul des deux arcs (i, j) ou (j, i). Le score si d'un sommet i est le demi-degré extérieur de i, c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant i pour origine. Le vecteur-score d'un tournoi Tn est le vecteur ordonné $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, les sommets étant numérotés de façon à avoir $s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_n$. H.G. Landau [5] a donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ soit le vecteur-score d'un tournoi Tn (pour les définitions et les résultats de base, voir J.W. Moon [6]).

THÉORÈME 1. (H.G. Landau) : $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ avec $s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_n$ est le vecteur-score d'un tournoi si et seulement si $\sum_{k=1}^{i} s_k \geq \frac{i(i-1)}{2}$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $\sum_{k=1}^{n} s_k = \frac{n(n-1)}{2}$. ♦

En particulier, le vecteur-score du tournoi transitif est le vecteur (0, 1, …, n-1).

---

[1] École Nationale Supérieure des Télécommunications, 46 rue Barrault, 75634 Paris Cedex 13 France.

Dans cet article, nous établissons un encadrement du nombre minimum d'arcs à inverser dans un tournoi T pour le rendre transitif à l'aide du paramètre $\sigma(T)$ défini de la façon suivante.

DÉFINITION 1. Soit $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ le vecteur-score d'un tournoi T ; on pose alors

$$\sigma(T) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |s_i - i + 1|$$

Ce paramètre évalue un éloignement entre le tournoi T et le tournoi transitif de même ordre. En particulier, $\sigma(T)$ vaut 0 si et seulement si T est transitif.

Les trois figures suivantes permettent de mieux comprendre ce que représente $\sigma(T)$ en en donnant une interprétation géométrique et une graphique.

Pour l'interprétation géométrique, on associe à chaque vecteur-score $s = (s_i)_{1 \leq i \leq n}$ une fonction en escalier Φ_s définie sur $]0, n]$ par : $x \in \,]i-1, i] \; (1 \leq i \leq n) \Rightarrow \Phi_s(x) = s_i$; en particulier, appelons Ψ la fonction en escalier associée au vecteur-score d'un tournoi transitif. La figure 1 montre (en traits simples) la fonction en escalier associée aux scores d'un tournoi à 9 sommets et de vecteur-score (2, 2, 2, 2, 3, 6, 6, 6, 7) par rapport à celle (en traits gras) associée aux scores d'un tournoi transitif (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8). En appelant S_1 la surface située au-dessus de Ψ et en dessous de Φ_s (hachurée dans un sens dans la figure 1), et S_2 la surface située en dessous de Ψ et au-dessus de Φ_s (hachurée dans l'autre sens dans la figure 1), le lemme 2 pourra s'interpréter par la relation : $\sigma(T) = S_1 = S_2$.

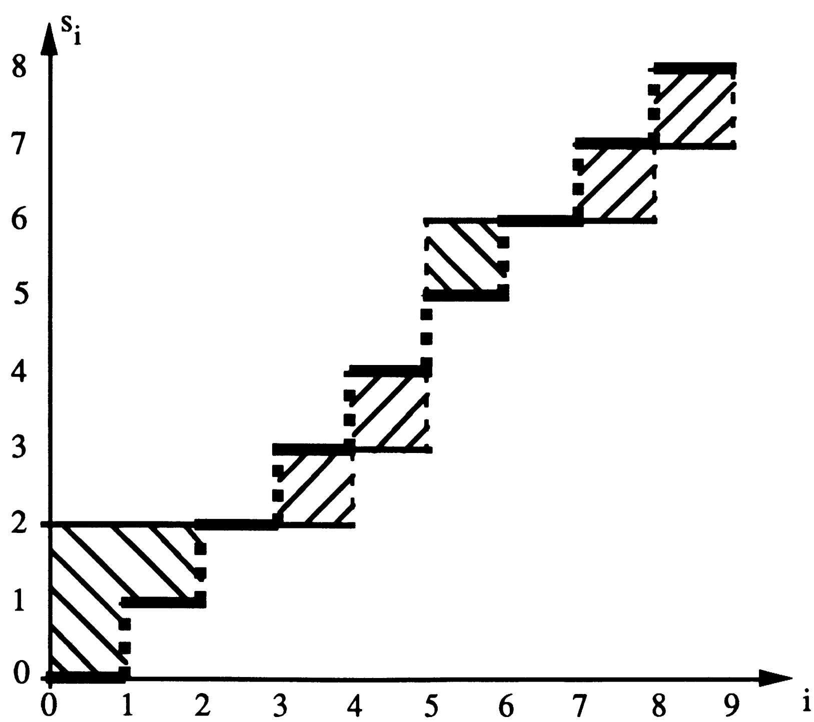


Figure 1

Pour les deuxième et troisième figures, construisons, pour n fixé, un graphe G_n dont les sommets sont tous les vecteurs-score possibles des tournois à n sommets. Il existe un arc de $r = (r_k)_{1 \leq k \leq n}$ vers $s = (s_k)_{1 \leq k \leq n}$ s'il existe i et j, avec $1 \leq i < j \leq n$, tels que $s_i = r_i + 1$, $s_j = r_j - 1$ et $s_k = r_k$ pour $k \neq i$ et $k \neq j$ (l'arc de r vers s entraîne l'existence de deux tournois T_r et T_s ayant respectivement r et s comme vecteurs-score et tels que l'on puisse passer de T_r à T_s en inversant un arc de T_r). On peut alors ordonner G_n en niveaux : le niveau 0 correspond au vecteur-score des tournois transitifs, et le niveau k+1 contient les vecteurs-score qui ne figurent pas à un niveau précédent tout en étant successeurs d'un vecteur-score du niveau k. Les figures 2 et 3 représentent respectivement G_4 et G_5.

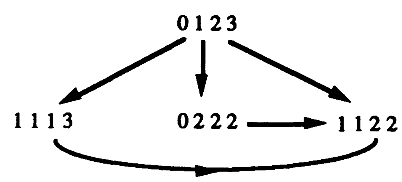


Figure 2

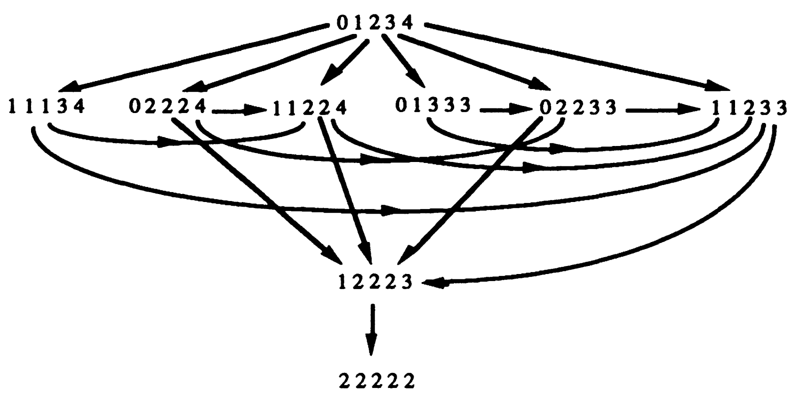


Figure 3

On peut aisément se convaincre que, pour un tournoi T donné de vecteur-score s, $\sigma(T)$ est égal au numéro du niveau sur lequel figure s ; c'est donc aussi la longueur d'un plus court chemin (au sens du nombre d'arcs) dans G_n entre le vecteur-score des tournois transitifs et s.

Ces figures illustrent certaines propriétés que nous allons formaliser à l'aide du lemme 2 et du théorème 3. En particulier, les propositions suivantes montrent que $\sigma(T)$ est un nombre entier (lemme 2) compris entre 0 et $\frac{n^2-1}{8}$ si n est impair, $\frac{n^2-2n}{8}$ si n est pair (théorème 3).

LEMME 2. Soit T un tournoi d'ordre n de vecteur-score $s = (s_i)_{1 \leq i \leq n}$. Alors

$$\sigma(T) = \sum_{i/s_i-i+1 \geq 0} (s_i-i+1) = - \sum_{i/s_i-i+1 \leq 0} (s_i-i+1)$$

Preuve. Par définition, on a

$$2.\sigma(T) = \sum_{i/s_i-i+1 \geq 0} (s_i-i+1) - \sum_{i/s_i-i+1 < 0} (s_i-i+1) ;$$

or, d'après le théorème de H.G. Landau :

$$\sum_{i/s_i-i+1<0} s_i = \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{i/s_i-i+1 \geq 0} s_i$$

et

$$\sum_{i/s_i-i+1<0} (i-1) = \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{i/s_i-i+1 \geq 0} (i-1)$$

$$\sum_{i/s_i-i+1<0}(s_i-i+1) = -\sum_{i/s_i-i+1\geq 0}(s_i-i+1)$$

et par conséquent

$$\sigma(T) = \sum_{i/s_i-i+1\geq 0}(s_i-i+1) = -\sum_{i/s_i-i+1\leq 0}(s_i-i+1)\ ) \qquad \blacklozenge$$

THÉORÈME 3. Soit T un tournoi d'ordre n de vecteur-score $s = (s_i)_{1\leq i\leq n}$. On a alors

$$0 \leq \sigma(T) \leq \begin{cases} \frac{n^2-1}{8} & \text{si n est impair} \\ \frac{n^2-2n}{8} & \text{si n est pair} \end{cases}$$

les bornes étant atteintes, et toutes les valeurs intermédiaires pouvant l'être aussi. De plus, si n est impair, seuls les tournois réguliers (tous les scores sont égaux à $\frac{n-1}{2}$) maximisent $\sigma(T)$, et si n est pair, tous les tournois dont les $\frac{n}{2}$ premiers scores valent $\frac{n}{2}-1$ ou dont les $\frac{n}{2}$ derniers valent $\frac{n}{2}$ maximisent $\sigma(T)$ (cela inclut les tournois quasi-réguliers dont les $\frac{n}{2}$ premiers scores valent $\frac{n}{2}-1$ et les $\frac{n}{2}$ derniers valent $\frac{n}{2}$).

Preuve. On a déjà remarqué que $\sigma(T)$ peut être nul dans le cas où T est le tournoi transitif (et seulement dans ce cas). Il est facile d'autre part de vérifier que les bornes supérieures précédentes sont bien atteintes par les tournois proposés dans l'énoncé du théorème.

Montrons désormais que ces valeurs ne peuvent être dépassées. Pour cela, remarquons d'abord que si $s = (s_i)_{1\leq i\leq n}$ est un vecteur-score et s'il existe des indices i_1 et i_3 tels que $s_{i_1} > i_1 - 1$ et $s_{i_3} < i_3 - 1$, alors il existe i_2 avec $i_1 < i_2 < i_3$ tel que $s_{i_2} = i_2 - 1$ (ainsi dans l'exemple illustré par la figure 1, si on prend $i_1 = 1$ et $i_3 = 4$, alors $i_2 = 3$ convient).

Considérons un tournoi T non transitif de vecteur-score $s = (s_i)_{1\leq i\leq n}$. Découpons l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ en intervalles I_j de telle sorte que l'expression s_i-i+1 soit de signe constant sur chaque intervalle I_j et change de signe quand on passe de I_j à I_{j+1}. Plus précisément, d'après la remarque précédente, on peut partitionner $\{1, 2, ..., n\}$ en $I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_{2k} \cup J$ avec, en posant $i_1 = 0$ et $i_{2k+1} = n$:

- pour $1 \leq j \leq k$, $I_{2j-1} = [i_{2j-1} + 1, i_{2j} - 1] / \forall\ i \in I_{2j-1}, s_{i_{2j}} \geq s_i \geq i-1$,
- $J = \{i_{2j}$ tel que $1 \leq j \leq k$ et $s_{i_{2j}} = i_{2j} - 1\}$ et
- pour $1 \leq j \leq k$, $I_{2j} = [i_{2j} + 1, i_{2j+1}] / \forall\ i \in I_{2j}, s_{i_{2j}} \leq s_i \leq i-1$.

Par rapport à l'interprétation géométrique illustrée par la figure 1, les intervalles I_{2j-1} correspondent aux intervalles pour lesquels Φ_s est "au-dessus" de Ψ , les intervalles I_{2j} à ceux pour lesquels Φ_s est "au-dessous" de Ψ, et J est l'ensemble des indices correspondant aux intervalles pour lesquels Φ_s passe d'au-dessus à en dessous de Ψ (ainsi pour l'exemple de la figure 1, on a $\{1, 2, ..., 9\} = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 \cup J$ avec $I_1 = \{1, 2\}$, $I_2 = \{4, 5\}$, $I_3 = \{6\}$, $I_4 = \{8, 9\}$ et $J = \{3, 7\}$).

Posons $\lambda_j = |I_j|$ $(\lambda_j \neq 0)$, $I^+ = \bigcup_{j=1}^{k} I_{2j-1}$ et $I^- = \bigcup_{j=1}^{k} I_{2j}$. On a alors $\sum_{j=1}^{2k} \lambda_j = n - k$. D'après le lemme 2, on a :

$$\sigma(T) = \sum_{i \in I^+} (s_i - i + 1) = \sum_{i \in I^-} (i - 1 - s_i).$$

Or

$$\forall\ 1 \le j \le k,\ \sum_{i \in I_{2j-1}} (s_i - i + 1) \le \frac{1}{2}\ \lambda_{2j-1}.(\lambda_{2j-1} + 1)\ ;$$

on remarquera que ce majorant n'est atteint que si tous les s_i prennent la plus grande valeur possible sur I_{2j-1}, c'est-à-dire celle de $s_{i_{2j}}$, qui vaut $i_{2j} - 1$. De même,

$$\forall\ 1 \le j \le k, \text{ on a } \sum_{i \in I_{2j}} (i - 1 - s_i) \le \frac{1}{2}\ \lambda_{2j}.(\lambda_{2j} + 1)\ ;$$

on remarquera là aussi que cette valeur n'est atteinte que si tous les s_i prennent la plus petite valeur possible sur I_{2j}, c'est-à-dire $s_{i_{2j}} = i_{2j} - 1$. D'où la majoration de $\sigma(T)$:

$$2\sigma(T) \le \text{Min}\ \Big\{\sum_{j=1}^{k} \lambda_{2j-1}.(\lambda_{2j-1} + 1)\ ;\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_{2j}.(\lambda_{2j} + 1)\Big\}$$

avec la contrainte

$$\sum_{j=1}^{2k} \lambda_j = n - k,$$

ce qui entraîne

$$2\sigma(T) \le \underset{k,\{\lambda_j\}}{\text{Max}}\ \text{Min}\ \Big\{\sum_{j=1}^{k} \lambda_{2j-1}.(\lambda_{2j-1} + 1)\ ;\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_{2j}.(\lambda_{2j} + 1)\Big\}$$

avec la contrainte

$$\sum_{j=1}^{2k} \lambda_j = n - k.$$

L'un au moins des deux termes $\sum_{j=1}^{k} \lambda_{2j-1}$ ou $\sum_{j=1}^{k} \lambda_{2j}$ est inférieur ou égal à $\left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x ; les deux termes jouant des rôles symétriques, on peut supposer que l'on a $\sum_{j=1}^{k} \lambda_{2j} \le \left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor$.

Or

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_{2j}.(\lambda_{2j} + 1) = \sum_{j=1}^{k} (\lambda_{2j})^2 + \sum_{j=1}^{k} \lambda_{2j} = \Big(\sum_{j=1}^{k} \lambda_{2j}\Big)^2 - \sum_{j \neq j'} \lambda_{2j}.\lambda_{2j'} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_{2j}$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_{2j}.(\lambda_{2j}+1) \leq \left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor^2 - k(k-1) + \left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor,$$

et

$$2\sigma(T) \leq \underset{k\geq 1}{\mathrm{Max}} \left\{ \left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor^2 - k(k-1) + \left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor \right\} = M.$$

Une étude de M selon la parité de n et de k montre que le maximum est toujours atteint pour $k = 1$ et seulement pour cette valeur. Plus précisément :

- si n impair : M vaut $\frac{n^2-1}{4}$, d'où $\sigma(T) \leq \frac{n^2-1}{8}$, borne que par ailleurs on sait atteindre. De plus, pour atteindre cette borne, il faut que toutes les inégalités précédentes soient en fait des égalités. On peut facilement montrer que cela entraîne $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{n-1}{2}$ et en outre, d'après les remarques plus haut, que les scores doivent tous valoir $s_{i_2} = i_2 - 1$; comme $i_2 = \lambda_1 + 1$, il faut donc que tous les scores valent $\frac{n-1}{2}$ pour maximiser $\sigma(T)$.

- si n pair : M vaut $\frac{n^2-2n}{4}$, d'où $\sigma(T) \leq \frac{n^2-2n}{8}$, borne que l'on sait là encore atteindre. De plus, pour atteindre cette borne, il faut de nouveau que toutes les inégalités précédentes soient en fait des égalités ; cela entraîne $\lambda_1 = \frac{n}{2} - 1$ et $\lambda_2 = \frac{n}{2}$, ou bien $\lambda_1 = \frac{n}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{n}{2} - 1$; enfin, toujours d'après les remarques plus haut, pour atteindre ce maximum de $\sigma(T)$ il faut, si $\lambda_1 = \frac{n}{2} - 1$, que les $\frac{n}{2}$ premiers scores valent tous $s_{i_2} = i_2 - 1 = \lambda_1 = \frac{n}{2} - 1$, ou sinon ($\lambda_1 = \frac{n}{2}$) que les $\frac{n}{2}$ derniers scores valent tous $s_{i_2} = i_2 - 1 = \lambda_1 = \frac{n}{2}$.

Pour finir, remarquons qu'il est facile, en utilisant la transformation qui nous a permis de construire les graphes G_n des figures 2 et 3, d'exhiber des vecteurs-score permettant d'atteindre n'importe quelle valeur de σ comprise entre 0 et les bornes supérieures précédentes. Les détails sont laissés au lecteur... ♦

Ce paramètre va nous permettre d'obtenir des indications sur le problème de P. Slater [9]. Celui-ci consiste à déterminer, dans un tournoi T donné, un ensemble minimum d'arcs dont l'inversion rend T transitif (un ensemble d'arcs dont l'inversion rend T transitif s'appelle parfois aussi un "Feedback Arc Set" ; le problème de P. Slater consiste donc à déterminer un "Feedback Arc Set" de cardinal minimum de T).

DÉFINITION 2. Soit T un tournoi. On appelle "indice de Slater" et on note i(T) le nombre minimum d'arcs à inverser dans T pour rendre T transitif.

L'indice de Slater i(T) correspond à la mesure d'une distance entre le tournoi T et l'ensemble des tournois transitifs sur les sommets de T ([1]). Le tournoi transitif obtenu en inversant ces i(T) arcs est caractéristique d'un ordre total, appelé "ordre médian" de T ([1]). L'ordre médian de T est donc un ordre à distance minimum de T.

2. ENCADREMENT DE L'INDICE DE SLATER A L'AIDE DE σ

Dans cette partie, nous établissons un encadrement de l'indice de Slater d'un tournoi T quelconque. Nous supposerons pour cela que les sommets de T sont numérotés par ordre croissant des scores.

PROPOSITION 4. Pour tout tournoi T, on a $\sigma(T) \leq i(T)$.

Preuve. Il est facile de vérifier que l'inversion d'un arc dans un tournoi T donné affecte deux scores et provoque une variation de $\sigma(T)$ d'au plus 1 : si T' est le tournoi obtenu après l'inversion d'un arc quelconque de T, on a $|\sigma(T) - \sigma(T')| \leq 1$. D'où l'inégalité de la proposition 4 (cette inégalité pouvant être une égalité pour pour toute valeur de σ). ♦

On remarquera que cette minoration de i(T) peut être généralisée : le nombre minimum d'arcs à inverser pour qu'un tournoi T de vecteur-score $s = (s_i)_{1 \leq i \leq n}$ devienne isomorphe à un tournoi T' de vecteur-score $s' = (s'_i)_{1 \leq i \leq n}$ est minoré par $\sigma(T,T') = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |s_i - s'_i|$.

Appelant $I(n,\sigma)$ le maximum que peut prendre i(T) sur l'ensemble des tournois T d'ordre n tels que $\sigma(T) = \sigma$, nous allons établir un encadrement de $I(n,\sigma)$. Afin de déterminer un minorant de $I(n,\sigma)$, nous construirons des tournois d'ordre n, de paramètre σ fixé et possédant un "grand" nombre de circuits constitués de trois arcs (ce que nous appellerons "3-circuits") deux à deux arc-disjoints. Comme il faudra inverser au moins un arc de chacun de ces circuits pour rendre le tournoi transitif, le nombre de 3-circuits arc-disjoints donnera un minorant de $I(n,\sigma)$. Enfin nous exhiberons pour tout tournoi T un ordre total obtenu à l'aide d'un certain regroupement des sommets de T ; le lemme 5 nous permettra alors d'en déduire un majorant de $I(n,\sigma)$.

Lemme 5. Le nombre d'arcs ayant leur origine dans $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ et leur extrémité dans $\{x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_n\}$ est inférieur ou égal à $\sigma(T)$ pour tout p.

Preuve . Le nombre d'arcs sortants de $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ est

$$S = \sum_{i=1}^{p} s_i - \frac{p(p-1)}{2} = \sum_{i=1}^{p} (s_i - i + 1).$$

Par conséquent, on a

$$S \leq \sum_{\substack{s_i - i + 1 \geq 0 \\ \text{et } i \leq p}} (s_i - i + 1) \leq \sum_{\substack{s_i - i + 1 \geq 0 \\ \text{et } i \leq n}} (s_i - i + 1) = \sigma(T)$$

d'après le lemme 2. ♦

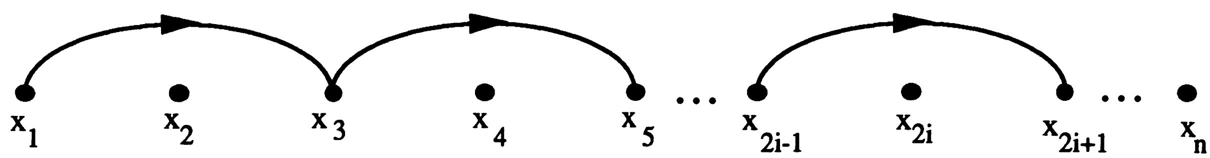
DÉFINITION 3. Soit $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des tournois à n sommets. On pose

$$I(n,\sigma) = \max \{i(T) \text{ pour } T \in \mathcal{T}_n \text{ tel que } \sigma(T) = \sigma\}.$$

Nous commençons par évaluer I(n,1), I(n,2) et I(n,3).

PROPOSITION 6. $I(n,1) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ (où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x).

Preuve. Montrons d'abord que la valeur $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ peut être atteinte. Pour cela, considérons le tournoi T_1 de sommets $x_1, x_2, \ldots, x_n$, construit de la façon suivante. On part du tournoi transitif dont les arcs sont (x_i,x_j) pour $i > j$; pour obtenir T_1, on inverse tous les arcs de la forme (x_{2i+1},x_{2i-1}) pour $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$. L'allure de ce tournoi est donnée par le dessin ci-dessous, dans lequel les arcs manquants sont supposés orientés de droite à gauche.



Selon la parité de n, le dernier arc orienté de gauche à droite aboutit en x_n (si n est impair) ou en x_{n-1} (n pair). Il est facile de calculer les scores de ce tournoi T_1, et de vérifier que $\sigma(T_1)$ vaut bien 1. Comme l'inversion des arcs (x_{2i-1},x_{2i+1}) pour $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ suffit à rendre T_1 transitif, on a $i(T_1) \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$. D'autre part, T_1 possède $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ circuits disjoints de la forme $(x_{2i-1}, x_{2i+1}, x_{2i})$; pour les détruire tous, il faut inverser $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ arcs, d'où $i(T_1) \geq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$.

Par conséquent $I(n,1)$ est supérieur ou égal à $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$.

Montrons ensuite que cette valeur ne peut être dépassée. Soit T un tournoi quelconque à $n = 4p-r$ sommets avec $0 \leq r \leq 3$ tel que $\sigma(T) = 1$, et supposons ses sommets $x_1, x_2, \ldots, x_n$ classés par scores croissants. Nous allons construire un ordre total (non nécessairement médian) à partir de T avec au plus $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ inversions. Regroupons pour cela les sommets de T en p-1 paquets P_i de quatre sommets chacun en respectant l'ordre induit par les scores : $P_i = \{x_{4i-3}, x_{4i-2}, x_{4i-1}, x_{4i}\}$ pour $1 \leq i \leq p-1$, plus un paquet P_p de 4-r sommets. Pour rendre T transitif, il suffit de rendre transitif chaque paquet P_j $(1 \leq j \leq p)$ et d'inverser les arcs dont l'origine se trouve dans un paquet P_i $(1 \leq i \leq p-1)$ et l'extrémité dans un paquet d'indice supérieur P_j $(j > i)$. Or, d'après le lemme 5, il y a au plus $\sigma = 1$ tel arc pour chaque indice i $(1 \leq i \leq p-1)$. Comme d'autre part rendre transitif un tournoi à quatre sommets peut se faire en inversant au plus un arc (la preuve est laissée au lecteur), on peut rendre T transitif en inversant au plus $2p - 2 + \varepsilon_r$ arcs avec $\varepsilon_r = 0$ ou 1 : p-1 arcs entre les p paquets, p-1 arcs pour rendre les p premiers paquets transitifs ; pour rendre transitif le dernier paquet P_p, il se peut qu'on doive inverser un arc si r = 0 ou 1, auquel cas $\varepsilon_r = 1$, mais il ne peut contenir de circuit si r = 2 ou 3, auquel cas $\varepsilon_r = 0$. On en déduit la relation

$$i(T) \leq 2p - 2 + \varepsilon_r \text{ avec } \varepsilon_r = \begin{cases} 1 \text{ si } r = 0 \text{ ou } 1 \\ 0 \text{ si } r = 2 \text{ ou } 3 \end{cases}$$

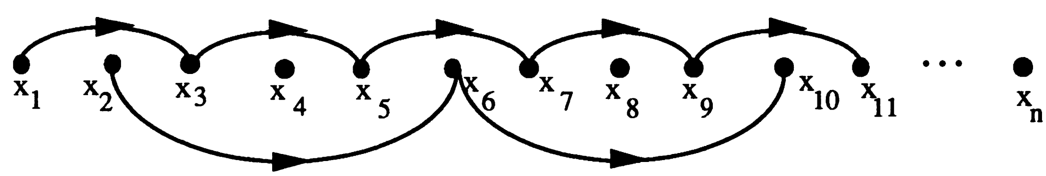
Une étude selon les quatre valeurs de r montre que pour tout tournoi T à n sommets, on a

$$i(T) \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \text{ d'où } I(n,1) \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor. \qquad \blacklozenge$$

PROPOSITION 7. $I(n,2) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor$.

Preuve. Nous allons encore procéder en deux temps, d'abord donner un tournoi dont l'indice vaille $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor$; puis, en utilisant un regroupement identique à celui proposé pour la preuve de la proposition 6, mettre en évidence un ordre total à distance au plus $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor$ de tout tournoi T tel que $\sigma(T) = 2$.

Considérons le tournoi T_2 construit à partir du tournoi T_1 de la preuve de la proposition précédente en inversant les arcs de la forme (x_{4j+2}, x_{4j-2}) pour $1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor$, ce qui donne l'allure suivante. Il est facile de montrer que l'on a bien $\sigma(T_2) = 2$.



Il est clair que l'inversion des $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ arcs du type (x_{2i-1},x_{2i+1}) pour $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ et des $\left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor$ arcs du type (x_{4j-2}, x_{4j+2}) pour $1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor$ suffit à rendre T_2 transitif, d'où la majoration $i(T_2) \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor$. D'autre part, T_2 possède les $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ circuits disjoints que possédait T_1 et en possède $\left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor$ autres, disjoints entre eux et des précédents, du type $(x_{4j-2}, x_{4j+2}, x_{4j})$, soit au total $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor$ circuits disjoints, d'où $i(T) \geq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor$.

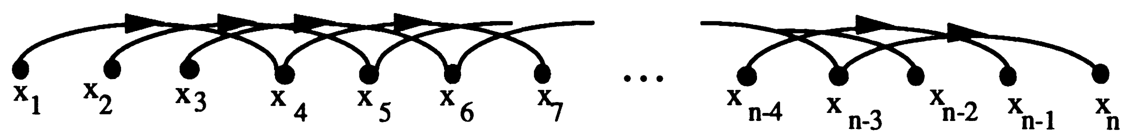
Pour montrer que cette valeur est maximum, découpons un tournoi T quelconque tel que $\sigma(T) = 2$ comme dans la preuve de la proposition 6 (et en adoptant les mêmes notations). Le lemme 5 nous assure qu'il n'y a pas plus de deux arcs allant d'un paquet P_i vers un paquet P_j d'indice supérieur ($j > i$). Un raisonnement analogue au raisonnement précédent nous permet de conclure que l'on a : $i(T) \leq 3(p-1) + \varepsilon_r$, avec de nouveau $\varepsilon_r = 0$ si $r = 2$ ou 3 et $\varepsilon_r = 1$ si $r = 0$ ou 1. L'étude de cette borne selon la valeur de r montre qu'elle coïncide avec $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor$, sauf dans le cas $r = 3$, où elle vaut $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor + 1$.

Pour éliminer ce jeu d'une unité, remarquons que le dernier paquet P_p ne contient alors qu'un seul sommet x. Or, d'après la construction de ces paquets, x possède le score le plus élevé des sommets de T, et celui-ci ne peut être que n-1 ou n-2, puisqu'on suppose $\sigma(T)$ égal à deux. On en déduit qu'il arrive au plus un arc dont l'extrémité soit x, et par conséquent la majoration précédente de l'indice de Slater devient : $i(T) \leq 3(p-1) - 1$ (au plus p-1 arcs à inverser pour rendre les p paquets transitifs, le dernier ne nécessitant pas d'inversion, et au plus 2 arcs allant d'un paquet P_i vers un paquet P_j d'indice supérieur ($j > i$) sauf pour le dernier, pour lequel il y en a au plus 1). Ceci finit de montrer que dans tous les cas on a bien

$$i(T) \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor, \text{ et donc } I(n,2) \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor. \qquad \blacklozenge$$

PROPOSITION 8. $I(n,3) \in \{n-2, n-3\}$.

Preuve Comme auparavant, nous construisons d'abord un tournoi T_3 avec $\sigma(T_3) = 3$ et possédant un "grand" indice de Slater. Considérons le tournoi T_3 à n sommets construit à partir du tournoi transitif (dont on suppose les sommets numérotés par ordre de scores croissants) en inversant les arcs du type (x_{j+3}, x_j) pour $1 \leq j \leq n-3$. L'allure de T_3 est donnée par le dessin ci-dessous. Ici encore les scores, faciles à déterminer, montrent l'égalité $\sigma(T_3) = 3$.



Clairement $i(T_3) \leq n-3$, puisqu'il suffit d'inverser les n-3 arcs du type (x_j, x_{j+3}) pour rendre T_3 transitif. Comme de plus T_3 possède les n-3 circuits disjoints de la forme (x_i, x_{i+3}, x_{i+1}), l'indice de Slater de T_3 vaut bien n-3. D'où $I(n,3) \geq n-3$.

Pour montrer que $I(n,3)$ est majoré par n-2, nous allons encore utiliser un regroupement des sommets en paquets de quatre sommets, comme il a été fait jusqu'à présent. En écrivant n sous la forme $n = 4p-r$, le raisonnement précédent s'applique encore et aboutit à la majoration $I(n,3) \leq 4(p-1) + \varepsilon_r$, avec $\varepsilon_r = 1$ si $r = 0$ ou 1, $\varepsilon_r = 0$ si $r = 2$ ou 3. Selon la valeur de r, cette majoration donne n-3 ou n-2, sauf pour $r = 3$ où la majoration obtenue est n-1. Celle-ci peut être diminuée d'une unité, en remarquant que le score le plus élevé vaut n-1, n-2 ou n-3, puisque σ vaut 3. Dans le cas où r vaut 3, le sommet de plus grand score reçoit donc au plus deux arcs, et non trois comme il a été supposé dans l'évaluation du majorant. Ce qui permet de réduire celui-ci à n-2, comme on l'a fait précédemment. ♦

Pour obtenir un minorant de $I(n,\sigma)$ dans le cas général, nous allons utiliser le lemme suivant pour construire des tournois d'ordre n, admettant une valeur donnée σ et possédant un "grand" nombre $m(n,\sigma)$ de 3-circuits deux à deux arc-disjoints, au moins pour n assez grand devant σ.

Rappelons tout d'abord que si p est congru à 0 ou 1 modulo 4, il est possible de former avec les entiers consécutifs 1, 2, ..., 2p, p paires (a_i, b_i) telles que $b_i = a_i + i$ (voir [8]) avec d'une part : $i \neq j \Rightarrow \{a_i \neq a_j \text{ et } b_i \neq b_j\}$, et d'autre part : $a_i \neq b_j$ pour tout (i, j).

Il est possible d'étendre cette partition en paires aux cas p congru à 2 ou 3 modulo 4, à condition de sauter une valeur parmi les entiers 1, ..., 2p et d'ajouter 2p+1 à la liste. Plus précisément, nous allons établir le lemme 9.

Lemme 9. Soit $p = 4q + 2$, il existe une partition de $\{1, ..., 2p+1\} - \{6q+4\}$ en p paires (a_i, b_i) telles que $b_i = a_i + i$. Soit $p = 4q + 3$, il existe une partition de $\{1, ..., 2p+1\} - \{6q+6\}$ en p paires (a_i, b_i) telles que $b_i = a_i + i$.

Preuve. pour $p = 4q + 2$, les paires sont $\{(1,p), (2, p-1), (3, p-2),...(\frac{p}{2},\frac{p}{2}+1)\}$, correspondant aux valeurs impaires de i et également $\{(p+1,2p+1), (p+2,2p), (p+3,2p-1), \ldots, (6q+3,6q+5)\}$ correspondant aux valeurs paires de i.

Pour $p = 4q + 3$, les paires sont $\{(1,p+1), (2,p), (3,p-1),...(\frac{p+1}{2},\frac{p+1}{2}+1)\}$ correspondant aux valeurs impaires de i et également $\{(p+2,2p+1), (p+3,2p), \ldots, (6q+5,6q+7)\}$ correspondant aux valeurs paires de i. ♦

Notre but étant de construire un tournoi de paramètre σ donné ayant un grand nombre de circuits deux à deux arc-disjoints, nous utiliserons fréquemment des "translations", c'est-à-dire qu'à partir, par exemple, d'un circuit passant par les sommets x_i, x_j et x_k, avec $i<j<k$, nous construirons les circuits passant par x_{i+h}, x_{j+h} et x_{k+h}, pour h tel que $h+k \leq n$. Nous appellerons une telle transformation "translation d'indice h".

PROPOSITION 10. Soit p un entier.

- si $p \equiv 0$ ou 1 [mod 4], alors pour $\sigma_p = \frac{3p(3p+1)}{4}$, $I(n,\sigma_p) \geq pn - \sigma_p = \frac{\sqrt{16\sigma_p+1} - 1}{6} n - \sigma_p$;

- si $p \equiv 2$ [mod 4], alors pour $\sigma_p = \frac{p(9p+4)}{4}$, $I(n,\sigma_p) \geq pn - \sigma_p = \frac{2\sqrt{9\sigma_p+1} - 2}{9} n - \sigma_p$;

- si $p \equiv 3$ [mod 4], alors pour $\sigma_p = \frac{9p^2+4p-1}{4}$, $I(n,\sigma_p) \geq pn - \sigma_p = \frac{\sqrt{36\sigma_p+13} - 2}{9} n - \sigma_p$.

Le tableau ci-dessous illustre la proposition 10 en donnant les valeurs obtenues à partir de ces relations, pour les premières valeurs de p, applicables pour n assez grand ($n \geq 6p$ suffit).

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
σ_p	3	11	23	39	60	87	117	150	189	235	283	333
$m(n,\sigma_p)$	n-3	2n-11	3n-23	4n-39	5n-60	6n-87	7n-117	8n-150	9n-189	10n-235	11n-283	12n-333

Preuve. Pour $p \equiv 0$ ou 1 [mod 4], d'après le lemme 9 ci-dessus, il existe une partition des entiers $\{1, 2, ..., 3p\}$ en p triplets $(a_i, b_i = a_i+i, i)$, pour $i = 1, \ldots, p$. Il suffit pour s'en convaincre de faire, comme dans le lemme 9, la partition en paires (α_i, β_i) des entiers $\{1,...,2p\}$, puis d'associer la paire $(a_i, b_i) = (\alpha_i+p, \beta_i+p)$ à l'entier i.

Au triplet $(a_i, b_i = a_i+i, i)$ on associe, en un premier temps, le circuit $(1, 1+b_i, 1+i)$, puis les $n - b_i$ circuits $(1+k, 1+b_i+k, 1+i+k)$ qui s'en déduisent dans la translation d'indice k, avec $k = 0,...,n-b_i-1$. On complète le tournoi en ajoutant, aux arcs des circuits ci-dessus définis, l'arc (j,i) entre deux sommets non adjacents i et j, avec $i<j$.

On peut alors calculer les scores des sommets de ce tournoi, et en déduire σ_p : si on suppose que n est au moins égal à deux fois le plus grand des b_i, on trouve $\sigma_p = \sum_{i=1}^{p} b_i$. En effet, pour i fixé, les circuits obtenus par translation d'indice k ($0 \leq k \leq n-b_i-1$) du circuit $(1, 1+b_i, 1+i)$ entraînent, par rapport aux scores du tournoi transitif, une augmentation d'une unité des scores des sommets 1 à b_i inclus et une diminution d'une unité des scores des sommets $n-b_i+1$ à n inclus (les scores des autres sommets ne changent pas ; ainsi le sommet $1+b_i$ par exemple voit son score diminuer de 1, par rapport à son score dans un tournoi transitif, lors de la construction du circuit $(1, 1+b_i, 1+i)$, mais cette diminution est compensé par la translation d'indice $k = b_i$ du même circuit). Par conséquent, toujours pour i fixé, l'ensemble des circuits obtenus par translation d'indice k ($0 \leq k \leq n-b_i-1$) du circuit ($1, 1+b_i, 1+i$) entraîne une augmentation de σ_p d'une quantité égale à b_i, d'où l'expression finale de σ_p.

D'autre part, le nombre de 3-circuits formés, deux à deux arc-disjoints (le contraire serait en contradiction avec les inégalités $1 \leq i \leq p$, $p+1 \leq b_i-i = a_i \leq 3p$, $p+1 \leq b_i \leq 3p$, et avec le fait que les triplets (i, a_i, b_i) forment une partition de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, p\}$), est clairement égal à

$$m(n,\sigma_p) = \sum_{i=1}^{p} (n-b_i) = pn - \sum_{i=1}^{p} b_i = pn - \sigma_p.$$

Par ailleurs, puisque $b_i = a_i + i$, on a

$$\sum_{i=1}^{p} (b_i-a_i) = \sum_{i=1}^{p} i = \frac{p(p+1)}{2}.$$

Comme les a_i et b_i forment une partition de $\{p+1, \ldots, 3p\}$ on a de plus :

$$\sum_{i=1}^{p} (b_i+a_i) = \sum_{i=p+1}^{3p} i = \frac{3p(3p+1)}{2} - \frac{p(p+1)}{2}.$$

On en déduit

$$\sigma_p = \sum_{i=1}^{p} b_i = \frac{3p(3p+1)}{4}.$$

On peut en tirer p : on trouve

$$p = \frac{\sqrt{1+16\sigma_p} - 1}{6}$$

d'où

$$m(n,\sigma_p) = \frac{\sqrt{1+16\sigma_p} - 1}{6} n - \sigma_p.$$

(On remarquera que pour p=1, la construction des 3-circuits est en fait celle détaillée dans la proposition 8.)

* Pour $p \equiv 2$ [mod 4], d'après le lemme ci-dessus, il existe une partition de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 3p+1\} - \{\frac{5p}{2} + 1\}$ en p triplets ($i, a_i, b_i = a_i+i$), pour $i = 1, \ldots, p$: la preuve est tout à fait analogue à celle du cas $p \equiv 0$ ou 1 [mod 4]. Poursuivant les calculs comme ci-dessus, on obtient successivement :

$$\sum_{i=1}^{p} (b_i-a_i) = \frac{p(p+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{p} (b_i+a_i) = \sum_{i=p+1}^{3p+1} i - (\frac{5p}{2} + 1)$$

d'où on déduit : $4 \sum_{i=1}^{p} b_i = p(9p+4) = 4\sigma_p$. On obtient l'expression de p en résolvant cette équation, dont seule la racine positive est évidemment intéressante :

$$p = \frac{-2+\sqrt{4+36\sigma_p}}{9}, \text{ d'où } m(n,\sigma_p) = 2\,\frac{\sqrt{1+9\sigma_p} - 1}{9}\, n - \sigma_p.$$

* Pour $p \equiv 3$ [mod 4], d'après le lemme ci-dessus, il existe une partition des entiers $\{1,2,...,3p+1\} - \{\frac{5}{2}(p+1) - 1\}$ en p triplets $(i, a_i, b_i = a_i+i)$, pour $i = 1, ..., p$. Poursuivant les calculs comme ci-dessus, on obtient successivement :

$$4\sigma_p = 4\sum_{i=1}^{p} b_i = 9p^2 + 4p - 1, \text{ d'où } p = \frac{-2+\sqrt{4+9(4\sigma_p+1)}}{9}$$

et finalement

$$m(n,\sigma_p) = \frac{-2+\sqrt{4+9(4\sigma_p+1)}}{9}\, n - \sigma_p. \qquad \blacklozenge$$

On notera que la fonction σ_p est croissante avec p. Si n est assez grand, on peut, pour les valeurs de σ telles que $\sigma_p < \sigma < \sigma_{p+1}$, minorer $I(n,\sigma)$ par $m(n,\sigma_p)$. On peut aussi reprendre les constructions de tournois données dans la preuve de la proposition 10 pour obtenir des minorants de $I(n,\sigma)$ un peu meilleurs. Pour les valeurs de σ plus proches de σ_p que de σ_{p+1}, la construction se fait à partir du tournoi de paramètre σ_p ayant $m(n,\sigma_p)$ 3-circuits ; on inverse certains arcs de façon à rajouter le plus grand nombre possible de 3-circuits disjoints entre eux et des précédents, avec la contrainte d'obtenir un tournoi de paramètre σ. Pour les valeurs de σ plus proches de σ_{p+1} que de σ_p, la construction s'obtient à partir du tournoi de paramètre σ_{p+1} ayant $m(n,\sigma_{p+1})$ 3-circuits ; on inverse certains arcs de façon à détruire une partie des 3-circuits que l'on avait constitués, détruisant le minimum de 3-circuits pour néanmoins abaisser la valeur σ_{p+1} à la valeur σ. Nous donnons ci-dessous deux exemples.

<u>$\sigma = 4$</u>

Si $n \geq 9$, on modifie la construction correspondant à $\sigma = 3$ en inversant les arcs (8p+1, 8p-7) pour p compris entre 1 et $\left\lfloor \frac{n-1}{8} \right\rfloor$; on obtient ainsi un tournoi vérifiant $\sigma = 4$ qui permet d'affirmer que $I(n,4) \geq n - 3 + \left\lfloor \frac{n-1}{8} \right\rfloor$.

<u>$\sigma = 36$</u>

On a $\sigma_4 = 39$ et $m(n,39) = 4n-39$. Rappelons que le tournoi permettant d'établir cette borne est obtenu à partir du tournoi transitif en effectuant les opérations suivantes :
- on inverse les arcs (i+6, i) pour $i \leq n-6$, passant ainsi de $\sigma = 0$ à $\sigma = 6$, et créant les n-6 circuits (i, i+6, i+1) ;
- on inverse les arcs (i+11, i) pour $1 \leq i \leq n-11$, passant ainsi de $\sigma = 6$ à $\sigma = 17$, et créant les n-11 circuits (i, i+11, i+2) ;
- on inverse les arcs (i+10, i) pour $1 \leq i \leq n-10$, passant ainsi de $\sigma = 17$ à $\sigma = 27$, et créant les n-10 circuits (i, i+10, i+3) ;
- on inverse les arcs (i+12, i) pour $1 \leq i \leq n-12$, passant ainsi de $\sigma = 27$ à $\sigma = 39$, et créant les n-12 circuits (i,i+12,i+4).

Si on désire avoir $\sigma = 36$, il suffit d'inverser de nouveau les arcs (12p, 12p+12) pour $1 \le p \le \left\lfloor \frac{n-12}{12} \right\rfloor$, les arcs (12p-1, 12p+11) pour $1 \le p \le \left\lfloor \frac{n-11}{12} \right\rfloor$ et les arcs (12p-2, 12p+10) pour $1 \le p \le \left\lfloor \frac{n-10}{12} \right\rfloor$. On obtient ainsi : $I(n,36) \ge 4n - 39 - \left\lfloor \frac{n-12}{12} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-11}{12} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-10}{12} \right\rfloor$.

Remarque. Pour σ assez grand, le minorant obtenu pour $I(n,\sigma)$ (proposition 10) est de l'ordre de $\frac{2}{3} n\sqrt{\sigma} - \sigma$.

Pour obtenir un majorant de $I(n,\sigma)$ pour tout σ, nous allons procéder, comme pour $\sigma \in \{1, 2, 3\}$, à un regroupement des sommets par paquets ayant environ le même nombre de sommets, le regroupement se faisant selon l'ordre croissant des scores.

Lemme 11. Soit $n \ge 4$. On a alors

$$I(n,\sigma) < \min_{p \in \{p^-, p^+\}} \left\{ \frac{n^2 - 2n}{4p} + (p-1).(\sigma - 1) - \frac{n}{4} \right\},$$

avec

$$p^- = \left\lfloor \sqrt{\frac{n^2 - 2n}{4\sigma + 1}} \right\rfloor \text{ et } p^+ = \left\lceil \sqrt{\frac{n^2 - 2n}{4\sigma + 1}} \right\rceil$$

(où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x par défaut, et $\lceil x \rceil$ sa partie entière par excès).

Preuve. Soit T un tournoi à n sommets tel que $\sigma(T)$ soit égal à σ ; numérotons ses sommets x_k par scores croissants : $i < j \Rightarrow s_i \le s_j$, où s_k désigne le score de x_k.

Pour tout p compris entre 1 et n, considérons la division euclidienne de n par p : $n = pq + r$, avec $0 \le r < p$. Constituons alors p paquets P_i ($1 \le i \le p$) de q sommets (pour les p-r premiers paquets) ou de q+1 sommets (pour les r derniers paquets) : le paquet P_i contient les sommets $x_{q(i-1)+1}$ à $x_{q.i}$ si $i \le p-r$, les sommets $x_{q(p-r)+(q+1)(i-p+r-1)+1}$ à $x_{q(p-r)+(q+1)(i-p+r)}$ sinon.

Posons $I(n) = \max \{i(T) \text{ pour } T \in \mathcal{T}_n\}$. K.B. Reid ([7]) a donné le majorant suivant : $I(n) \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor < \frac{n(n-3)}{4}$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

Pour rendre T transitif, il suffit de rendre transitif chacun des paquets P_i, et d'inverser les arcs allant d'un sommet de P_i vers un sommet de P_j avec $i < j$. Le lemme 5 a pour conséquence que, pour chaque paquet P_i ($1 \le i < p$), le nombre d'arcs sortant de P_i vers les paquets P_j ($i < j \le p$) est majoré par σ. De plus, rendre P_i transitif requiert au plus $\frac{1}{4} n_i(n_i-3)$ inversions, où n_i désigne le nombre de sommets de P_i. On a par conséquent :

$$i(T) < (p-1)\sigma + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{4} n_i(n_i-3) = (p-1)\sigma + (p-r)\frac{q^2}{4} + r\frac{(q+1)^2}{4} - \frac{3}{4}n$$

d'où

$$i(T) < (p-1)\sigma + p\frac{q^2}{4} + r\frac{2q+1}{4} - \frac{3}{4}n$$

or

$$r \le p-1 \text{ et } q \le \frac{n}{p}$$

donc

$$i(T) < (p-1)\sigma + \frac{n^2}{4p} + \frac{p-1}{4}\left(\frac{2n}{p}+1\right) - \frac{3}{4}n$$

et enfin

$$i(T) < \frac{n^2-2n}{4p} - \frac{n}{4} + (p-1).\left(\sigma+\frac{1}{4}\right)$$

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \frac{n^2-2n}{4x} - \frac{n}{4} + (x-1).\left(\sigma+\frac{1}{4}\right)$, pour n fixé. Ceci étant valable pour tout tournoi T à n sommets tel que $\sigma(T) = \sigma$ et pour tout entier p $(1 \le p \le n)$, on en déduit l'inégalité $I(n,\sigma) < \min_{p\in\{1,\ldots,n\}} \{g(p)\}$. L'étude de g sur $]0, +\infty[$ montre que g est décroissante sur $\left]0, \sqrt{\frac{n^2-2n}{4\sigma+1}}\right]$ et croissante sur $\left[\sqrt{\frac{n^2-2n}{4\sigma+1}}, +\infty\right[$ (pour $n \ge 4$). De plus, comme on a $\sigma < \frac{n^2}{8}$, on trouve $\sqrt{\frac{n^2-2n}{4\sigma+1}} \ge 1$ pour $n \ge 4$. Par conséquent g atteint son minimum sur $\{1, 2, \ldots, n\}$ en p^- ou en p^+, et $I(n,\sigma) < \min\{g(p^-), g(p^+)\}$. ♦

THÉORÈME 12. Pour $n \ge 4$ et $\sigma \ne 0$, $I(n,\sigma) < n\sqrt{\sigma}$.

Preuve . D'après le lemme 11 (dont on reprend les notations) et du fait du sens de variation de g, on a

$$I(n,\sigma) < g(p^+) < g\left(\sqrt{\frac{n^2-2n}{4\sigma+1}}+1\right) = \frac{n^2-2n}{4\sqrt{\frac{n^2-2n}{4\sigma+1}}+4} - \frac{n}{4} + \sqrt{\frac{n^2-2n}{4\sigma+1}}\left(\sigma+\frac{1}{4}\right).$$

D'où

$$I(n,\sigma) < \frac{n^2-2n}{4\sqrt{\frac{n^2-2n}{4\sigma+1}}} - \frac{n}{4} + \sqrt{\frac{n^2-2n}{4\sigma+1}}\left(\sigma+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{(n^2-2n)(4\sigma+1)} - \frac{n}{4} < \frac{n}{2}\sqrt{4\sigma+1} - \frac{n}{4}$$

Il est alors facile de montrer que ce dernier terme est inférieur à $n\sqrt{\sigma}$ pour $\sigma \ge 1$. ♦

On pourra comparer ce majorant au minorant obtenu à la proposition 10 (voir remarque précédant le lemme 11). Le facteur multiplicatif (égal à 2/3) existant entre l'ordre de grandeur du minorant et le majorant résulte sans doute du fait que, pour obtenir ce minorant, nous n'utilisons que des circuits disjoints. En effet il existe le même rapport entre le nombre maximum de circuits disjoints que peut posséder un tournoi (sans contrainte de σ) : $\left\lfloor \frac{n}{3} \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right\rfloor$ (voir [2], d'après un résultat de G. Chartrand, D. Geller et S. Hedetniemi [3]), et le nombre maximum de l'indice de Slater, de l'ordre de $\frac{n^2}{4}$. Il paraît donc difficile de faire beaucoup mieux en n'utilisant que des circuits disjoints pour encadrer $I(n,\sigma)$...

COROLLAIRE 13. Pour tout tournoi T non transitif d'ordre n, on a $\sigma(T) \le i(T) < n\sqrt{\sigma(T)}$ ♦

Pour finir, nous rapprochons la conjecture suivante (conjecture 1) d'une autre (conjecture 2) énoncée par J.-C. Bermond [2].

CONJECTURE 1. Pour n fixé, I(n,σ) croît (au sens large ?, au sens strict ?) avec σ (pour les valeurs de σ compatibles avec n).

CONJECTURE 2 (J.-C. Bermond).
1) Si n est impair, les tournois à n sommets maximisant l'indice de Slater sont des tournois réguliers.
2) Si n est pair, il existe un tournoi quasi-régulier à n sommets maximisant l'indice de Slater.
Du fait de la forme des vecteurs-score maximisant σ (voir théorème 3), une croissance large de I(n,σ) montrerait que pour n impair, certains tournois réguliers maximisent l'indice de Slater, sans pour cela qu'il soit exclu que d'autres tournois (non réguliers) en fassent autant, alors qu'une croissance stricte entraînerait la première partie de la conjecture 2. Pour n pair, la croissance (large ou stricte) de I(n,σ) n'entraînerait pas la seconde partie de la conjecture, mais la renforcerait en donnant des indications sur les tournois (ou certains d'entre eux) maximisant cet indice.

Nota bene **.** Les résultats qui viennent d'être exposés seront complétés, dans le numéro 119 de *Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines*, par un autre article consacré à l'utilisation de σ(T) dans des méthodes exactes déterminant i(T) et les ordres médians de T.

REMERCIEMENTS

Les auteurs souhaitent remercier Alain Guénoche (CNRS, Marseille) pour les discussions stimulantes (entre autres lors de TRAP 3 [4]) qui se trouvent à l'origine de cette étude, ainsi que le rapporteur anonyme dont les suggestions ont permis d'améliorer la lisibilité du présent texte.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARTHÉLEMY J.-P., MONJARDET B., "The median procedure in cluster analysis and social choice theory", *Mathematical Social Sciences* 1 (1981), 235-267.
[2] BERMOND J.-C., "Ordres à distance minimum d'un tournoi et graphes partiels sans circuits maximaux", *Mathématiques et Sciences Humaines* 37 (1972), 5-25.
[3] CHARTRAND G., GELLER D., HEDETNIEMI S., "Graphs with forbidden subgraphs", *Journal of Combinatorial Theory B*, vol. 10, n°1 (1971), 12-41.
[4] GUÉNOCHE A., "Order at minimum distance of a valued tournament", présenté à la Table Ronde *Modélisation, Analyse et Agrégation des Préférences et des Choix (TRAP 3)* (1988), Marseille-Luminy.
[5] LANDAU H.G. "On dominance relations and the structure of animal societies III. The condition for a score structure", *Bulletin of Mathematical Biophysics* 13 (1953), 1-19.
[6] MOON J.W., *Topics on tournaments*, Holt, New York, 1968.
[7] REID K.B., "On set of arcs containing no cycles in tournaments", *Canadian Mathematical Bulletin* 12 (1969), 261-264.
[8] SKOLEM Th., "On certain distributions of integers in pairs with given differences", *Math. Scand.* 5 (1957), 57-68.
[9] SLATER P. "Inconsistencies in a schedule of paired comparisons", *Biometrika* 53 (1961), 143-149.