MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

GRZEGORZ MALINOWSKI

# Sur les principes sémantiques de Frege et sur une définition non-fregéenne de la notion d'identité propositionnelle

*Mathématiques et sciences humaines*, tome 116 (1991), p. 57-62

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1991__116__57_0>

*Math. Inf. Sci. hum.* (29e année, n°116, 1991, p.57-62)

# SUR LES PRINCIPES SÉMANTIQUES DE FREGE ET SUR UNE DÉFINITION NON-FREGÉENNE DE LA NOTION D'IDENTITÉ PROPOSITIONNELLE

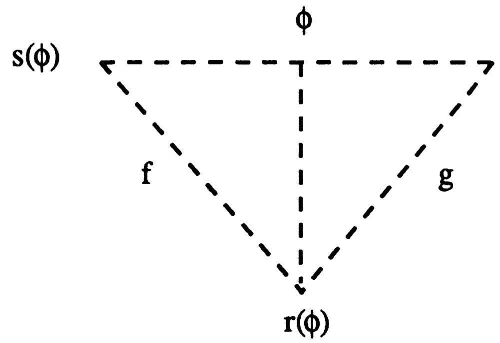
Grzegorz MALINOWSKI[1]

RÉSUMÉ — *Une réalisation non-fregéenne du programme sémantique de G. Frege donnée par R. Suszko [5] est une des plus intéressantes constructions logiques de ces dernières années. Notre article est une présentation des aspects formels et philosophiques de la construction du calcul propositionnel SCI qui forme la base de cette réalisation.*

SUMMARY — On semantic principles of Frege and non-fregean definition of the concept of propositional identity. *A non-fregean realization of the semantic programme of G. Frege elaborated by R. Suszko is one of the most interesting recent logical constructions. The aim of the paper is to present formal and philosophical aspects of the sentential calculus with identity, SCI, constituting the base of that realization.*

## 1. AXIOME DE FREGE

Le schéma sémantique de Frege [2] peut être décrit de la manière suivante :




t(φ) = 1 ou 0
si φ est une proposition

Dans le schéma : φ est un *nom* ou une *proposition*, r(φ) - son contenu sémantique (dénotation), s(φ) - son sens (signification), t(φ) - une valeur de vérité de φ (si φ est une proposition), enfin, 0 et 1 sont les symboles de *Faux* et de *Vrai*. Les applications r, s et t remplissent les conditions :

[1] Université de Łódź (Pologne).

(1) $s(\phi) \neq s(\psi)$ si $r(\phi) \neq r(\psi)$

et (pour les propositions)

(2) $r(\phi) \neq r(\psi)$ si $t(\phi) \neq t(\psi)$.

Tant que Frege a traité des propositions presque de la même manière que des noms - en les comprenant comme des noms ayant les deux dénotations possibles : 1 et 0 - il a aussi accepté

(FA) $r(\phi) = r(\psi)$ si $t(\phi) = t(\psi)$.

La dernière condition sera appelée l'*Axiome de Frege*. Remarquons que (FA) avec (2) donne

(FA') $r(\phi) = r(\psi)$ si et seulement si $t(\phi) = t(\psi)$.

Pourtant, l'acceptation de (FA) est équivalente à l'affirmation qu'il n'y a que deux contenus possibles des propositions : 1 et 0 (ou, plus précisément, deux contenus sémantiques qui correspondent à 1 et à 0).

## 2. LE CALCUL PROPOSITIONNEL

Lors de la construction du calcul propositionnel, on s'intéresse aux relations formelles entre propositions exprimées par l'emploi des connecteurs propositionnels. Il est pourtant commode d'admettre que le *langage propositionnel* est une algèbre

$$L = (\mathrm{FOR}, F_1, \dots, F_n)$$

où : FOR est un ensemble de formules et $F_1, \dots, F_n$ - une séquence de connecteurs propositionnels.

La représentation formelle des propositions atomiques est fournie par la distinction d'un sous-ensemble $\mathrm{Var}(L)$ de FOR comportant les *variables propositionnelles* : $\mathrm{Var}(L) = \{p_1, p_2, \dots, q_1, q_2, \dots\}$. D'un point de vue algébrique, $L$ est une algèbre libre et $\mathrm{Var}(L)$ l'ensemble de ses générateurs.

En vue d'obtenir un schéma général des modèles de $L$, nous allons accepter les deux autres conditions formulées par Frege [2] en les limitant au cas propositionnel :

(*) A chaque $\phi \in \mathrm{FOR}$ correspond un seul contenu sémantique $r(\phi)$.
(**) Pour chaque $\phi \in \mathrm{FOR}$ et $p \in \mathrm{Var}(L)$

$r(\phi[^{\alpha}/_{p}]) = r(\phi[^{\beta}/_{p}])$ si et seulement si $r(\alpha) = r(\beta)$, où $\phi[^{\alpha}/_{p}]$ et $\phi[^{\beta}/_{p}]$ représentent les formules résultant de $\phi$ après substitution de $\alpha$ ($\beta$) à p.

Il fait remarquer notamment que (**) est une version du *principe d'extensionnalité* de Leibniz.

PROPOSITION [6]
Lorsque A est l'ensemble de tous les contenus possibles des formules d'un langage $L = (\mathrm{FOR}, F_1, \dots, F_n)$, les formules :

$$\overline{F}_i\,(r(\alpha_1), \dots, r(\alpha_{k_i})) = r\,(\overline{F}_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{k_i})),$$

$i = 1, \dots, n$, définissent uniquement des fonctions $F_i$ sur A.

De cette PROPOSITION on peut conclure que chaque modèle de $L$ est une algèbre

$$\mathcal{A} = (A, \bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_n)$$

du même type que $L$. Par suite, les fonctions sémantiques r jouent le rôle des homomorphismes de $L$ dans $\mathcal{A}$.

## 3. FONCTIONS DE VÉRITÉ

Ayant accepté (FA) de (FA') et (**) on obtient

(V) $t(\phi[^{\alpha}/_{p}]) = t(\phi[^{\beta}/_{p}])$ pour chaque $\phi \in$ FOR et $p \in$ Var ($L$) si et seulement si $t(\alpha) = t(\beta)$.

La dernière propriété est un *principe d'extensionnalité par rapport à des valeurs de vérité.*

Si pour un langage propositionnel $L$ = (FOR, $F_1, \ldots, F_n$) on a (V), l'affirmation fregéenne sur la bivalence logique avec PROPOSITION implique que chaque modèle $\mathcal{A} = (A, \bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_n)$ est isomorphe à une structure $(\{0,1\}, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n)$ et que

$$t(F_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_i})) = \mathcal{F}_i(t(\alpha_1), \ldots, t(\alpha_{k_i})).$$

En conséquence, chaque *évaluation logique* t est un homomorphisme de $L$ dans $(\{0,1\}, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n)$ et tous les connecteurs $F_i$ seront des *fonctions de vérité.*

Parmi les connecteurs de la dernière sorte, les plus remarquables sont les *connecteurs classiques* : négation ($\neg$), implication ($\Rightarrow$), disjonction ($\vee$), conjonction ($\wedge$) et équivalence ($\Leftrightarrow$), définis par les conditions suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| $t(\neg\alpha) = 1$ | si et seulement si | $t(\alpha) = 0$ |
| $t(\alpha \Rightarrow \beta) = 0$ | si et seulement si | $t(\alpha) = 1$ et $t(\beta) = 0$ |
| $t(\alpha \vee \beta) = 0$ | si et seulement si | $t(\alpha) = t(\beta) = 0$ |
| $t(\alpha \wedge \beta) = 1$ | si et seulement si | $t(\alpha) = t(\beta) = 1$ |
| $t(\alpha \Leftrightarrow \beta) = 1$ | si et seulement si | $t(\alpha) = t(\beta)$. |

Si, en revanche, pour un langage propositionnel $L$ on n'a pas (V), cela signifie qu'au moins un de ses connecteurs n'est pas une fonction de vérité. Toutefois, même en ce cas on peut garantir la présence de tous les connecteurs classiques. A cette fin, il faut premièrement choisir un sous-ensemble non-vide Ver ($L$) $\subseteq$ FOR des propositions "vraies" et demander que

| | | |
|---|---|---|
| $\neg\alpha \in$ Ver ($L$) | si et seulement si | $\alpha \notin$ Ver ($L$) |
| $\alpha \Rightarrow \beta \notin$ Ver ($L$) | si et seulement si | $\alpha \in$ Ver ($L$) et $\beta \notin$ Ver ($L$) |
| $\alpha \vee \beta \notin$ Ver ($L$) | si et seulement si | $\alpha \notin$ Ver ($L$) et $\beta \notin$ Ver ($L$) |
| $\alpha \wedge \beta \in$ Ver ($L$) | si et seulement si | $\alpha \in$ Ver ($L$) et $\beta \in$ Ver ($L$) |
| $\alpha \Leftrightarrow \beta \in$ Ver ($L$) | si et seulement si | $\alpha, \beta \in$ Ver ($L$) soit $\alpha, \beta \notin$ Ver ($L$). |

Puis, grâce à (*), à côté du modèle quelconque $\mathcal{A}$, un sous-ensemble $\emptyset \neq D \subseteq A$ des *contenus distingués* correspond par r à Ver ($L$). Pourtant, chaque paire

$$U = (\mathcal{A}, D)$$

devient ce qu'on appelle une *matrice logique*. Il est bien évident que pour des langages n'ayant que des fonctions de vérité, on peut se limiter aux matrices U avec A = {0,1} et D = {1}.

# 4. IDENTITÉ PROPOSITIONNELLE

Pour introduire une notion d'identité propositionnelle, R. Suszko [5] a accepté toutes les affirmations fregéennes sauf (FA) - l'Axiome de Frege - en refusant d'attribuer l'identité des propositions à l'égalité de leurs contenus sémantiques. Pourtant, il a proposé un nouveau connecteurs binaire $\equiv$ pour le langage propositionnel en le définissant à partir du schéma de Frege de la manière suivante :
pour deux propositions $\phi$ et $\psi$ ($\phi$ , $\psi \in$ FOR)

$$t(\phi \equiv \psi) = 1 \quad \text{si et seulement si} \quad r(\phi) = r(\psi).$$

Au vu de sa définition, $\equiv$ est un connecteur *intensionnel* (il n'est pas une fonction de vérité) mais grâce à (**) on obtient immédiatement

(EXT) $t(\alpha \equiv \beta) = 1$ si et seulement si $t(\phi\,[^{\alpha}/_{p}] \equiv \phi\,[^{\beta}/_{p}]) = 1$ pour chaque $\phi \in$ FOR et $p \in \mathrm{Var}\,(L)$.
comme une sorte de *principe d'extensionnalité* exprimé en termes de valeurs logiques.

Cette dernière propriété permet de construire une logique de l'identité très voisine au niveau propositionnel de la logique classique. Le calcul propositionnel de base, SCI (Sentential Calculus with Identity) - voir [5], [7] - est un système pour $\neg, \Rightarrow, \vee, \wedge, \Leftrightarrow$ et $\equiv$. Son langage est une algèbre

$$L\equiv \; = \; (\mathrm{FOR}\equiv, \neg, \Rightarrow, \vee, \wedge, \Leftrightarrow, \equiv).$$

Son axiomatique est fournie en admettant une axiomatique quelconque pour $\square, \Rightarrow, \vee, \wedge, \Leftrightarrow$ avec la règle de détachement (*Modus Ponens*) et la règle de substitution complète du calcul classique, en ajoutant les axiomes.

($i_1$) $\alpha \equiv \alpha$

($i_2$) $\alpha \equiv \beta \Rightarrow \beta \equiv \alpha$

($i_3$) $\alpha \equiv \beta \Rightarrow \neg\,\alpha \equiv \neg\,\beta$

($i_4$) $(\alpha \equiv \beta) \wedge (\gamma \equiv \delta) \Rightarrow (\alpha * \gamma) \equiv (\beta * \delta)$ pour $* \in \{\equiv, \Rightarrow, \vee, \wedge, \Leftrightarrow\}$

Une caractérisation sémantique du SCI, voir [1], est garantie naturellement par la classe de toutes les matrices

$$U = (A\equiv, \; D)$$

où $A\equiv = (A\equiv, -, \dot{-}, \cup, \cap, \div, \circ)$ est une algèbre ($A\equiv \neq \emptyset$) du type (1, 2, 2, 2, 2, 2) telle que

| | | | |
|---|---|---|---|
| $-\,a \in D$ | si et seulement si | | $a \notin D$ |
| $a \dot{-} b \notin D$ | si et seulement si | | $a \in D$ et $b \notin D$ |
| $a \cup b \notin D$ | si et seulement si | | $a \notin D$ et $b \notin D$ |
| $a \cap b \in D$ | si et seulement si | | $a \in D$ et $b \in D$ |
| $a \div b \in D$ | si et seulement si | soit | $a, b \in D$ soit $a, b \notin D$ |
| $a \circ b \in D$ | si et seulement si | | $a = b$ |

Il est bien évident que la formule

$$(\alpha \equiv \beta) \Rightarrow (\alpha \Leftrightarrow \beta)$$

est une thèse du SCI tandis que sa converse

$$(i_0) \qquad (\alpha \Leftrightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \equiv \beta)$$

n'appartient pas à l'ensemble des thèses du SCI. A cet égard, il est clair que le renforcement du SCI obtenu par addition de $(i_0)$ a pour résultat d'obtenir le calcul propositionnel classique avec les deux connecteurs : $\Leftrightarrow$ et $\equiv$ jouant le même rôle - celui de l'équivalence.

## 5. IMPLICATIONS PHILOSOPHIQUES

Le SCI est une version très simplifiée de la *logique non-fregéenne* NFL construite à l'origine afin de formaliser une partie de l'ontologie du *Tractatus Logico-Philosophicus* de Wittgenstein, voir [10], [8]. A cet égard, R. Suszko [9] a distingué entre des noms et des propositions en affirmant que tandis que des objets correspondent aux noms, des situations (au sens de Wittgenstein) correspondent aux propositions. En conséquence, Suszko a identifié chaque contenu sémantique de la proposition avec une *situation.* De ce point de vue, la logique non-fregéenne procure une formalisation d'une certaine manière de comprendre la notion de situation.

La théorie des situations formée par le SCI est très générale. Cela se voit au mieux grâce à des modèles, qui forment certaines *algèbres de situations* possibles. Ces algèbres ne sont pas limitées, ni par rapport au nombre des éléments ni du côté de leurs structures (algébriques) intérieures. Notamment, ces deux sortes de limitation peuvent être toujours exprimées par l'emploi de l'identité qui dans les modèles se réduit à l'égalité algébrique.

Rappelons que l'Axiome de Frege (FA) n'était pas accepté en cours de construction du SCI. Cependant, l'acceptation de (FA) à titre de cas particulier est tout à fait possible. Cette acceptation est équivalente à un renforcement du système SCI par l'axiome

$$(FA^0) \qquad (\alpha \equiv \beta) \vee (\beta \equiv \gamma) \vee (\alpha \equiv \gamma)$$

et elle a pour résultat d'obtenir le calcul propositionnel classique - voir les derniers passages du § 1 et du § 4. Notamment, $(FA^0)$ implique que les modèles du SCI, si $(FA^0)$ est valide, n'auront que deux éléments. Dès lors, dans les termes introduits ci-dessus, la logique classique (*fregéenne !*) est une logique de deux situations : de la situation qui est le contenu commun de toutes les propositions vraies et de la situation qui correspond à toutes les propositions fausses.

Entre les deux extrémités, la théorie générale donnée par le SCI et la théorie fregéenne, il y a de nombreuses autres théories de situations. La plupart d'entre elles peuvent être obtenues de la même manière que la théorie classique, en ajoutant à l'axiomatique du SCI certains axiomes spéciaux. Or, la quantité des situations peut être limitée par des axiomes du type

$$(n) \qquad (\alpha_1 \equiv \alpha_2) \vee (\alpha_1 \equiv \alpha_3) \vee \ldots \vee (\alpha_1 \equiv \alpha_{n+1}) \vee (\alpha_2 \equiv \alpha_3) \vee$$
$$(\alpha_2 \equiv \alpha_4) \vee \ldots \vee (\alpha_2 \equiv \alpha_{n+1}) \vee \ldots \vee (\alpha_n \equiv \alpha_{n+1}).$$

Puis, pour imposer une structure algébrique à l'ensemble des situations, il faut réécrire une axiomatique algébrique particulière en langage du SCI et l'ajouter à l'axiomatique du SCI. Par exemple, on obtient la théorie booléenne à l'aide du système d'axiomes :

$$
\begin{array}{ll}
(b_1) & ((\alpha \wedge \beta) \vee \gamma) \equiv ((\beta \vee \gamma) \wedge (\alpha \vee \gamma)) \\
(b_2) & ((\alpha \vee \beta) \wedge \gamma) \equiv ((\beta \wedge \gamma) \vee (\alpha \wedge \gamma)) \\
(b_3) & (\alpha \vee (\beta \vee \neg \beta)) \equiv \alpha \\
(b_4) & (\alpha \wedge (\beta \vee \neg \beta)) \equiv \alpha \\
(b_5) & (\alpha \Rightarrow \beta) \equiv (\neg \alpha \vee \beta) \\
(b_6) & (\alpha \Leftrightarrow \beta) \equiv ((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)).
\end{array}
$$

On comprend que chaque renforcement axiomatique a pour résultat d'obtenir un système du calcul propositionnel. Il se produit que, entre les logiques de cette sorte, on peut trouver des logiques précédemment connues et bien motivées. Entre elles, il y a des systèmes de la logique modale comme S4 et S5 aussi bien que de certaines logiques plurivalentes - voir [3], [4], [7] et [9].

## BIBLIOGRAPHIE


[1] BLOOM Stephen L., A completeness theorem for "Theories of kind W", *Studia Logica*, XXVII (1971), pp. 43-55.

[2] FREGE G., *Über sinn und Bedeutung, Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 1982, pp. 25-50.

[3] LUKASIEWICZ J., O logice trójwartościowej, *Ruch filozoficzny*, V (1920), pp. 170-171.

[4] MALINOWSKI G., Classical characterization of n-valued Łukasiewicz calculi, *Reports on Mathematical Logic*, 9 (1977), pp. 41-45.

[5] SUSZKO R., Abolition of the Fregean Axiom, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 453, pp. 169-239.

[6] SUSZKO R., Formalna teoria wartości logicznych, *Studia Logica*, VI (1957), pp. 145-230.

[7] SUSZKO R., Identity connective and modality, *Studia Logica*, XXVII (1971), pp. 7-39.

[8] SUSZKO R., Ontology in the *Tractatus* of L. Wittgenstein, *Notre-Dame Journal of Formal Logic*, 9 (1968), pp. 7-33.

[9] SUSZKO R., Remarks on Łukasiewicz's three-valued logic, *Bulletin of the Section of Logic*, Vol. 4 (1975), pp. 87-90.

[10] WITTGENSTEIN L., Tractatus Logico-Philosophicus, *Annalen der Naturphilosophie*, 1922.