Mathématiques et sciences humaines

Dominique Guin

La notion d'opérateur dans une modélisation cognitive de la compréhension des problèmes additifs

Mathématiques et sciences humaines, tome 113 (1991), p. 5-33

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1991__113__5_0>

Math. Inf. Sci. hum., (29e année, n°113, *1991*, p.5-33).

LA NOTION D'OPÉRATEUR DANS UNE MODÉLISATION COGNITIVE DE LA COMPRÉHENSION DES PROBLÈMES ADDITIFS

Dominique GUIN[1]

RÉSUMÉ - *Nous distinguons deux étapes dans l'activité de compréhension d'un problème additif : la compréhension de l'énoncé et la réduction à un problème prototypique. Après avoir mis en évidence, à partir de résultats de recherches cognitives et didactiques, certains processus cognitifs élémentaires dans l'activité de compréhension d'énoncés additifs, nous proposons une modélisation cognitive de la compréhension des problèmes additifs basée sur la notion d'opérateur qui permet de prendre en compte et d'articuler les deux étapes précédentes. A partir d'une structure mathématique, nous présenterons les différents types de problèmes intervenant dans cette modélisation, et les problèmes prototypiques correspondants. Nous pourrons alors simuler le processus de compréhension par une compilation de représentations cognitives explicitée à l'aide d'opérateurs.*

SUMMARY - The operator notion in a cognitive modeling of the understanding process of additive word problems.
We distinguish two steps in the understanding process of an additive word problem : understanding the terms of the problem and reducing it to a prototypical problem. After having pointed out some cognitive elementary processes in the understanding activity of additive word problems, from results in cognitive and didactical research domains, we suggest a cognitive modeling of the understanding process of additive word problems based on the operator notion which enables us to take into account and to articulate these two previous steps. From a mathematical structure, we present different types of problems coming up in this modeling and their corresponding prototypical problems. Then we are able to simulate the understanding process by a compilation of cognitive representations explicited with operators.

1. INTRODUCTION

Notre but est de modéliser la démarche de compréhension d'un énoncé de problème additif, comme par exemple :

" Pierre a joué deux parties de billes. A la première partie il a gagné 16 billes, à la seconde partie il en a gagné 9. Que s'est-il passé en tout ? "[2]

Plus précisément, nous voulons modéliser le comportement humain de l'élève expert[3] au cours de la lecture d'un tel énoncé, afin de pouvoir réaliser ensuite une simulation sur ordinateur du traitement effectué. C'est donc dans une perspective non seulement cognitive, mais aussi didactique qu'il nous faudra expliciter le processus dynamique d'élaboration par l'élève de sa

---

[1] Institut de Recherche Mathématique Avancée (Strasbourg) et Centre d'Analyse et de Mathématiques Sociales (Paris).

[2] Les énoncés français présentés dans cet article sont extraits de (G. Vergnaud, 1981).

[3] Au sens de J.R. Anderson : expliciter comment l'élève " idéal " devrait se comporter dans cette situation.

représentation du problème. A plus long terme, notre but est de modéliser l'activité de résolution d'un problème additif en vue de la réalisation d'un tutoriel intelligent. Mais la modélisation de la démarche de compréhension nous paraît être un préalable indispensable à ce travail. En effet, l'activité de résolution d'un problème est le développement d'une interaction entre deux fonctions essentielles : la compréhension du problème et l'élaboration d'une solution. C'est l'idée qui est à l'origine du concept de *"système de représentation et de traitement"* (Hoc, 1987) qui permet de réintégrer explicitement la compréhension dans l'activité de résolution de problème et d'exprimer la connexité des connaissances associées au domaine spécifique au problème, désignée dans le domaine de la Didactique des mathématiques par la notion de *champ conceptuel* introduite par G. Vergnaud.

Pour réaliser une simulation sur ordinateur de l'activité de compréhension, il est indispensable de faire une analyse cognitive approfondie dans le domaine spécifique choisi. Il faut reconnaître qu'en général, dans l'élaboration de tutoriels intelligents, la démarche est loin d'être celle-ci : le système informatique choisi détermine un fonctionnement bien précis, et la modélisation de l'activité cognitive se fait *a posteriori* en fonction des possibilités de ce système informatique (Guin, 1989). Dans ce contexte, on ne peut espérer que la réalisation informatique soit véritablement une aide à l'apprentissage ; un tutoriel intelligent ne peut jouer un rôle efficace que si tous les *processus cognitifs* qui peuvent poser des difficultés pour un élève y sont explicités : c'est seulement dans cette hypothèse qu'il pourra aider l'élève à progresser par des commentaires et des justifications de sa démarche.

2. UNE APPROCHE OPÉRATOIRE DE LA MODÉLISATION COGNITIVE

L'idée de reformuler à l'aide d'opérateurs certains processus intellectuels a déjà été exploitée au sein de l'Ecole de Genève (Frey, 1967). Dans cette étude, L. Frey formalise, à l'aide de la *Logique Combinatoire* (Ginisti, 1988), les opérateurs qui sous-tendent les transformations logiques étudiées par J. Piaget. Ce dernier, dans la discussion qui suit l'exposé, déclare son intérêt pour une méthode qui permet de "*retrouver des opérations simples dans l'esprit du sujet*".

La nécessité d'une analyse cognitive poussée a déterminé notre choix d'étudier les problèmes additifs. En effet, ce domaine a fait l'objet de nombreuses recherches cognitives, linguistiques et didactiques (Carpenter et Moser, 1983 ; De Corte et Verschaffel, 1987 ; Dellarosa et alii, 1988 ; Escarabajal et alii, 1984 ; Esfahani, 1989 ; Glendon et alii, 1990 ; Marthe, 1982 ; Riley et alii, 1983 ; Vergnaud, 1981, etc...). Une approche plus opératoire des modélisations cognitives ouvre la possibilité d'exploiter l'idée d'*invariant opératoire,* introduite par J. Piaget et développée dans le domaine additif par G. Vergnaud, dans le but de *conceptualiser* le réel pour agir efficacement en faisant intervenir explicitement les contenus de connaissance.

En privilégiant la notion d'opérateur, nous souhaitons mettre l'accent sur le *fonctionnement opératoire* mis en jeu par le processus de transformation d'un objet en un autre, qui semble plus proche de l'intuition opératoire des élèves. Il nous apparaît que la distinction formelle *opérateur / opération*, que nous rappelerons ultérieurement, n'a pas été assez prise en compte dans les modélisations cognitives, peut-être sous l'influence de l'Intelligence Artificielle. Or, certaines recherches didactiques menées montreraient que les enfants ne manipulent pas des *opérations*, au sens mathématique du terme, mais plutôt des *opérateurs* directement associés à des expressions linguistiques.

Pour un adulte contemporain, les problèmes additifs sont devenus des problèmes "triviaux", qui se ramènent à une équation dans le groupe des entiers relatifs $\mathbb{Z} = \langle Z,+\rangle$. Un certain nombre de travaux, notamment en intelligence Artificielle, font implicitement (ou explicitement) l'hypothèse que les systèmes de représentation et de traitement que manipulent les enfants seraient des systèmes "*incomplets* " du système de l'expert : l'approche "*overlay*" identifie le modèle de l'apprenant à un sous-modèle du modèle de l'expert (Carr et Goldstein, 1977). Pourtant dans l'acquisition d'une compétence opératoire du champ additif, un enfant de dix ans ne peut avoir intégré la structure de groupe additif sur Z, puisqu'il n'a même pas à sa disposition les entiers négatifs. En outre, de nombreuses recherches ont mis en évidence l'importance de l'*encodage linguistique* dans le choix des procédures de résolution.

L'enfant confronté à un problème additif part de l'*énoncé linguistique* du problème et doit, à partir de cet énoncé, construire une représentation abstraite et définir une stratégie de résolution. L'observation du comportement des enfants révèle une interaction profonde entre les expressions verbalisées (notamment les verbes) et les procédures de résolution qu'ils utilisent. Les verbes tels que *gagne, a de moins que* etc...orientent l'enfant vers une construction et une manipulation d'*opérateurs* et non d'opérations binaires comme le confirment les procédures mises en évidence telles que : *Separating From, Adding on, Take out,* etc ...(Carpenter et alii, 1983 ; Riley et alii, 1983).

Il nous paraît donc inadéquat de considérer que les représentations opératoires manipulées par l'enfant, même "*expert* ", sont des "*morceaux* " d'une structure de groupe fondée sur l'opération d'addition. Il semble, au contraire, que la mise en place d'un système de représentation et de traitement (SRT) additif correspondant à la structure de groupe de Z nécessite, même après l'introduction des entiers relatifs des *réorganisations successives* des systèmes précédents. Comment décrire ces différents systèmes de représentations et leurs transformations sans les ramener à des sous-systèmes de représentation qui seraient "*incomplets*" par rapport aux systèmes de représentations basés sur la structure de groupe de Z ?

Est-il possible, à partir des résultats des recherches cognitives et didactiques menées sur la base d'observations du comportement des enfants dans l'activité de résolution des problèmes additifs :

(i) de *modéliser* les *processus* de résolution,

(ii) de préciser les *représentations cognitives* mises en jeu par ces processus de résolution,

(iii) de mettre en évidence les *concepts additifs* effectivement manipulés par l'enfant dans ses représentations (ii) et mis en acte dans ses procédures de résolution (i),

(iv) de donner une forme *mathématique* aux concepts additifs de (iii),

(v) d'insérer ces concepts formalisés (iv) dans une *structure mathématique*,

(vi) finalement de construire un modèle cognitif de résolution *fondé* sur ces concepts et la structure de (v) explicitant le caractère opératoire des *théorèmes en acte*[4] de G. Vergnaud.

Dans cet article, nous souhaitons montrer que la notion d'*opérateur*, telle qu'elle peut être thématisée dans l'*algèbre universelle* et les *langages applicatifs (λ-calcul et logique combinatoire)*, peut contribuer de façon positive à la modélisation cognitive visée en (vi) qui serait plus conforme aux résultats des recherches en psychologie cognitive et didactique. De plus, elle permettrait d'envisager un modèle *explicatif* (et non pas purement descriptif destiné à une simple simulation) indispensable à l'élaboration d'un module *pédagogique,* au sens de (Nicaud et Vivet, 1988), d'un système d'apprentissage informatisé.

[4] Ce terme sera précisé en 3.2.4.

La modélisation de l'activité de compréhension des problèmes additifs, que nous proposons dans cet article, intègre une modélisation de la compréhension linguistique et prend en compte la mise en évidence de *processus cognitifs* élémentaires. Après avoir rappelé succinctement les modélisations déjà réalisées (3.1), nous présenterons ces processus élémentaires (3.2). Nous expliciterons le concept d'*opérateur* et la distinction *opérateur / opération* en (4.1), ce qui nous permettra d'articuler les opérateurs *additifs* que nous voulons cerner avec les opérateurs *linguistiques* tels qu'ils sont appréhendés dans l'analyse des *Grammaires catégorielles* et la *Grammaire Applicative Universelle* (Desclés, 1990). Nous ne développerons pas, dans cet article, le formalisme mathématique qui s'attache à ces modèles, il fera l'objet d'un second article (Guin, à paraître). Par contre, nous montrerons comment ces opérateurs permettent de traduire les processus élémentaires cognitifs mis en évidence en (3.2), d'une part dans le processus de *compréhension linguistique*, et d'autre part dans celui de *réduction à un problème prototypique* qui sera précisé en (4.2). Nous présenterons la structure mathématique annoncée en (v) : les types de problèmes intervenant dans une modélisation basée sur les opérateurs définis à partir d'une loi de groupe quelconque (5.1). Puis nous en déduirons les opérateurs additifs qui donnent la forme mathématique annoncée en (iv) des concepts additifs (5.2), les types de problèmes additifs et les problèmes prototypiques correspondants (5.3). Nous présenterons simultanément des exemples prototypiques de problèmes en langue naturelle. Nous pourrons alors décrire le processus de compréhension d'un problème additif par un processus *opératoire* où tous les changements entre représentations intermédiaires seront explicités par des manipulations sur les opérateurs définis précédemment (6). Nous discuterons enfin de la validité de cette modélisation (7).

3. ANALYSE COGNITIVE

On ne peut raisonnablement étudier la formation des concepts additifs sans considérer le *champ conceptuel* (Vergnaud, 1988) qui leur est associé, c'est-à-dire :

- l'ensemble des situations de référence qui donnent du sens aux concepts,

- l'ensemble des propriétés et des relations invariantes que le sujet doit extraire et utiliser pour traiter ces situations,

- l'ensemble des signifiants langagiers et symboliques susceptibles de représenter les concepts et leurs propriétés, et, par voie de conséquence, les situations de référence et les procédures de résolution nécessaires pour les traiter.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, ce champ conceptuel est assez bien défriché : notre travail ici sera donc d'en extraire les informations utiles pour réaliser une modélisation cognitive du processus de compréhension s'appuyant sur le concept d'opérateur qui nous paraît pertinent.

3.1 Les modélisations cognitives actuelles

Nous présenterons succinctement ces modèles, en reprenant la terminologie des auteurs : il peut donc exister des ambiguïtés de la présentation d'un modèle à la présentation d'un autre dues à la diversité des domaines de recherche (Psychologie cognitive, Didactique des mathématiques etc ...). Une présentation de ces modèles peut être également consultée dans (Escarabajal, 1988). Les modèles réalisés sont des modèles de résolution de problème qui englobent un modèle de compréhension.

3.1.1. Le modèle proposé par (Riley et alii, 1983) est basé sur la classification due à (Heller et Greeno, 1978) des problèmes additifs en trois catégories générales qualifiées par les auteurs de *"sémantiques"* : Combine, Change, Compare. Cette classification a été établie à la suite d'expérimentations mettant en évidence des différences de réussite à des problèmes correspondant à la même "équation", mais portant sur des situations différentes. Si nous considérons uniquement des problèmes additifs dont la question porte sur le résultat final, ceux liés à la catégorie *Change* sont ceux qui posent le moins de difficulté (87% de réussite). Les problèmes de la seconde catégorie *Combine* sont parfois plus difficiles (80%). Les résultats pour la troisième catégorie *Compare* sont nettement inférieurs (60%). Le deuxième paramètre important de cette classification est la "place de l'inconnue". Dans la deuxième catégorie par exemple, si la question porte sur "l'ensemble réunion", les résultats sont nettement supérieurs (80%) à ceux pour lesquels la question porte sur un sous-ensemble (46%).

La catégorie Combine porte sur les *relations statiques* entre ensembles :

Exemple : *Joe has 3 marbles. Tom has 5 marbles. How many marbles do they have together ?*[5]

La catégorie Change décrit une *modification* orientée d'un état initial vers un état final :

Exemple : *Joe had 3 marbles. Then Tom gave him 5 more marbles. How many marbles does Joe have now ?*

La catégorie Compare porte sur des *comparaisons* concernant essentiellement, pour les auteurs, des ensembles :

Exemple : *Joe has 3 marbles. Tom has 5 more marbles than Joe. How many marbles does Tom have ?*

Ces catégories sont divisées en sous-catégories tenant compte du type de question et de la "*place de l'inconnue* " (i.e., qu'il conviendrait à attribuer à l'inconnue). Pour ces auteurs, ce sont certaines compétences mathématiques des élèves (éléments relatifs aux ensembles : cardinaux et relations entre ces derniers) qui interviennent essentiellement dans le processus de compréhension des énoncés arithmétiques.

3.1.2. Le modèle proposé par (Escarabajal et alii, 1984) distingue deux étapes dans l'activité de compréhension :

- construction des éléments de base qui sont les propositions,

- mise en relation de ces éléments par intégration dans un *schéma* relationnel qui décrit les connaissances pertinentes pour la résolution.

"Pour résoudre un problème, il faut sélectionner un des schémas disponibles, puis il faut le particulariser (évaluer ses variables avec les éléments tirés de l'énoncé). La notion de schéma permet, dans cette perspective, non seulement de représenter les connaissances, mais encore de définir le processus de compréhension en termes de *particularisation d'un schéma* connu. Elle permet aussi d'intégrer les procédures de résolution : par exemple, le schéma changement d'état englobe les procédures enlever, ajouter, de...pour aller à ...".

---

[5] Nous choisissons de ne pas traduire les exemples en anglais, afin de ne pas introduire de nouvelles incidences linguistiques.

Toutefois, après une expérimentation menée pour valider ce modèle (Escarabajal, 1988), l'auteur conclut que " la description des connaissances en termes de schémas ne vaut pas pour tous les enfants... il faudrait envisager une description plus *dynamique* d'un processus qui ressemble plutôt à une construction de la signification de la situation, qu'à une reconnaissance... Ce point de vue permettrait de souligner et peut-être de clarifier le rôle du langage dans la résolution des problèmes additifs ". C'est pourquoi N. Darcel (Darcel et Escarabajal, 1987) a modifié cette représentation des connaissances, dans son modèle informatique développé avec le langage orienté objet Mering II, afin qu'elle soit moins statique. Elle utilise des situations prototypes appelées *entités situations* qui sont hiérarchisées et choisies à la rencontre d'un verbe d'action ou de possession, d'une marque temporelle, d'un objet associé à un contexte additif, ou d'une information numérique. La reconnaissance d'une telle entité situation suffit pour que le processus conduise à une résolution.

3.2. Mise en évidence de processus cognitifs élémentaires

3.2.1 Classification de G. Vergnaud :

G. Vergnaud propose une approche beaucoup plus ambitieuse : c'est une approche opératoire qui se distingue par sa prise en compte du contenu des connaissances, du signifié. Son objectif est la description d'un *schème* (Vergnaud, 1985), c'est-à-dire "une totalité dynamique organisée que l'on peut définir comme une application qui prend ses entrées (informations) et ses sorties (actions) dans des espaces multidimensionnels". G. Vergnaud a étendu l'analyse présentée en (3.1.1). Il a défini dans son étude des problèmes additifs six grandes catégories (Vergnaud, 1981). Les trois premières catégories coïncident avec les catégories Change, Combine et Compare. Les trois suivantes correspondent à des *" compositions "* de celles-ci :

4ème catégorie : deux transformations se composent pour donner une transformation.

Exemple : *Paul a joué 2 parties de billes. A la première partie il a gagné 16 billes, à la seconde partie, il en a gagné 9. Que s'est-il passé en tout ?*

5ème catégorie : une transformation opère sur un " état relatif ".

Exemple : *Paul devait 6 billes à Henri, il lui en a rendu 4. Combien lui en doit-il maintenant ?*

6ème catégorie : deux états relatifs se composent pour donner un état relatif.

Exemple : *Paul doit 6 billes à Henri et 4 billes à Pierre. Combien de billes Paul doit-il en tout ?*

Dans le cadre de la description du schème des problèmes additifs, G. Vergnaud met en évidence les différents *statuts* des notions mises en oeuvre dans les problèmes additifs (par exemple, pour la soustraction, tantôt transformation inverse de l'augmentation, tantôt différence entre états successifs, tantôt relation de comparaison, tantôt différence entre transformations). Pour chacune des six catégories, les paramètres importants de la classification proposée, compte tenu des résultats expérimentaux, sont la place de l'inconnue et les valeurs relatives des entiers. Cette classification est confirmée par les différences de réussite aux problèmes proposés dans les expérimentations (Marthe, 1982; Vergnaud et Durand, 1976 ; De Corte et Verschaffel, 1987).

Une fois cette classification bien établie, la recherche didactique sur les problèmes additifs est loin d'être épuisée : pour espérer apporter une aide efficace aux élèves, il faut maintenant, essayer de déceler et d'expliquer les causes des difficultés observées. Pour celà, il est nécessaire d'affiner l'analyse cognitive précédente de manière à décomposer l'activité de compréhension en processus opératoires élémentaires. Les analyses de protocoles en Psychologie cognitive et les analyses des productions des élèves en Didactique des mathématiques nous permettent de mettre en évidence des processus cognitifs élémentaires nécessaires à la démarche de compréhension de l'énoncé verbal.

3.2.2. Interprétation du langage naturel

Les recherches actuelles sur la compréhension de textes mathématiques abordent la question de la *prise d'information* et de l'incidence des caractéristiques *linguistiques* dans cette activité. Pour la compréhension linguistique d'un énoncé verbal, une activité d'interprétation est sollicitée de la part des élèves : la difficulté est de *dégager* ou de *paraphraser* ce qui est signifié dans l'énoncé. Il s'agit pour l'élève de comprendre la signification de formes verbales telles que *"gagner", "recevoir", "devoir", " rendre", "rester"*, etc... dans le contexte particulier des énoncés additifs. Les résultats de certaines recherches mettent en évidence que la compréhension de texte est un facteur important dans les difficultés posées par les problèmes additifs : les textes de problème qui comportent certaines formes linguistiques telles que *"quelques", "combien en plus de X que de Y?"* et certaines utilisations de la locution *"ensemble"* sont plus difficiles à résoudre pour les élèves.

De récentes recherches montrent des modifications importantes des performances des élèves si l'on modifie l'*encodage linguistique* tout en conservant la structure *"sémantique"* du problème. Elles mettent en évidence des difficultés de résolution dues à l'emploi de formes linguistiques qui ne correspondent pas aux structures conceptuelles disponibles chez l'enfant : un élève peut comprendre les relations partie-tout et être indécis sur la manière d'interpréter les formes verbales correspondantes. Comme certains auteurs le soulignent (Dellarosa et alii, 1988), les difficultés proviennent alors de la connaissance sémantique et non de la connaissance dite "logico-mathématique".

Exemple : *There are 5 birds and 3 worms. How many more birds are there than worms ?*

Le point de vue "logico-mathématique" explique la difficulté d'un tel problème par la complexité des relations du "schéma partie-tout". Cependant les résultats sont bien meilleurs, si l'on remplace la question par *"How many birds won't get a worm ?"*. D'autre part, dans le cas de difficulté d'interprétation linguistique, les élèves traitent l'énoncé en interprétant la forme verbale comme une simple possession : ils remplacent *"a plus que"* par *"a"*, et de manière analogue la locution *"ensemble"* par *" chaque"*, etc...

(Glendon et alii, 1990), à partir de recherches psycholinguistiques, confirment l'importance de l'interprétation linguistique par les résultats obtenus aux questions directes de comparaisons (hors du contexte des problèmes additifs) comme, par exemple : *"Which number is two more than three?"*. Un encodage linguistique peut donc rendre la structure sémantique du problème plus ou moins apparente. Pourtant, (Carpenter et Moser, 1983) remarquent que, dans les modélisations actuelles, les procédés utilisés pour extraire la *signification* des énoncés verbaux des problèmes restent une boîte noire.

Une autre difficulté importante pour les élèves est celle de l'interprétation des marques temporelles telles que *"avant", "maintenant"* etc... : ils confondent l'ordre *chronologique* des propositions avec leur ordre de présentation dans l'énoncé. Si l'ordre dans lequel les évènements sont décrits correspond à l'ordre de déroulement de ces évènements, les résultats sont meilleurs.

3.2.3. La paraphrase

La compréhension est une activité dirigée par des règles de transformation ou de reformulation. L'activité de compréhension nécessite une recherche des combinaisons de règles de transformation pour intégrer une nouvelle phrase aux connaissances préalables. Le problème du langage dans l'enseignement des Mathématiques est surtout lié à l'appréhension des correspondances et des non-correspondances entre plusieurs registres de présentation d'une même idée (Duval, 1988). Pour la compréhension d'un énoncé, la difficulté est de dégager ou de *paraphraser* ce qui est signifié dans l'énoncé, de reformuler autrement ou plus brièvement ce qui vient d'être lu. Nous avons déjà souligné que différentes recherches ont révélé des difficultés liées à des formulations de l'énoncé rendant la compréhension plus difficile (plus de travail pour relier un nouvel élément à ce qui existe déjà). Certaines formes verbales permettent un accès plus aisé que d'autres à la représentation du problème.

La possibilité cognitive de passage entre deux expressions référentiellement équivalentes est un problème fondamental. Cette activité de paraphrase constitue souvent pour les individus en situation d'apprentissage un saut difficilement franchissable. Or, substituer une formulation à une autre qui lui est référentiellement équivalente est un processus essentiel pour la compréhension. Un simple changement d'écriture permet d'exhiber des propriétés du même objet, tout en conservant la référence. Cependant deux expressions peuvent être référentiellement équivalentes et ne pas être ***sémantiquement congruentes*** (Duval, 1988) : dans ce cas, il y a un coût cognitif important pour la compréhension. La diversité des signifiants pose le problème de la congruence sémantique : " tous les signifiants ne se valent pas, certains reflètent mieux que d'autres les propriétés du signifié " (Vergnaud, 1988).

Exemple : *Hier, Paul et Pierre ont joué deux parties de billes. A la première partie, Paul a gagné 5 billes. A la seconde partie Paul a gagné 4 billes. Que s'est-il passé en tout ?*

Hier, Paul et Pierre ont joué deux parties de billes. A la première partie, Paul a gagné 5 billes. A la seconde partie, Pierre a perdu 4 billes. Que s'est-il passé en tout ?

Dans la seconde phrase, il faut transformer "Pierre a perdu 4 billes" en "Paul a gagné 4 billes" pour pouvoir résoudre le problème : il s'agit de manipulations *paraphrastiques* de la langue naturelle qui permettent de recoder les informations pertinentes dans ce contexte. Il nous faut donc prendre en compte les variations de congruence entre différentes présentations sémantiques d'une même information et les manipulations paraphrastiques de la langue naturelle dans l'activité de compréhension.

3.2.4. Reconnaissance d'invariants opératoires

Dans le schème des problèmes additifs, G. Vergnaud décrit certains *invariants opératoires*, c'est-à-dire, "les objets, propriétés relations et processus que la pensée découpe dans le réel pour organiser l'action". Un des résultats essentiels de cette recherche concerne le concept de *théorème-en-acte* (Vergnaud, 1988) : sans être capables de les formuler, les enfants utilisent des "théorèmes". La reconnaissance d'un théorème-en-acte détermine le choix de la procédure de résolution : "le but essentiel d'une analyse cognitive est d'identifier ces théorèmes en acte" ; voici quelques exemples du domaine additif :

$$m+n = ((((m+1)+1)...)+1) \quad \text{(on ajoute n fois 1 à partir de m)}$$

$$\mathrm{Card}\,(X \cup Y) = \mathrm{Card}\,(X) + \mathrm{Card}\,(Y) \text{ si } X \cap Y = \varnothing$$

$$A \subset B \Rightarrow \mathrm{Card}\,A \leq \mathrm{Card}\,B$$

Dans le cas d'une question portant sur l'état initial INIT d'une transformation additive T connaissant l'état final FIN, il existe également un théorème-en-acte :

$$FIN = T\,(INIT) \Rightarrow INIT = T^{-1}\,(FIN)$$

qui exprime la nécessité d'inverser la transformation T pour obtenir l'état initial à partir de l'état final.

Dans le cas où l'inconnue porte sur l'état initial, (Kintsch et Greeno, 1985) justifient la plus grande difficulté de ce type de problème par l'absence de procédure de résolution et la nécessité de transformer le problème : le dernier théorème-en-acte ci-dessus explicite cette transformation et permet de mettre en évidence une procédure de résolution. Ces problèmes qui posent de grosses difficultés jusqu'en fin de la 3ème (20% de réussite en cours moyen) ont été étudiés plus particulièrement par (P. Marthe, 1982 ; E. Esfahani, 1989).

Exemple : Bruno joue 2 parties de billes, à la première partie il gagne 9 billes. Après ces 2 parties il a perdu en tout 6 billes. Que s'est-il passé à la seconde partie ?

Dans ce cas, le choix d'une procédure de résolution nécessite une analyse *sémantique* portant sur la relation entre les deux transformations indiquées. Les erreurs des élèves sont dues à l'économie d'une interprétation de l'association de deux propositions correspondant à la *composition* des deux opérateurs relatifs à *"gagner"* et *"perdre"*. La transformation cherchée est alors la composée de la transformation composée et de l'inverse de l'autre transformation élémentaire. P. Marthe note que peu d'élèves déterminent la transformation réciproque.

4. UNE MODÉLISATION PRENANT EN COMPTE CES PROCESSUS COGNITIFS GRÂCE A LA NOTION D'OPÉRATEUR

Nous allons maintenant présenter les grandes lignes de notre modélisation qui nous permettra de traduire les processus cognitifs mis en évidence en (3.2).

4.1.Mise en évidence de la notion d'opérateur

Rappelons qu'il nous paraît pertinent de lier les deux champs de recherche compréhension du texte et résolution de problèmes : l'objectif est d'une part de lier les processus d'entrée et de traitement de l'information, et d'autre part les processus de mise en oeuvre des procédures de résolution. L'activité de résolution de problème est alors conçue comme le développement d'une interaction entre deux fonctions essentielles : la compréhension du problème et l'élaboration d'une solution. D'où le concept de *"système de représentation et de traitement (ou SRT)"* pour exprimer la liaison indissociable entre les représentations et les traitements (J.-M. Hoc, 1987).

La fonction principale de la représentation est alors de conceptualiser le réel pour agir efficacement ; elle exige par conséquent que l'on considère les connaissances en jeu et leur *contenu*. Chaque classe de situations, pour être traitée, appelle des processus cognitifs qui reposent toujours sur la reconnaissance d'*invariants*, qu'il s'agisse de modéliser une situation ou d'appliquer un théorème non explicite. "Ces *invariants opératoires*, c'est-à-dire les propriétés, relations et processus que la pensée découpe dans le réel pour organiser l'action, constituent le noyau dur de la représentation, celui sans lequel ni les inférences, ni les règles d'actions, ni les signifiants n'ont de sens" (Vergnaud, 1985).

C'est la notion d'*opérateur* qui va nous permettre de mieux capter et donc de manipuler ces invariants opératoires. Rappelons la distinction nette établie entre *opérateur* et *opération* (Desclés, 1981) ; l'examen du mécanisme formel mis en jeu dans l'opération dégage un nouvel objet symbolique plus abstrait désigné par opérateur. Un opérateur est une entité qui, étant appliqué à un opérande, produit dynamiquement un résultat. Cette notion prend tout son sens dans la *Logique Combinatoire* introduite par H.B. Curry vers 1930 et exposée en détails dans (Curry, 1958) ; pour un premier contact, il est préférable de consulter (Grize 1973 ; Ginisti, 1988). Il est donc possible de définir des opérations portant sur des opérateurs *indépendamment* des objets sur lesquels ceux-ci opèrent. Alors que l'opération est un concept qui vise à saisir le processus opératoire de transformation de l'opérande, l'opérateur se présente comme étant *détachable* de l'opérande et du processus opératoire qu'il engendre. Il peut être pensé *"en soi"* et défini intrinsèquement par ses possibilités d'agencement avec d'autres opérateurs, indépendamment des actions que ces opérateurs déclenchent. En privilégiant la notion d'opérateur, nous mettrons l'accent sur le *fonctionnement opératoire* mis en jeu par le processus de transformation d'un objet en un autre, qui semble plus proche de l'intuition opératoire des élèves. Enfin, cette notion permet d'une part de mettre en évidence les invariants opératoires et d'autre part de distinguer les compréhensions linguistique et mathématique, de les réunir dans un même formalisme, et de les articuler.

4.2. Deux étapes : compréhension linguistique et réduction à un problème prototypique

4.2.1. Compréhension linguistique

Rappelons qu'il s'agit de modéliser le comportement de l'élève idéal au cours de la lecture d'un énoncé additif. La première étape est la *prise d'information* dans l'énoncé additif. L'étape de compréhension linguistique est celle qui doit permettre d'extraire la signification des énoncés additifs. Cette étape sera détaillée dans (Guin, à paraître), mais quelques exemples figurent dans le paragraphe (6). Nous en présentons succinctement les fondements :

Notre modélisation s'inspire des recherches du linguiste S.K. Shaumyan qui utilise, dès 1965, la Logique Combinatoire pour une analyse des transformations interphrases dans les langues naturelles. Il propose un modèle, appelé *Grammaire Applicative Universelle*, qui représente les phrases sous forme d'expressions applicatives, c'est-à-dire sous forme d'agencements combinatoires d'opérateurs et d'opérandes de différents types. Ces formalismes applicatifs interviennent dans la sémantique des langages de programmation (les langages applicatifs, comme Lisp).

Dans le domaine des représentations des connaissances (Desclés, 1990) propose de recourir à des formalismes applicatifs pour représenter la *signification* des prédicats linguistiques au moyen de combinateurs qui agencent les primitives sémantiques entre elles. La signification de chaque phrase, qui est représentée par une expression applicative, est analysée grâce au processus de réduction à un archétype cognitif, exprimable dans un langage applicatif. Les *archétypes cognitifs* constituent un système de représentation des connaissances mettant en jeu différents types d'opérateurs (primitives sémantiques, opérateurs ensemblistes, etc...). Une propriété fondamentale de ce système de représentation est son *indépendance* par rapport à l'encodage dans une langue naturelle donnée.

Afin de représenter la signification des énoncés additifs, nous élaborons une représentation cognitive en utilisant la notion d' *archétype cognitif.* Remarquons que la validité des archétypes que nous définissons est limitée au domaine restreint que nous nous sommes fixé. Ces archétypes cognitifs permettent de donner une représentation *sémantique* des items lexicaux, notamment verbaux. Nous en verrons quelques exemples traduits en langue naturelle au paragraphe (6), ils correspondent donc aux représentations cognitives mises en jeu dans les processus de résolution annoncées en (ii) du paragraphe (2). Cette modélisation permet d'expliciter réellement les processus d'un même signifié en signifiants différents, et ainsi de prendre en compte, de manière opératoire, la *congruence* ou *non-congruence sémantique* des énoncés d'une famille paraphrastique (3.2.3).

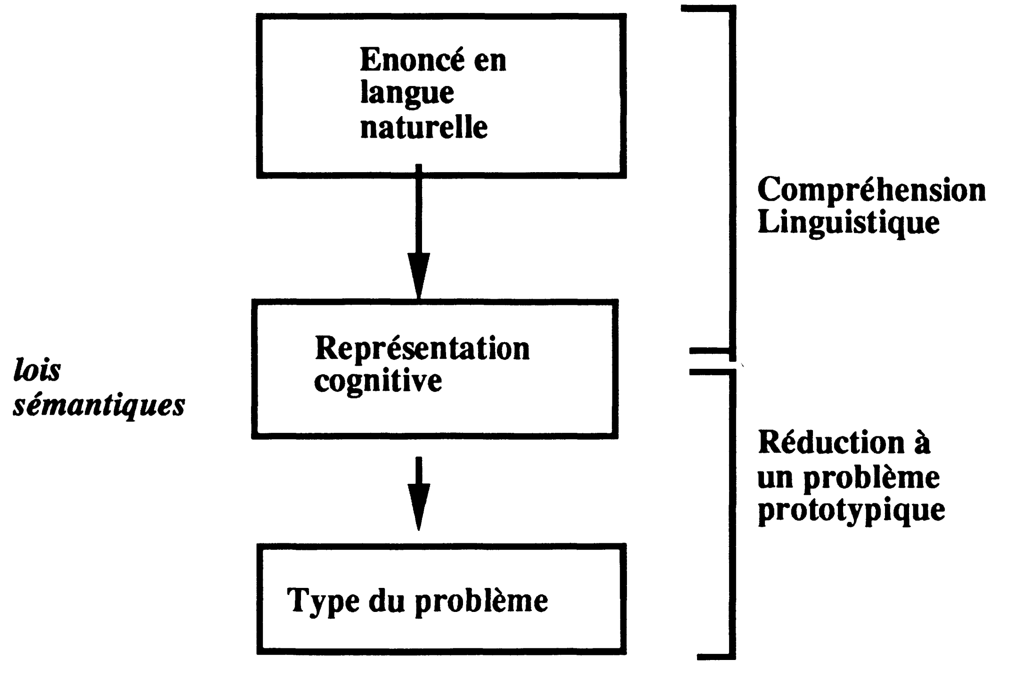
4.2.2. Réduction à un problème prototypique

La deuxième étape est celle de l'*assimilation* du problème en cours à un problème connu que l'on sait résoudre, c'est-à-dire à un problème prototypique. Cette étape est indispensable pour une modélisation de la compréhension si l'on prend en compte le concept de système de représentation et de traitement : la représentation du problème dépend des *moyens* dont on dispose pour le résoudre (Hoc, 1987). Notre modélisation du comportement de l'élève en situation d'apprentissage de la résolution de problèmes est basée sur la reconnaissance de *prototypes*, comme dans le projet Electre (Palies et alii, 1985) : ce sont des représentants prototypiques auxquels sont attachées des méthodes spécifiques de résolution. Un problème peut être résolu en l'identifiant à un problème prototypique ou prototype. Dans le cas où la reconnaissance n'est pas immédiate, l'élève cherche à mettre en jeu des heuristiques de réduction à un prototype.

Les prototypes correspondent à un type de problème défini à l'aide d'opérateurs sur les entiers *naturels*, puisque ce sont les seuls dont disposent les enfants au niveau étudié au paragraphe (3). Or, la résolution semble plus aisée aussitôt que l'on dispose d'opérateurs définis sur les entiers relatifs : en effet, les transformations dans le temps mettent en jeu des entiers relatifs, certains problèmes additifs étant représentables par des équations dans $\mathbb{Z}$ non réductibles à des équations dans $\mathbb{N}$ (Vergnaud, 1989).

La réduction à partir de la représentation cognitive à un problème prototypique s'obtiendra grâce à ce que nous désignerons par *lois sémantiques* qui expriment des relations entre concepts. Il est nécessaire d'objectiver ces lois en les formulant dans un métalangage (le formalisme applicatif s'y prête bien), mais elles doivent pouvoir être exprimées également en langue naturelle. Nous pouvons distinguer deux types de lois sémantiques : d'une part celles qui expriment des relations entre opérateurs dans un domaine particulier, ici le domaine additif, et d'autre part celles qui décrivent explicitement l'articulation entre opérateurs et archétypes cognitifs.[6]

Contrairement aux modélisations réalisées dans le passé, qui mettent en évidence essentiellement l'aspect mathématique, nous proposons une modélisation permettant de prendre en compte, outre l'aspect linguistique, les différents processus cognitifs mis en évidence dans (3.2) : la *non-congruence sémantique* des énoncés, les manipulations *paraphrastiques* de la langue naturelle, et la recherche d'*invariants opératoires* et *cognitifs* spécifiques au domaine additif, éléments essentiels d'une modélisation basée sur un système de représentation et de traitement. Nous pouvons résumer l'activité de compréhension d'un problème additif dans le schéma suivant :



[6] Quelques exemples de lois sémantiques sont traduits en langue naturelle dans le paragraphe *(6)*.

5. PROBLÈMES PROTOTYPIQUES POUR LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES ADDITIFS

Nous abordons maintenant la deuxième étape de notre modélisation de la compréhension, qui est l'assimilation du problème en cours à un problème connu que l'on sait résoudre. Cette étape est basée sur la reconnaissance de prototypes construits à partir d'une restriction du domaine de définition des opérateurs additifs aux entiers naturels. En effet, une part importante des difficultés des élèves provient de la nécessité de résoudre les problèmes additifs uniquement par des manipulations sur les entiers naturels, puisque ce sont les seuls dont disposent les enfants au niveau étudié au paragraphe (3).

Rappelons que nous nous plaçons dans une perspective essentiellement *didactique* (en vue de la réalisation d'un tutoriel intelligent). Les prototypes que nous définirons correspondent donc plutôt à une résolution " idéale " prenant en compte les compétences des élèves au niveau considéré. Cette classification en prototypes reprend certains paramètres essentiels de la classification de G.Vergnaud (place de l'inconnue, valeur relative des entiers) et permet de mettre en évidence, grâce aux opérateurs, le concept de *théorème-en-acte* pour la résolution de problème dans un système de représentation et de traitement.

Dans ce paragraphe, nous présenterons la structure mathématique annoncée en (v) du paragraphe (2) : les types de problèmes intervenant dans une modélisation basée sur les opérateurs définis à partir d'une loi de groupe quelconque (5.1). Puis nous en déduirons les opérateurs additifs qui donnent la forme mathématique annoncée en (iv) des concepts additifs (5.2), les types de problèmes additifs et les problèmes prototypiques correspondants (5.3).

5.1. Opérateurs dans un groupe commutatif

Nous allons mettre en évidence, à partir d'une loi de groupe commutatif, plusieurs opérateurs. C'est parce que les élèves n'ont pas encore intégré la structure de groupe lorsqu'ils résolvent les problèmes additifs, qu'il nous paraît nécessaire de distinguer ces opérateurs. Pour décrire ces opérateurs nous devons auparavant préciser nos notations et donner un aperçu du formalisme utilisé, qui est décrit dans (Desclés, 1990).

5.1.1.Formalisme applicatif

Nous appelerons opérateur l'expression d'une fonction, et opérande l'expression qui désigne un argument d'une fonction. L'application est une opération binaire que l'on désigne par ' : '. L'application de l'opérateur f à l'opérande a donne pour résultat b. Le signe ' ≥ ' exprime la relation entre l'opération d'application à effectuer et le résultat de l'opération effectuée. Nous avons donc :

$$f : a \geq b$$

Nous noterons l'opérateur f à l'aide de la Lambda-notation de A.Church pour représenter l'opérateur sous forme d'une *" fonction pensée en soi "* (Desclés, 1988). Par exemple, la fonction "carré" sera représentée par la lambda-expression suivante :

$$\lambda x \,.\, x^2$$

qui décrit le mécanisme opératoire de la procédure "élévation au carré"[7]. Lorsque nous appliquons cet opérateur à l'opérande 5, nous écrivons :

$$(\lambda x \,.\, x^2) : 5 \geq 5^2$$

[7] La λ-notation correspond à une abstraction : on abstrait du résultat x^2 la fonction carré.

Nous conserverons la notation usuelle f (a) pour exprimer le résultat de l'action de l'opérateur f sur l'opérande a. La composition de deux opérateurs f et g est donnée par l'opérateur :

$$f \circ g : a \geq f(g(a))$$

Nous devons manipuler différentes sortes d'entités, par conséquent, nous devons envisager différents types d'opérateurs. Si bien qu'à partir d'un ensemble de sortes primitives[8], nous définissons les *types fonctionnels*[9] des opérateurs à l'aide d'un opérateur F. Dans le cas qui nous intéresse, nous allons définir des opérateurs unaires et binaires à l'aide d'une sorte $\mathbf{G}$ d'éléments d'un groupe quelconque. Nous préciserons donc le type fonctionnel de chaque opérateur en utilisant la notation suivante :

- un opérateur *binaire* dont l'opérande est un couple d'éléments de sorte $\mathbf{G}$ et le résultat un élément de sorte $\mathbf{G}$ aura[10] pour type fonctionnel $F(\mathbf{G}\ \mathbf{G})\ \mathbf{G}$,

- un opérateur *unaire* dont l'opérande est un élément de sorte $\mathbf{G}$ et le résultat un élément de sorte $\mathbf{G}$ aura pour type fonctionnel $F(\mathbf{G})\ \mathbf{G}$.

5.1.2 Définition des opérateurs sur un groupe G
Considérons un groupe commutatif G dont l'opération interne sera notée T* : à partir de cette loi, nous pouvons définir les opérateurs suivants :

- l'opérateur binaire T de type $F(\mathbf{G}\ \mathbf{G})\ \mathbf{G}$ qui sera représenté par la λ-expression :

$$(\lambda y.(\lambda x.\ T^*(x, y)))$$

on peut alors décrire l'action de l'opérateur T sur l'opérande (a , b) :

$$T : (a, b) \geq T^*(a, b)$$

- l'opérateur binaire T^{inv} de type $F(\mathbf{G}\ \mathbf{G})\ \mathbf{G}$ qui sera représenté par la λ-expression :

$$(\lambda y.(\lambda x.\ T^*(x, y^{-1})))$$

on peut alors décrire l'action de l'opérateur T^{inv} sur l'opérande (a, b)

$$T^{inv} : (a, b) \geq T^*(a, b^{-1})$$

on remarquera que : $\quad T^{inv}(a, b) \neq T^{inv}(b, a)$

- la famille d'opérateurs unaires T_y de type $F(\mathbf{G})\ \mathbf{G}$ qui seront représentés par les λ-expressions :

$$T_y : (\lambda x.\ T^*(x, y))$$

[8] Sortes (d'expressions) de base considérées comme des types élémentaires, par exemple : sorte des phrases, des propositions (vraies ou fausses), des entiers naturels, des booléens etc...

[9] Théorie des types de H.B. Curry.

[10] Pour simplifier la lecture, nous introduisons des parenthèses inutiles dans un langage préfixé.

Il existe évidemment des relations entre ces opérateurs, comme par exemple :

$$T_{(y^{-1})} \circ T_y = Id_G = (\lambda x\,.\,x)$$

On a également des relations entre les résultats de ces opérateurs :

$$T_b(a) = T(a, b) = T_a(b)$$
$$a = T^{inv}(b, T^{inv}(b, a))$$
$$T^{inv}(T(a, b), b) = a \quad \text{et} \quad T^{inv}(T(a, b), a) = b$$

remarque : ces deux dernières relations permettent, à partir du résultat T (a, b), d'obtenir a ou b.

5.1.3. Types de problèmes associés aux opérateurs

Deux types de problèmes associés à l'opérateur T :

TYPE 1 : Connaissant l'opérande (a , b), calculer le résultat de l'action de T :

$$T : (a, b) \geq ?$$

TYPE 2 : Connaissant le résultat de l'action de T et une composante de l'opérande, trouver l'autre :

$$T : (a, ?) \geq b$$

- le premier problème consiste simplement à appliquer l'opérateur T à (a, b) :

$$? = T^*(a, b)$$

- le second problème se résout en appliquant l'opérateur T^{inv} :

$$? = T^{inv}(T(a, ?), a) = T^{inv}(b, a) = T^*(b, a^{-1})$$

Trois types de problèmes associés aux opérateurs T_y :

TYPE 1 : Connaissant l'opérande a, calculer le résultat de l'action de T_b :

$$T_b : a \geq ?$$

TYPE 2 : Connaissant le résultat de l'action de T_b, trouver l'opérande :

$$T_b : ? \geq a$$

TYPE 3 : Connaissant l'opérande et le résultat, trouver l'opérateur :

$$T_? : a \geq b$$

- le premier problème consiste simplement à appliquer l'opérateur T_b :

$$? = T_b(a) = T^*(a, b)$$

- le second problème se résout en appliquant l'opérateur $T_{b^{-1}}$:

$$? = T_{(b^{-1})} (T_b (?)) = T_{(b^{-1})} (a) = T^* (a , b^{-1})$$

- le troisième problème se résout en se ramenant au 2ème problème :

$$b = T_? (a) = T_a (?) , \text{ ou } \quad T_a : ? \geq b, \text{ d'où } \quad ? = T^* (b , a^{-1})$$

Deux types de problèmes associés aux compositions d'opérateurs T_y :

L'ensemble des opérateurs T_y muni de l'opération de composition possède une structure de groupe commutatif :

$$T_y \circ T_{y'} = T_{T^*(y,y')} , T_y \circ T_{y^{-1}} = Id , T_y \circ T_{y'} = T_{y'} \circ T_y$$

Nous retrouvons donc les deux modèles mis en évidence précédemment pour l'opérateur de composition :

TYPE 1 : $T_? = T_a \circ T_b$

TYPE 2 : $T_a = T_? \circ T_b$

- le premier problème est une conséquence du fait que :

$$T_? = T_a \circ T_b = T_{T^*(a,b)}, \text{ d'où } ? = T^* (a , b)$$

- le second problème se résout en appliquant l'opérateur $T_{b^{-1}}$:

$$T_? = T_? \circ (T_b \circ T_{b^{-1}}) = (T_? \circ T_b) \circ T_{b^{-1}} = T_{b^{-1}} \circ T_a = T_{T^*(b^{-1}, a)},$$

$$\text{d'où } \quad ? = T^* (b^{-1} , a)$$

Pour résumer :

Opérateurs	Types de problèmes	Solutions
T	1 $T : (a , b) \geq ?$	$? = T^*(a , b)$
	2 $T : (a , ?) \geq b$	$? = T^*(b , a^{-1})$
T_b	1 $T_b : a \geq ?$	$? = T^*(a , b)$
	2 $T_b : ? \geq a$	$? = T^*(a , b^{-1})$
	3 $T_? : a \geq b$	$? = T^*(b , a^{-1})$
composition	1 $T_? = T_a \circ T_b$	$? = T^*(a , b)$
d'opérateurs T_y	2 $T_a = T_? \circ T_b$	$? = T^*(b^{-1}, a)$

Remarque : Pour simplifier les notations, nous noterons désormais l'opération d'application par simple juxtaposition, c'est-à-dire f a au lieu de f : a .

5.2. Définition des opérateurs restreints à N

Le domaine des problèmes additifs qui nous intéresse ici correspond au cas particulier où $T^* = +$, $G = \mathbb{Z}$, $(T^{inv})^* = -$. Nous avons une classification immédiate des problèmes additifs à l'aide d'opérateurs dans $\mathbb{Z}$. Cependant, comme nous l'avons vu précédemment, les enfants ne disposent pas de ces opérateurs dans $\mathbb{Z}$. Nous proposons donc de restreindre ces opérateurs à $\mathbb{N}$, puisque ce sont les seuls dont disposent les enfants au stade qui nous intéresse, voici les concepts additifs annoncés en (iii) du paragraphe (2) :

5.2.1. Les opérateurs ADD et SOUS

Notons ADD l'opérateur binaire, de type F ($\mathbf{N}$ $\mathbf{N}$) $\mathbf{N}$, correspondant à la restriction à la sorte des entiers naturels, que nous noterons $\mathbf{N}$, de l'opérateur T. Nous pouvons exprimer cet opérateur en langue naturelle :

ADD = *"Faire la somme de"*

Notons SOUS l'opérateur binaire, de type F ($\mathbf{N}$ $\mathbf{N}$) $\mathbf{N}$, correspondant à la restriction à la sorte des entiers naturels $\mathbf{N}$ de l'opérateur T^{inv}, avec la condition supplémentaire que l'expression { $(T^{inv})^*$ n n'} est définie uniquement si n' est inférieur à n. Nous pouvons exprimer cet opérateur en langue naturelle :

SOUS = *"Faire la différence de"*

Des relations mises en évidence en (5.1.2), on déduit immédiatement :

SOUS (ADD n n') n' = n   et   n = SOUS n' (SOUS n' n)

Remarque : Ces expressions sont des *lois sémantiques*. On démontre que l'on peut exprimer ces lois en utilisant les opérateurs ADD et SOUS et des combinateurs de la Logique Combinatoire .

5.2.2. Les opérateurs AJOUT n et RET n

Pour les opérations arithmétiques, le modèle d'opération *unaire* est beaucoup plus proche du fonctionnement des schèmes des élèves que le modèle d'opération binaire privilégié dans l'enseignement (Vergnaud, 1985) ; nous considérons donc nécessaire de conserver la distinction entre opérateurs unaires et binaires effectuée en (5.1.2).

Soit n un élément de $\mathbb{N}$, notons "AJOUT n " l'opérateur unaire, de type F ($\mathbf{N}$) $\mathbf{N}$, correspondant à la restriction à la sorte des entiers naturels $\mathbf{N}$ de l'opérateur T_n. Nous pouvons exprimer cet opérateur en langue naturelle :

AJOUT n = *"Ajouter n à"*

Soit n un élément de $\mathbb{N}$, notons "RET n " l'opérateur unaire, de type F ($\mathbf{N}$) $\mathbf{N}$, correspondant à la restriction à la sorte des entiers naturels $\mathbf{N}$ de l'opérateur T_{-n} avec la condition supplémentaire que l'opérateur $\{T_{-n}\}$ n'est défini que sur les entiers supérieurs à n. Nous pouvons exprimer cet opérateur en langue naturelle :

RET n = *"Retrancher n à"*

Des relations mises en évidence en (5.1.2), on déduit immédiatement :

$$\text{AJOUT } n\,(x) = \text{ADD } n\ x,\quad \text{RET } n\,(x) = \text{SOUS } x\ n$$
$$\text{AJOUT } n \circ \text{RET } n = \text{RET } n \circ \text{AJOUT } n = \text{I} \quad (n > 0)$$
$$\text{AJOUT } n = \text{AJOUT } n' \Rightarrow n = n' \ \text{ et } \ \text{RET } n = \text{RET } n' \Rightarrow n = n'$$
$$\text{AJOUT } n \circ \text{AJOUT } n' = \text{AJOUT } n' \circ \text{AJOUT } n = \text{AJOUT } (\text{ADD } n\ n')$$
$$\text{RET } n \circ \text{RET } n' = \text{RET } n' \circ \text{RET } n = \text{RET } (\text{ADD } n\ n')$$

Remarquons que les difficultés de composition se situent dans le cas où les signes sont différents :

$$\text{AJOUT } n \circ \text{RET } n' = \text{RET } n' \circ \text{AJOUT } n = \text{AJOUT } (\text{SOUS } n\ n') \text{ si } n' < n$$
$$= \text{RET } (\text{SOUS } n'\ n) \text{ si } n' > n$$

Les relations que nous avons mises en évidence correspondent chacune à une *loi sémantique* exprimée en fonction des opérateurs ADD et SOUS. Nous pensons que ces lois sémantiques exprimées en langue naturelle pourraient être introduites dans l'enseignement et appliquées à la résolution de problèmes additifs de manière analogue à l'utilisation qui en est faite dans le paragraphe suivant. Voici quelques propositions d'énoncés :

$$\text{SOUS } (\text{ADD } n\ n')\ n' = n$$

La loi peut être exprimée sous la forme : *Additionne 2 nombres, soustrais ensuite au résultat obtenu l'un des 2 nombres : tu obtiens alors l'autre nombre.*

$\text{RET } n \circ \text{AJOUT } n = \mathbf{I}$ où l'opérateur **I** désigne l'identité[11].

La loi peut être exprimée sous la forme : *Choisis un nombre quelconque, ajoute-lui un deuxième nombre déterminé, puis retranche au résultat obtenu ce deuxième nombre : tu retrouves alors le nombre choisi au départ.*

$\text{AJOUT } n \circ \text{AJOUT } n' = \text{AJOUT } n' \circ \text{AJOUT } n = \text{AJOUT } (\text{ADD } n\ n')$[12].

La loi peut être exprimée sous la forme : *Choisis 3 nombres,*

MÉTHODE 1 : *ajoute au premier nombre le deuxième nombre, puis ajoute au résultat obtenu le troisième nombre.*

MÉTHODE 2 : *ajoute au premier nombre le troisième nombre, puis ajoute au résultat obtenu le deuxième nombre.*

MÉTHODE 3 : *ajoute au premier nombre la somme du deuxième et du troisième nombre. Tu obtiens le même résultat par ces 3 méthodes.*

Ces lois constituent les connaissances *opératoires* nécessaires à la résolution des problèmes prototypes que nous allons maintenant présenter. Ces derniers correspondent aux différents types de problèmes mis en évidence en (5.1.3) pour les opérateurs que nous venons d'introduire.

---

[11] On a la relation $\text{RET } n\ ((\text{AJOUT } n)\ n') = \mathbf{I}\ n'$ ou $\mathbf{B}\ \text{RET } n\ \text{AJOUT } n\ \ n' = \mathbf{I}\ n'$ où **B** est le combinateur de composition, d'où par abstraction, l'égalité entre les opérateurs.

[12] De même, il y a abstraction sur un entier n", qui est le premier nombre choisi dans l'expression en langue naturelle qui suit.

5.3. Problèmes prototypiques basés sur les opérateurs

Pour chaque catégorie, nous présentons les types de problèmes qui s'expriment à l'aide des opérateurs : nous adaptons les différents types de problèmes mis en évidence en (5.1.3) aux opérateurs définis en (5.2). Nous indiquons, pour chaque type de problème, la solution et présentons, la plupart du temps, le problème prototypique correspondant. Nous donnerons quelques exemples de problèmes additifs : un problème de type I.N est un problème se ramenant au prototype I.N dans la catégorie I. Nous constaterons que l'expression en langue naturelle d'un problème est souvement *nettement* moins complexe que celle de son prototype. En effet, ce dernier *révèle* la complexité mathématique du problème à résoudre. Nous ne détaillerons pas les procédures de résolution des prototypes qui ont été présentées dans le cas général en (5.1.3) ; on peut évidemment les expliciter directement à l'aide des opérateurs ADD, SOUS[13], AJOUT n et RET n .

5.3.1. Première catégorie : Types de problèmes relatifs à l'opérateur ADD

Nous retrouvons les deux types de problèmes mis en évidence en (5.1.3) pour l'opérateur T :

prototype 1.1 : *On donne deux nombres, quelle est leur somme ?*

type 1.1 : ADD : $(a, b) \geq ?$ solution : $? = a + b$

exemple de type 1.1 : *Il y a 4 filles et 5 garçons autour de la table, combien y a -t-il d'enfants en tout ?*

prototype 1.2 : *On donne la somme de deux nombres et l'un des deux nombres, calcule l'autre nombre.*

type 1.2 : ADD : $(a, ?) \geq b$ solution : $? = b - a$

exemple de type 1.2 : *Un cultivateur a 56 ha de terres dont 17 en forêt et taillis, le reste est cultivable. Quelle aire cultivable a-t-il à sa disposition ?*

5.3.2. Deuxième catégorie : types de problèmes relatifs aux opérateurs AJOUT n

Nous retrouvons les trois types de problèmes mis en évidence en (5.1.3) pour les opérateurs T_y. Nous avons ainsi trois prototypes pour cette catégorie[14].

prototype 2.1 : *On donne un premier nombre, on lui ajoute un deuxième nombre, quel est le résultat ?*

type 2.1 : AJOUT b : $a \geq ?$ solution : $? = a + b$

exemple de type 2.1 : *Il y avait 17 personnes dans l'autobus, il en monte 4. Combien y en a-t-il maintenant ?*

---

[13] L'opérateur SOUS intervient uniquement dans la procédure de résolution du type 1.2.

[14] La distinction entre les prototypes 1.1 et 2.1 n'est pas une distinction statique-dynamique : les problèmes de la catégorie Compare font intervenir également les opérateurs unaires.

prototype 2.2 : *Le premier nombre est inconnu, on lui ajoute un deuxième nombre, on donne le résultat, calcule le premier nombre.*

type 2.2 : AJOUT b : ? $\geq$ a solution : ? = a - b

exemple de type 2.2 : *Henri vient de trouver 2F sur le trottoir . Il les met dans son porte-monnaie . Il a alors en tout 5F. Combien avait-il dans son porte-monnaie avant de faire sa découverte ?*

prototype 2.3 : *On donne un premier nombre, et un deuxième nombre plus grand que le premier. Combien faut-il ajouter au premier pour obtenir le second ?*

type 2.3 : AJOUT ? : a $\geq$ b solution : ? = b - a

exemple de type 2.3 : *Un parisien part en vacances en voiture. Au départ de Paris son compteur kilométrique marque 64.809 km ; à son retour, il marque 67.351 km. Combien de km a-t-il parcouru pendant les vacances ?*

5.3.3. Troisième catégorie : types de problèmes relatifs aux opérateurs RET n
Nous retrouvons les trois types de problèmes mis en évidence en (5.1.3) pour les opérateurs T_y.
Nous avons ainsi trois problèmes prototypiques pour cette catégorie :

prototype 3.1 : *On donne un premier nombre, on lui retranche un deuxième nombre, quel est le résultat ?*

type 3.1: RET b : a $\geq$? solution : ? = a - b

exemple de type 2.3 : *Jean-Pierre a 9 bonbons. il en donne 4 à sa petite soeur. Combien lui en reste-t-il ?*

prototype 3.2 : *Le premier nombre est inconnu, on lui retranche un deuxième nombre donné. Connaissant le résultat, calcule le premier nombre.*

type 3.2: RET b : ? $\geq$ a solution : ? = a + b

exemple de type 3.2 : *En 1974, la population de Paris est de 2.844..000 habitants. Elle a diminué de 187.000 personnes en 5 ans. Combien d'habitants y avait-il en 1969 ?*

prototype 3.3 : *On te donne un premier nombre, et un deuxième nombre plus petit que le premier. Combien faut-il retrancher au premier pour obtenir le second ?*

type 3.3: RET ? : a $\geq$ b solution : ? = a - b

exemple de type 3.3 : *Paul vient de jouer aux billes. Il avait 41 billes avant de jouer. Il en a maintenant 29. Combien de billes a-t-il perdues ?*

5.3.4. Quatrième catégorie : types de problèmes composés relatifs aux opérateurs AJOUTn

Les relations concernant la composition des opérateurs T_y ont été explicitées en (5.1.3). Nous pouvons mettre en évidence deux types de problèmes pour la composition des opérateurs T_y :

prototype 4.1 : *Choisis un premier nombre , ajoute-lui un deuxième nombre donné, puis un troisième nombre donné. Comment peux-tu obtenir directement ce résultat à partir du premier nombre que tu as choisi ?*

type 4.1 : ? = AJOUT a o AJOUT b solution : ? = AJOUT a + b

exemple de type 4.1 : *Paul a joué 2 parties de billes. A la première partie il a gagné 16 billes, à la seconde partie il en a gagné 9. Que s'est-il passé en tout ?*

Du fait de la distinction entre les opérateurs AJOUT n et RET n, les problèmes de type 4.2 admettent des solutions différentes suivant les valeurs relatives des entiers donnés. En effet, considérons le problème :

exemple de type 4.2 : *Pierre a joué 2 parties de billes. A la première partie il a gagné b billes. Il a joué une seconde partie. En faisant ses comptes, il s'aperçoit qu'il a gagné a billes en tout. Que s'est-il passé à la seconde partie ?*

Ce problème aura deux types de solutions (*gagné* a-b billes ou *perdu* b-a billes). On comprend aisément que ce type de problème soit plus difficile à résoudre pour les élèves.

prototype 4.2.1 : *Choisis un premier nombre, ajoute-lui un deuxième nombre donné. On fait une opération sur le résultat obtenu. Sachant que tu obtiens le même résultat en ajoutant directement un nombre donné (plus grand que le 2 ème) au 1er nombre que tu as choisi , peux-tu deviner cette opération*[15] ?

type 4.2.1 : avec a > b	? o AJOUT b = AJOUT a	solution : ? = AJOUT a - b
type 4.2.2 : avec a < b	? o AJOUT b = AJOUT a	solution : ? = RET b - a.

5.3.5. Cinquième catégorie : types de problèmes composés relatifs aux opérateurs RET n
Les relations concernant la composition des opérateurs T_y ont été explicitées en *(5.1.3)*. Nous pouvons mettre en évidence deux types de problèmes pour la composition des opérateurs T_y :

prototype 5.1 : *Choisis un premier nombre, retranche-lui un deuxième nombre donné, puis un troisième nombre donné. Comment peux-tu obtenir directement ce résultat à partir du premier nombre que tu as choisi ?*

type 5.1 : ? = RET a o RET b solution : ? = RET a + b

exemple de type 5.1 : *Jean avait 7 bonbons dans un sac ce matin. Il en a mangé 3 durant la matinée et en a donné 2 à sa soeur. Combien en a-t-il pris dans son sac depuis ce matin?*

Du fait de la distinction entre les opérateurs AJOUT n et RET n, les problèmes de type 5.2 admettent des solutions différentes suivant les valeurs relatives des entiers donnés. On obtient alors deux types de solutions :

type 5.2.1 : avec a > b	? o RET b = RET a	solution : ? = RET a - b
type 5.2.2 : avec a < b	? o RET b = RET a	solution : ? = AJOUT b - a

[15] Remarquons la complexité de l'expression en langue naturelle du prototype qui reflète la difficulté de résolution de ce problème.

exemple de type 5.2.2 : *La réserve d'or d'une banque a baissé de 642 lingots au cours de l'année 1973 tout entière. Au cours du premier semestre de la même année elle avait baissé de 1031 lingots. Que s'est-il passé au cours du second semestre ?*

5.3.6. Sixième catégorie : types de problèmes composés relatifs aux opérateurs opérateurs AJOUT n et RET n

Nous pouvons mettre en évidence deux types de problèmes pour la composition des opérateurs T_y . En ce qui concerne la composition de AJOUT a et RET b, nous avons vu que l'expression dépend du signe de a - b (5.2.2), nous distinguons donc les deux cas :

prototype 6.1.2 : *Choisis un premier nombre, retranche-lui un deuxième nombre donné, puis ajoute-lui un troisième nombre donné plus grand que le second. Comment peux-tu obtenir directement ce résultat à partir du premier nombre que tu as choisi ?*

type 6.1.1 : avec a > b ? = AJOUT a o RET b solution : ? = AJOUT a - b
type 6.1.2 : avec a < b ? = AJOUT a o RET b solution : ? = RET b - a

exemple de type 6.1.1 : *Paul a joué 2 parties de billes. A la première partie il a perdu 9 billes, à la seconde partie il en a gagné 16. Que s'est-il passé en tout ?*

remarque : Cette distinction vient du fait que les opérateurs ont été définis sur des entiers naturels pour des raisons *cognitives*. Mais l'expression de la solution pour les entiers relatifs est identique. Celà fait ressentir pourquoi les enfants qui travaillent sur les problèmes additifs avec des entiers naturels ont des difficultés qui n'apparaissent pas dans la structure du groupe Z.

prototype 6.2.2 : *Choisis un premier nombre, ajoute-lui un deuxième nombre donné. On fait une opération sur le résultat obtenu. Sachant que tu obtiens le même résultat en retranchant directement un nombre donné, peux-tu deviner cette opération ?*

type 6.2.1 : ? o RET b = AJOUT a solution : ? = AJOUT a + b
type 6.2.2 : ? o AJOUT b = RET a solution : ? = RET a +

exemple de type 6.2.2 : *Pierre a joué 2 parties de billes. Au cours de la première partie il en a gagné 7. Il a joué une seconde partie. En faisant ses comptes pour les 2 parties il s'aperçoit qu'il a perdu 2 billes en tout.Que s'est-il passé à la seconde partie ?*

Un tableau de récapitulation des différents types de problèmes présentés dans ce paragraphe figure en annexe (8).

6. EXEMPLES DE SIMULATION PAR COMPILATION DES REPRÉSENTATIONS

Nous préciserons tout d'abord notre conception de la simulation par ordinateur d'un processus de compréhension. Nous rappellerons succinctement l'architecture cognitive proposée dans (Desclés *et alii*, 1990) qui est fondée sur la fonctionnalité et la *compilation* des représentations intermédiaires : "l'objectif visé n'est pas de simuler directement le comportement humain par un programme informatique, mais de construire une modélisation théorique et des représentations intermédiaires directement exécutables par les machines. La simulation rendra compte uniquement d'une *analogie entre les stratégies* de traitement ". Nous allons donc décrire le processus de compréhension d'un problème additif par une compilation de représentations.

Le type du problème s'obtiendra à partir des lois sémantiques relatives aux archétypes cognitifs, tels que *"gagne"*, *"doit-à"* etc.., et aux opérateurs ensemblistes intervenant dans ceux-ci. Nous allons présenter explicitement quelques exemples, en donnant l'expression des archétypes cognitifs, primitives sémantiques, opérateurs ensemblistes et lois sémantiques uniquement en langue naturelle, de manière à ne pas surcharger la lecture par leurs expressions dans un langage applicatif.

6.1. Exemple : Pierre a des billes. Dans la cour de récréation, il joue une partie avec Paul . Il en perd 5. Il lui en reste 9. Combien en avait-il avant la partie ?

Nous pouvons représenter *Pierre perd 5 billes* grâce à l'archétype cognitif de l'opérateur PERD sous la forme[16] :

état initial	$\longrightarrow$	état final
Pierre a une collection de billes	Changement d'états	Pierre a cette collection de billes à laquelle on enlève 5 billes

Nous pouvons représenter *Il lui en reste 9* grâce à l'archétype cognitif de l'opérateur RESTE sous la forme :

état initial	$\longrightarrow$	état final
Pierre a une collection de plus de 9 billes	Changement d'états	Pierre a une collection de 9 billes

d'où, en juxtaposant l'état final de RESTE et celui de PERD, on en déduit :

Etat final : Pierre a 9 billes obtenues à partir d'une collection à laquelle on enlève 5 billes

grâce à la *loi sémantique* que nous traduisons en langue naturelle :

"Considérons une collection d'objets, on enlève 5 objets à cette collection, le nombre d'éléments de la nouvelle collection est obtenu en retranchant 5 au nombre d'objets de l'ancienne".

on peut déduire : *En retranchant 5 au nombre d'éléments de la collection de billes, j'obtiens 9,*

d'où : RET 5 (?) = 9 *type 3.2*

La résolution du problème est alors donnée en appliquant l'opérateur AJOUT n et en utilisant la *loi sémantique* :

AJOUT n o RET n = I

[16] L'archétype cognitif de PERD c j s'exprime à l'aide de combinateurs et des primitives sémantiques MODIF (modification d'états) , $\in_{poss}$ (possession), ENL (opérateur ensembliste) :

INIT	MODIF	FIN
$\in_{poss}$ j c'	-------->	$\in_{poss}$ j ((ENL c) (c'))

où c : = *une collection de billes, j* : = *Pierre*, c' : = *une collection contenant c.*

que l'on peut traduire par :

"Choisis un nombre, ajoute-lui un deuxième nombre, puis retranche au résultat obtenu ce deuxième nombre : tu retouves le nombre choisi au départ".

Cette loi sémantique correspond au *théorème-en-acte* :

$$FIN = T\ (\ INIT\ ) \Rightarrow INIT = T^{-1}\ (\ FIN\ )$$

qui exprime la nécessité, dans le cas d'une question portant sur l'état initial, d'inverser la transformation T pour obtenir l'état initial à partir de l'état final. D'où la solution au problème particulier de type 3.2 :

$$? = AJOUT\ 5\ RET\ 5\ (\ ?\ )\ = AJOUT\ 5\ (\ 9\ ) = 14$$

6.2. Exemple : Pierre a joué deux parties de billes avec Paul. A la première partie, il a gagné 12 billes, à la seconde partie Paul en a gagné 3. Que s'est-il passé en tout ?

La représentation cognitive de ce problème s'obtient à partir des archétypes cognitifs GAGNE et PERD , et la primitive sémantique de composition de deux processus :

état initial	$\longrightarrow$	état final
Pierre a une collection de billes	premier changement d'états	Pierre a cette collection de billes dans laquelle on insère 12 billes

succession de deux changements d'états ↓

état initial	$\longrightarrow$	état final
Paul a une collection de billes	deuxième changement d'états	Paul a cette collection de billes dans laquelle on insère 3 billes

L'identification de l'état final du premier changement d'états et l'état initial du second changement d'états ne peut être immédiatement effectuée, la recherche du type de problème nécessite donc un processus cognitif de *paraphrase* permettant de changer de représentation. Ce processus cognitif se traduit par la *loi sémantique* traduite en langue naturelle :

" Sachant que j et j' jouent une partie de billes et j gagne la collection d, j' perd la collection d "

La compilation des représentations intermédiaires se traduit ici par une substitution dans la représentation du deuxième changement d'états :

état initial	→	état final
Pierre a une collection de billes	premier changement d'états	Pierre a cette collection de billes dans laquelle on insère 12 billes

succession de deux changements d'états ↓

état initial	→	état final
Pierre a une collection de billes	deuxième changement d'états	Pierre a cette collection de billes à laquelle on enlève 3 billes

Le processus cognitif de *composition (3.2.3)* se traduit alors par l'application de la *loi sémantique* :

"Dans une succession de deux changements d'états, le changement obtenu a pour état initial celui du premier changement, l'état final du premier changement est l'état initial du second, son état final est l'état final du deuxième changement".

Par identification de l'état intermédiaire, nous obtenons la représentation :

état initial	→	état final
Pierre a une collection de billes	Changement d'états	Pierre a cette collection de billes dans laquelle on insère 12 billes, puis à laquelle on enlève 3 billes

On applique ensuite les *lois sémantiques* qui s'expriment en langue naturelle sous la forme:

"Soit une partie p de la collection c : le nombre d'éléments de la collection à laquelle on a ôté p est obtenu en retranchant le nombre d'objets de p au nombre d'objets de c".

"Soit une collection c, on y insère une collection c' : le nombre d'objets de la collection ainsi créée est obtenu en ajoutant au nombre d'objets de c le nombre d'objets de c'".

Le cardinal de la collection de l'état final est donc alors obtenu en ajoutant 12, puis en retranchant 3 au cardinal de la collection initale, ce qui nous permet de déterminer le type du problème :

RET 3 o AJOUT 12 = ? *type 6.1.1*

C'est donc un problème de la sixième catégorie (composition de AJOUT n et RET n'), qui sera résolu grâce à la loi sémantique correspondant à un théorème-en-acte :

RET n' o AJOUT n = AJOUT n o RET n' = AJOUT (SOUS n n') si n'< n

Notons que cette modélisation permet de prendre en compte d'une part les représentations ensemblistes (Riley et alii, 1983) mises en évidence dans les ***stratégies de compréhension*** grâce aux primitives sémantiques définies sur les collections : enlever (correspondant à take-out), insérer (correspondant à put-in) etc... et d'autre part les ***stratégies de comptage*** (counting-on, etc...). Le lien entre ces deux types d'opérateurs est explicité par des lois sémantiques, en voici une expression en langue naturelle[17] :

Exemple : *"Soit une collection c, on y insère une collection c' : la collection ainsi créée est la réunion disjointe des collections c et c', son nombre d'objets est obtenu en ajoutant au nombre d'objets de c le nombre d'objets de c'"*.

7. VALIDATION DIDACTIQUE DE LA MODÉLISATION

La modélisation du processus de résolution de l'élève "expert" que nous proposons a été élaborée à partir de résultats des recherches de psychologie cognitive, psycholinguistiques, et didactiques portant sur le domaine spécifique des problèmes additifs.

Pour valider cette modélisation, il nous faut maintenant construire des situations didactiques où le *contrat didactique*[18] fait explicitement référence à cette modélisation. Les situations didactiques seront conçues afin de permettre à l'élève d'accéder progressivement à une démarche analogue à celle qui est proposée dans cet article. Cette étude a mis en évidence la difficulté d'exprimer en langue naturelle les problèmes prototypiques : il semble que la langue naturelle n'est pas apte à bien exprimer le jeu des variables. Nous émettons l'hypothèse que ces problèmes prototypiques pourraient être présentés aux élèves avec une représentation sous forme de schéma pour améliorer la compréhension ; de même, les lois sémantiques pourraient être utilisées dans l'*enseignement* de la résolution des problèmes additifs. La distinction des différentes étapes nécessaires pour déterminer le type du problème constituerait les éléments d'un enseignement basé sur les *méthodes* de résolution.

Ces situations didactiques devront ensuite être expérimentées en classe de manière à tester la validité didactique de cette modélisation, à préciser l'interaction didactique, et à observer les comportements et les réactions des élèves. Dans (Guin, 1991), nous avons montré la nécessité d'une spécification didactique dès l'élaboration de l'environnement informatique d'apprentissage : en effet, un tutoriel intelligent est difficilement intégrable dans une classe si cette intégration n'a pas été prévue lors de la conception de l'environnement d'apprentissage. Cette spécification ne peut se faire qu'après l'expérimentation des situations didactiques. Le modèle de l'élève sera ensuite élaboré à partir des observations des comportements et des réactions des élèves dans le contexte d'expérimentation, il dépendra donc étroitement des choix didactiques effectués dans l'élaboration des situations didactiques. L'élaboration du modèle de l'élève exigera également une *interprétation* des *comportements observables* de l'élève pour modéliser ses conceptions[19] (Balacheff, 1991).

---

[17] Expression dans le formalisme applicatif : (INS (δn' c')) (δn c) = δ ((AJOUT n') (n)) (c $\cup$ c'), cette loi correspond à la procédure counting on.

[18] Etude des liens entre enseignant et élève qui déterminent, de façon très souvent implicite, le rôle de chacun et sont susceptibles d'affecter le produit de l'apprentissage.

[19] N. Balacheff a mis en évidence la nécessité de distinguer dans l'architecture des systèmes deux types de modélisation : le *modèle épistémique* (modélisation des conceptions de l'élève) s'obtenant, seulement après un *diagnostic* exigeant des choix, à partir du *modèle comportemental* de l'élève.

8. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons donné les grandes lignes d'une modélisation de la compréhension (pour l'élève "expert") des problèmes additifs basée sur la notion d'opérateur, qui tente de répondre aux exigences développées au paragraphe (2), et montré comment elle permet de réaliser, par une compilation de représentations, une simulation du processus de compréhension. Dans une autre étude (Guin, à paraître), nous détaillons, pour un énoncé additif, toutes les étapes de cette modélisation : les représentations applicatives et cognitives de l'énoncé additif, le choix à partir de la représentation cognitive du problème prototypique, les lois linguistiques et sémantiques intervenant dans le traitement des paraphrases. Pour celà, nous utilisons le formalisme applicatif, et les compilations des représentations intermédiaires sont exprimées grâce aux combinateurs de la logique combinatoire.

Nous avons proposé une modélisation, pour l'élève "expert"[20], de l'activité de compréhension orientée vers la résolution des problèmes additifs qui prend en compte les différents processus élémentaires cognitifs mis en évidence à partir des recherches didactiques et cognitives du domaine :

- l'interprétation des formes verbales, des marques temporelles (dans la compréhension linguistique de l'énoncé, qui sera détaillée dans l'étude annoncée),

- la composition et la paraphrase (dans la réduction à un problème prototypique),

- l'utilisation d'opérateurs sur les entiers naturels et l'importance des valeurs relatives des opérandes (dans la définition du type de problème).

- la recherche de théorème-en-acte (pour la résolution du problème).

Cette modélisation cognitive et didactique est une tentative de description explicite du *schème*[21] des problèmes additifs pour l'élève "expert" essayant d'intégrer les différents points de vue des linguistes, didacticiens et informaticiens : il s'agissait en effet de décrire complètement la conduite de l'élève "expert" dans la situation de résolution d'un problème additif, sous le point de vue du traitement de l'information, afin qu'elle puisse être intégrable à un environnement informatique. Cette modélisation cognitive et didactique doit être maintenant expérimentée avant une réalisation informatique ; l'expérimentation permettra de tester la validité didactique de cette modélisation : peut-on, grâce à une interaction didactique appropriée, amener l'élève à la démarche proposée précédemment pour l'élève "expert" ? La méthodologie de cette évaluation sera celle qui est actuellement utilisée en Didactique des Mathématiques. Si cette modélisation didactique est effectivement validée, la deuxième phase comportera l'élaboration du modèle de l'élève, nécessaire à une réalisation complète de l'environnement informatique d'apprentissage.

BIBLIOGRAPHIE

BALACHEFF N., La modélisation de l'apprenant en EIAO, le point de vue du didacticien, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol 4, (1991), IREM de Strasbourg.

CARPENTER T.P., MOSER J.M. 1983, The acquisition of addition and subtraction concepts, *Acquisition of mathematics concepts and processes*, (1983), New-York, Academic Press, 7-44

[20] Au sens de J.R. Anderson : expliciter comment l'élève " idéal " devrait se comporter dans cette situation.

[21] Voir paragraphe 3.2.1.

CARR B., GOLDSTEIN I., Overlay : A theory of modeling for Computer Aid Instruction, *Artificial Intelligence memo 406*, MIT, 1977.

CURRY H. B., FEYS R., *Combinatorial Logic*, vol 1, (1958), North Holland .

DARCEL N., ESCARABAJAL M.- C., OBAD : une utilisation des langages orientés objets en modélisation cognitive, *Rapport scientifique A.I.P - A.T.P.*, 1987.

DE CORTE E., VERSCHAFFEL L., Children's problem solving capacities and processes with respect to elementary arithmetic word problems, in De Corte et alii Eds, Learning and instruction, European research in an international context, vol 1, (1987), 300-308.

DELLAROSA-CUMMINS D., KINTSCH W., REUSSER K., WEIMER R., The role of understanding in solving word problems, *Cognitive psychology*, vol 20, (1988), 405-438.

DESCLÉS J.- P., De la notion d'opération à celle d'opérateur ou à la recherche de formalismes intrinsèques, *Mathématiques et Sciences humaines*, vol 76, (1981), 5-33.

DESCLÉS J.-P., Théorème de Church-Rosser et structuration des Langues naturelles, *Mathématiques Informatique et Sciences humaines*, vol 103, (1988), 67-92.

DESCLÉS J.-P., *Langages applicatifs, langues naturelles et cognition*, Paris, Hermès, 1990.

DESCLÉS J.-P., ABRAHAM M., PIOTROWSKI D., SEGOND F., Langage naturel et représentations cognitives : un problème d'architecture et de compilation , *Actes du Colloque de l'A.R.C.*, (1990), 290-303.

DUVAL R., Ecarts sémantiques et cohérence mathématique : Introduction aux problèmes de congruence, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol 1, (1988), IREM de Strasbourg, 7-23.

ESCARABAJAL M.- C., KAYSER D., NGUYEN-XUAN A., POITRENAUD S., RICHARD J.-F., Compréhension et résolution de problèmes additifs, *Actes du colloque de l'ARC*, Orsay, (1984), 159-187.

ESCARABAJAL M.- C., A propos de la validité des modèles de simulation de processus, in *J.-P. Caverni, Psychologie cognitive, modèles et méthodes*, (1988), Grenoble, P.U.G., 427-441.

ESFAHANI E., L'aspect sémantique des problèmes additifs, Thèse de Doctorat, Université Paris 7, 1989.

FREY L., Langages Logiques et processus intellectuels, in *Les modèles et la formalisation du comportement*, colloques internationaux du CNRS, (1967), Paris, Ed du CNRS, 327-345.

GINISTI J.-P. 1988, Présentation de la Logique Combinatoire en vue de ses applications, *Mathématiques Informatique et Sciences humaines*, vol 103, (1988), 45-66.

GLENDON A. LEAN, M. A. CLEMENTS, GINA DEL CAMPO , Linguistic and pedagogical factors affecting children's understanding of arithmetic word problems : a comparative study, *Educationnal Studies in Mathematics*, vol 21 n ° 2, (1990), 165-191.

GRIZE J.-B., *Logique Moderne III*, Paris, Mouton, Gauthier-Villars, (1973), 61-73.

GUIN D., Réflexions sur les logiciels d'aide à la démonstration en géométrie, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol 2 , (1989), IREM de Strasbourg, 89-109.

GUIN D., Nécessité d'une spécification didactique des environnements informatiques d'apprentissage, *Actes des 2 èmes journées E.I.A.O*, Cachan, 1991.

GUIN D., Une modélisation mathématique de la compréhension des énoncés additifs, (à paraître).

HELLER J. I., GREENO J. G., Semantic Processing of Arithmetic Word Problems, communication présentée à la conférence annuelle de Midwestern Psychological Association, Chicago, 1978.

HOC J.-M., L'apprentissage de l'utilisation des dispositifs informatiques par analogie à des situations familières, *Psychologie Française*, vol 32-4, (1987), 217-226.

KINTSCH W., GREENO G., Understanding and solving word arithmetic problems, *Psychological Review*, vol 92, (1985), 109-129.

MARTHE P., Problèmes de type additif et appropriation par l'élève des groupes additifs Z et D entiers relatifs et décimaux relatifs, Thèse de 3ème cycle, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, 1982.

NICAUD J.-F., VIVET M., Les tuteurs intelligents : réalisations et tendances de recherches, *T.S.I.* vol 7 n°1, (1988), AFCET-Bordas, 21-44.

PALIES O., CAUZINILLE-MARMECHE E., CAILLOT M., MATHIEU J., Simulation par système expert du fonctionnement cognitif, Application à l'EAO, *Actes du colloque Cognitiva*, 1985.

RILEY M. S., GREENO J.- G., HELLER J.- I., Development of children's problem-solving ability in arithmetic, *The development of mathematical thinking*, Ed H. P. Ginsburg, Academic Press, (1983), 153-196.

VERGNAUD G., DURAND C., Structures additives et complexité psychogénétique, *La Revue Française de Pédagogie*, vol 36, (1976), 28-43.

VERGNAUD G., *L'enfant , la mathématique et la réalité*, Peter Lang, Berne, 1981.

VERGNAUD G., Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation, *Psychologie française*, Armand Colin, (1985), 254-251.

VERGNAUD G., Questions de représentation et de formulation dans la résolution de problèmes mathématiques, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol 1, (1988), IREM de Strasbourg, 33-55.

VERGNAUD G., Psychologie du développement cognitif et Didactique des mathématiques, un exemple : les structures additives, *Petit X*, vol 22, (1989), IREM de Grenoble, 51-69.

9. ANNEXE : TABLEAUX DES TYPES DE PROBLÈMES

	Opérateurs	Types de problèmes	Solutions
1.1	ADD, $F(\mathbb{N},\mathbb{N})\mathbb{N}$	ADD : (a , b) ≥ ?	? = a + b
1.2		ADD : (a , ?) ≥ b	? = b - a
2.1	AJOUT n , $F(\mathbb{N})\mathbb{N}$	AJOUT b : a ≥ ?	? = a + b
2.2		AJOUT b : ? ≥ a	? = a - b
2.3		AJOUT ? : a ≥ b	? = b - a
3.1	RET n , $F(\mathbb{N})\mathbb{N}$	RET b : a ≥ ?	? = a - b
3.2		RET b : ? ≥ a	? = a + b
3.3		RET ? : a ≥ b	? = a - b

	Types de problèmes	Solutions
4.1	AJOUT a o AJOUT b = ?	? = AJOUT a + b
4.2	? o AJOUT b = AJOUT a	
4.2.1	avec a > b	? = AJOUT a - b
4.2.2	avec a < b	? = RET b - a
5.1	RET a o RET b = ?	? = RET a + b
5.2	? o RET b = RET a	
5.2.1	avec a > b	? = RET a - b
5.2.2	avec a < b	? = AJOUT b - a
6.1.	AJOUT a o RET b = ?	
6.1.1	avec a > b	? = AJOUT a - b
6.1.2	avec a < b	? = RET b - a
6.2.1	? o RET b = AJOUT a	? = AJOUT a + b
6.2.2	? o AJOUT b = RET a	? = RET a + b