MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

M. SCHÖNFINKEL

Sur les éléments de construction de la logique mathématique

Mathématiques et sciences humaines, tome 112 (1990), p. 5-26
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1990__112__5_0>

Math. Inf. Sci. hum., (28e année, n° 112, *1990*, p.5-26)

"SUR LES ÉLÉMENTS DE CONSTRUCTION DE LA LOGIQUE MATHÉMATIQUE"

de
M. SCHÖNFINKEL
(Traduction : Geneviève VANDEVELDE)
Analyse et notes par Jean-Pierre GINISTI[1]

RÉSUMÉ - *Il s'agit de présenter l'article de Schönfinkel "Über die Bausteine der mathematischen Logik", préparé pour la publication (1924) par H. Behmann, d'après une conférence de Schönfinkel en 1920, qui fonde ce que Curry nommera "la logique combinatoire". L'objectif principal du travail de Schönfinkel est l'élimination générale des variables (propositionnelles, prédicatives, individuelles), grâce à l'usage de plusieurs "fonctions particulières". On trouvera ici : (1) une introduction à l'article de Schönfinkel, (2) la traduction de l'article accompagnée de notes explicatives, (3) une conclusion critique.*

SUMMARY - Construction elements of mathematical logic.
It is a matter of presenting the paper of Schönfinkel "Über die Bausteine der mathematischen Logik", prepared for publication (1924) by H. Behmann, according to a lecture of Schönfinkel in 1920, which founds what will be called "combinatory logic" by Curry. The main purpose of Schönfinkel's work is the general elimination of variables (propositional, predicative, individual), thanks to the use of several "particular functions". One will find here : (1) an introduction to Schönfinkel's article, (2) the translation of the article accompanied by explanatory notes, (3) a critical conclusion.

L'article dont on trouvera ci-dessous la traduction française[2] est l'édition par Heinrich Behmann dans la revue *Mathematische Annalen* en 1924, sous le titre "Über die Bausteine der mathematischen Logik", d'une communication de Moses (Moïse) Schönfinkel faite le 7 décembre 1920 - il y a donc 70 ans - devant la Société Mathématique de Göttingen[3]. Il s'agit du texte qui fonde ce que Curry [1930] nommera la "logique combinatoire". Les trois derniers alinéas sont dus exclusivement à Behmann, comme l'indique la note qui s'y rapporte. Pour le reste du texte, il semble impossible de déterminer l'importance de la contribution de Behmann. Celui-ci indique seulement, dans la première note, qu'il est responsable de "l'élaboration [Durcharbeitung] formelle et stylistique" des idées de Schönfinkel.

Behmann est un mathématicien allemand, né en 1891, ancien élève de Hilbert, qui avait déjà publié dans *Mathematische Annalen* un article remarqué [1922] où était donné un test pour la

---

1 Professeur à l'Université Lyon III.

2 La responsabilité du commentateur s'y trouve engagée par la manière de comprendre et de rendre en français certains passages ou termes techniques. Nous remercions Springer Verlag d'avoir autorisé la traduction. On a choisi de la donner aussi littérale que possible.

3 Il en existe une traduction anglaise (par Stefan Bauer-Mengelberg) "On the building blocks of mathematical logic", dans Jean van Heijenoort [1967], p. 357-366, avec une présentation de Quine, p. 355-7. Les crochets autour d'un nombre, dans notre texte, signifient : "le travail, cité dans la bibliographie, publié l'année désignée par ce nombre". 1920 est aussi l'année où Łukasiewicz publie son article pionnier sur la logique à trois valeurs.

validité des formules du calcul des prédicats à un argument. Il a continué à s'intéresser aux problèmes de décision, mais il a travaillé aussi notamment sur les antinomies de la théorie des ensembles. Il est revenu sur la logique combinatoire, voir [1959], en unissant son formalisme à celui du calcul des prédicats. Schönfinkel est un mathématicien soviétique juif, mal connu, ancien élève de S.O. Satunovskij (qui défendait des idées intuitionnistes). Il est tombé malade mentalement (il l'était déjà en 1927 au moins, d'après Curry [1968], p. 296, note 4). Il est mort à Moscou en 1942, voir S.A. Janovskaja [1948], p. 31-34. La bibliographie de Church [1936], [1938] et celle des travaux soviétiques sur la logique mathématique et la philosophie des mathématiques 1917-1947, voir Janovskaja, ne lui attribuent qu'une autre publication, à savoir un article cosigné par Paul Bernays, l'un des proches de Hilbert, "Zum Entscheindungsproblem [le problème de la décision] der mathematischen Logik", paru dans *Mathematische Annalen* en 1928, p. 342-372 [4]. Les auteurs y démontrent que toute formule du calcul des prédicats à un argument, comportant k variables différentes de prédicat, est universellement valide si elle est valide dans un domaine de 2^k individus. Pour les formules comportant des prédicats à plusieurs arguments, ils trouvent encore des schémas qui sont universellement valides s'ils sont valides dans un domaine fini déterminable. L'article nous apprend (p. 349-50 et note 7) que Schönfinkel a eu l'idée de la méthode sur un cas, qu'il a fait un rapport sur son résultat devant la Société Mathématique de Göttingen pendant le semestre d'hiver 1922-23, que l'extension de la méthode est due à Bernays, ainsi que la rédaction [Abfassung] de l'article.

On notera que les travaux de Schönfinkel sont liés à ceux de l'école de Göttingen, haut lieu à cette époque des mathématiques et de la logique, dont Hilbert était le maître et auprès duquel séjournaient de nombreux étrangers (Curry, entre autres). Ils sont publiés dans une revue qui a souvent recueilli les contributions de Hilbert et de ses disciples[5]. Il est vraisemblable que Frege (dont la thèse de doctorat a été soutenue à Göttingen en 1873) que Hilbert connaissait et citait, d'ailleurs, a exercé une influence sur Schönfinkel, notamment dans sa conception de la fonction, comme on le verra, et bien qu'il ne le cite jamais que d'une manière très générale[6].

L'article qui nous intéresse est divisé en six paragraphes. Nous présenterons d'abord une analyse de chacun d'eux, puis nous accompagnerons la traduction de notes explicatives, enfin nous reviendrons en conclusion sur quelques points.

Le § 1 indique que l'auteur se propose de réduire le nombre des primitifs d'un système axiomatique de logique en prolongeant la réduction obtenue par Sheffer de tous les connecteurs propositionnels à un seul d'entre eux, $|$, l'incompatibilité. Il montre d'abord qu'une forme généralisée de ce connecteur (notée par une barre indicée) permet d'exprimer les deux quantificateurs, (x), (Ex), dont il faut disposer pour obtenir un système complet symboliquement dans le cadre du calcul des prédicats, tout en continuant d'exprimer chacun des connecteurs possibles.

Convenons d'écrire : (α) $(x)(\overline{f(x)} \vee \overline{g(x)})$, ou, équivalemment, $(x)(f(x) \mid g(x))$,

[4] Une photographie de Schönfinkel se trouve dans Barendregt [1984] et la même photographie dans Reid [1970], p. 238 (sans mentionner son nom) mais où il apparaît au sein d'un groupe d'invités à la réunion organisée à Göttingen pour le soixantième anniversaire de Hilbert (1922).

[5] La revue *Mathematische Annalen* était alors publiée par Felix Klein, David Hilbert, Albert Einstein et Otto Blumenthal. De nombreux auteurs étrangers y écrivaient régulièrement, notamment des mathématiciens soviétiques (il y en a plusieurs dans le numéro de 1924 qui contient l'article de Schönfinkel).

[6] Rappelons que la philosophie s'illustra aussi à Göttingen, surtout par l'enseignement que Husserl y donna de 1901 à 1916.

comme $f(x)\,|^{x}\, g(x)$

(β) $\overline{f(x)}$ dans $(x)(\overline{f(x)} \vee \overline{g(x)})$ ou dans une expression équivalente, comme $f(x)\,|^{y} f(x)$, $\overline{g(x)}$ comme $g(x)\,|^{y} g(x)$ [7].

Schönfinkel établit sur la formule-modèle ci-dessous (qui peut être aussi une sous-formule) comment un quantificateur universel peut s'exprimer autrement qu'il n'est classique de le faire. Nous ajoutons les justifications qu'il ne donne pas :

(1) $(x)\, f(x)$	
(2) $(x)\,(f(x) \vee f(x))$	par idempotence de " v "
(3) $(x)\,(\overline{\overline{f(x)}} \vee \overline{\overline{f(x)}})$	par introduction dans (2) de doubles négations
(4) $\overline{f(x)}\,|^{x}\, \overline{f(x)}$	en supprimant selon (α) la première négation sur les deux occurrences de $f(x)$ dans (3)
(5) $(f(x)\,|^{y} f(x))\,|^{x}\,(f(x)\,|^{y} f(x))$	selon (β) dans (4)

$f(x)$ étant en somme $A[x]$ (une proposition quelconque comportant x mais à titre de représentant d'une variable quelconque, voir [21], et toute barre pouvant être remplacée par une barre indicée, même dans le calcul des propositions, voir [7], on peut en effet admettre qu'on a exprimé dans tous les cas le quantificateur universel (marqué par une paire de parenthèses autour d'une variable isolée) et tout connecteur propositionnel par le même signe (ou plutôt par un même type de signe puisque la barre peut être indicée par telle ou telle variable). Notons que l'auteur ne prétend pas avoir éliminé le quantificateur universel et sa variable ; cela ne sera fait qu'à la fin de l'article, grâce à des moyens supplémentaires, en prolongeant ce premier résultat. Dans "$|^{x}$" la position de x correspond aux parenthèses de (x), mais "$|^{x}$" symbolise conjointement ce que disent (x) et "$|$". En traitant de la même manière l'expression $(x)\overline{f(x)}$, équivalente à $(Ex)\, f(x)$, on exprime aussi le quantificateur existentiel par la barre indicée, voir[25].

Schönfinkel annonce qu'en allant plus loin, il est parvenu à éliminer toute variable (propositionnelle, prédicative, individuelle), grâce à trois "fonctions particulières" qu'il va définir. Il justifie son programme par le fait qu'une variable n'est qu'une marque-place, voir [28].

Le § 2 expose un "moyen auxiliaire" : celui de réduire les fonctions à plusieurs arguments (à la fois au sens des mathématiques générales et au sens, instauré par Frege, de "prédicats logiques") à des fonctions à un seul argument, ce qui simplifiera certains traitements.

On sait qu'on désigne souvent (et abusivement) de la même façon, par exemple par $f(x)$, la fonction et la valeur que prend la fonction pour un argument indéterminé x. Schönfinkel, au contraire, distingue bien f, la fonction, de ce qu'il écrit fx, la valeur de la fonction f pour

---

[7] L'auteur n'explique pas (β). On peut le faire ainsi : $\overline{f(x)}$ ne peut pas s'écrire seulement $f(x)\,|\, f(x)$, par définition en langage $|$, puisque le seul connecteur disponible doit être désormais une barre indicée, ni $f(x)\,|^{x} f(x)$, qui signifierait $(x)\,\overline{f(x)}$, puisque $(x)\,(\overline{f(x)} \vee \overline{g(x)}) \rightarrow ((x)\,\overline{f(x)} \vee (x)\,\overline{g(x)})$ n'est pas une loi. Les mêmes remarques valent pour $\overline{g(x)}$. Mais on peut placer devant $\overline{f(x)}$ et devant $\overline{g(x)}$ un quantificateur qui, employant une variable absente de la formule, ne changera pas le sens de celle-ci, soit $(y)\,\overline{f(x)}$, $(z)\,\overline{g(x)}$, ou plus simplement $(y)\,\overline{g(x)}$, comme si on avait $(x)\,((y)\,\overline{f(x)} \vee (y)\,\overline{g(x)})$ afin de retrouver l'emploi unique de la barre indicée : $f(x)\,|^{y} f(x)$, $g(x)\,|^{y} g(x)$. Celle-ci convient en outre dans le calcul des propositions puisque $a\,|\,b$, par exemple, sera $(x)\,(a\,|\,b)$, c'est-à-dire $a\,|^{x}\, b$.

x [8]. Il montre que si on permet à une fonction de prendre pour valeur une autre fonction (et pas seulement la valeur que prend une autre fonction ou un élément-objet d'un certain ensemble), la réduction annoncée s'obtient facilement.

Soit F une fonction à deux arguments. Schönfinkel se représente $F(x,y)$ comme signifiant $(fx)y$: la fonction F équivaut à une autre fonction, f, à un argument, dont la valeur pour l'argument x est une fonction, notée fx, à un argument, y, et qui prend pour valeur par hypothèse celle de F appliquée à (x,y). La nouvelle fonction f a donc pour valeur (a pour effet de produire) une fonction fx dont la valeur, pour son argument y, est $F(x,y)$. La méthode se généralise aux fonctions à nombre supérieur d'arguments [9].

Dans cette analyse, certes, fx exprime une fonction et non seulement la valeur de la fonction f pour x, contrairement à la stricte correction des expressions que l'auteur respecte (en général) par ailleurs. Mais s'il emploie ces commodités, en parlant par exemple "en bref [de] la fonction *a*—", il sait les éviter en parlant, au lieu de la fonction fx, de la fonction G dont fx n'exprime que la forme [10].

Le § 3 définit et commente cinq "fonctions particulières" qui vont permettre l'élimination des variables (liées), mais qui, n'étant pas toutes indépendantes, seront réduites ultérieurement à deux d'entre elles. Si on les reformule sur une suite dont les éléments portent toujours les mêmes noms, x, y, z, désignant n'importe quelle expression (intuitivement) bien formée du langage considéré (ce que ne fait pas Schönfinkel qui obtient ces fonctions en raisonnant sur des exemples différents), et en omettant toujours les parenthèses qui associent à gauche (ce que ne fait pas Schönfinkel systématiquement), il vient :

	effets produits (de droite à gauche)
$Ix = x$	exprime comme une fonction et par un symbole de plus une expression quelconque
$Cxy = x$	introduit la nouvelle variable y
$Txyz = xzy$	permute (par ex. quand x est une fonction, ses arguments)
$Zxyz = x(yz)$	supprime des parenthèses associant à droite, libère z de parenthèses
$Sxyz = xz(yz)$	fusionne les deux occurrences de z, libère z de parenthèses.

8 Il écrit correctement "la fonction f ", "la fonction G", bien qu'il dise "la fonction x—y" (§ 2), "la fonction ψxy" (§ 3, 3), etc. , sans doute pour abréger "la fonction —", "la fonction ψ à deux arguments x,y". Notons qu'il faudrait aussi une notation, distincte de fx, pour désigner l'intervention elle-même de la fonction f sur x (qui produit fx).

9 En outre, Schönfinkel abrège généralement $(fx)y$ en fxy, $((fx)y)z$ en $fxyz$, etc., en ne conservant toujours dans une expression que les parenthèses qui n'associent pas les symboles deux par deux à partir de la gauche.

10 En notation classique, les parenthèses dans $f(x)$, $f(x,y)$, etc. indiquent qu'il s'agit de la valeur que prend f pour x ou pour x,y, etc., ce que Whitehead et Russell [1910]*30 notaient plus explicitement R‘y (si R est la fonction carré, R‘3 est 9), (℩x)(xRy). Puisque Schönfinkel comprend désormais $f(x,y)$ comme $(f(x))(y)$, et l'écrit fxy, comme il écrit fx, $fxyz$, etc., il sous-entend donc l'opérateur, disons "*", qui obtient une certaine valeur en faisant porter f sur x. Curry [1930] le nomme "application" [Anwendung] ; fxy... s'explicite donc comme $(f*x)*y$... ; $(f*x)$ est aussi valeur et fonction.

L'utilité des effets produits apparaîtra au § 5 [11].

Le signe d'égalité "signifie que les expressions à gauche et à droite expriment la même chose". On peut donc s'autoriser à substituer à toute expression (ou à toute sous-expression) ayant la forme du membre de droite (respectivement, du membre de gauche) d'une de ces égalités une expression ayant la forme du membre de gauche (respectivement, du membre de droite) de la même égalité. Il faut donc comprendre en somme, d'une part ... (Ix) ... = ... x... ; ... (Cxy) ... = ... x ..., etc., où il se peut qu'aucune expression n'occupe la place des points (et où les parenthèses peuvent faire défaut selon la convention admise sur le parenthésage), et d'autre part, ... (Ix) ... : ... x ... ; ... x ... : ... (Ix) ..., etc., comme règles associées aux égalités correspondantes et autorisant, sous les mêmes conditions, certaines transformations.

Il s'agit bien d'employer une règle de substitution [Einsetzung], si on entend par là un type de règle de déduction qui obtient d'une expression donnée une expression identique à elle à certaines transformations près (que des clauses particulières, ici les cinq égalités données, explicitent pour chaque règle précise de substitution). La règle de substitution admise dans l'article s'apparente à la règle dite de "substitution des équivalents" (ou mieux de "remplacement" ; le texte dit aussi, d'ailleurs, "Ersetzung") des calculs classiques. Elle permet de remplacer une au moins des occurrences d'une sous-expression (pas nécessairement de toutes comme dans une substitution proprement dite) par une expression posée ou établie "équivalente", en un sens large du mot. Les règles autorisant les remplacements mutuels du défini et du définissant en sont des cas particuliers. Schönfinkel les emploie aussi (par ex. au § 4, 3 lorsqu'il remplace Z par son définissant en langage C, S). On distinguera :
(1) la procédure qui remplace ainsi Z par $S(CS)C$
(2) la procédure qui remplace par exemple x par Cxy ou Cxy par x, c'est-à-dire selon une des cinq égalités données, qui est une substitution au sens indiqué
(3) la procédure qui remplace x (ou y, z) par une expression bien formée quelconque, par exemple par I dans $Ix = x$, (§ 3,1) ou par Cx (§ 4,1) qui n'est pas une substitution au même sens du mot, malgré l'emploi du même mot par Schönfinkel. Puisque x, y , z, ont le statut de métavariables, en effet (voir [21]), ils figurent indifféremment tel ou tel terme, et, on se borne à dire lequel, sans faire usage d'une règle de substitution.

Le § 4 établit que C et S suffisent à définir les autres "fonctions particulières" qui ont été présentées. On a par exemple $Ix = SCCx$ que Schönfinkel abrège ensuite en $I = SCC$ [12]. Il est clair que I n'est pas défini par SCC au sens où il est défini par $Ix = x$, malgré certains flottements de la terminologie, voir [49]. On remarquera que Schönfinkel utilise " = " de plusieurs manières. Dans chacun de ces cas, les deux membres de l'égalité "expriment la même chose", ce qui explique l'unicité du signe, mais les conditions permettant son emploi sont différentes. On distinguera : (1) l'emploi de " = ", au § 1, au sens précis ... = ... Df (ou ... $=_{df}$ ...), dans par

[11] Les symboles I et S désignent toujours aujourd'hui les mêmes fonctions. En revanche, C s'écrit K, T s'écrit C, Z s'écrit B. Pour une présentation de la logique combinatoire dans son état actuel, voir par exemple J.P. Ginisti [1988]. Les cinq "fonctions particulières" sont dites "combinateurs", voir cependant [45]. Rappelons qu'il faut lire : $((Cx)y) = x$; $(((Tx)y)z) = ((xz)y)$, etc..

[12] Montrons sur $SCCx$ comment on effectue une expression donnée (on obtient d'elle l'expression qui lui est égale selon les "égalités de définition") : (1) on rapporte à la première "fonction particulière" à gauche, ici S, autant d'éléments qu'en impose son "égalité de définition" (trois pour S, et qui sont ici C, C, x), (2) on applique l'égalité qui concerne cette "fonction particulière" (S écrit le premier élément de la suite, C, puis le troisième, x, puis l'association par des parenthèses du deuxième, C, et du troisième, x. Il vient $SCCx=Cx(Cx)$, (3) on procède de la même manière pour l'expression obtenue et ainsi de suite tant que la procédure est applicable. Une expression entre parenthèses constitue un seul élément. C, dans $Cx(Cx)$, a les deux éléments qu'il exige, x, Cx ; il vient donc x. SCC a le même effet que I sur x.

exemple $a = a \mid a$, autorisé essentiellement par l'équivalence ~ tautologique des deux membres (voire seulement au sens "autrement dit'"), (2) l'emploi de " = " pour les "fonctions particulières" où le signe " = " intervient décisoirement (bien qu'en rapport à un objectif), ce que signifie "égalité de définition". I est défini par $Ix = x$ au sens où on dit qu'une table de vérité définit (caractérise) un connecteur, (3) l'emploi de " = " entre deux expressions dont l'une résulte de l'autre par une substitution, et selon l'un des trois sens de ce mot, comme dans $Cx(Cx) = SCCx$, (4) l'emploi de " = ", apparenté à (1), dans une langue ou C, S sont les seules fonctions primitives, entre deux expressions dont l'une a la forme $Xx...$, l'autre la forme $Yx...$, où X est une "fonction particulière" (autre que C et S), $x...$ la suite des (méta)variables nécessaire à son emploi, Y une juxtaposition (une combinaison applicative) de C et de S, comportant éventuellement des parenthèses associant à droite, et telles qu'en effectuant $Yx...$, on obtienne ultimement la même expression qu'en effectuant $Xx...$. Cet emploi de " = " pourrait être distingué en écrivant $Xx... = Yx...$ Df (ou $Xx... =_{\text{df}} Yx...$), (5) l'emploi de " = " qui résulte de la règle implicite : si $Xx... = Yx...$ alors $X = Y$, qu'on peut appeler (*Ext*) puisqu'elle fait appel à une propriété d'extensionnalité. Dans l'article, elle n'intervient que pour reformuler une expression $Xx... =_{\text{df}} Yx...$. Comme $x...$ est dans ce cas la suite finie imposée à X, elle ne fait pas difficulté.

Outre $I = SCC$, Schönfinkel obtient également $Z = S(CS)C$, $T = S(ZZS)(CC)$, ce qui termine la preuve.

Le § 5, afin de pouvoir traiter du calcul des prédicats, introduit une nouvelle "fonction particulière", la fonction U telle que $Ufg = fx \mid^x gx$. Il esquisse la preuve que toute formule logique (du premier ou du deuxième ordre dans ses exemples) peut s'exprimer par I, C, T, Z, S (donc par C, S) et U. Il met en œuvre la méthode suivante :

(1) on traduit d'abord chaque formule et ses sous-formules en leur donnant la forme $... \mid^x ...$, où x sert de nom pour une variable quelconque (voir [21]), selon la procédure du § 1,
(2) on donne ensuite à chacune de ses sous-formules successivement la forme que prend le membre de gauche dans $Ufg = fx \mid^x gx$, f et g servant aussi de noms pour des fonctions (ou prédicats) quelconques et à nombre quelconque d'arguments, comme si on avait $U(f...)(g...) = f ... x \mid^x g ... x$, où "..." représente 0, 1,...,n (méta)variables, différentes de x. Pour montrer comment on peut y parvenir, remarquons que la transcription d'une expression de forme $fx \mid^x gx$ en une expression de forme Ufg exige, comme le montre l'"égalité de définition" de U, que dans chaque expression ou sous-expression de forme $... \mid^x ...$:

(α) il y ait une occurrence de x dans chacun des deux membres

(β) il n'y en ait qu'une

(γ) cette occurrence soit à la fin de chaque membre, ce qui suppose que x ne soit pas enclos dans des parenthèses associant à droite, comme il l'est dans $y(zx)$.

Dès lors, si (α) n'est pas satisfait, on introduit x en employant C ; $fx \mid^x gy$, par exemple, devient $fx \mid^x C(gy)x$. Si (β) n'est pas satisfait, on fusionne par S les différentes occurrences de x ; $ZUfx(gx) \mid^x ...$, par exemple, devient $S(ZUf)gx \mid^x ...$. Si (γ) n'est pas satisfait, on place x à la fin par T ; $fxy \mid^x gx$, par exemple, devient $Tfyx \mid^x gx$, et si x est enclos dans des parenthèses, on l'en extrait par Z ; $... \mid^x U(fy)(gx)$, par exemple, devient

... $|^x Z(U(fy))gx$. On peut avoir à utiliser plusieurs de ces transformations et plusieurs fois. Schönfinkel n'impose pas d'ordre dans leur intervention.

(3) on remplace l'expression obtenue par celle de forme Ufg correspondante, et ainsi de suite, étape par étape, en "remontant" vers le connecteur principal[13].

Si la formule est du deuxième ordre, on procède pour tout prédicat quantifié qu'elle comporte f, g,... (quelque soit le nombre des arguments) comme on vient de le faire dans le premier ordre pour toute variable quantifiée x,y,... . On élimine donc dans ce cas f,g,..., par U comme on le faisait pour x,y,..., c'est-à-dire en permettant à x dans $Ufg = fx|^x gx$ d'être une variable de prédicat, disons h (quantifiée universellement dans la formule originale).

La méthode ne permet d'éliminer que les variables qui sont liées (qu'elles soient prédicatives ou individuelles), mais puisque les formules ouvertes sont seulement des ingrédients de formules fermées, comme le remarque Quine [1967], on peut considérer que la notion de variable a été réellement analysée et éliminée. Une formule fermée du premier ordre se traduit par une expression ne comportant que C, S, U, l'opérateur non noté d'application, $*$, ses variables de prédicat et éventuellement des parenthèses associant à droite. Une formule fermée du deuxième ordre par C, S, U, $*$ non noté, et éventuellement des parenthèses associant à droite[14].

Le § 6 présente trois réductions plus avancées : la première réduit les trois fonctions suffisantes C, S, U à une fonction unique et nouvelle, J, en posant - par hypothèse et non à la manière de (Ext) - que $S=JJ$, que $C=JS$, c'est-à-dire $J(JJ)$, que $U=JC$, c'est-à-dire $J(J(JJ))$. Toute formule fermée s'exprime alors par une suite de J et de parenthèses à la place de C,S,U , mais cette réduction est jugée arbitraire par Schönfinkel (voir [69]).

Les deux autres méthodes sont dues à Behmann. L'une consiste à renvoyer U à la fin de l'expression et en une seule occurrence grâce aux "fonctions particulières", puisqu'on peut le faire pour un symbole quelconque, puis à le sous-entendre (voir [72]). Toute formule fermée s'exprimerait ainsi par une suite de C,S, de variables de prédicats (si elles sont libres), de $*$, non noté, et éventuellement de parenthèses associant à droite.

La dernière réduction vise à supprimer en outre les parenthèses, par le seul recours à Z, mais cette réduction est erronée comme Behmann l'a reconnu ultérieurement (voir [74]).

---

13 Notons que pour obtenir jusqu'ici une expression sans x,y,..., à savoir $X = Y$ Df, il fallait appliquer (Ext) à $Xx... = Yx...$ Df, les cinq "fonctions particulières" ne le faisant pas elles-mêmes. Au contraire, on obtient ici directement par la nouvelle "fonction particulière" U, éventuellement employée plusieurs fois, une expression sans x,y,..., mais le principe est comparable : il s'agit de grouper les variables en fin d 'expression, de part et d'autre de " = " ou de " $|^x$ ", où on peut alors les sous-entendre quand elles constituent une même suite. On ne pourrait pas le faire si elles demeuraient à l'intérieur de l'expression, dispersées ou non, car les intervalles vides qu'elles laisseraient leur équivaudraient.

14 Schönfinkel ne reprend pas le cas des formules du calcul propositionnel. Bien que la méthode ne puisse éliminer que les variables indicées en haut d'une barre et bien que celles-ci soient toujours x,y,..., jamais a, b, ... (voir § 1), il est possible de traduire toute formule du calcul propositionnel en éliminant ses variables propres a, b, ... si on place chacune d'elles à la fin de l'expression et en une seule occurrence (comme le fait Behmann ci-dessous pour U). On peut alors les sous-entendre, voir un exemple dans Kneale [1964], p. 524. On suppose dans ce cas $Uab = a|^x b$, U est seulement la notation préfixée de $|^x$, comme D est classiquement la notation préfixée de $|$. Cette dernière suffit, d'ailleurs, si seul le calcul des propositions intéresse.

SUR LES ÉLÉMENTS DE CONSTRUCTION DE LA LOGIQUE MATHÉMATIQUE DE M. SCHÖNFINKEL DE MOSCOU[1)]

Il est conforme à la nature de la méthode axiomatique telle qu'elle est aujourd'hui reconnue avant tout à travers les travaux de Hilbert, non seulement de tendre en ce qui concerne le nombre et le contenu des *axiomes* à une limitation la plus étroite possible, mais aussi de tenter de réduire au maximum le nombre des *notions* de base non définies, en recherchant des notions qui soient de préférence appropriées pour construire toutes les autres notions du domaine de connaissance en question. Naturellement, on devra, dans cette tâche, en ce qui concerne l'exigence de simplicité des notions posées au départ, faire preuve de modestie[15].

Comme on le sait, les *connecteurs propositionnels*[16] fondamentaux de la logique mathématique, que je rends ici dans la notation de Hilbert et telle qu'elle a été employée dans ses cours[17] :

$$\bar{a},\quad a \vee b,\quad a \,\&\, b\,,\quad a \rightarrow b,\quad a \sim b$$

(lisez : "non a", "a ou b", "a et b", "si a alors b", "a est équivalent à b")[18], ne se laissent nullement tirer d'un seul d'entre eux et ne peuvent être tirés de deux d'entre eux que si on pose la négation et l'un quelconque des trois connecteurs suivants, comme non définis de base (de ces trois sortes de réduction, Whitehead et Russell ont utilisé la première et Frege la troisième)[19].

Sheffer[2)] a découvert tout récemment que, néanmoins, la réduction à un seul connecteur fondamental est tout à fait possible, à condition de ne pas se limiter aux connecteurs pris directement dans la série ci-dessus. Ainsi, si on choisit en effet comme connecteur fondamental "non a ou non b", ce qui veut dire "des propositions a et b une au moins est fausse", ce qui peut être écrit, avec les signes ci-dessus, dans les deux formes équivalentes.

$$\bar{a} \vee \bar{b} \quad \text{et} \quad \overline{a \,\&\, b}$$

et, comme nouveau signe qui lui convient

$$a \,|\, b,$$

1) Les idées suivantes furent exposées par l'auteur le 7 décembre 1920 devant la Société Mathématique à Göttingen. Leur élaboration formelle et stylistique fut assurée par H. Behmann à Göttingen, pour cette publication.

2) Am. Math. Soc. Trans. 14 (1913), p. 481.

15 Ce programme est évidemment caractéristique du courant dit "formaliste", mais, à la manière dont il s'exprime dans le premier alinéa, plutôt dans la mouvance de Frege et de Russell que dans celle de Hilbert (dont l'originalité est l'investigation métathéorique).

16 Le texte dit exactement "connexion" [Verknüpfung] mais "connecteur" appartient à un vocabulaire consacré.

17 Les traités logiques de Hilbert sont postérieurs à 1924.

18 On peut se demander si les symboles de Schönfinkel appartiennent à la langue-objet ou à la métalangue (ceux de la première n'étant pas alors présentés), si a, b, par exemple, désignent les propositions elles-mêmes ou sont des noms de propositions, simples ou complexes. Il semble bien que cette alternative soit insuffisante. Schönfinkel ne marque pas la dénivellation entre langue-objet et métalangue, pas plus que ne le font Whitehead et Russell qui écrivent par exemple la règle de détachement : $\vdash p$ et $\vdash p \supset q$ alors $\vdash q$, bien que p,q soient dans leur symbolisme des propositions de la langue-objet. En fait, a,b, chez Schönfinkel, comme p,q, chez Whitehead-Russell, sont des variables de la langue-objet qui servent aussi de noms pour des propositions quelconques de la langue-objet. Autrement dit, a est une proposition de la langue-objet mais ce qu'on dit de a vaut pour b, etc. et même pour une proposition complexe traitée comme un tout.

19 Whitehead et Russell dans [1910], Frege dans [1879].

alors il est clair que

$$\overline{a} = a \mid a\,, \qquad a \vee b = (a \mid a) \mid (b \mid b),\ ^{20}$$

à partir de quoi, puisque

$$a \& b = \overline{\overline{a} \vee \overline{b}}, \qquad (a \to b) = \overline{a} \vee b\,, \qquad (a \sim b) = (a \to b) \;\&\; (b \to a)$$

la réduction est dans son principe effectuée.

De tout cela, il est maintenant possible d'une manière plus remarquable encore de saisir aussi, par une modification convenable du connecteur fondamental, les deux propositions d'ordre supérieur

$$(x) f(x) \quad \text{et} \quad (Ex) f(x),\ ^{21}$$

c'est-à-dire "tous les individus ont la propriété *f* " et "il y a un individu qui a la propriété *f* ", en d'autres termes, les deux opérations (x) et (Ex) qui constituent avec les précédentes, prises ensemble, comme on sait, un système complet, au sens de l'axiomatique, de connecteurs[22] fondamentaux de la logique mathématique.

Utilisons à présent, en effet, comme relation fondamentale

$$(x)[\overline{f(x)} \vee \overline{g(x)}] \quad \text{ou} \quad (x)\,\overline{f(x) \;\&\; g(x)}$$

et écrivons pour ceci

$$f(x) \mid^{x} g(x),$$

cela donne évidemment (puisque nous pouvons traiter formellement les constantes comme des fonctions à un argument [23] :

$$\overline{a} = a \mid^{x} a\,, \qquad a \vee b = (x)\,(\overline{\overline{a}} \vee \overline{\overline{b}}) = \overline{a} \mid^{x} \overline{b} = (a \mid^{y} a) \mid^{x} (b \mid^{y} b),$$

$$(x)\, f(x) = (x)\,(\overline{\overline{f(x)}} \vee \overline{\overline{f(x)}}) = \overline{f(x)} \mid^{x} \overline{f(x)} = (f(x) \mid^{y} f(x)) \mid^{x} (f(x) \mid^{y} f(x)),\ ^{24}$$

à partir de quoi, puisque

$$(Ex)\, f(x) = \overline{(x)\,\overline{f(x)}}$$

la nouvelle assertion aussi est établie[25].

Les succès rencontrés jusqu'à présent dans la voie qui a été prise nous incitent à pousser plus loin notre essai. On est amené, l'idée à première vue peut sembler extrêmement audacieuse sans doute, concernant les propositions logiquement générales quelles qu'elles soient - pour d'autres l'exigence n'aurait évidemment aucun sens[26] - à essayer d'éliminer aussi, par une

---

20 On sait qu'un langage dont les primitifs sont $\vee$, $^{-}$ (celui de Whitehead-Russell [1910]) est fonctionnellement complet - "complet au sens de l'axiomatique" - . Le signe " = " dans ce passage a le sens " $=_{\mathrm{df}}$".

21 On peut considérer x comme une variable individuelle de la langue-objet mais qui sert aussi (comme métavariable) pour désigner une variable quelconque $x, y, \ldots$. De même, f est un prédicat à un argument de la langue-objet, mais ce qui est dit de lui vaut pour tout autre, $g, h, k, \ldots$. Pour que le traitement présenté concerne toute formule quantifiée, il faut même que $f(x)$ représente en fait toute proposition où la variable quantifiée, quelle qu'elle soit, est présente, comme si on avait $(x)\, A\, [x]$.

22 "Connecteur" est pris au sens large (comme, d'ailleurs, lorsqu'on applique le mot à la négation).

23 Chaque constante k est identifiée à une fonction qui pour tout argument, x, a la valeur k ; $\overline{a}$ est $(x)\overline{a}$, $a \vee b$ est $(x)\,(a \vee b)$, etc., les variables a, b permettant ici l'expression dite "contextuelle" de $^{-}$, $\vee$.

24 Voir notre introduction. Notons l'emploi de la loi de double négation (que récuseraient les intuitionnistes). Whitehead-Russell [1910] $*$ 10.02, $*$ 10.03, prolongeant une notation de Peano, abrégeaient déjà $(x) . \phi x \supset \psi x$ et $(x). \phi x \equiv \psi x$ en $\phi x \supset_{x} \psi x$, $\phi x \equiv_{x} \psi x$, mais, pour exprimer ainsi à la fois le connecteur et le quantificateur, il faudrait employer aussi $\vee_{x}$, etc., alors que $\mid^{x}$ chez Schönfinkel le fait par un seul signe (au nom près de la variable, mais comme c'est également le cas pour $\supset_{x}$, etc.). Sur "=", voir p.9-10 (1).

25 On a donc : $(Ex)\, f(x) = \overline{(x)\,\overline{f(x)}} = (x)\,\overline{f(x)} \mid (x)\,\overline{f(x)} = (f(x) \mid^{x} f(x)) \mid^{y} (f(x) \mid^{x} f(x))$. Dans le symbolisme employé, des crochets valent pour des parenthèses, le trait de la négation lie comme des parenthèses et en dispense, " = " a la force liante la plus grande et dispense aussi de parenthèses.

26 Les propositions qui ne sont pas "logiquement générales" sont celles dans lesquelles une lettre n'appartenant

réduction appropriée, les notions fondamentales restantes encore de proposition, de fonction propositionnelle et de variable[27]. Examiner de plus près une telle possibilité et la suivre, ce serait précieux non seulement du point de vue de la méthode qui est de tendre vers la plus grande unité de pensée possible, mais aussi d'un certain point de vue philosophique ou, si l'on veut, esthétique, dans la mesure où en effet la variable dans la proposition logique n'est rien de plus qu'une marque pour distinguer comme allant ensemble certaines places d'argument et des opérateurs, et par là, a donc le caractère d'une simple notion auxiliaire, à vrai dire inadéquate à la nature constante, "éternelle" de la proposition logique[28].

Il m'apparaît particulièrement remarquable que l'on puisse atteindre aussi l'objectif que l'on s'est proposé, et cela ici par la réduction à trois signes fondamentaux.

§ 2

Atteindre cette réduction dernière et plus profonde, cela demande maintenant à vrai dire une série de moyens auxiliaires et un ensemble de faits en rapport qui devront d'abord être mis en place et expliqués.

Pour cela, il sera nécessaire de laisser notre problème au point atteint précédemment et de développer auparavant une sorte de *calcul des fonctions* dans un sens plus général qu'il n'est par ailleurs habituel.

Par *fonction*, on entend bien entendu dans le cas le plus simple une correspondance entre les éléments de n'importe quel domaine de grandeurs, le domaine de l'argument, et ceux d'un domaine des valeurs de fonction (la plupart du temps, à vrai dire, conçu comme coïncidant avec le premier), de manière qu'à chaque valeur de l'argument corresponde au plus une valeur de la fonction. Cette notion doit être élargie ici et maintenant : des fonctions elles-mêmes peuvent apparaître non seulement comme valeurs d'arguments, mais aussi comme valeurs de fonction. Nous désignons la valeur d'une fonction f pour la valeur de l'argument x par une simple juxtaposition[29] des signes de la fonction et de l'argument, c'est-à-dire par

$$fx$$

---

pas à l'ensemble des constantes possède une occurrence non affectée par un quantificateur, au moins sous-entendu (est "libre"). Par hypothèse, cette occurrence désigne un item du domaine d'interprétation exprimable par une constante, bien que non précisé, et en ce sens n'est donc pas réellement une variable (malgré l'ancienne dénomination de "variable réelle" et le fait que l'item puisse varier (ou plutôt différer) d'une sémantique à une autre).

[27] C'est-à-dire les notions respectivement symbolisées dans l'article par $a,b,...,f,g,h,k,...,x,y,z,...$. "Fonction propositionnelle" désigne ici ces fonctions, ou prédicats, qui sont employés pour constituer des propositions. Sur l'ambiguité de l'expression, voir Blanché [1970] p. 334, note 2. Les lettres de ces trois ensembles sont des variables au sens large du mot employé à la fin de l'alinéa, celui auquel il faut éliminer les variables. Celles du dernier ensemble sont dites "variables" en un sens plus restreint (variables individuelles).

[28] Ce passage est celui qui motive l'entreprise de Schönfinkel. A ce titre, il est capital. Dans une expression comme $(x+y) = (y+x)$, si elle est conçue comme "logiquement générale", on ne parle que de l'addition et de l'égalité, c'est-à-dire des constantes. Les variables sont de simples procédés pour rapporter à des opérateurs des opérandes, comme $(\ + \ ) = (\ + \ )$ le ferait graphiquement. Le "platonisme" de Schönfinkel, ici, peut être celui de Frege, qui contestait par ailleurs l'idée qu'à une variable comme telle correspondrait aussi une réalité mais qui varierait [1904]. Sur les essais antérieurs pour éliminer les variables, voir Quine [1967], p. 355.

[29] La "juxtaposition" vaut donc pour un opérateur (comme, dans certains symbolismes propositionnels et algébriques, ab, xy valent pour a & b , $x \times y$). Nous écrivons celui-ci " $*$".

Les *fonctions à plusieurs arguments* se laissent réduire sur la base de notre définition[30] élargie de la fonction à des fonctions à un seul argument, de la manière suivante :

Nous comprenons par exemple

$$F(x,y)$$

comme une fonction du seul argument y, non plus comme une fonction donnée fixe, mais au contraire comme une fonction variable qui, selon sa forme, est dépendante de x (ici, bien entendu, il s'agit d'une dépendance de la *fonction*, donc de la correspondance même, non pas, disons, de la dépendance qui va de soi de la *valeur* de la fonction à l'égard de l'argument). En mathématiques, on a coutume de parler ici d'une fonction qui dépend aussi d'un paramètre, et d'écrire, disons,

$$G_x(y).$$

Nous pouvons considérer cette fonction G elle-même - sa forme pour ainsi dire - comme la valeur (valeur de fonction) d'une nouvelle fonction f telle que $G = fx$.

D'où nous écrivons dans notre symbolisme

$$(fx)y$$ [31]

ou, en convenant, comme cela par exemple est courant dans la théorie des séries infinies, que les parenthèses qui entourent l'extrémité gauche d'une telle forme symbolique peuvent être enlevées, plus simplement

$$fxy,$$

où la nouvelle fonction f doit être bien distinguée de la précédente, F [32].

Je voudrais faire mieux comprendre la transformation qui vient d'être décrite : je l'applique à la fonction numérique spéciale $x — y$. Si on considère l'expression comme étant la fonction de y seul, alors celle-ci a la "forme" x —, et signifie donc "la différence entre x et n'importe quelle grandeur donnée", grâce à quoi celle-ci se représente comme $(x —)y$. L'essentiel ici est qu'on n'a pas à penser les valeurs comme substituées simultanément pour x et y, mais d'abord seulement la valeur a, disons, pour x ; par cet intermédiaire, on obtient en premier lieu la fonction avec la valeur $a — y$ (en bref : la fonction a —), de sorte que maintenant le remplacement de y par la valeur fixe b, disons, est acceptable.

fx est donc en ce cas la valeur d'une fonction qui, après substitution d'une valeur pour x, ne produit pas encore un objet du domaine fondamental (au cas où un tel objet était considéré comme valeur de $F(x,y)$), mais qui produit en revanche une fonction dont l'argument est à présent y : c'est-à-dire f est une fonction dont l'argument n'a besoin d'être soumis à aucune limitation, mais dont la valeur de fonction est de nouveau une fonction [33]. La transformation

---

30 "Begriffsbestimmung". Schönfinkel suit une méthode très proche de celle de Frege [1893] § 36, au langage près, sans qu'on puisse affirmer qu'il la connaisse : Frege y admet qu'on obtient une fonction à un argument lorsqu'on pourvoit une fonction à deux arguments du premier d'entre eux, et qu'on obtient un objet seulement dans une deuxième étape.

31 Soit $F(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$. Comprenons F comme une fonction, dénommée G, mais qu'on ne peut énoncer qu'en employant x (ce que veut dire "qui, selon sa forme [Gestalt] est dépendante de x", c'est-à-dire dans sa configuration graphique). G dépend donc de chaque valeur possible de x, traité comme un paramètre, ce qu'on peut écrire G_x. En cela, elle est donc une "fonction variable" puisqu'on a G_1, G_2, etc. . Dans l'exemple, $G_1 = 1 + 2y + y^2$, $G_2 = 4 + 4y + y^2$, etc. qui ne sont pas encore des objets du domaine, des nombres, mais des fonctions, et telles que pour chaque valeur de y, $G = fx$ prend la valeur $F(x,y)$. Notons que F appliqué à x seulement n'a pas de sens ; c'est f qui en a un.

32 Si on entend par "série" [Reihe] la somme indiquée d'une séquence de termes $a_1, a_2, \ldots$, il est courant et commode d'écrire $a_1 + a_2 + a_3 \ldots$ pour $((a_1 + a_2) + a_3) \ldots$, notamment en cas d'infinité où $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ évite une expression comme $\ldots((\ldots(a_1 + a_2) + \ldots) + a_n) + \ldots$.

33 Whitehead et Russell commentent cette méthode dans l'introduction à la deuxième édition [1925] des *Principia Mathematica*, p. XXI-II, (en ne citant l'article de Schönfinkel que dans la bibliographie du chapitre). Ils soulignent l'intérêt de la réduction mais l'écartent comme paraissant peu compatible avec leur théorie des types.

décrite ci -dessus, nous l'appliquerons désormais à des fonctions de plus d'une variable, ou nous la considérerons effectuée, en sorte que celles-ci prennent d'une manière générale la forme

$$fxyz...$$

qui, comme il a été dit déjà, devra être prise comme abréviation pour

$$(((fx)y)z)...$$

§ 3

Il faut introduire à présent une série de *fonctions particulières* [34] de nature très générale. Je les nomme : la fonction d'identité I, la fonction de constance C, la fonction de permutation T, la fonction de composition Z et la fonction de fusion S [35].

1. Par la *fonction d'identité I*, il doit être entendu cette fonction complètement déterminée dont la valeur d'argument n'est soumise à aucune limitation et dont la valeur de fonction correspond toujours à la valeur de l'argument, et par là tout objet et toute fonction sont associés à eux-mêmes. Elle est ainsi définie par l'égalité [36]

$$Ix = x,$$

dans laquelle le signe d'égalité n'est pas pris comme l'équivalence logique au sens de la définition usuelle en calcul des propositions logiques mais signifie que les expressions à gauche et à droite expriment la même chose, c'est-à-dire que la valeur de la fonction Ix est toujours la même que la valeur de l'argument x, quoi qu'on veuille substituer à x [37] (on aurait ainsi par exemple $II = I$) [38].

2. Supposons désormais que la valeur de l'argument soit à nouveau quelconque sans

[34] "Individuellen Funktionen". Particulières dans leurs formulations, générales dans leurs applications.

[35] Les symboles I et Z sont les initiales de leur nom en allemand [Identitätsfunktion, Zusammensetzungsfunktion], T et S sont les premières lettres qui diffèrent dans leur nom [Vertauschungsfunktion, Verschmelzungsfunktion]. C pour Konstanzfunktion s'explique sans doute par le fait que cette fonction n'est pas une fonction constante (ou exprimée par une constante) par opposition aux quatre autres qui seraient alors des fonctions variables (ou exprimées par des variables). Bien qu'il soit courant de dire "fonction constante" pour une correspondance qui associe par exemple à tout réel x un réel a tel que $f(x) = a$, l'expression est en effet ambiguë. C'est la valeur de la fonction qui est constante et non , d'une manière qui lui serait propre, la fonction. Schönfinkel préfère d'ailleurs la nommer "fonction de constance", et comme il y a "d'identité", "de permutation", etc..

[36] "Gleichung". Nous préférons "égalité" à "équation" car il n'y a pas d'inconnue dans les expressions.

[37] Lorsqu'ils apparaissent dans les "égalités de définition" de I, C, etc. , les symboles x, y, z ont le même statut qu'antérieurement puisqu'ils se rapportaient à des fonctions et puisque, précisément, I, C, etc. sont des "fonctions particulières". A nouveau, aussi, x, y, z servent en même temps de métavariables (voir [21]), mais dans un sens plus fort désormais : x, y, z pouvant désigner dans ce contexte toute expression (intuitivement) bien formée. Pour cette raison, et aussi parce que l'objectif est d'éliminer les variables (liées) $x, y, ...$ du calcul des prédicats et du calcul des fonctions par le moyen de $Ix = x$, $Cxy = x$, etc. où $x, y, ...$ ne sont donc pas susceptibles d'être éliminés, il serait préférable de disposer d'un autre jeu de symboles (par exemple $x', y', ...$) appartenant à la métalangue, et d'écrire $Ix' = x'$, $Cx'y' = x'$, etc. . Il deviendrait alors clair de donner à x' le contenu f, à y' le contenu x, par exemple. A défaut, on considèrera x, y, z, quand ils sont dans les "égalités de définition", comme des homonymes de x, y, z des calculs classiques. Bien sûr, une formalisation de la métalangue pourrait éliminer aussi les métavariables x', y', z' par la méthode que Schönfinkel emploie pour éliminer les variables de la langue-objet, mais cette méthode utiliserait des métamétavariables.

[38] Comme le remarque Church [1941] p. 2 : on a souvent nié que le domaine des arguments d'une fonction f puisse comprendre la fonction f elle-même, et on a raison de le faire si la fonction est définie comme une correspondance entre deux domaines (d'arguments et de valeur) antérieurement donnés. On a tort si on considère "l'opération ou règle de correspondance, qui constitue la fonction, comme étant d'abord donnée, et le domaine des arguments alors déterminé comme consistant des choses auxquelles l'opération est applicable". Or ce point de vue convient en outre à la considération de la notion générale de fonction puisqu'il la traite en elle-même. Sur $\Phi(A)$ où A est Φ, voir Frege [1879].

limitation, tandis que, indépendamment de cette valeur, la valeur de la fonction soit toujours la valeur fixe a. Cette fonction est de son côté dépendante de a, donc de la forme Ca. Du fait que sa valeur de fonction est toujours a, on écrira :

$$(Ca)y = a.$$

Et, en laissant maintenant a variable aussi, nous obtenons :

$$(Cx)y = x \quad \text{ou} \quad Cxy = x$$

comme l'égalité de définition de la *fonction de constance* C. Cette fonction C est évidemment du genre de celle que nous avons traitée p. 15 [39] car ce n'est qu'en substituant une valeur fixe à x qu'elle fournit une fonction avec l'argument y. Dans l'application pratique, elle nous rend service : elle permet d'introduire une grandeur x comme variable "muette" [40].

3. On peut évidemment aussi, à l'inverse, considérer toujours une expression

$$fxy$$

comme obtenue de

$$F(x,y)$$

où F est déterminé de manière unique par le f donné. Si on écrit maintenant cette expression d'autre part comme

$$gyx,$$

en considérant y comme paramètre, alors cette nouvelle fonction aussi est donnée de manière unique par F et donc indirectement aussi par f.

C'est pourquoi nous pouvons comprendre la fonction g comme étant la valeur d'une fonction T pour la valeur de l'argument f. Cette *fonction de permutation* T a comme argument une fonction de la forme φxy, et la valeur de la fonction

$$\psi = T\varphi$$

est cette fonction ψxy, dont la valeur ψxy coïncide avec φyx pour toutes les valeurs d'argument x, y, pour lesquelles φyx a un sens. Nous écrivons cette définition en bref :

$$(T\varphi)xy = \varphi yx\,,$$

où les parenthèses peuvent de nouveau manquer [41].

La fonction T offre la possibilité de modifier l'ordre des membres d'une expression, et par là même elle permet de pallier jusqu'à un certain degré le manque de la loi commutative [42].

4. Si à la place de l'argument d'une fonction f apparaît la valeur (dépendante de x) d'une autre fonction g, alors

$$f(gx)$$

dépend de façon évidente également de x et peut par conséquent être considéré comme la valeur d'une troisième fonction F qui est déterminée de manière unique par f et g. En analyse, comme c'est bien connu, on parle alors improprement d'une "fonction de fonction" - il faudrait dire : une fonction d'une valeur de fonction - et on qualifie F de fonction "composée" de f et

[39] On a $C_x\,y$ comme on a $G_x\,y$.

[40] x est une variable "muette" ("blind" qui signifie "aveugle" ou "fictif" dans des contextes non mathématiques) parce qu'il s'agit d'un paramètre (une constante non spécifiée), autrement dit d'une pseudo-variable. La fonction C "introduit" x comme variable muette en ce sens qu'elle permet de faire usage d'un tel x dans le langage formel, mais c'est bien y qu'elle "introduit" dans une expression, par emploi de droite à gauche de l'"égalité de définition".

[41] Schönfinkel écrit $T\varphi xy$ plutôt que $Txyz$ pour montrer que l'intérêt de T sera en général de permuter les arguments d'une fonction. Il écrit $T\varphi xy$ plutôt que $Tfxy$ parce qu'il emploie des métavariables explicites pour désigner les fonctions dans les "égalités de définition", ce qu'il ne faisait pas pour leurs arguments x, y, z.

[42] Il va s'agir de placer x en fin d'expression. Quand φ est une fonction commutative, on le peut en écrivant φyx à la place de φxy. Quand elle n'est pas commutative (ou quand on traite d'une fonction quelconque) $T\varphi yx$ le fera, tout en exprimant φxy.

g. Ainsi la fonction F est, de son côté, la valeur d'une fonction déterminée Z' de f et g.

Nous pourrions donc définir :

$$[Z'(\varphi,\chi)]\, x = \varphi(\chi x).$$

Cependant, conformément à notre convention antérieure, nous préférons remplacer Z' par la fonction correspondante à un argument et obtenir par conséquent comme égalité de définition de la *fonction de composition* Z :

$$Z\varphi\chi x = \varphi(\chi x) \; {}^{43}.$$

A l'aide de la fonction Z, les parenthèses peuvent être déplacées à l'intérieur d'une expression plus vaste (non pas à proprement parler éliminées puisqu'elles sont toujours sous-entendues pour le moment) ; elle agit donc de la même façon que la loi associative qui n'est justement pas ici satisfaite [44].

5. Si dans

$$fxy$$

on substitue à y la valeur d'une fonction g, à savoir la valeur prise pour le même x que celui qui apparaît comme argument de f, on a alors l'expression

$$fx(gx)$$

que, pour le moment, nous allons écrire un peu plus explicitement :

$$(fx)(gx).$$

Ceci est naturellement la valeur d'une fonction de x seul, ainsi

$$(fx)(gx) = Fx,$$

où

$$F = S'(f,g)$$

dépend à nouveau d'une manière complètement déterminée des fonctions f et g données. En conséquence nous avons :

$$[S'(\varphi,\chi)\,]\, x = (\varphi x)(\chi x)$$

ou bien, d'après la transformation utilisée aussi au cas précédent,

$$S\varphi\chi x = (\varphi x)(\chi x)$$

comme égalité de définition de la *fonction de fusion* S [45].

Il sera bon de faire mieux comprendre cette fonction au moyen d'un exemple pratique.

[43] La composée de χ par φ s'écrit ordinairement $(\varphi \circ \chi)$; on a $(\varphi \circ \chi)(x) = \varphi(\chi(x))$. La formule de Schönfinkel correspond à celle-ci quand on note "$\circ$" de manière préfixée et par Z', en omettant les parenthèses autour de x. Quand on remplace Z' par la fonction unaire Z (selon la méthode du § 2), les parenthèses (carrées) qui associent à gauche se sous-entendent. Une autre fonction S', reformulée comme S, est définie ensuite sur le même modèle.

[44] Une expressions applicative $x(yz)$ voit ses parenthèses déplacées vers la gauche quand on la remplace par l'"expression plus vaste" $Zxyz$, car cela signifie $((Zx)y)z$, comme si l'application était associative, ce qu'elle n'est pas.

[45] On appelle aujourd'hui "combinateurs" ces "fonctions particulières" (voir [11]), mais la différence n'est pas seulement de vocabulaire. Traitées comme des combinateurs, I, C, etc. sont mieux définies par des règles, dites de "récriture", où une flèche (qui n'est pas une implication) prend la place du signe "=" pour indiquer que I, C, etc. sont des opérateurs transformant la suite qu'ils précèdent comme l'indique le membre de droite, $Ix \to x$, etc. Rien n'est affirmé de la converse. Schönfinkel, au contraire, substitue, il ne récrit pas. L'égalité qu'il emploie est évidemment celle de la théorie classique des fonctions, $y = f(x)$. Le fait qu'aujourd'hui on note souvent les fonctions en l'évitant ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \curvearrowright 3$, par ex.) pour identifier la fonction en elle-même, n'est pas étrangère à cette différence (x devient 3 par f comme xy devient x par C). On remarquera que "$\to$" est plus fort que "=" ; si $x \to y$ alors $x = y$, mais on peut avoir $x=y$ sans que $x \to y$. Ainsi a-t-on $x=Cxy$ mais non $x \to Cxy$. Certes, c'est bien aussi l'action d'un opérateur qui permet chez Schönfinkel le remplacement de x par Cxy, par exemple (C dans l'un des deux sens de l'égalité élimine y), mais si le passage de x à Cxy s'autorise d'un opérateur, il ne s'effectue pas par un opérateur. Sur l'égalité comme identité des contenus, voir Frege [1879] §8.

Prenons pour fxy la valeur ${}^{x}\log y$ (c'est-à-dire le logarithme de y de base x) et pour gz la valeur de fonction $1 + z$, il s'ensuit que $(fx)(gx)$ est de manière évidente ${}^{x}\log(1 + x)$, [46] c'est-à-dire la valeur d'une fonction de x, laquelle est liée de manière unique aux deux autres fonctions données, précisément par notre fonction générale S.

L'intérêt pratique de la fonction S consiste évidemment en ceci qu'elle permet de réduire de plusieurs à une seule les occurrences d'une variable - et dans une certaine mesure également d'une fonction particulière [47].

§ 4

Pour mener à bonne fin notre problème logico-symbolique [48], il s'avèrera important de constater que les cinq fonctions particulières du calcul des fonctions I,C,T,Z,S, définies ci-dessus, ne sont pas indépendantes les unes des autres, plus exactement que deux d'entre elles, à savoir C et S suffisent à définir les autres. On a ainsi les relations suivantes ici :

1. D'après les définitions [49] des fonctions I et C :

$$Ix = x = Cxy$$ [50].

Puisque y est arbitraire, nous pouvons lui substituer un objet ou une fonction quelconques, ainsi par exemple Cx. Ce qui donne

$$Ix = (Cx)(Cx).$$

D'après la définition de S, cela signifie encore

$$SCCx,$$

de sorte que nous obtenons

$$I = SCC$$ [3)].

Au demeurant, dans l'expression SCC le dernier signe C n'apparaît pas du tout de manière essentielle. Mettons ci-dessus, en effet, pour y, non pas Cx, mais la fonction arbitraire φx, il en résulte d'une manière semblable

$$I = SC\varphi,$$

---

3) Cette réduction me fut communiquée par M. Boskowitz, elle avait déjà été donnée antérieurement par M. Bernays dans la forme un peu moins simple $(SC)(CC)$.

---

46 Soit $log_x y$, $log_x (1 + x)$.

47 Si dans $xz(yz)$, z est une "fonction particulière", disons I, on a bien $xI(yI) = SxyI$. Soit une expression, plus précisément, où x est C, et pouvant être effectuée, $CI(yI)w$, il vient $SCyIw$ qui réduit bien les occurrences d'une "fonction particulière", à savoir de I. La méthode est supposée par Behmann (voir [72]) qui opère sur des suites de C,S. "Dans une certaine mesure" s'explique sans doute par le fait que le résultat peut être transitoire, l'effectuation pouvant faire disparaître toute "fonction particulière" : $SCyIw = CI(yI)w = w$, et par le fait que le recours à S peut neutraliser son effet réducteur : $CS(yS) = SCyS$.

48 En tant qu'il porte sur la réduction des symboles primitifs et dans leur contenu logique.

49 Schönfinkel employait "Definition" dans "égalité de définition" au §3. Il emploie maintenant "Erklärung" pour désigner $Ix = x$, etc. afin d'éviter l'ambiguïté sur "définition" signalée dans notre introduction. Hilbert distinguait aussi la définition relative à un système formel ("Definition") des élucidations qui l'accompagnent ou d'une définition informelle ("Erklärung").

50 Notons qu'on a $Ix = x = Cxy$, donc $Ix = Cxy$ mais non $I = C$, la règle (Ext) n'étant pas applicable, I et C n'ayant pas la même suite.

où à φ n'importe quelle fonction peut être ainsi substituée[4)] [51].

2. D'après la définition de Z, on a

$$Zfgx = f(gx).$$

En outre, grâce aux transformations déjà utilisées :

$$f(gx) = (Cfx)(gx) = S(Cf)gx = (CSf)(Cf)gx \text{ [52]}.$$

La fusion sur f donne

$$S(CS)Cfgx,$$

soit

$$Z = S(CS)C.$$

3. D'une manière tout à fait semblable,

$$Tfyx = fxy$$

se laisse, en outre, transformer en

$$\begin{aligned} fx(Cyx) &= (fx)(Cyx) = Sf(Cy)x = (Sf)(Cy)x = Z(Sf)Cyx \\ &= ZZSfCyx = (ZZSf)Cyx = (ZZSf)(CCf)yx = S(ZZS)(CC)fyx. \end{aligned}$$

D'où il découle

$$T = S(ZZS)(CC).$$

Si on substitue ici à Z l'expression trouvée plus haut, alors T se réduit également à C et S.

§ 5

Nous allons maintenant utiliser nos résultats dans le cas particulier du calcul logique dans lequel les éléments fondamentaux sont les individus et les fonctions sont les fonctions propositionnelles [53]. Nous avons besoin d'abord d'une autre fonction particulière qui est propre à ce calcul. L'expression

$$fx \mid^x gx,$$

où f et g sont des fonctions propositionnelles à un argument - nous pouvons nous limiter à de telles fonctions, conformément à une remarque antérieure [54] - est de toute évidence une fonction déterminée des deux fonctions f et g, donc de la forme $U(f,g)$ ou, d'après notre

---

4) Seulement une fonction telle, à vrai dire, qu'elle ait un sens pour tout x.

---

51 Notamment CC, comme le fait Bernays, mais aussi SS, SC, etc., puisque φ est seulement un élément requis pour l'effectuation et qui disparaît par action de C : φ doit avoir "un sens pour tout x" car, à défaut, $SC\varphi x$ qui n'aurait pas de sens pour un certain x ne pourrait être tenu pour égal à Ix qui en a un pour tout x, comme chacune des fonctions I, C, etc.. La propriété est satisfaite pour toute combinaison de C, S. Il serait maladroit de choisir pour φ une fonction h quelconque qui supposerait une fonction primitive de plus (il faudrait écrire $I = SCh$).

52 On vérifie plus facilement une succession d'égalités en commençant par la dernière, en l'effectuant (ce qui revient à traiter "=" comme "$\rightarrow$", voir [45]), et ainsi de suite en "remontant" (on supprime les parenthèses associant à gauche), les "égalités de définition" déterminant une seule expression lorsqu'on les applique de gauche à droite, $Ix = x$, alors que x peut être Ix,Cxy, etc.. On a ici $CSf(Cf)gx = S(Cf)gx$, etc.. Cela établit bien les égalités car si $x \rightarrow y$, alors $x = y$.

53 "fonctions propositionnelles", c'est-à-dire "prédicats".

54 $fx \mid^x gx$ exprime en réalité toutes les expressions de la forme $f\ldots x \mid^x g\ldots x$, par exemple $fyx \mid^x gyzx$ qui deviendrait $U(fy)(gyz)$, parce que toute fonction est à un argument, $f\ldots x$, selon le § 2, $f\ldots$ (et $g\ldots$) pouvant à leur tour en représenter une ou plusieurs autres.

principe de transformation Ufg [55]. Ainsi nous avons

$$Ufg = fx \,|^{x}\, gx,$$

où f et g sont à présent naturellement des fonctions propositionnelles, comme l'égalité de définition de la *fonction d'incompatibilité U* [56].

Le fait remarquable à présent consiste en ceci que chaque formule logique se laisse exprimer par nos seules fonctions particulières I, C, T, Z, S, U, donc en particulier déjà par C, S et U.

Tout d'abord, chaque formule logique se laisse exprimer au moyen du symbolisme généralisé de la barre, par où les variables liées (apparent variables[57]) se trouvent aux extrémités supérieures des barres. Cela vaut sans réserve, ainsi pour des propositions de n'importe quel ordre et aussi quand interviennent des relations. Ensuite, la fonction U peut par un emploi convenable des fonctions constantes qui restent, s'introduire étape par étape à la place du symbole de la barre.

On ne donnera pas ici de justification complète, mais on commentera seulement le rôle des différentes fonctions particulières dans cette réduction.

Grâce à la fonction C, on peut parvenir à ce que les deux expressions à gauche et à droite de la barre soient des fonctions du même argument.

Ainsi par exemple, l'expression dépendante de f,g et y

$$fx \,|^{x}\, gy$$ [58],

où x ne figure donc pas à droite, devrait être récrite comme

$$fx \,|^{x}\, C(gy)\, x$$ [59].

En revanche, si x vient à droite à une autre place[60], alors il se laisse mettre à la fin au moyen de la fonction T, par où, le cas échéant, grâce à la fonction Z, il est libéré de parenthèses et, au cas où il devrait figurer à plusieurs reprises, il doit fusionner grâce à la fonction S. Ainsi nous avons par exemple :

$$fx \,|^{x}\, gxy = fx \,|^{x}\, Tgyx = Uf(Tgy).$$

Ou, pour prendre un exemple un peu plus complexe :

$$(fxy \,|^{y}\, gxy) \,|^{x}\, (hxz \,|^{z}\, kxz) = U(fx)(gx) \,|^{x}\, U(hx)(kx).$$

Ici, par exemple, l'expression devant la barre est à développer de la manière suivante :

$$U(fx)(gx) = ZUfx(gx) = S(ZUf)gx.$$

L'ensemble de l'expression devient par ce moyen :

---

55 $U(f,g)$ comme il y avait $F(x,y)$, $Z'(\varphi,\chi)$, $S'(\varphi,\chi)$; Ufg comme il y avait fxy, $Z\varphi\chi$, $S\varphi\chi$. U est l'initiale de "Unverträglichkeitsfunktion".

56 U porte le même nom que $|$, mais c'est l'incompatibilité généralisée $|^{x}$ qui incorpore l'expression d'un quantificateur universel. L'"égalité de définition" de U diffère de celle des cinq autres "fonctions particulières". Il ne lui correspondrait pas un combinateur proprement dit, des éléments absents de la suite de U apparaissant par l'action de U, c'est-à-dire dans le membre de droite.

57 "variables apparentes" (en anglais dans le texte), par opposition à "variables réelles", voir [26]. C'est la terminologie de Whitehead-Russell. Consultez notre introduction pour la suite.

58 On part donc de $(x)\,(fx \,|\, gy)$, ou d'une formule équivalente.

59 De là, on obtiendrait $Uf(C(gy))$ - avec y parce qu'il est libre.

60 A une autre place qu'à la fin (du membre considéré).

$$S(ZUf)gx\,|^{x}S(ZUh)kx=U[S(ZUf)g][S(ZUh)k] \quad ^{61}.$$

Si dans le dernier exemple, f et g étaient identiques, nous aboutirions à l'expression

$$S(ZUf)f.$$

Pour pouvoir accomplir ici la fusion sur f, nous utilisons la fonction I en continuant le calcul :

$$S(ZUf)f = S(ZUf)(If) = [ZS(ZU)f](If) = S\,[ZS(ZU)]If \quad ^{62}.$$

Comme exemple[63] pratique de ce qu'affirme ce paragraphe, nous traitons la proposition suivante : "pour tout prédicat, il y a un prédicat incompatible avec lui ", c'est-à-dire "pour tout prédicat f il y a un prédicat g, tel que la proposition fx & gx n'est vraie pour aucun objet x".

Dans le symbolisme de Hilbert la phrase s'écrit :

$$(f)(Eg)(x)\,\overline{fx \,\&\, gx}.$$

Ceci devient d'abord[64] :

$$(f)(Eg)(fx\,|^{x}\,gx)$$

et, en écrivant le jugement particulier comme la négation d'un jugement universel[65] :

$$(f)(g)\,\overline{\overline{fx\,|^{x}gx}} \quad \text{ou} \quad (f)(g)\,\overline{\overline{fx\,|^{x}gx \,\&\, fx\,|^{x}gx}}\,.$$

Ceci est :

$$(f)(fx\,|^{x}\,gx)\,|^{g}\,(fx\,|^{x}gx) \quad ^{66}.$$

Si on procède de la même manière pour f [67] il résulte, en outre :

$$(f)\overline{(fx\,|^{x}gx)\,|^{g}(fx\,|^{x}gx) \,\&\, (fx\,|^{x}gx)\,|^{g}(fx\,|^{x}gx)}$$
$$= [(fx\,|^{x}gx)\,|^{g}(fx\,|^{x}gx)]\,|^{f}[(fx\,|^{x}gx)\,|^{g}(fx\,|^{x}gx)].$$

---

61 (1) On exprime avec U les deux membres de l'expression. Il vient $U(fx)(gx)\,|^{x}U(hx)(kx)$, (2) dans les deux membres de cette nouvelle expression (qui ont la même structure), il faut réduire les deux occurrences de x à une seule et la placer à la fin, pour pouvoir s'exprimer avec U, c'est-à-dire employer S. Or, le premier membre est égal à $ZUfx(gx)$, où gx n'est pas affecté par Z, et ceci est égal à $S(ZUf)gx$, qui donne satisfaction, (3) on traite le deuxième membre sur le même modèle, (4) on exprime toute l'expression avec U.

62 C'est-à-dire si on partait de $(fxy\,|^{y}\,fxy)\,|^{x}(hxz\,|^{z}\,kxz)$, on obtiendrait le même résultat mais avec f à la place de g, $S(ZUf)f$, (pour le premier membre). On peut donc souhaiter éliminer une des occurrences de f. Pour cela, il faut employer un (autre) S, en donnant une expression de forme $Sxyf$, ce qui en suppose une de forme $xf(yf)$. En substituant (If) à f, on obtient la partie de forme (yf), puis on constitue par Z la partie de forme xf. Toute l'expression serait $U(S(ZS(ZU))If)(S(ZUh)k)$. Les variables permettant d'effectuer y sont tacites, par U.

63 Il est étonnant que Schönfinkel ne reprenne pas auparavant le traitement de $(x)\,f(x)$, c'est-à-dire de $(fx\,|^{y}fx)\,|^{x}(fx\,|^{y}fx)$ qu'il avait provisoirement laissé en l'état au § 1. En ne conservant que l'un des deux membres identiques de $|^{x}$ et en abrégeant par W l'expression $SS(SC)$ qui sur une suite xy est égale à xyy, nous obtenons : $C(fx)y\,|^{y}C(fx)y = U(C(fx))(C(fx)) = U(ZCfx)(ZCfx) = WU(ZCfx) = Z(WU)(ZCf)x$. L'expression complète est donc $U(Z(WU)(ZCf))(Z(WU)(ZCf))$. On aurait d'autre part pour $(Ex)\,fx$, c'est-à-dire $(fx\,|^{x}fx)\,|^{y}(fx\,|^{x}fx)$, en ne conservant que l'un des deux membres identiques de $|^{y}$, $Uff = C(Uff)y$. L'expression complète est donc : $C(Uff)y\,|^{y}C(Uff)y = U(C(Uff))(C(Uff))$. Cela obtient l'élimination des quantificateurs et de leurs variables.

64 On va éliminer les quantificateurs dans l'ordre de leur subordination décroissante, (x) puis (Eg) - exprimé en langage "quantificateur universel-négation" pour être traduisible en U - enfin (f). On applique plusieurs fois $A \mid B = \overline{A \,\&\, B}$ Df. Une formule surlignée est entre parenthèses et niée.

65 Et où la formule située dans la portée du quantificateur est elle-même niée. Puis on applique $(g)\,\overline{(A\,|\,B)}$: $(g)\,((A\,|\,B)\,|\,(A\,|\,B))$.

66 Car $(g)\,(A\,|\,B)$ devient $A\,|^{g}B$ comme $(x)\,(A\,|\,B)$ devient $A\,|^{x}B$.

67 Selon le schéma : $(f)\,\overline{A \,\&\, B} = A\,|^{f}B$.

A présent, le symbole de la barre se révèle être l'unique signe de connecteur logique. Si nous introduisons maintenant la fonction d'incompatibilité U, alors nous obtenons d'abord :

$$[(Ufg) \mid^{g} (Ufg)] \mid^{f} [(Ufg) \mid^{g} (Ufg)]$$

et ensuite :

$$[U(Uf)(Uf)] \mid^{f} [U(Uf)(Uf)]$$ [68].

Or :

$$U(Uf)(Uf) = (ZUUf)(Uf) = S(ZUU)Uf,$$

grâce à quoi l'expression ci-dessus se change en :

$$[S(ZUU)Uf] \mid^{f} [S(ZUU)Uf],$$

mais c'est-à-dire :

$$U[S(ZUU)U]\ [S(ZUU)U].$$

§ 6

On ne peut étendre librement la réduction, autant qu'on peut le voir, au-delà des symboles C, S et U.

D'une manière purement schématique, on pourrait assurément même remplacer C, S et U par une fonction unique, en introduisant la nouvelle fonction J au moyen de la stipulation : [69]

$$JC = U, \quad JS = C, \quad Jx = S,$$

où x est un objet quelconque distinct de C et de S. Tout d'abord, nous posons que J est, de son côté, distinct de C et de S, vu que J n'admet que trois valeurs de fonction, alors que C comme S en admet une infinité[70]. Nous avons par conséquent :

$$JJ = S, \quad J(JJ) = JS = C, \quad J[J(JJ)] = JC = U,$$

grâce à quoi la réduction est en effet opérée. Cependant, celle-ci, à cause de son caractère de toute évidence arbitraire, peut sans doute difficilement recevoir une signification concrète.

En revanche [5)], on peut, en un certain sens, se libérer tout au moins du signe U par une autre voie plus naturelle. Chaque formule logique[71] contient bien sûr le signe U et, tout à fait comme nous l'avons auparavant considéré pour ce qui est d'un signe quelconque, se laisse transformer au moyen des fonctions particulières du calcul général des fonctions, en particulier au moyen de C et S, de sorte que U [72] apparaît comme argument de l'expression globale ;

---

5) Les réflexions suivantes viennent du rédacteur[73].

---

68 Notons qu'on a bien $(Ufg) \mid^{g} (Ufg) = U(Uf)(Uf)$; g n'est pas enclos dans des parenthèses associant à droite, (Ufg) étant Ufg.

69 "Festsetzung" et non plus "Definitionsgleichung" (égalité de définition). Comme U, J n'équivaut pas à un combinateur (proprement dit). En outre, la réduction fait preuve d'"arbitraire" (Willkür) en ce qu'elle doterait scripturalement chaque langage d'un seul primitif, mais Quine [1967] estime avec raison la frontière indécise. Il ajoute pourtant qu'une réduction "sérieuse" des primitifs tend à réduire le nombre des axiomes, ce que ne ferait pas celle-ci. En diminuant le nombre des primitifs, en effet, on cherche à diminuer aussi le nombre des axiomes qui doivent les caractériser par l'emploi qu'ils en font.

70 J est bien une fonction nouvelle car elle n'a pas que trois valeurs assignées, U, C, S, alors que x, y, z sont quelconques dans $Cxy = x$, $Sxyz = xz(yz)$, et alors que U prend une valeur de fonction exprimée très différemment. Le texte n'explicite pas les raisons qui ont fait choisir le symbole J, mais on peut sans doute rapprocher J de I par le caractère en somme trivial, bien que différemment, de ces deux fonctions.

71 Traitée comme on vient de le faire au § 5.

72 Réduit à une seule occurrence. On a par exemple $Uf(Uff) = Z(Uf)(Uf)f = WZ(Uf)f = Z(WZ)Uff = T(Z(WZ))fUf = T(T(Z(WZ))f)fU$, (exprimable en langage C, S).

73 "Bearbeiter".

ainsi, celle-ci admet la forme FU, où F ne contient plus de son côté le U. Si on sous-entend le U dans l'écriture, on se tire d'affaire avec C et S.

D'autre part, on pourrait, en renonçant à la réduction la plus extrême des signes de fonction fondamentaux, exiger d'éviter complètement les parenthèses. Si on part de la forme FU, F grâce à Z seul, se laisse écrire de telle sorte que toutes les parenthèses tombent. Ainsi, grâce à C, Z et S, chaque formule logique peut s'écrire sans parenthèses comme une simple succession de ces signes et se caractérise donc complètement par un nombre du système ternaire[74].

Quant à la question de l'*unicité* de la réduction[75] envisagée, du point de vue purement symbolique, il ne saurait, naturellement, en être question, puisque chaque formule de l'ancien comme du nouveau calcul se laisse transformer de multiples manières[76]. Cependant, on peut ici, en un certain sens plus restreint, établir aussi une unicité de la correspondance[77]. Si, en effet, on nomme "équivalentes", d'une part les formules de l'ancien calcul, qui, sur la base seulement des définitions, c'est-à-dire sans usage des axiomes logiques - dans lesquelles naturellement le connecteur généralisé de Sheffer devrait figurer à présent comme connecteur fondamental - peuvent être réduites les unes aux autres, et, d'autre part, celles qui diffèrent les unes des autres uniquement par la typographie des variables qui interviennent, alors, effectivement, correspondent à une seule et même formule du nouveau calcul, et également à chaque formule qui se laisse obtenir à partir d'elle par calcul symbolique, toutes celles des formules de l'ancien calcul, et seulement elles, qui sont équivalentes entre elles au sens qui vient d'être expliqué. La réduction considérée ici des formules logiques a donc la propriété remarquable d'être indépendante des axiomes de la logique.

(arrivé le 15.3.1924).

---

74 Behmann dans cet alinéa ajoute à la réduction précédente une réduction supplémentaire : il entend éviter les parenthèses (éventuelles) de F en les déplaçant vers la gauche où elles seraient sous-entendues. Z doit être un primitif de plus car l'emploi de $S(CS)C$ qui le définirait exige des parenthèses. Toute formule s'exprimerait alors avec trois signes, C, Z, S, comme tout nombre avec trois chiffres en base *3*. Cette réduction peut sembler vraisemblable puisqu'on a par exemple $x(yz) = Zxyz$, $xy(zw) = ZZxyzw$. Elle est cependant erronée. Curry et Feys [1968] p. 184 signalent que Behmann, dans une lettre à Curry (et avant lui Boskowitz) l'ont reconnu. Behmann le remarque à nouveau dans [1959] p. 118, note 22. Quine [1967] note que l'emploi de Z "peut engendrer de nouvelles parenthèses et ne pas se terminer". Il rappelle qu'en écrivant l'application, et de manière préfixée, on évite toute parenthèse : xyz devient $**xyz$, $x(yz)$ devient $*x*yz$. Les auteurs ne donnent pas de preuve de l'erreur de Behmann. Nous en donnerons une à la fin de cette étude.

75 Celle qui s'effectue en C, S au § 5, et, à plus forte raison celles du § 6 qui la supposent.

76 Ainsi $(x)\,f(x)$ peut-il devenir $(x)(\overline{\overline{f(x)}} \vee \overline{\overline{f(x)}}), (x)\,\overline{\overline{f(x)}}$, etc.. Dans le "nouveau calcul", x peut devenir Cxy, Ix, $SCCx$, etc.

77 La fin du texte est sinueuse. Nous la comprenons ainsi : appelons "équivalentes" les formules $A_1, A_2,...$ du calcul classique qui peuvent recevoir une même expression en langage "barre indicée", comme $\overline{f(x)} \vee \overline{f(x)}$, $\overline{f(x)\ \&\ f(x)}$,... (exprimables en $f(x) \mid^{y} f(x)$) ou qui diffèrent entre elles seulement par les noms de leurs variables, comme $\overline{f(x)}$ et $\overline{f(z)}$. On a alors : si et seulement si $A_1, A_2,...$ sont équivalentes, il leur correspond une même expression (quoique définie à une égalité près) du "nouveau calcul".

CONCLUSION CRITIQUE

Notre objectif principal n'étant pas d'évaluer les analyses de Schönfinkel, mais de les éclairer, nous nous bornerons ici à conclure sur cinq points :
(1) le projet était d'éliminer les variables. Il arrive qu'on les juge seulement sous-entendues : $I = SCC$, dit-on, suppose x à la fin des deux membres, Ufg l'incorpore, etc. . Pourtant, on peut admettre ce fait sans considérer qu'il trivialise les résultats. La réussite de l'auteur, en effet, est d'avoir su trouver les mesures qui permettent de n'avoir plus, ultimement, qu'à sous-entendre les variables. La portée d'une élimination se jauge à l'importance des modifications qu'il faut effectuer avant qu'elle puisse directement intervenir. A ce titre, celle de (x) et $|$, au profit du seul $|^x$, celle de $|^x$ par U, celle de U dans FU, où chacune (sauf la première) suppose la précédente, et celle de C,S,U par J apparaitront très différentes. Dire à bon escient qu'une notion est éliminée, c'est-à-dire sans perte d'information, ne peut pas vouloir dire que son contenu n'a plus à figurer dans aucun moyen d'expression, puisque cela serait contradictoire avec l'hypothèse, et puisque la notion sous sa forme ancienne survit toujours dans la métalangue. On notera, d'ailleurs, que Schönfinkel dit souvent "réduire à" (exprimer par, et donc expliquer comme) plutôt que "éliminer",
(2) on soulignera avec Curry et Feys [1968] p. 8, que Schönfinkel ne donne pas de méthode pour prouver l'égalité intuitive de deux expressions sans variables du "nouveau calcul", quand "=" n'est pas "$=_{df}$", celle de $ZTT = Z(ZI)$, par exemple,
(3) il n'explicite pas non plus les techniques permettant de faire agir une "fonction particulière" à un rang différent de celui où le permet son "égalité de définition",
(4) Curry [1968], note 6, estime que "l'emploi de U est douteux car il semble maintenant que tout système raisonnable [sans réserve sur mesure] construit sur une base aussi naïve [que celle qui exprime toute formule logique en C,S,U] serait inconsistant". Dans Curry et Feys [1968], p. 8, la réserve exprimée par "semble" disparaît. La difficulté provient de ce que U permet d'assimiler (f) à (x), et que cela a conduit la *Begriffsschrift* de Frege au paradoxe relevé par Russell. Quine [1967] exprime en termes différents la même inquiétude. Il ne semble pas y avoir de difficulté, en revanche, quand on se borne au traitement des formules du premier ordre ou du calcul propositionnel,
(5) soit une expression F comportant les seuls symboles C, S en nombre quelconque d'occurrences que nous écrirons de manière générale $x, y, z, w, x', \ldots, w', x'', \ldots,$ et pourvue de parenthèses associant à droite (nous dirons "déviantes") ; soit β (la thèse de Behmann) : on peut obtenir par le seul emploi de Z une expression F' sans parenthèses, égale à F. Nous montrerons que β est fausse.

Remarquons d'abord : (a) si F' n'a pas de parenthèses c'est qu'elles ont été déplacées par Z vers la gauche où elles sont supprimées par convention d'écriture, (b) on n'obtient une expression égale à F, par insertion de Z dans F, que si elle intervient sur une sous-expression de forme $x(yz)$ placée elle-même à l'intérieur de parenthèses déviantes et non supprimées par le Z introduit. On a effet : $\ldots(x(yz)\ldots)\ldots = \ldots(Zxyz\ldots)\ldots$. Une condition nécessaire pour obtenir F' est donc qu'on place une séquence, évidemment sans parenthèses, de un ou plusieurs Z (nous l'écrirons souvent nZ) devant l'expression F modifiée.

Si aucune insertion de Z dans F n'est requise, F' est constituée d'une telle séquence de Z suivie de F'' (en notant F'' l'expression F écrite sans ses parenthèses). On peut alors montrer qu'il existe des expressions à parenthèses déviantes telle qu'aucune expression ainsi construite ne leur est égale. Appelons-les F_0. Il vient en effet :

$Zxyz = x(yz)$
$ZZxyzw = Z(xy)zw = xy(zw)$
$3Zxyzw = ... = x(yzw)$
$4Zxyzwx' = ... = xyz(wx')$
$5Zxyzw = ... = x(y(zw))$
$6Zxyzwx' = ... = x(yz)(wx')$
$7Zxyzwx' = ... = xy(zwx')$
$8Zxyzwx' = ... = x(yzwx')$
$9Zxyzwx'y' = ... = xyzw(x'y')$
$10Zxyzwx' = ... = x(yz)(wx')$

10Z a le même effet que *6Z*, sur la même suite, et donc *11Z* a le même effet que *7Z*, etc. . *Zxyz...* est l'expression *F'* pour $F = x(yz)...$, *ZZxyzw...* est l'expression *F'* pour $F = xy(zw)...$, etc., où "..." représente une suite éventuelle de lettres sans parenthèses. Aucune autre expression *F'* ne peut être obtenue par une séquence plus longue que *9Z*. Si donc pour toute expression *F* il y a une expression *F'* il faut que chaque expression F_0 résulte notamment d'une insertion au moins de *Z* dans *F* (c'est-à-dire ici dans F_0).

Or, considérons une expression F_0 dont les parenthèses n'enclosent que deux lettres, comme $xy(zw)x'(y'z')$. Elle ne donne pas lieu à modification par insertion de Z (voir (b)). Il n'y a donc pas d'expression *F'* correspondant à une telle expression, ce qui réfute β.

BIBLIOGRAPHIE

BARENDREGT, H.P., *The lambda calculus, its syntax and semantics*, Amsterdam, North-Holland, 1984.
BEHMANN, H., "Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem", *Mathematische Annalen*, 86, (1922), 163-229.
"Der Prädikatenkalkül mit limitierten Variablen", *The journal of symbolic logic*, 24, june 1959, 112-140.
BLANCHE, R., *La logique et son histoire d'Aristote à Russell*, Paris, A. Colin, 1970.
CHURCH, A., "A bibliography of symbolic logic (1666-1935)", *The journal of symbolic logic*, 1, number 4, dec. 1936, 121-218, add. et corr., 3, number 4, dec. 1938, 178-212. *The calculi of lambda-conversion*, Princeton University Press, 1941.
CURRY, H.B., "Grundlagen der kombinatorischen Logik", *American journal of mathematics*, 52, (1930), 509-536, 789-834. "Combinatory logic", *Contemporary philosophy*, I, Firenze, La nuova Italia editrice, 1968.
CURRY, H.B., et FEYS, R., *Combinatory logic*, Amsterdam, North-Holland, 1968.
FREGE, G., *Begriffsschrift*, Halle, 1879 (trad. angl. in Van Heijenoort). *Grundgesetze der Arithmetik*, Iéna, I, 1893, II, 1903 (trad. angl. partielle in Furth, *The basic laws of arithmetic*, University of California Press, 1964. "Qu'est-ce qu'une fonction ?" (1904), trad. Imbert C., in *Ecrits logiques et philosophiques*, Paris, Le Seuil, 1970.
GINISTI, J.P., "Présentation de la logique combinatoire en vue de ses applications", *Mathém. Inform. et Sc. hum.*, 103, (1988), 45-66. (Voir erratum à la fin du présent numéro).
JANOVSKAJA, S.A., "Fondations des mathématiques et logique mathématique", *Les mathématiques en U.R.S.S. pendant les trente années 1917-1947*, Moscou, Leningrad, Ogiz, 1948 (en russe), revue par Kline G.L., in *The journal of symbolic logic*, 16, 1951, 46-48.
KNEALE, W., et M., *The development of logic*, Oxford, Clarendon Press, 1964.
QUINE, W.V.O., in Van Heijenoort, 1967, 355-7.
REID, C., *Hilbert, the story of the life of David Hilbert*, Berlin, Springer Verlag, 1970.
VAN HEIJENOORT, J., *From Frege to Gödel, a source book in mathematical logic*, 1878-1931, Harvard University Press, 1967.
WHITEHEAD A.N., RUSSELL B., *Principia Mathematica*, Cambridge, 1ère éd., vol. 1, 1910, 2e éd., 1925.