PASCAL BOUYAUX

Préférences et rationalité stochastiques

Mathématiques et sciences humaines, tome 109 (1990), p. 17-40
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1990__109__17_0>

Math. Inf. Sci. hum. (28e année, n°109, *1990*, p.17-40)

PRÉFÉRENCES ET RATIONALITÉ STOCHASTIQUES

Pascal BOUYAUX*

RÉSUMÉ - *Le but de cet article est de procéder à une présentation pédagogique d'un concept étendu de rationalité, la rationalité stochastique. Dans une première partie, nous exposons le problème à l'aide d'un exemple simple et posons un ensemble de définitions préliminaires. Puis, dans une seconde partie, nous présentons le résultat fondamental de Falmagne (1978) s'appliquant aux situations de choix multiples ; l'approche ensembliste de cet auteur est formalisée à partir du concept de polynômes de Block-Marschak (1960). Dans une troisième partie, nous traitons du cas particulier des choix binaires, développant ainsi l'approche géométrique de Mac-Fadden-Richter (1970) reposant sur le concept de permutoèdre ; les applications potentielles de cette approche en théorie du vote, optimisation combinatoire et analyse des données ordinales sont brièvement évoquées. La dernière partie conclut.*

SUMMARY - Stochastic Preferences and Stochastic Rationality
The aim of this article is to undertake a pedagogical presentation of a wide-spread concept of rationality, the stochastic rationality. In a first part, we set the problem with the help of a simple example and we put a set of preliminary definitions. Then, in a second part, we expound the basic result of Falmagne (1978) applied to multiple choices situations ; the set approach of this author is formalized with the Block-Marshak (1960) polynomials. In a third part, we deal with the particular case of binary choices, expanding the geometrical approach of Mac-Fadden-Richter (1970) based on a permutation polytope ; the potentials applications of this approach in voting theory, combinatorial optimization and ordinal data analysis are briefly described. The last part concludes.

1 - INTRODUCTION

La théorie économique définit la rationalité des choix individuels de la façon suivante : confronté à un ensemble d'éventualités dont il connaît les caractéristiques, un individu choisira toujours celle qu'il classe avant toutes les autres en fonction d'un ordre de préférence. A partir de cette définition a été élaborée la théorie de la préférence révélée, dont l'objet est de détecter la présence en l'absence de rationalité dans les choix individuels. Des conditions ensemblistes, permettant de savoir si des choix observés sont compatibles avec un ordre de préférence sous-jacent, ont ainsi

---

* Maître de Conférences à l'Université de Rennes I. L.E.M.E.-C.R.E.M.E.R.C., Faculté des Sciences Economiques, 7 place Hoche, 35000 RENNES.
L'auteur exprime sa vive reconnaissance à Michel Le Breton et Alain Trannoy, Professeurs à l'Université de Rennes I, pour leurs conseils, critiques et directives. Il remercie également Bernard Monjardet, Professeur à l'Université Paris V, ainsi qu'un rapporteur anonyme, qui lui ont fait part de remarques pertinentes lui permettant une amélioration substantielle de la version préliminaire de cet article. Toute erreur ou omission reste sienne.

été développées (Aizerman (1985), Arrow (1959a), Chipman (1971), Herzberger (1973), Houthakker (1950), Moulin (1985), Richter (1966), Samuelson (1948), Sen (1971)). Ces conditions ont été construites à partir de l'idée suivante : un individu rationnel, qui préfère une éventualité lorsqu'on lui présente un ensemble, préférera aussi cette éventualité lorsque la taille de l'ensemble de choix est réduite.

Le mécanisme de choix ainsi formalisé par l'école néo-classique présente deux limites majeures. En premier lieu, il suppose que chaque individu dispose d'un pouvoir discriminant parfait ; chaque individu pourra donc toujours dire avec une totale certitude s'il préfère, par exemple, l'objet A à l'objet B ou l'objet B à l'objet A, voire s'il est indifférent entre A et B. Cela signifie implicitement qu'il dispose d'une connaissance parfaite des caractéristiques des objets A et B lui permettant de sélectionner la meilleure option. En second lieu, si notre individu est confronté plusieurs fois de suite à l'ensemble composé des deux objets A et B, alors il sélectionnera toujours la même éventualité : cela signifie ici que l'on doit considérer les circonstances dans lesquelles se réalise le choix rigoureusement inchangées. Des économistes tels que Quandt (1956) et des psychologues tels que Tversky (1972) n'ont pas manqué de souligner le caractère peu réaliste de ces hypothèses que la réflexion et l'observation les plus élémentaires permettent de contredire. Si l'on se place du point de vue du modélisateur, il est clair qu'une meilleure prise en compte des préférences individuelles nécessite l'introduction de phénomènes aléatoires traduisant l'existence de variables non observables : en effet, il n'existe aucune enquête suffisamment sophistiquée permettant de faire révéler à l'individu tous les déterminants de son choix ; des circonstances apparemment identiques pour le constructeur du modèle (prix et revenu inchangés) peuvent en fait être très différentes pour le décideur qui révèlera des choix non répétitifs. Quant au décideur, il peut souhaiter tester les différentes éventualités qui s'offrent à lui, ne disposant vraisemblablement que d'une connaissance imparfaite de leurs caractéristiques. Ce phénomène d'apprentissage des préférences (idée introduite à l'origine par Stigler et Becker (1977)) se traduira par une variabilité des choix et ce même si les circonstances dans lesquelles ces derniers s'effectuent restent inchangées.

Au total, les raisons évoquées précédemment soulignent la nécessité de prendre en compte le phénomène de variabilité des choix, c'est-à-dire d'utiliser des modèles de choix stochastiques qui spécifient les probabilités ou fréquences de choisir chacune des éventualités d'un ensemble donné. De tels modèles ont été, à l'origine, proposés dans la littérature psychologique par Fechner (1859), Luce (1959), Luce et Suppes (1965), Falmagne (1978), Thurstone (1927), Tversky (1972), Roberts (1979). Ils ont été analysés et (ou) appliqués par des économistes tels que Debreu (1958), Fishburn (1973,1978), Georsgescu-Roegen (1958). Mac-Fadden-Richter (1970), Mac-Fadden (1974), Machina (1985), Mossin (1968), Quandt (1956). Ces modèles posent aux théoriciens le problème de savoir quelles règles de comportement sous-tendent les choix stochastiques et donc quel(s) mécanisme(s) de rationalité il est possible de leur associer ; par analogie à la théorie classique du consommateur, il serait en effet intéressant de pouvoir répondre à la question suivante : si un individu choisit l'objet A dans l'ensemble B avec une certaine probabilité, sous quelle(s) condition(s) sa décision est-elle le fruit d'un processus d'optimisation de ses préférences ?

On trouve dans la littérature une première catégorie de règles de comportement stochastique qui imposent des conditions sur les probabilités de choix des éventualités. On citera d'abord le concept de transitivité stochastique - critère de rationalisation régulière - dont les différentes formulations sont présentées par Fishburn (1973) et Roberts (1979)[1] ; on mentionnera également l'axiome de choix de Luce (1959) qui n'est autre que la formulation probabiliste de l'hypothèse d'indépendance des éventualités non pertinentes introduite par Arrow (1959b) en choix social ; enfin, le processus d'élimination par aspect imaginé par Tversky (1972) permet de prendre en compte des situations de choix très complexes, généralisant par là même l'approche

[1]. Voir aussi, plus récemment, Doignon, Monjardet, Roubens et Vincke (1986).

de Luce (1959)[2]. Toutes ces approches formalisent le comportement de choix stochastique sans faire référence à un éventuel processus d'optimisation des préférences ; comme le soulignent De Palma et Thisse (1989), l'individu, qui a une probabilité d'opter pour différentes actions possibles, ne choisira pas nécessairement celle qui lui assurera l'utilité la plus élevée.

Se rapprochant de la théorie du consommateur, Fishburn (1978) explore les liens qui existent entre une fonction de choix déterministe et une fonction de choix stochastique. Machina (1985) propose un modèle de choix stochastique dérivé d'un processus d'optimisation d'une fonction d'utilité déterministe définie sur les loteries possibles associées aux éventualités de l'ensemble de choix[3]. Mais ce sont Falmagne (1978), Mac-Fadden-Richter (1970), Mac-Fadden (1974), Thurstone (1927) qui présentent l'extension naturelle de l'approche néo-classique selon laquelle le choix déterministe est le résultat d'un processus d'optimisation d'un ordre de préférence déterministe : ils développent en effet un modèle de choix stochastique dérivé d'un processus d'optimisation d'une fonction d'utilité stochastique, et donc compatible avec des préférences stochastiques. Ce modèle pose le problème de la définition d'un concept de rationalité stochastique ; c'est ce concept que nous nous proposons d'étudier en détail dans cet article.

Pour définir de manière intuitive la rationalité stochastique, reprenons l'exemple de l'individu qui doit choisir entre deux objets A et B. Supposons qu'il sélectionne l'objet A avec une probabilité égale à 0,80 et qu'il sélectionne l'objet B avec une probabilité égale à 0,20 ; ce comportement peut se justifier par un processus de choix individuel intrinsèquement stochastique, ou par la modification non observable des circonstances réelles dans lesquelles s'effectue le choix. Pour interpréter ces choix probabilistes, il semble alors naturel de supposer que l'individu préfère l'objet A à l'objet B avec une probabilité égale à 0,80 et qu'il préfère l'objet B à l'objet A avec une probabilité égale à 0,20. Plus généralement, le problème de la rationalité stochastique peut donc s'énoncer de la façon suivante : à quelle(s) condition(s) des choix stochastiques sont-ils rationalisables en termes de préférences stochastiques? La réponse à cette question permet une extension intéressante de la théorie néo-classique des choix individuels. Elle est aussi très importante dans le domaine des choix collectifs où des théoriciens tels que Barbera et Sonnenschein (1978), Barbera et Valenciano (1983), Mac-Lennan (1980), Pattanaik et Peleg (1986) étudient les propriétés des règles de décision collectives qui ne conduisent pas à des ordres de préférences déterministes, mais à une distribution de probabilités sur les préférences possibles. Enfin, elle intéresse également les économètres qui modélisent le comportement de choix discrets d'une population d'individus ; il s'agit alors de savoir sous quelle(s) condition(s) la demande observée, qui se traduit par un ensemble de fréquences (x% d'individus choisissent l'éventualité a, y% choisissent l'éventualité b...) est compatible avec l'existence de préférences stochastiques traduisant la dispersion des goûts (Hausman et Wise (1978), Mac-Fadden (1974,1976,1981), Palma et Thisse (1989)) ; une application dans ce contexte est développée chez Bouyaux (1989).

L'objet de cet article est de procéder à une présentation pédagogique du concept de rationalité stochastique. Les détails techniques des preuves ne sont pas analysés puisqu'ils ont été développés de façon extensive par ailleurs (Barbera et Pattanaik (1986), Falmagne (1978), Mac-Fadden-Richter (1970). Dans une première partie, nous proposerons une série de définitions préliminaires et modéliserons le concept de rationalité stochastique à l'aide d'un exemple simple. Puis, dans une seconde partie, nous exposerons le résultat de Falmagne (1978) dérivé d'une approche ensembliste et s'appliquant aux situations de choix multiples. Nous développerons, dans une troisième partie, l'approche géométrique de Mac-Fadden-Richter (1970) s'appliquant aux situations de choix binaires ; une attention particulière sera apportée aux applications dont

---

[2] Une comparaison rigoureuse des travaux de ces auteurs est développée chez De Palma et Thisse (1989).

[3] Notons que Barret, Pattanaik et Salles (1987) proposent quant à eux un modèle de choix déterministe basé sur des préférences floues : l'individu doit réaliser un choix certain, mais ses préférences fluctuent selon une fonction qui prend ses valeurs dans l'intervalle [0,1].

elle peut faire l'objet en théorie du vote, optimisation combinatoire et analyse des données ordinales. La dernière partie concluera.

2 - DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES ET PRÉSENTATION DU PROBLEME

2.1 - *Ensembles de choix et de classements des éventualités*

On dispose d'un univers de choix, noté X, de cardinal égal à n, qui regroupe toutes les éventualités x,y,z,...t mutuellement exclusives, entre lesquelles un individu pourrait, en théorie, faire son choix ; la composition de cet univers dépendra évidemment de l'environnement étudié.

A partir de X, on définit χ comme étant l'ensemble de tous les sous-ensembles non vides de X, soit $\chi = 2^X - \{\varnothing\}$, et P(X,i) comme étant l'ensemble de tous les sous-ensembles de X contenant i éléments ; les éléments de χ et P(X,i) seront notés A,B,C... Ils correspondront aux ensembles dans lesquels l'individu devra faire son choix, compte-tenu de ses contraintes (revenu, goûts...).

L'ordre de préférence d'un individu entre les différentes éventualités est toujours supposé être un ordre complet sur X ; c'est donc une relation réflexive, anti-symétrique, transitive et complète. Il est noté > ; on dira aussi que cet ordre est un classement.

L'ensemble de tous les classements possibles sur X sera noté R ; R n'est autre que l'ensemble de toutes les permutations possibles sur X, donc $|R| = n!$. Chaque élément de R sera noté ρ.

R_A, R_B, R_C... représenteront les ensembles de tous les classements possibles des éventualités appartenant à A,B,C... éléments de χ ; les éléments de ces ensembles seront notés $\rho_A, \rho_B, \ldots \rho_C$.

Enfin, on utilisera les ensembles définis ci-après :

$R_{x,A} = \{\rho \in R \,/\, x>y \;\forall\; y \in A - \{x\}\}$

$R_{x,y,z\ldots t,A} = \{\rho \in R \,/\, x>y>z\ldots>t > v, \;\forall\; v \in A - \{x,y,z,\ldots t\}$

$R_{x,A}$ représente donc l'ensemble des classements d'éventualités pour lesquels x est classé avant tous les autres éléments de A. Par abus de notation, $R\rho_{Ax,X}$ désignera, par la suite, l'ensemble des classements d'éventualités pour lesquels les éléments de A seront placés avant l'élément x qui sera lui-même placé avant les éléments de $X\text{-}A\text{-}\{x\}$, ρ_A étant quelconque.

Après avoir défini les ensembles de choix et de classements des éventualités, nous allons maintenant expliciter, à partir d'un exemple simple, le concept de rationalité stochastique.

2.2 - *Présentation du problème*

Supposons que l'univers X ne contienne que trois éventualités, c'est-à-dire que $X = \{x,y,z\}$; alors, on aura :

$\chi = \{\{x\},\{y\},\{z\}, \{x,y\},\{x,z\},\{y,z\},\{x,y,z\}\}$.

Appelons c(x,A) la probabilité pour qu'un individu choisisse l'éventualité x lorsque l'ensemble A appartenant à χ lui est présenté ; supposons que l'on observe les résultats suivants :

$c(x,\{x\}) = 1,\ \ c(y,\{y\}) = 1,\ \ c(z,\{z\}) = 1$
$c(x,\{x,y\}) = 1/2,\ \ c(y,\{y,z\}) = 1/2,\ c(z,\{x,z\} = 1/2$
et $c(x,\{x,y,z\}) = c(y,\{x,y,z\}) = c(z,\{x,y,z\}) = 1/3.$

L'individu qui choisit l'éventualité x dans l'ensemble A peut classer les éventualités x,y,z par ordre de préférence selon 3! façons, à savoir :

$x>y>z$ classement noté ρ^1
$x>z>y$ classement noté ρ^2
$y>x>z$ classement noté ρ^3
$y>z>x$ classement noté ρ^4
$z>x>y$ classement noté ρ^5
$z>y>x$ classement noté ρ^6

On a donc $R = \{\rho^1,\rho^2,\rho^3,\rho^4,\rho^5,\rho^6\}$
A chaque classement ρ^j reflétant un ordre de préférence, on associe une probabilité $\mathrm{Prob}[\rho^j]$. On modélise ainsi les préférences stochastiques de l'individu, chaque ordre de classement ayant une chance Prob $[\rho^j]$ d'apparaître. Si, en particulier, on choisit $\mathrm{Prob}[\rho^j]=1/6$ pour tout j, cela nous permet de justifier la fonction de choix stochastique ci-dessus dans le sens où l'on a :

$$c(x,\{x,y\}) = \mathrm{Prob}[\rho^1] + \mathrm{Prob}[\rho^2] + \mathrm{Prob}[\rho^5] = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$$

$$c(x,\{x,y,z\}) = \mathrm{Prob}[\rho^1] + \mathrm{Prob}[\rho^2] = 1/6 + 1/6 = 1/3$$

et ainsi de suite pour tout $x \in X$ et $A \in \chi$.

On constate donc que la probabilité de choisir x dans l'ensemble $\{x,y\}$ est égale à la somme des probabilités des classements d'éventualités ρ^1, ρ^2 et ρ^5 pour lesquels x est préféré à y ; de la même façon, la probabilité de choisir x dans l'ensemble $\{x,y,z\}$ est égale à la somme des probabilités des classements d'éventualités ρ^1 et ρ^2 pour lesquels x est préféré à y et z.

Cet exemple illustre tout le problème de la rationalité stochastique qui consiste à montrer qu'il existe une distribution de probabilité sur les classements des éventualités compatible avec les probabilités de choix observés c(x,A). Ce problème n'est pas trivial puisque toutes les fonctions de choix stochastiques ne sont pas rationalisables en termes d'existence de préférences stochastiques. Par exemple, si $X = \{x,y,z\}$ et

$$c(x,\{x,y,z\}) = c(y,\{x,y,z\}) = c(z,\{x,y,z\}) = 1/3$$
$$c(x,\{x,y\}) = c(y,\{y,z\}) = c(z,\{x,z\}) = 0{,}8$$
$$c(y,\{x,y\}) = c(z,\{y,z\}) = c(x,\{x,y\}) = 0{,}2$$

alors on pourra vérifier que c(x,A) n'est pas rationalisable.

Remarquons par ailleurs qu'il peut exister plusieurs structures de classements générant des probabilités de choix identiques. L'exemple ci-dessous, emprunté à Barbera et Pattanaik (1986), illustre bien ce problème :

soit $X = \{x,y,z,w\}$

si on a la structure (α)
$$\begin{cases} x>y>z>w : \rho^1 & \text{Prob } [\rho^1]=1/4 \\ x>z>y>w : \rho^2 & \text{Prob } [\rho^2]=1/4 \\ w>y>z>x : \rho^3 & \text{Prob } [\rho^3]=1/4 \\ w>z>y>x : \rho^4 & \text{Prob } [\rho^4]=1/4 \end{cases}$$

alors $c(x,\{x,y,z,w\}) = \text{Prob}[\rho^1] + \text{Prob}[\rho^2] = 1/2$
et $c(w,\{x,y,z,w\}) = \text{Prob}[\rho^3] + \text{Prob}[\rho^4] = 1/2$

Mais

si on a la structure (β)
$$\begin{cases} x>y>z>w : \rho^1 & \text{Prob}[\rho^1]=1/2 \\ w>z>y>x : \rho^2 & \text{Prob}[\rho^2]=1/2 \end{cases}$$

Alors $c(x,\{x,y,z,w\}) = 1/2$ et $c(w,\{x,y,z,w\}) = 1/2$

Il y a donc plusieurs rationalisations possibles pour une même fonction de choix stochastique[4].

Il nous reste finalement, dans un troisième et dernier paragraphe, à présenter les définitions générales d'une fonction de choix stochastique et du concept de rationalité stochastique qui ont été suggérées à partir de notre exemple.

2.3 - *Fonctions de choix et rationalité stochastiques*
Nous utiliserons, dans la suite de nos développements, les trois définitions suivantes :

DÉFINITION 1. Une fonction de choix stochastique est une fonction de choix C définie sur l'espace $X \times \chi$ et telle que :

$$\begin{aligned} C : X \times \chi &\rightarrow [0,1] \\ (x,A) &\rightarrow c(x,A) \\ \text{avec si } x \notin A,\ & c(x,A) = 0 \\ \forall A \in \chi,\ \sum_{x \in A} & c(x,A) = 1 \end{aligned}$$

$c(x,A)$ est la probabilité pour que l'éventualité x soit choisie dans l'ensemble A quand A est l'ensemble des éventualités dans lequel un individu peut faire son choix.

DÉFINITION 2. Une distribution de probabilité sur l'ensemble des classements des éventualités est une fonction :

$$p : R \rightarrow [0,1]$$
$$\text{Telle que : } \sum_{\rho \in R} p(\rho) = 1$$

[4] L'exemple utilisé ici est un cas particulier dans la mesure où il se limite aux choix réalisés dans X ; toutefois, comme le souligne Falmagne (1978), le problème de l'unicité se pose dans le cas général où l'on considère les choix réalisés à partir de tous les éléments de X. La construction d'exemples illustrant ce problème dans un tel cas est donc réalisable.

L(R) désignera l'ensemble de toutes les distributions de probabilités que l'on peut définir à partir de R ; chaque élément p appartenant à L(R) modélise les préférences stochastiques d'un individu.

DÉFINITION 3. Une fonction de choix stochastique $C : X \times \chi \rightarrow [0,1]$ est rationalisable si et seulement si il existe p appartenant à L(R) telle que :

$$\forall\ x \in X, \forall\ A \in \chi,\ c(x,A) = \sum_{\rho \in R_{x,A}} p(\rho)$$

Si x est choisi dans A, alors c(x,A) doit être la somme des probabilités associées aux classements des éventualités pour lesquels x est placé avant tous les autres éléments de A.

Nous nous proposons maintenant de caractériser les fonctions de choix stochastiques rationalisables, c'est-à-dire d'énoncer des conditions nécessaires et suffisantes sur les probabilités de choix c(x,A) permettant de savoir si elles sont ou non compatibles avec des préférences stochastiques.

3 - RATIONALITÉ STOCHASTIQUE DES CHOIX MULTIPLES : L'APPROCHE ENSEMBLISTE DE FALMAGNE (1978)

3.1 - *Les polynômes de Block-Marschak (1960)*

Pour Block et Marschak (1960), toute fonction de choix stochastique doit vérifier la condition de régularité[5] selon laquelle si $B \subset A \subset X$, alors $c(x,A) \leq c(x,B)$. Cette condition exprime simplement le fait qu'ajouter une nouvelle éventualité à un ensemble B ne peut jamais accroître la probabilité de choisir une ancienne éventualité dans cet ensemble. Comme le font remarquer Luce et Suppes (1965), elle correspond à la forme la plus faible de la notion d'indépendance des éventualités ajoutées[6] ; si elle semble tout à fait raisonnable, il est cependant facile de trouver des exemples où elle est violée. Ainsi, si on choisit la fonction C définie sur X = {x,y,z} et telle que c(x,{x,y,z}) = c(y,{x,y,z}) = c(z,{x,y,z}) = 1/3 ; c(x,{x,y}) = c(y,{y,z}) = c(z,{x,z}) = 0,2 ; c(y,{x,y}) = c(z,{y,z}) = c(x,{x,z} = 0,8, alors la régularité n'est pas respectée.

En exploitant et développant cette condition aux cas où l'univers de choix X contient 3 ou 4 éléments, Block et Marschak (1960) ont mis en évidence un ensemble d'inégalités spécifiant des conditions nécessaires et suffisantes à la rationalité stochastique d'une fonction de choix C.

Par exemple, si X = {x,y,z}, alors le respect de la régularité nécessite que :
$c(x,\{x,y\}) \geq c(x,\{x,y,z\})$ c'est-à-dire $c(x,\{x,y\}) - c(x,\{x,y,z\}) \geq 0$.

$c(x,\{x,y\}) - c(x,\{x,y,z\})$ n'est autre que l'expression du polynôme de Block-Marschak $K_{x,\{Z\}}$, que nous allons définir ci-après.

DÉFINITION 4. On appelle polynômes de Block-Marschak (1960) associés à la fonction de choix stochastique C définie sur $X \times \chi$ les quantités $K_{x,A}$ définies de la manière suivante :

[5] On trouvera une discussion détaillée sur cette condition dans Marley (1965).

[6] La forme la plus forte de cette notion correspond à l'indépendance des éventualités non pertinentes que l'on écrit sous forme probabiliste :
si $\forall a,b \in X$, $c(a,\{a,b\}) \neq 0,1$, alors $c(a,\{a,b\})/c(b,\{a,b\}) = c(a,A)/c(b,A)$ (voir Luce (1959)).

$$\forall A \subset X,\ A \neq X,\ x \in X\text{-}A, \qquad K_{x,A} = \sum_{i=o}^{|A|} (-1)^i \sum_{B \in P(A,|A|-i)} c(x,X\text{-}B)$$

Exemple :

$$K_{x,\emptyset} = c(x,X)$$
$$K_{x,\{y\}} = c(x,X\text{-}\{y\}) - c(x,X).$$

Les polynômes de Block-Marschak (1960) peuvent s'interpréter en termes de probabilité de classement des éventualités de la façon suivante.

LEMME 1. (Falmagne, (1978)) : $\forall A \in \chi,\ A \neq X$ et $x \in X\text{-}A$

$$K_{x,A} = \sum_{\rho_A \in R_A} \ \sum_{\rho \in R\rho_{Ax,X}} p(\rho)$$

le lemme montre que $K_{x,A}$ représente la probabilité avec laquelle x devra être classé en $[|A|+1]^{ième}$ position, dans les classements d'éventualités pour lesquels les $|A|$ premières positions sont tenues par les éléments de A, étant donné une éventuelle distribution de probabilité $p \in L(R)$ rationalisant la fonction de choix C.

Généralisant l'approche de Block-Marschak (1960) au cas où l'univers de choix contient n éléments, Falmagne (1978) propose le résultat fondamental que nous exposons dans le paragraphe suivant.

3.2 - *Le théorème de Falmagne (1978)*

THÉOREME 1. (Falmagne (1978)) : Une fonction de choix stochastique $C{:}X \times \chi \rightarrow [0,1]$ est rationalisable si et seulement si :

$$\forall A \subset X,\ A \neq X,\ x \in X\text{-}A,\ K_{x,A} \geq 0$$

Notons que ce résultat a été redécouvert par Barbera et Pattanaik (1986). La présentation du problème adoptée par ces deux auteurs diffère sensiblement de celle utilisée par Falmagne (1978) dans la mesure où ils ne travaillent pas explicitement avec des polynômes de Block-Marschak. Il est toutefois facile de retrouver dans leurs développements analytiques le concept exposé dans la définition 4. Par ailleurs, ces auteurs généralisent le résultat de Falmagne (1978) au cas où l'individu ne choisirait pas une seule éventualité, mais un sous-ensemble d'éventualités de l'ensemble A. Ils utilisent alors une nouvelle fonction de choix C^* définie de la manière suivante :

DÉFINITION 1*. Une fonction de choix stochastique est une fonction de choix C^* définie sur l'espace $X \times \chi$ et telle que :

$$C^* : X \times \chi \rightarrow [0,1]$$
$$(A,B) \rightarrow c^*(A,B)$$

avec, si $(A \not\subseteq B)\ c^*(A,B) = 0$

et $\displaystyle\sum_{A \in P_{(B)}} c^*(A,B) = 1 \quad \forall B \in \chi$, où $P_{(B)}$ est une partition de B

Cette nouvelle définition est à mettre en parallèle avec les développements de la théorie des choix déterministes dans lesquels on suppose qu'un individu peut exprimer une indifférence entre plusieurs éventualités, et donc peut ne pas réduire son choix à un singleton (voir Arrow (1959), Herzberger (1973), Richter (1966), Sen (1971), etc...).

3.3 - *Applications et limites*

Falmagne (1978) suggère une technique d'estimation des probabilités de choix c(x,A) tenant compte des contraintes imposées par la rationalité stochastique.

Supposons que l'on réalise une expérience de choix multiple impliquant des présentations répétées de tous les sous-ensembles non-vides A d'un ensemble X fini, d'éventualités à un individu. Pour chaque $A \in \chi$ et $x \in A$, on note :

- N(A) le nombre de présentations du sous-ensemble A à l'individu,
- m(x,A) le nombre de fois où $x \in A$ est choisi par l'individu.

et $$Q_{x,A} = \frac{m(x,A)}{N(A)}$$

On a $$\sum_{x \in A} Q_{x,A} = 1$$

(X,Q) définit un système de probabilités de choix, mais on ne peut pas dire a priori si les polynômes de Block-Marschak associés sont positifs ou nuls. Nous allons supposer que les probabilités de choix sont générées par des préférences stochastiques (c'est-à-dire une distribution de probabilité sur les classements des éventualités), et nous allons estimer ces probabilités de choix, soumises aux contraintes imposées par la théorie. Comme le signale Falmagne (1978), on doit, en utilisant une méthode du type "chi-deux minimum" minimiser la quantité :

$$X^2 = \sum_{A \in \chi} \sum_{x \in A} \frac{[m(x,A)-N(A)c(x,A)]^2}{c(x,A)\, N(A)}$$

soumis aux contraintes :

$$K_{x,A} \geq 0 \quad (A \subset X,\ A \neq X,\ x \in X\text{-}A).$$

Si Q est tel que les polynômes de Block-Marschak de (X,Q) sont non-négatifs, alors l'estimation est C = Q, ce qui implique $X^2 = 0$; sinon il faut résoudre un problème de programmation non linéaire, consistant à minimiser une fonction non linéaire (X^2) soumise à des inégalités linéaires $K_{x,A} > 0$. Cette technique d'estimation, intéressante pour les économètres, pose le problème de la distribution asymptotique de la statistique "min X^2" ; comme le souligne Falmagne (1978), cette dernière n'est pas distribuée selon un Chi-Deux classique puisqu'elle assigne un poids positif au point défini par $X^2 = 0$. Un tel problème devrait être résolu pour réaliser la construction d'un test statistique du modèle de préférences stochastiques.

Une fois les probabilités de choix estimées en tenant compte des contraintes de rationalité, on peut se poser la question de savoir s'il est possible de construire la structure ordinale de classement des éventualités ayant généré les probabilités de choix considérées. La partie de la preuve du théorème de Falmagne (1978) concernant la condition suffisante (si $K_{x,A} \geq 0$, alors c(x,A) est rationalisable) peut être assimilée à une sorte d'algorithme permettant de retrouver les classements d'éventualités ayant généré les probabilités c(x,A). Le problème qui se pose alors est celui du manque d'unicité de la rationalisation des fonctions de choix stochastique, puisque, comme nous l'avons fait remarquer dans la première partie, il peut exister plusieurs structures de classements générant des probabilités de choix identiques. Falmagne (1978) a toutefois montré que deux structures ordinales générant des probabilités de choix identiques sont telles que, pour chaque élément de l'univers X, les probabilités de rangement en première, deuxième... $|X|^{\text{ième}}$ position sont égales. Exprimé à l'aide des polynômes de Block-Marschak, ce résultat signifie que les quantités :

$$\Big[\sum_{A\in P(X-\{x\},\ k-1)} K_{x,A}\Big] \quad \text{sont égales.}$$

Reprenons l'exemple de la première partie où $X = \{x,y,z,w\}$ et $c(x,\{x,y,z,w\}) = c(w,\{x,y,z,w\}) = 1/2$; on voit que pour $x \in X$ et $k = 4 = |X|$:

$$\sum_{A\in P(X-\{x\},\ k-1)} K_{x,A} = \sum_{A\in P(\{y,z,w\},3)} K_{x,A} = K_{x,[y,z,w]}$$

Dans le cas de la structure (α), $K_{x,\{y,z,w\}} = \text{Prob}[\rho^3] + \text{Prob}[\rho^4] = 1/2$.
Dans le cas de la structure (β), $K_{x,\{y,z,w\}} = \text{Prob}[\rho^2] = 1/2$.

Les probabilités de rangement de l'éventualité x en quatrième position sont donc égales. On pourrait effectuer des calculs identiques pour chaque rang et chaque éventualité. Au total, on constate donc que les probabilités de rangement de chaque élément de l'univers X en première, deuxième... $|X|^{\text{ième}}$ position resteront invariables.

En conclusion, l'approche de Falmagne (1978) dont nous venons de souligner les développements pratiques présente trois limites :

i) Les polynômes de Block-Marschak (1960) constituent une extension de la notion de régularité des fonctions de choix ; or, comme nous l'avons fait remarquer au début de cette section, il est facile de trouver des contre-exemples violant cette condition. Par ailleurs, si une fonction de choix satisfait la régularité, alors on n'a pas forcément $K_{x,A} \geq 0 \ \forall A \subset X$. L'exemple ci-dessous, emprunté à Luce et Suppes (1965), illustre bien ce problème :

Soit $A = \{1,2,3,4\}$

Soit $\varepsilon : 0 < \varepsilon < 1/6$ $\quad c(2,A) = \varepsilon$

$$c(i,A) = 1-\varepsilon/3,\ i=1,3,4$$

$$c(i,S) = \begin{cases} 1/3 \text{ si S a 3 éléments} \\ 1/2 \text{ si S a 2 éléments} \end{cases}$$

C satisfait la régularité mais

$$\begin{aligned} K_{2,\{1,4\}} &= c(2,\{2,3\}) - [c(2,\{1,2,3\}) + c(2,\{2,3,4\})] + c(2,\{1,2,3,4\}) \\ &= 1/2 - [1/3 + 1/3] + \varepsilon \\ &= -1/6 + \varepsilon < 0, \text{ donc C n'est pas rationalisable.} \end{aligned}$$

ii) Le théorème de Falmagne (1978) est très lourd à vérifier. Le nombre de polynômes dont on doit s'assurer la non-négativité augmente rapidement avec la taille de l'univers ; leur calcul suppose que l'on dispose des probabilités de choix sur tous les sous-ensembles de cet univers. Or, dans la pratique, les expériences réalisées ne permettront en général que d'obtenir des probabilités sur une famille privilégiée de sous-ensembles (par exemple les sous-ensembles composés de deux éventualités).

iii) La condition de rationalité stochastique $K_{x,A} \geq 0 \; \forall A \subset X$ correspond à un système fini d'inégalités linéaires qui, comme le souligne Famagne (1978), définit un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^l$ (l étant le nombre de probabilité de choix). Ceci suggère d'aborder le problème posé dans cet article en utilisant une approche de nature géométrique. C'est une telle approche, permettant de se libérer de la condition de régularité, que nous nous proposons maintenant de présenter dans le cadre important des choix binaires.

IV - RATIONALITÉ STOCHASTIQUE DES CHOIX BINAIRES : L'APPROCHE GÉOMÉTRIQUE DE MAC-FADDEN - RICHTER (1970)

4.1 - *Présentation du problème*

On suppose ici que la fonction de choix stochastique C est définie sur l'espace $(X \times L)$ où L est la famille de tous les sous-ensembles de deux éléments de l'univers X.

Chaque élément ρ de l'ensemble R est décrit par un vecteur v_ρ de dimension n(n-1) qui exprime le classement des éléments de X par couple ; les n(n-1) couples $(x,y),(x \neq y)$ ayant été rangés dans un ordre fixé ; ce vecteur a pour terme générique a_{xy} tel que :

$$\forall x,y \in X,\ a_{xy} = 1 \text{ si } x > y \text{ dans } \rho \text{ et } a_{xy} = 0 \text{ sinon.}$$

Par exemple, si $X = \{x,y,z\}$ et $\rho : x > y > z$, alors on aura :

$$v_\rho = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{si l'ordre des couples est } (x,y),(x,z),(y,z),(y,x),(z,x),(z,y)$$

On notera V l'ensemble de tous les vecteurs v_ρ associés aux éléments de l'ensemble R [7].

La codification des classements ρ ainsi réalisée permet de formuler géométriquement le problème de la rationalité stochastique des fonctions de choix binaires. Pour illustrer cette nouvelle approche, reprenons la présentation de Mac-Fadden (1976). Supposons que $X = \{x,y,z\}$; R est composé des 6 classements $\rho^1, \rho^2 \dots \rho^6$ définis au paragraphe 2.2. ; à

[7] D'autres codages sont évidemment possibles, on aurait pu définir $v'\rho$ de terme générique a'_{xy} tel que $\forall x,y \in X$, $a'_{x,y} = 1$ si $x>y$ dans ρ et $a'_{xy} = -1$ sinon (voir Mac-Lennan (1983)). On aurait aussi pu écrire v_ρ matriciellement en définissant M_ρ de dimension (n,n) et de terme générique $M_\rho{}^j = 1$ si $x>y$ dans ρ, $M_\rho{}^j = 0$ sinon. Dans notre exemple, $M_\rho = \begin{bmatrix} 011 \\ 001 \\ 000 \end{bmatrix}$ (voir Gilboa (1985, 1989)). On trouvera chez Monjardet (1985) une présentation des différents codages vectoriels associés aux ordres totaux et qui sont depuis longtemps utilisés par des statisticiens comme Kendall.

chaque classement, on associe une probabilité $\text{Prob}[\rho^j], j = 1,...6$. Alors, la fonction de choix binaire C définie sur $(X \times L)$ est rationalisable en termes des préférences stochastiques définies ci-dessus si et seulement si :

$$(*) \quad \begin{bmatrix} c(x,\{x,y\}) \\ c(x,\{x,z\}) \\ c(y,\{y,z\}) \\ c(y,\{x,y\}) \\ c(z,\{x,z\}) \\ c(z,\{y,z\}) \end{bmatrix} = \text{Prob}[\rho^1] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \text{Prob}[\rho^2] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \text{Prob}[\rho^3] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \text{Prob}[\rho^4] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \text{Prob}[\rho^5] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \text{Prob}[\rho^6] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi, les probabilités de choix binaires $c(x,\{x,y\})$, $c(x,\{x,z\})$... $c(z,\{y,z\})$ sont rationalisables en termes de préférences stochastiques si et seulement si elles vérifient un système fini d'inégalités linéaires. Le membre de droite de ces égalités (*) définit la fermeture convexe d'un ensemble fini de points, c'est-à-dire un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^{n(n-1)}$ noté P. L'ensemble unique décrivant un tel polyèdre est l'ensemble de ses points extrêmaux ou sommets, noté S ; chacun de ces sommets est ici l'un des n! vecteurs appartenant à V [8] et décrivant un classement ρ entre les éventualités de l'univers X. P est donc, selon la terminologie proposée dans Monjardet (1985), un permutoèdre[9]. Au total, comme le souligne Mac-Fadden (1976), le vecteur de gauche du système (*) est rationalisable si et seulement si il appartient au permutoèdre engendré par les éléments de S.

L'exemple que nous venons de développer suggère donc que la recherche de conditions caractérisant les fonctions de choix stochastique rationalisables définies sur $(X \times L)$ peut s'opérer de deux façons :

- soit déterminer des conditions nécessaires et suffisantes garantissant que le vecteur des probabilités de choix binaire défini par toute fonction de choix stochastique C appartienne au permutoèdre P ;

- soit déterminer, à l'aide d'un système fini d'inégalités linéaires la description complète du permutoèdre P.

La seconde façon d'opérer est évidemment équivalente à la première puisque si l'on connaît la caractérisation complète du permutoèdre P, alors on connaît les conditions nécessaires et suffisantes que toute fonction C définie sur $(X \times L)$ doit vérifier pour être rationalisable.

---

[8] Il existe une bijection entre V et S puisqu'il est facile de montrer qu'à chaque vecteur v_ρ est associé un sommet de P et réciproquement.

[9] Ou plus précisément, selon Monjardet (1985), un v-permutoèdre, c'est-à-dire un permutoèdre obtenu avec le codage associé aux vecteur v_ρ.

Marschak (1960), Block et Marschak (1960), Guilbaud (1953,1970) ont conjecturé dans leurs travaux qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur des probabilités de choix binaire engendré par C définie sur (X × L) appartienne au permutoèdre P, est donnée par :

$$\forall x,y,z \in X,\ c(x,\{x,y\}) + c(y,\{y,z\}) \geq c(x,\{x,z\}).$$

Cette condition, dérivée de la notion de transitivité des préférences, et connue sous le nom "d'inégalité triangulaire"[10], est particulièrement simple à vérifier. Marschak (1960) prouve qu'elle est effectivement nécessaire et suffisante pour $|X| = 3$ et remarque, d'après T. Motzkin[11], qu'elle est aussi nécessaire et suffisante pour $|X| \leq 5$; ce dernier résultat est prouvé par Dridi (1980) et Fishburn (1987).Mac-Fadden et Richter (1970), puis Cohen et Falmagne (1978), Dridi (1980), Souza (1983), Fishburn (1987) ont montré à l'aide d'un contre-exemple construit pour un univers composé de six éventualités que l'inégalité triangulaire n'était que nécessaire pour $|X| \geq 6$.

Parallèlement à ces travaux, d'autres auteurs ont essayé de découvrir la caractérisation complète du permutoèdre, P. Bowman (1972) semblait avoir répondu à cette question en décrivant le permutoèdre P par un système fini d'inégalités linéaires qui exclut tout circuit du type $x > y > z > x$. Megiddo (1977) et Young (1978) notent que cette caractérisation est insuffisante ; Megiddo (1977) donne un contre exemple pour un univers de treize éventualités et prouve que la caractérisation est suffisante pour $|X| \leq 4$; Reinelt (1985) signale que la caractérisation n'est pas suffisante pour $|X| \geq 6$, mais l'est pour $|X| \leq 5$ ("by running a vertex enumeration algorithm"). Ces résultats sont évidemment équivalents à ceux mentionnés plus haut.

Finalement, ce sont Mac-Fadden et Richter (1970) qui ont trouvé la caractérisation des fonctions de choix rationalisables définies sur (X × L) quelle que soit la taille de l'univers X. Nous nous proposons dans le paragraphe suivant de présenter et de discuter en détail l'énoncé de cette condition nécessaire et suffisante.

4.2 - *Le théorème de Mac-Fadden-Richter (1970)*

THÉOREME 2. (Mac-Fadden-Richter, (1970)) : Une fonction de choix stochastique $C: X \times L \rightarrow [0,1]$ est rationalisable si et seulement si :

$$\forall \eta_{xy} \in \mathbb{N},\quad \sum_{x,y} \eta_{xy}\, c(x,\{x,y\}) \leq \operatorname*{Max}_{k} \Big[\sum_{x,y} \eta_{xy}\, a_{xy,k} \Big]$$

où $a_{xy,k}$ est un élément générique du $k^{ième}$ vecteur v_ρ associé au classement ρ et où le maximum est pris sur tous les classements.

L'interprétation géométrique de ce théorème (voir Mac-Fadden (1976)) est la suivante : le vecteur des probabilités de choix binaire engendré pour une fonction de choix stochastique C définie sur (X × L) appartient au permutoèdre P si et seulement si il n'existe pas d'hyperplan associé à un entier naturel séparant ce vecteur de P. Pour comprendre la signification pratique d'un tel résultat, reprenons l'exemple du paragraphe précédent. Supposons d'abord que $\forall x,y \in X$, $\eta_{x,y} = 1$; la condition à vérifier s'écrit alors :

---

[10] La condition de régularité énoncée dans la section précédente implique l'inégalité triangulaire ; voir la preuve chez Marley (1965).

[11] Communication personnelle, pas de document publié.

$$\sum_{x,y} c(x,\{x,y\}) \leq \operatorname*{Max}_{k} \sum_{x,y} a_{xy,k}$$

Considérons le 1er vecteur (k=1) associé au classement x > y > z. On a

$$\sum_{x,y} a_{xy,1} = 3$$

cela signifie qu'il y a trois probabilités de choix binaire parmi les six possibles compatibles avec le rangement des éventualités par ordre de préférence décrit ci-dessus.

Calculant $\sum_{x,y} a_{xy,k}$ pour k = 2,...6, on obtient :

$$\sum_{x,y} a_{xy,k} = 3$$

Finalement : $\operatorname*{Max}_{k} \sum_{x,y} a_{xy,k} = 3$

au maximum, il y a donc trois probabilités de choix binaire simultanément compatibles avec un classement ρ parmi les six possibles. En conséquence, on doit avoir :
$c(x,\{x,y\}) + c(x,\{x,z\}) + c(y,\{y,z\}) + c(y,\{x,y\}) + c(z,\{x,z\}) + c(z,\{y,z\}) \leq 3$.

La somme des probabilités ainsi considérée ne peut donc dépasser le nombre maximum de choix d'une éventualité (dans un ensemble appartenant à L) compatible avec un classement ρ.

La vérification de la condition énoncée dans le théorème de Mac-Fadden - Richter (1970) ne s'arrête pas ici ; il faut en effet continuer la prospection pour toutes les valeurs de $\eta_{x,y}$. Sur le plan pratique, cela signifie qu'il faut considérer toutes les listes possibles de probabilités de choix binaire, par exemple $c(x,\{x,y\}) + 2c(x,\{x,z\}) + 3c(y,\{y,z\}) + 4c(y,\{x,y\}) + 5c(z,\{x,z\}) + 6c(z,\{y,z\})$ ou encore $c(x,\{x,y\}) + c(x,\{x,z\}) + 2c(y,\{y,z\}) + 2c(y,\{x,y\}) + 3c(z,\{x,z\}) + 3c(z,\{y,z\})$,... et ainsi de suite. Le théorème ne dit pas -et c'est là sa principale difficulté- à partir de quel stade on peut arrêter la vérification en étant certain que la fonction C définie sur (X × L) est rationalisable ; d'après son énoncé, il faut considérer un nombre infini d'inégalités. Or, on sait que le permutoèdre P est défini par un système fini d'inégalités linéaires ; il est donc clair que le théorème de Mac-Fadden-Richter (1970) implique la vérification d'inégalités redondantes. Aussi faudrait-il détecter ces conditions inutiles de façon à ramener la caractérisation de toute fonction C rationalisable définie sur (XxL) à un ensemble fini d'inégalités.

Comme le souligne Mac-Fadden (1976), le théorème 2 peut être généralisé pour caractériser toute fonction de choix rationalisable définie sur (XxY) où Y est une famille quelconque de sous-ensembles de X. Une telle extension est intéressante dans la mesure où elle recouvre à la fois les problèmes de choix où $Y=\chi$ et Y=L. Toutefois, elle souffre du défaut que nous venons de formuler[12]. C'est ce défaut qui la différencie de l'approche de Falmagne (1978) qui

[12] Si C est définie sur (X × Y) l'énoncé du théorème 2 devient : pour chaque séquence finie $\{(x_l,A_l)\}$ d'éventualités et d'ensembles de choix, l = 1.L (les répétitions étant permises), la somme $\sum_{l=1}^{L} c(x_l,A_l)$ ne peut dépasser le nombre maximum de choix de x_l dans A_l compatible avec un ordre de préférence ; voir la preuve chez Mac-Fadden-Richter (1970).

caractérise les fonctions de choix C définies sur $(X x \chi)$ par un système fini d'inégalités linéaires ; par exemple, on sait qu'il faudra vérifier la non-négativité de 192 polynômes de Block-Marschak pour s'assurer de la rationalisation d'une fonction C définie sur un univers de 6 éventualités.

Les difficultés d'utilisation du théorème de Mac-Fadden-Richter (1970) ont motivé la recherche de nouvelles conditions caractérisant les fonctions de choix rationalisables définies sur (XxL). Le bilan de tous les résultats obtenus n'est pas aisé à dresser dans la mesure où ces travaux ont été menés de façon indépendante par différents auteurs et où la référence à une approche géométrique n'est pas toujours explicite. Il est cependant possible de mettre en évidence le dénominateur commun suivant : aucun auteur n'a réussi, à notre connaissance, à déterminer un ensemble fini d'inégalités linéaires nécessaires et suffisantes pour caractériser une fonction de choix binaire rationalisable quelle que soit la taille de l'univers X. A ce jour, l'inégalité triangulaire reste la seule condition simple à vérifier pour une fonction définie sur (XxL) avec $|X| \leq 5$.

Essayant de dépasser cette inégalité, Fishburn et Falmagne (1989) ont récemment publié deux séries indépendantes de conditions nécessaires reprises des travaux de Cohen et Falmagne (1978) et Fishburn (1988). Des conditions nécessaires de nature similaire ont aussi été développées par Mac-Lennan (1983) et Gilboa (1985, 1989). Gilboa (1989) montre que sa condition généralise la condition de Cohen et Falmagne (1978) ; construisant un contre-exemple dans le cas où n=54 éventualités, il montre que cette condition, et par là-même celle de Cohen et Falmagne (1978), ne sont pas suffisantes ; toujours à l'aide du même contre-exemple, il montre aussi que les conditions de Fishburn (1988) sont insuffisantes. Enfin, Reinelt (1985), dans le cadre d'une démarche explicitement géométrique, cherche à caractériser toutes les facettes du permutoèdre P[13]. Une présentation détaillée de l'ensemble de ces conditions nécessaires est proposée en annexe.

La découverte d'un ensemble de conditions nécessaires et suffisantes caractérisant les fonctions de choix binaire rationalisables est particulièrement importante car elle permettrait la résolution de problèmes pratiques rencontrés en théorie du vote, optimisation combinatoire et analyse des données ordinales. C'est sur ces trois domaines privilégiés d'application du concept évoqué précédemment que nous nous proposons de nous pencher dans le paragraphe suivant.

4.3 - *Applications*

Une première application immédiate de la caractérisation des fonctions de choix binaire rationalisables se rencontre en théorie du vote. (Debord (1987), Mimiague et Rousseau (1973), Monjardet (1973)). Supposons que m votants aient classé n candidats par ordre de préférence et que l'information dont on dispose soit la matrice des préférences $E=(e_{ij})$ où e_{ij} représente le nombre de votants qui préfèrent le $i^{ème}$ candidat au $j^{ème}$ candidat. Si m = 60 et $X = \{c_1,c_2,c_3\}$, alors on pourrait par exemple avoir :

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 33 & 25 \\ 27 & 0 & 42 \\ 35 & 18 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette matrice extraite de Monjardet (1973) signifie donc que 33 votants préfèrent c_1 à c_2, 25 préfèrent c_1 à c_3, 27 préfèrent c_2 à c_1 ... et ainsi de suite. Le problème posé est alors le suivant :

[13] Une facette de F est une face propre, non vide, maximale au sens de l'inclusion : $F \subseteq P$, $F \neq P$ et $|F| \neq 1$; elle est obtenue en remplaçant certaines des inégalités définissant P par des équations.

peut-on obtenir le profil de 60 ordres totaux décrivant les préférences des votants ?[14] Plus généralement, si au départ on se donne une "matrice électorale", c'est-à-dire une matrice où e_{ij} + e_{ji} = m et e_{ii} = 0, à quelle(s) condition(s) sera-t-elle compatible avec un profil d'ordres totaux décrivant la préférence des votants ? On retrouve ainsi le problème de la caractérisation des fonctions de choix binaire rationalisables[15]. Remarquons ici que l'on peut aussi considérer le problème sous l'angle suivant : soit la matrice E' = e'_{ij} avec $e'_{ij} = e_{ij} - e_{ji}$; E' est la matrice des préférences nettes qui, dans notre exemple, s'écrit :

$$E' = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -10 \\ -6 & 0 & 24 \\ 10 & -24 & 0 \end{bmatrix}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que toute matrice de ce type soit compatible avec un profil d'ordre totaux a été découverte par Debord (1987) ; ce problème connexe est toutefois beaucoup plus facile à résoudre.

De façon plus générale, la caractérisation du permutoèdre P par un système fini d'inégalités binaires se révèle très précieuse pour résoudre, en optimisation combinatoire, le problème de la recherche de l'ordre optimal. Pour illustrer ce second type d'application, on peut reprendre ici l'exemple classique du voyageur de commerce (voir Bowman (1972)) qui s'énonce brièvement de la façon suivante : un voyageur doit visiter *n* agglomérations ; le passage dans chacune de ces dernières implique un coût ; dans quel ordre doit-il effectuer ses visites pour minimiser le coût total de démarchage? Si on note f la fonction de coût, le problème s'écrit : Min f(p) sous la contrainte $p \in P$. Il est clair que la solution n'est autre que l'un des sommets du permutoèdre P, c'est-à-dire l'un des vecteurs de l'ensemble S décrivant un classement entre les *n* agglomérations. Utilisant l'ensemble des conditions nécessaires qu'il a déterminé (avec d'autres auteurs) pour décrire les facettes de P, Reinelt (1985) développe dans son ouvrage un algorithme permettant de résoudre ce type de problème. Il propose une application économique intéressante relative à la triangulation des tables input-output : il s'agit, à l'aide de cet algorithme, de déterminer l'ordre hiérarchique selon lequel les différents secteurs d'une économie s'organisent ; une telle classification permet d'analyser la structure industrielle et de procéder à des comparaisons entre pays.

La connaissance du système fini d'inégalités linéaires caractérisant le permutoèdre P peut enfin être utilisée en analyse des données ordinales pour rechercher l'ordre médian. Le problème posé ici (voir Barthélémy et Monjardet (1981,1988), Monjardet (1985)) peut se résumer de la façon suivante : supposons que l'on dispose d'une série de *p* classements ou ordres totaux sur un ensemble de *n* objets ; définissons une distance *d* entre deux classements ρ et ρ' ; par exemple, *d* peut être la distance de la différence symétrique qui dénombre les couples en désaccord entre ρ et ρ' (Monjardet (1985)) ; on recherche alors l'ordre médian ρ_M qui minimise la quantité

$$\sum_{j=1}^{p} d(\rho_M, \rho_j).$$

[14] Dans notre exemple, le profil des ordres totaux est donné par : 23 votants : $c_1>c_2>c_3$; 0 : $c_1>c_3>c_2$; 2 : $c_2>c_1>c_3$; 17 : $c_2>c_3>c_1$; 10 : $c_3>c_1>c_2$; 8 : $c_3>c_2>c_1$. Voir Monjardet (1973).

[15] Remarquons toutefois que dans ce cas les e_{ij} sont des valeurs rationnelles.

La codification de chaque classement ρ sous la forme d'un vecteur v_ρ de dimension $n(n-1)$ permet de considérer ce problème sous l'angle géométrique suivant : rechercher l'ordre médian ρ_M revient à rechercher le sommet du permutoèdre P le plus proche du centre de gravité des p classements. En conséquence, la caractérisation complète de P reste déterminante pour la résolution.

V.- CONCLUSION

La recherche de conditions nécessaires et suffisantes caractérisant les fonctions de choix stochastique rationalisables reste, à ce jour, un problème ouvert. En effet, il est clair que le résultat de Falmagne (1978) est très lourd à vérifier, notamment dans le cadre d'applications microéconomiques relatives à la modélisation des choix discrets (Bouyaux, 1989). Par ailleurs, comme le soulignent Fishburn et Falmagne (1989), la détermination d'un ensemble fini de conditions caractérisant les fonctions de choix binaire constitue un défi majeur à relever pour tout univers composé de 6 éventualités et plus[16]. De façon idéale, il faudrait finalement déterminer un ensemble fini de conditions suffisamment simples à vérifier pour caractériser toute fonction de choix définie sur une famille quelconque de sous-ensembles de l'univers ; mais rien ne dit qu'un tel problème soit soluble...

Février 1989
Version révisée : janvier 1990.

ADDENDUM

Au moment de la correction des épreuves de ce texte, nous avons pris connaissance de deux articles parus dans le n°34, 1 du *Journal of Mathematical Psychology* (1990) ; la version 1989 (cf. [15]) du manuscrit non publié de M. Cohen et J.C. Falmagne de 1978 (pp.88-94) ; une note de A.J. Marley "A historical and contemporary perspective on random scale representations of choice probabilities and reaction times in the context of Cohen and Falmagne's (*Journal of Mathematical Psychology*, 34, 1990) results" (pp.81-87). Il y signale que Koppen (manuscrit non publié, 1988) a obtenu un ensemble de conditions nécessaires généralisant celui de Cohen et Falmagne et cas particulier de celui de Gilboa.

BIBLIOGRAPHIE

[1].AIZERMAN M.A. (1985), "New Problems in General Choice Theory" ; *Social choice and welfare*, Vol 2., 1985, 235-282.

[2].ARROW K.J. (1959), "Rational choice function and ordering", *Economica*, 26, (1959a), 121-127. *Social choice and Individual Values*, New York, Wiley, 1959b.

[3].BARBERA S. (1985), "Rationalizable Stochastic Choice on Restricted domains", *5th world congress of the econometric society*, Cambridge, Mass, 1985.

[16] La caractérisation complète du permutoèdre P fait sans doute partie de la classe des problèmes NP complets...

[4].BARBERA S., PATTANAIK P.K. (1986), "Falmagne and the Rationalizability of Stochastic Choices in Terms of Random Orderings", *Econometrica*, 54, 1986, 707-715.

[5].BARBERA S., SONNENSCHEIN H. (1978), "Preference Aggregation with Randomized Social Orderings", *Journal of Economic Theory*, 18, 1978, 244-254.

[6].BARBERA S., VALENCIANO F. (1983), "Collective Probabilistic Judgements", *Econometrica*, 51, 1983, 1033-1046.

[7].BARRET C., PATTANAIK P., SALLES M. (1987), *On Choosing Rationally when preferences are fuzzy*,. Mimeograph, University of Birmimgham and CREMERC, 1987.

[8].BARTHÉLEMY J.P., MONJARDET B. (1981), "The Median Procedure in Cluster Analysis and Social Choice Theory", *Mathematical Social Sciences*, 1, 1981, 235-267.

[9].BARTHÉLEMY J.P, MONJARDET B. (1988), "The Median Procedure in Data Analysis : new results and open problems", in *classification and related methods of data analysis*, HH Bock Editor, Elsevier Science Publishers, North-Holland, 1988, 309-316.

[10].BLOCK H , MARSCHAK J. (1960), "Random Orderings and Stochastic Theories of Response". Chapter 10 in *contributions to probability and statistics*, edited by J. Olkin, Stanford : Stanford University Press, 1960.

[11].BOWMAN V.J. (1972), "Permutation Polyhedra", *Siam Journal of Applied Mathematics*, 22, n°4, 1972, 580-589.

[12]. BOUYAUX P., "Une difficulté d'interprétation de l'Approche Logit : l'exemple de l'économie des transports", *Économie et prévision* n°91, à paraître.

[13].CHIPMAN J., HURWICZ L., RICHTER M., SONNENSCHEIN H. (1971), *Preferences, utility and demand : a minnesota symposium*, Harcourt Brace Jovanovich, New York, Chicago, San-Francisco, Atlanta, 1971.

[14].COHEN M., FALMAGNE J.C. (1978), *Random Scale Représentation of Binary Choice Probabilities : a counterexample to a conjecture of Marschak*, Mimeograph, department of Psychology, New York University, 1978.

[15].COHEN M., FALMAGNE J.C. (1989), *Random Utility Representation of Binary Choice Probabilities : a new class of necessary conditions*. Mimeograph, department of Psychology, New York University, 1989.

[16].DEBORD B. (1987), "Caractérisation des matrices des préférences nettes et méthodes d'agrégation associées", *Mathématiques et Sciences humaines*, n°97, 1987, 5-17.

[17].DEBREU G. (1958), "Stochastic Choice and Cardinal Utility", *Econometrica*, 26, 1958, 440-444.

[18] DE PALMA A., et THISSE J. (1989), "Les modèles de choix discrets, *Annales d'Economie et de Statistique*, vol.9, 1989, 151-190.

[19].DRIDI T. (1980), "Sur les Distributions Binaires Associées à des Distributions Ordinales", *Mathématiques et Sciences humaines*, n°69, 1980, 15-31.

[20] DOIGNON J.P., MONJARDET B., ROUBENS M., VINCKE Ph., (1986), "Biorder Families, Valued Relations, and Preference Modelling", *Journal of Mathematical Psychology*, 30, n°4, 1986, 435-480.

[21].FALMAGNE J.C. (1978), "A representation theorem for finite random scale systems", *Journal of Mathematical Psychology*, 18, 1978, 52-72.

[22].FECHNER G. (1859), *Elemente der Psychophysik*, Leipzig, Breitkopf und Härtel, 1859.

[23].FISHBURN P. (1973), "Binary Choice Probabilities : on the varieties of stochastic transitivity", *Journal of Mathematical Psychology*, 10, 1973, 327-352.

[24].FISHBURN P. (1978), "Choice Probabilities and choice functions", *Journal of Mathematical Psychology*, 18, 1978, 205-219.

[25].FISHBURN P. (1987), "Decomposing Weighted Digraphs into Sums of Chains", *Discrete Applied Mathematics*, 16, 1987, 223-238.

[26].FISHBURN P.(1988), *Binary Probabilities induced par rankings*, Mimeograph, Bell Laboratories, Murray Hill, New-Jersey and New York University, 1988.

[27].FISHBURN P., FALMAGNE J.C. (1989), "Binary choice probabilities and rankings", *Economic Letters*, 31, 1989, 113-117.

[28].GEORGESCU-ROEGEN N. (1958), "Threshold in choice and the theory of demand", *Econometrica*, 26, 1958, 157-168.

[29].GILBOA I. (1985), *A necessary but insufficient condition for the stochastic order problem*, Mineograph, Faculty of Social Sciences, Tel Aviv University, 1985 .

[30].GILBOA I. (1989), *A necessary but insufficient condition for the stochastic binary choice problem*, Mimeograph, North Western University, 1989.

[31].GUILBAUD G.Th. (1953), "Sur une difficulté de la théorie du risque" in *Colloques internationaux du CNRS, Paris*, 12-17 mai 1952, Editions du CNRS, 1953, 19-28.

[32].GUILBAUD G.Th. (1970), "Préférences Stochastiques", *Mathématiques et Sciences humaines*, n°32, 1970, 45-56.

[33].HAUSMAN J., WISE D. (1978), "A conditional probit model for qualitative choice : discrete decisions recognizing interdependance ans heterogeneous preferences", *Econometrica*,46, 1978, 403-426.

[34].HOUTHAKKER H. (1950), "Revealed preference and the utility functions", *Economica*,17, 1950, 159-174.

[35].LUCE R.D. (1959), *Individual choice behavior*, New York, Wiley, 1959.

[36].LUCE R.D, SUPPES P. (1965), "Preference, utility and subjective probability", Chapter 19 in *Handbook of Mathematical Psychology*, edited by Luce, Bush, and Galanter, Wiley, 1965.

[37].MAC-FADDEN D. (1974), "Conditional logit analysis of qualitative choice behavior", Chapter 4 in *Frontiers in Econometrics*, edited by P. Zarembka, New York, Academic Press, 1974.

[38].MAC-FADDEN D. (1976), "Quantal choice analysis : a survey", *Annals of Economic and Social Measurement*, 1976, 363-390.

[39].MAC-FADDEN D. (1981), "Econometric models of probabilistic choice", Chapter 5, in *Structural Analysis of Discrete Data*, edited by C. Manski et D.Mac-Fadden, Cambridge, Mass, MIT Press, 1981.

[40].MAC-FADDEN D, RICHTER (1970), *Stochastic rationality and revealed stochastic preference*, Mineograph, University of California, 1970.

[41].MACHINA M. (1985), "Stochastic choice functions generated from deterministic preferences over lotteries", *Economic Journal*, n°95, 1985, 575-594.

[42].MAC-LENNAN A. (1980), "Randomized preference aggregation : additivity of power and strategy proofness", *Journal of Economic Theory*, 22, 1980, 1-11.

[43].MAC-LENNAN A. (1983), *Binary stochastic choice*, Mimeograph, University of Minnesota, 1983.

[44].MARLEY J.A.A. (1965), "The relation between the discard and regularity conditions for choice probabilities", *Journal of Mathematical Psychology*, 2, 1965, 242-253.

[45].MARSCHAK J. (1960), "Binary choice constraints and random utility indicators", in *Mathematical Methods in the Social Sciences*, edited by K.J.Arrow et als, Stanford, California : Stanford University Press, 1960.

[46].MEGIDDO N. (1977), "Mixtures of order matrices and generalized order matrices", *Discrete Mathematics*, 19, 1977, 177-181.

[47].MIMIAGUE F., ROUSSEAU J.M. (1977), "Effet Condorcet : typologie et calculs de fréquence", *Mathématiques et Sciences humaines*, 43, 1977,.7-27.

[48].MONJARDET B. (1973), "Tournois et ordres médians pour une opinion", *Mathématiques et Sciences humaines*, 43, 1973, 55-70.

[49].MONJARDET B. (1985), "Concordance et consensus d'ordre totaux : les coefficients K et W", *Revue de Statistique Appliquée*, 33, n°2, 1985, 55-87.

[50].MOSSIN A. (1985), "Element of a stochastic theory of consumption", *Swedish Journal of Economics*, 70, 1985, 200-220.

[51].MOULIN H. (1985), "Choice functions over a finite set : a summary", *Social Choice and Welfare*, 2, 1985, 147-160.

[52].PATTANAIK P.K., PELEG B. (1986), "Distribution of power under stochastic choice rules", *Econometrica*, 54, 1986, 909-921.

[53].QUANDT R. (1956),"A probabilistic theory of consumer behavior", *Quaterly Journal of Economics*, 70, 1956, 507-536.

[54].REINELT G. (1985), *The linear ordering problem : algorithms and applications*, Heldermann verlag, Berlin, 1985.

[55].RICHTER M.K. (1966), "Revealed perference theory", *Econometrica,* 34, 1966, 635-645.

[56] ROBERTS F., (1979), Measurement Theory, with Applications to Decision-making, Utility, and the Social Sciences, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Vol.7, Reading, MA, Addison-Wesley, 1979.

[57].SAMUELSON S. (1948), "Consumption theory in terms of revealed preferences", *Economica,* 15, 1948, 243-253.

[58].SEN S.(1971), "Choice functions and revealed preferences", *Review of Economic Studies*, 38, 1971, 307-317.

[59].SOUZA F.M.C. (1978), "Mixed models, random utilities, and the triangle inequality", *Journal of Mathematical Psychology*, 27, 1978, 183-200.

[60].STIGLER G.S., BECKER G.S. (1977), "De Gustibus non est disputandum", *American Economic Review*, 67, 1977, 76-90.

[61].THURSTONE L. (1927), "A law of comparative judgement", *Psychological Review*, 34, (1927), 273-286.

[62].TVERSKY A.(1972), "Elimination by aspects : a theory of choice", *Psychological Review*, 79, 1972, 281-289.

[63].TVERSKY A., RUSSO J.E. (1969), "Substituability and similarity in binary choices", *Journal of Mathematical Psychology*, 6, 1969,.1-12.

[64].YOUNG H.P. (1978), "On permutations and permutation polytopes" *Mathematical Programming Study*, 8, 1978, 128-140.

ANNEXE

CONDITIONS NÉCESSAIRES CARACTÉRISANT LES FONCTIONS DE CHOIX BINAIRE RATIONALISABLES

I - L'INÉGALITÉ DIAGONALE DE I. GILBOA (1985, 1989)

On considère $N = \{1,2,... n\}$.
Chaque ordre $\rho \in R$ est identifié à une matrice $M\rho$ de dimension (n,n) et de terme générique $M\rho^i = 1$ si $x > y$ dans ρ et $M\rho^j = 0$ sinon. Soit $Q_{(n,n)}$ une matrice de terme générique $Q_{a,b}$ où $Q_{a,b}$ représente la probabilité pour que l'éventualité a soit préférée à l'éventualité b. Gilboa (1985) cherche à quelle(s) condition(s) $Q_{(n,n)}$ appartient à l'enveloppe convexe $\mathcal{C}_m$ des matrices $M\rho$. Dans ce but, il travaille sur les propriétés que chaque matrice Q doit présenter pour être compatible avec un classement d'éventualités cohérent, c'est-à-dire n'exhibant pas de "cycles" du type : a préféré à b préféré à c préféré à a. Il caractérise ainsi les éléments diagonaux de toute matrice Q à l'aide d'une inégalité quadratique ; il transforme ensuite cette inégalité quadratique en une série d'inégalités linéaires qu'il applique aux probabilités de choix binaires $Q_{a,b}$ et énonce le théorème suivant :

THÉOREME 3. (Gilboa (1985)) : une condition nécessaire pour qu'une matrice $Q_{(n,n)}$ appartienne à $\mathcal{C}_M$ est donnée par :

pour chaque $k \leq n$
pour chaque $\{a_i\}$, $(i = 1,... k) \subset N$
pour chaque $\{b_j\}$, $(j = 1, \ k) \subset N$
pour chaque $\sigma : 1 \leq \sigma \leq k\text{-}1$

$$\sum_{1 \leq i \neq j \leq k} Q_{a_i b_j} \geq \sigma \sum_{i=1}^{k} Q_{a_i b_i} - 1/2\, \sigma(\sigma+1)$$

Cette "inégalité diagonale" ne constituek pas une condition suffisante ; Gilboa (1985) le montre en construisant un contre-exemple dans le cas où $n = 54$ éventualités.

Gilboa (1985) remarque que la fameuse inégalité triangulaire est un cas particulier de sa condition. En effet, si $k=2$, $A = \{a,b\}$, $B = \{b,c\}$ et $\sigma=1$, on a : $Q_{a,c} + Q_{b,b} \geq Q_{a,b} + Q_{b,c} - 1$.
De façon évidente, toute matrice $Q_{(n,n)}$ appartenant à $\mathcal{C}_M$ est telle que :

$$\forall\, a \in N,\ Q_{a,a} = 0$$

donc $\quad Q_{a,b} + Q_{b,c} \leq 1 + Q_{a,c}$
ou $\quad Q_{a,b} + Q_{b,c} \geq Q_{a,c}$

Gilboa (1989) remarque également que l'inégalité diagonale généralise les conditions de Cohen et Falmagne (1978) reprises dans Fishburn et Falmagne (1989). Ces conditions, énoncées sous le nom de "conditions C_k" dans Fishburn et Falmagne (1989), sont les suivantes :

Pour chaque couple de sous-ensemble A,B de N avec
$$|A| = |B| = m \text{ et } A \cap B = \varnothing,$$

et pour chaque bijection f de A vers B on a :

$$\sum_{i\in A} \sum_{k\in B\setminus\{f(i)\}} Q_{ik} + \sum_{i\in A} Q_{f(i)i} \leq m(m-1)+1$$

Etant donné A,B et f, énumérons les éléments de A et B tels que

$f(a_i) = b_j$ pour $i \leq j \leq m$; on obtient

$$\sum_{1\leq i\neq j\leq m} Q_{a_ib_j} + \sum_{i=1}^{m} Q_{b_ia_i} \leq m(m-1)+1$$

ou

$$\sum_{1\leq i\neq j\leq m} (1-Q_{b_ja_i}) + \sum_{i=1}^{m} Q_{b_ia_i} \leq m(m-1)+1$$

Ce qui équivaut à :

$$\sum_{1\leq i\neq j\leq m} Q_{b_ja_i} \geq \sum_{i=1}^{m} Q_{b_ia_i} - 1$$

On obtient donc exactement l'inégalité diagonale pour $\sigma = 1$ (k=m et A et B jouent des rôles inverses). En conséquence, les conditions de Cohen et Falmagne (1978) sont insuffisantes.

Notons enfin que Gilboa (1989) exprime les conditions de Fishburn (1988) reprises dans Fishburn et Falmagne (1989) sous le nom de "conditions F_k)" (que l'on trouve aussi sous une autre forme chez Mac-Lennan (1983), théorème 7) à l'aide du formalisme matriciel :

$$\sum_{(i,j)\in C^+} Q_{ij} - \sum_{(i,j)\in C^-} Q_{ij} \leq 3k-2$$

où $|C^+| = 2\,|C^-| = 4k-2$ et $k \geq 2$

Utilisant le contre-exemple mentionné plus haut où n=54 éventualités, Gilboa (1989) montre que ces conditions sont insuffisantes.

II - LA CARACTÉRISATION PARTIELLE DES FACETTES DU PERMUTOEDRE P : LES TRAVAUX DE REINELT (1985).

Soit $P = \text{Conv}\,\{v_\rho \in V\}$
Reinelt (1985) décrit des facettes du permutoèdre P en utilisant le formalisme de la théorie des graphes.

Soit $K_n(X,\mathfrak{A})$ le graphe orienté complet défini sur l'univers X.
X est donc l'ensemble des sommets et $\mathfrak{A}$ l'ensemble des arcs ; K_n contient n(n-1) arcs.
Soit $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ un ensemble arbitraire d'arcs ; on pose :

$$g(\mathfrak{B}) = \sum_{(x,y)\in\mathfrak{B}} a_{xy}$$

Il est clair qu'une première caractérisation partielle des facettes de P est donnée par :

$\forall$ x,y $\in$ X $a_{xy} \geq 0$

$\forall$ x,y $\in$ X : x>y : $a_{xy} + a_{yx} = 1$

$\forall$ $\mathfrak{C}$ un circuit de longueur 3 extrait de $K_n, g(\mathfrak{C}) \leq 2$

(on retrouve ici l'inégalité triangulaire).

Une caractérisation moins évidente est donnée par Reinelt (1985) à l'aide du concept de "k-Fence".

DÉFINITION 5 : Soit $K(\mathfrak{Z},\mathfrak{F})$ un graphe orienté ; ce graphe est appelé "k-Fence" s'il a les propriétés suivantes :

i) $|\mathfrak{Z}| = 2k, k \geq 3$

ii) $\mathfrak{F}$ peut être partionné en deux sous-ensembles disjoints,
$U = \{x_i, \ldots x_k\}$ et $L = \{y_1, \ldots y_k\}$ tels que

$$\mathfrak{F} = \bigcup_{i=1}^{k} [\{(x_i,y_i)\} \cup \{y_i,x_j) / j \in \{1,\ldots k\}, j \neq i\}]$$

Chaque "k-Fence" $K(\mathfrak{Z},\mathfrak{F})$ définit une inégalité $g(\mathfrak{F}) \leq k^2 - k+1$ qui est valide pour P, $\forall$ $n \geq 2$ k ; ceci permet d'énoncer le théorème suivant :

THÉOREME 4. (Reinelt (1985)) : Soit $K(\mathfrak{Z},\mathfrak{F})$, un "k-Fence" contenu dans K_n, $n \geq 2$ k. Alors l'inégalité $g(\mathfrak{F}) \leq k^2 - K+1$ définit une facette de P.

Remarquons que d'autres conditions de même nature mais beaucoup plus sophistiquées (utilisant notamment le concept de ruban de Möbius) sont proposées dans le théorème 2.5.4 énoncé à la page 54 de l'ouvrage de Reinelt (1985). Il serait intéressant de comparer toutes ces conditions avec celles obtenues par Gilboa (1989) et Fishburn et Falmagne (1989).