MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

C. CHAMENI-NEMBUA

Règle majoritaire et distributivité dans le permutoèdre

Mathématiques et sciences humaines, tome 108 (1989), p. 5-22
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1989__108__5_0>

Math. Inf. Sci. hum. (27e année, n°108, *1989*, p. 5-22).

REGLE MAJORITAIRE ET DISTRIBUTIVITE DANS LE PERMUTOEDRE

C. CHAMENI-NEMBUA[1]

1. INTRODUCTION

En 1952, G.Th. Guilbaud remarquait, à propos des travaux de Black et Arrow, que la règle majoritaire évite l'effet Condorcet lorsqu'elle s'applique à des sous-ensembles particuliers d'ordres totaux pouvant être munis d'une structure de treillis distributif. Depuis, G.Th. Guilbaud et P. Rosenstiehl (1963) ont étudié l'ensemble des ordres totaux définis sur un ensemble X et ont montré en particulier qu'on pouvait le munir d'un ordre de treillis ; cette même structure latticielle a été obtenus indépendamment par Yanagimoto (1963) dans un contexte statistique, puis comme cas particulier d'un résultat plus général de A. Björner (1984) sur les "ordres faibles de Bruhat" de certains groupes ; plusieurs auteurs français (Kreweras, Högaasen, Frey, Barbut, Romero, ...) ont étudié différents aspects de cette structure ou divers sous-ensembles d'ordres totaux. Ce texte s'inscrit dans ce courant de recherches qu'il prolonge.

Dans un premier temps nous donnons quelques définitions et propriétés préliminaires sur les ordres totaux et la règle majoritaire. Nous rappelons la définition du treillis des ordres totaux (θ,O_0) où O_0 est un ordre total qui est le plus grand élément de ce treillis.

Dans le troisième paragraphe, nous étudions les propriétés du treillis des ordres totaux vis à vis de la règle majoritaire . Depuis Condorcet, on sait que si l'on agrège des préférences individuelles transitives (comme les ordres totaux) en une préférence collective au moyen de la règle majoritaire appliquée à chaque paire d'objets comparés, la préférence collective obtenue n'est pas nécessairement transitive ; on dit dans ce cas qu'il y a effet Condorcet. Plusieurs auteurs depuis Black et Coombs (1965), Ward (1961), Inada (1964), etc... ont examiné des conditions sous lesquelles la règle majoritaire n'aboutit pas à l'effet Condorcet ; un certain nombre de ces conditions sont basées sur le fait que la règle majoritaire ne peut aboutir à l'effet Condorcet si elle est appliquée à un ensemble d'ordres totaux qui ne contient pas de triplet cyclique (triplet d'ordres totaux de la forme xyz, yzx, zxy). Le résultat principal de ce texte est de montrer que l'ensemble des sommets d'un sous-treillis distributif du treillis des ordres totaux, conservant la relation de couverture (S.T.D.C.) vérifie cette condition. Pour ce faire, nous commençons par définir une classe de sous treillis fortement distributifs (S.T.D.F.) du treillis des ordres totaux (θ,O_0) dans lesquels l'opération infimum et supremum des 2 ordres totaux O_1 et O_2 coïncide avec la règle majoritaire appliquée respectivement à (O_0^r,O_1,O_2) - O_0^r désignant

---

[1] Université Paris V.

(Je tiens à remercier B. Monjardet pour ses nombreuses remarques sur des versions préliminaires de ce texte).

l'ordre réciproque de l'ordre O_0 - et (O_0,O_1,O_2) ; nous montrons que les S.T.D.F. ne peuvent pas contenir de triplet cyclique. Nous montrons ensuite qu'un S.T.D.C. qui contient deux ordres réciproques est un S.T.D.F., donc ne contient pas de triplet cyclique, avant d'étendre le résultat dans le cas général d'un S.T.D.C. quelconque.

Dans une dernière partie, nous présentons des classes de S.T.D.C., en montrant que plusieurs sous-ensembles d'ordres totaux déjà étudiés par différents auteurs sont des S.T.D.C. Nous terminons notre étude en présentant un S.T.D.C. du treillis des ordres totaux sur un ensemble à 6 éléments, qui améliore la borne connue du cardinal maximum d'un ensemble d'ordres totaux "connexe" et "sans effet Condorcet".

2. RAPPELS ET PRELIMINAIRES

Etant donné un ensemble fini X, on considère l'ensemble de tous les ordres totaux qu'on peut définir sur les éléments de X ; cet ensemble est noté θ_X ou θ_n si $|X| = n$.

Si $X = \{x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_n\}$ le mot $x_1x_2\ldots x_i\ldots x_n$ désigne l'ordre total O où $(x_i,x_j) \in O$ pour $i \leq j$.

Si (X,O) est un ensemble ordonné, on notera $x \prec y$ pour dire que y *couvre* x sur O (i.e. $(x,y) \in O$ et il n'existe pas $z : (x,z),(z,y) \in O$).

Si $\{x,y\}$ est une paire d'éléments de X dont l'un couvre l'autre sur O, on dira qu'ils sont *contigus* sur O.

Si $O \in \theta_X$ et $A \subseteq X$, on note par O/A l'ordre total restriction de O sur A.

Un v-uplet $\Pi = (O_1,O_2,\ldots,O_i,\ldots,O_v)$ de θ_X est appelé un v-*état d'opinion*, on note par $\prod$ l'ensemble de tous les états d'opinion possible sur θ_X.

Si R est une relation binaire quelconque sur X (i.e. $R \subseteq X^2$), on note par R^r la relation binaire réciproque de R :

$$(x,y) \in R^r \Leftrightarrow (y,x) \in R .$$

DEFINITION 2.1. On appelle *règle majoritaire* et *règle majoritaire stricte* les applications notées F_M et F_{MS} définies comme suit :

Pour tout $v \in \mathbb{N}$, on pose $V = \{1,2,\ldots,i,\ldots v\}$ et si Π est un v-état d'opinion avec $\Pi = (O_1,O_2,\ldots,O_i,\ldots,O_v)$, on pose pour tout x et y éléments de X :

$V_\Pi(x,y)$ ou simplement $V(x,y) = \{i \in V, (x,y) \in O_i\}$,

$v_\Pi(x,y)$ ou simplement $v(x,y) = |V_\Pi(x,y)|$

$F_M,F_{MS} : \prod \rightarrow \mathcal{P}(X^2)$

$$\Pi = (O_1,O_2,\ldots,O_i,\ldots,O_v) \rightarrow F_M(\Pi) = \left\{(x,y) \,/\, v_\Pi(x,y) \geq \left[\frac{v+1}{2}\right]\right\}$$

$$F_{MS}(\Pi) = \left\{(x,y) \,/\, v_\Pi(x,y) > \left[\frac{v+1}{2}\right]\right\}$$

où $\left[\frac{v}{2}\right]$ désigne la partie entière inférieure de v/2.

Notons que si v est impair $F_M = F_{MS}$;

DEFINITION 2.2. On dira qu'une relation binaire R sur X contient un *p-circuit*, s'il existe $x_1,x_2,...,x_i,...,x_p$, suite d'éléments de X telle que pour $i \in \{2,3,...,p\}$, $(x_{i-1},x_i) \in R$ et $(x_p,x_1) \in R$; p est la *longueur* du circuit.

DEFINITION 2.3. On dira qu'un v-état d'opinion Π est *condorcéen* si $F_{MS}(\Pi)$ est sans circuit.

DEFINITION 2.4. Un v-état d'opinion Π sera dit *fortement condorcéen* si pour tout O_1,O_2,O_3 prélevés dans Π, l'état d'opinion $\Pi' = (O_1,O_2,O_3)$ est condorcéen (i.e. $F_M(\Pi') = F_{MS}(\Pi')$ est un ordre total).

DEFINITION 2.5. Un état d'opinion Π contient un *triplet cyclique* (T.C.) s'il existe O_1,O_2,O_3 prélevés dans Π et $X_3 = \{x,y,z\} \subseteq X$ tels que $O_1/X_3 = xyz$, $O_2/X_3 = zxy$ et $O_3/X_3 = yzx$.

Si R_1 et R_2 sont deux relations binaires sur X telles que $R_1 \subseteq R_2$, on note par $[R_1,R_2]$ l'ensemble des relations binaires R sur X telles que $R_1 \subseteq R \subseteq R_2$ et on l'appelle l'intervalle entre R_1 et R_2.

LEMME 2.6. Pour tout v-état d'opinion Π les trois propriétés suivantes sont équivalentes et si v est impair elles sont équivalentes à la quatrième :
(1) Π est condorcéen.
(2) $F_M(\Pi)$ contient un ordre total.
(3) $[F_{MS}(\Pi), F_M(\Pi)] \cap \theta_X \neq \emptyset$.
(4) $F_M(\Pi)$ est un ordre total.

LEMME 2.7. Si Π est un v-état d'opinion, les propriétés (1) et (2) sont équivalentes et impliquent (3) :
(1) Π est fortement condorcéen.
(2) Π est sans triplet cyclique.
(3) Π est condorcéen.

L'équivalence de (1) et (2) du lemme 2.7 est due à Ward (1965).

Il est facile de voir que (1) implique (2). (2) implique (1) découle de (2) implique (3). Pour montrer que (2) implique (3) on peut procéder par l'absurde ; si Π n'est pas condorcéen, c'est que $F_{MS}(\Pi)$ contient un p-circuit avec $p \geq 3$. Soit $(x_1,x_2,...,x_i,...,x_p)$ un circuit de longueur minimum dans $F_{MS}(\Pi)$; $(x_1,x_2) \in F_{MS}(\Pi)$ et $(x_2,x_3) \in F_{MS}(\Pi)$ entraîne $V(x_1,x_2) \cap V(x_2,x_3) \neq \emptyset$ car $v(x_1,x_2) > \left[\frac{v}{2}\right]$ et $v(x_2,x_3) > \left[\frac{v}{2}\right]$.

Pour $i \in V(x_1,x_2) \cap V(x_2,x_3)$ on a donc $O_i/X_3 = x_1x_2x_3$.

D'autre part, il existe $j \in V(x_1,x_2) \cap V(x_3,x_1)$, car sinon $v(x_1,x_3) = v\text{-}v(x_3,x_1)$ serait supérieur ou égal à $v(x_1,x_2)$ donc (x_1,x_3) appartiendrait à $F_{MS}(\Pi)$ et on aurait un circuit de longueur inférieure à p ce qui n'est pas possible ; donc $O_j/X_3 = x_3x_1x_2$. Pour les mêmes raisons il existe $k \in V(x_2,x_3) \cap V(x_3,x_1)$ et $O_k/X_3 = x_2x_3x_1$; O_i,O_j,O_k et $\{x_1,x_2,x_3\}$ définissent ainsi un triplet cyclique dans Π ce qui contredit (2). □

TREILLIS DES ORDRES TOTAUX

Soit $O_0 \in \theta_X$ on définit une relation d'ordre sur θ_X comme suit : $O_1,O_2 \in \theta_X$, $O_1 \leq O_2$ si et seulement si $O_0 \cap O_1 \subseteq O_0 \cap O_2$.

G.Th. Guilbaud et P. Rosenstiehl (1963) ont montré que cet ordre est un ordre de treillis sur θ_X.

On rappelle que la fermeture transitive d'une relation R notée R^t est la plus petite relation transitive contenant R ; on appelle *adhérence transitive* de R, la relation $R^t - R$.
On pose $A_i = O_0 \cap O_i$ $(i = 1,2)$ et $D_i = O_0^r \cap O_i$ $(i = 1,2)$.

LEMME 2.8. (G.Th. Guilbaud et P. Rosenstiehl (1963)). Soit $O_0 \in \theta_n$; pour O_1 et O_2 dans θ_n, notons A_{12}^+ (resp. D_{12}^+) l'adhérence transitive de $A_1 \cup A_2$ (resp. $D_1 \cup D_2$) ; alors $D_1 \cap D_2 - (A_{12}^+)^r$ (resp. $(A_1 \cap A_2) - (D_{12}^+)^r$) est transitif.

LEMME 2.9. Pour $O_0 \in \theta_n$, pour $O_1,O_2 \in \theta_n$, les relations binaires $O_1 \vee O_2$ et $O_1 \wedge O_2$ définies par

$$O_1 \vee O_2 = [(A_1 \cup A_2 \cup A_{12}^+) \cup ((D_1 \cap D_2) - (A_{12}^+)^r)]$$

$$O_1 \wedge O_2 = [(D_1 \cup D_2 \cup D_{12}^+) \cup ((A_1 \cap A_2) - (D_{12}^+)^r)]$$

sont des ordres totaux sur X, supremum et infimum de O_1 et O_2 dans l'ordre $\leq$.

Si X a n élements, ce treillis sera noté (θ_n,O_0). Il est évident que le treillis (θ_n,O_0) a pour plus grand élément O_0 et pour plus petit élément O_0^r ; c'est un treillis complémenté : O^r est un complément de O. Dans (θ_n,O_0), $O_1 \prec O_2$ si et seulement si il existe un unique couple $(x,y) \in O_0$ tel que $O_0 \cap O_2 = O_0 \cap O_1 + \{(x,y)\}$ (i.e. $O_0^r \cap O_1 = O_0^r \cap O_2 + \{(y,x)\}$).

LEMME 2.10. Dans le treillis (θ_n,O_0) les propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) (O_0,O_1,O_2) est condorcéen.
(2) $A_1 \cup A_2$ est transitif.
(3) $O_1 \vee O_2 = F_M(O_0,O_1,O_2)$.
(4) $A_{12}^+ = (A_{12}^+)^r = \varnothing$.

LEMME 2.10*. Dans le treillis (θ_n,O_0) les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) (O_0^r,O_1,O_2) est condorcéen.

(2) $D_1 \cup D_2$ est transitif.

(3) $O_1 \wedge O_2 = F_M(O_0^r,O_1,O_2)$.

(4) $D_{12}^+ = (D_{12}^+)^r = \varnothing$.

PROPOSITION 2.11. Si K est une partie de (θ_n,O_0) contenant O_0 et O_0^r alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) K est fortement condorcéen.

(2) Pour tout O_1,O_2 appartenant à K, $O_1 \vee O_2 = F_M(O_0,O_1,O_2)$ et $O_1 \wedge O_2 = F_M(O_0^r,O_1,O_2)$.

DEMONSTRATION.

(1) implique (2) est une conséquence des lemmes 2.10 et 2.10* précédents.

(2) implique (1) (par l'absurde).

Si K n'est pas fortement condorcéen, d'après le lemme 2.7, K admet un triplet cyclique décrit par $X_3 = \{x,y,z\}$, $O_1/X_3 = xyz$, $O_2/X_3 = zxy$ et $O_3/X_3 = yzx$. Posons $A_3 = \{O_1/X_3, O_2/X_3, O_3/X_3\}$; si O_0/X_3 ou O_0^r/X_3 est un élément de A_3 on est en contradiction avec (2) à cause des lemmes 2.10 ou 2.10* ; donc O_0/X_3 et O_0^r/X_3 appartiennent à $B_3 = \{O_1^r/X_3, O_2^r/X_3, O_3^r/X_3\}$ ce qui est absurde, car B_3 ne contient pas deux ordres réciproques. □

3. SOUS-TREILLIS DISTRIBUTIFS DE (θ_n,O_0)

DEFINITION 3.1. Si K est un sous-treillis de (θ_n,O_0) on dira que K est un *sous-treillis fortement distributif* (S.T.D.F.) si K est un sous-treillis distributif (S.T.D.) et si on a de plus : pour tout

$$O_1,O_2 \in K \qquad O_1 \vee O_2 = F_M(O_0,O_1,O_2)$$
$$O_1 \wedge O_2 = F_M(O_0^r,O_1,O_2).$$

COROLLAIRE 3.2. Si K est un sous-treillis de (θ_n,O_0) contenant O_0^r et O_0, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) K est fortement condorcéen.

(2) K est un S.T.D.F.

DEMONSTRATION.

(1) implique (2) : Si K est fortement condorcéen, K est un S.T.D. car d'après la proposition 2.11

$$O_1,O_2 \in K\ ,\ O_1 \vee O_2 = (A_1 \cup A_2) \cup (D_1 \cap D_2)\ ,\ O_1 \wedge O_2 = (D_1 \cup D_2) \cup (A_1 \cap A_2)$$

et les opérations d'union et d'intersection sont distributives l'une par rapport à l'autre.

(2) implique (1) : est une conséquence de la proposition 2.11. □

Nous avons ainsi caractérisé les sous-treillis de (θ_n,O_0) qui contiennent O_0^r et O_0 et sont fortement condorcéens. En particulier ce sont les sous-treillis pour lesquels on a pour tout O_1,O_2 (O_0,O_1,O_2) et (O_0^r,O_1,O_2) sans triplet cyclique.

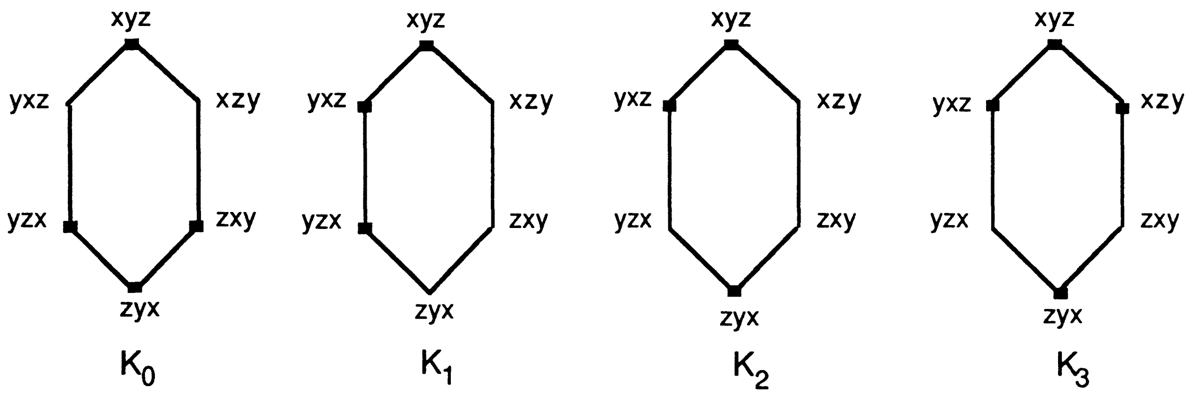
DEFINITION 3.3. Si K est un sous treillis de (θ_n,O_0), on dira que K est un *sous-treillis couvrant de* (θ_n,O_0) si

(1) K est un sous-treillis de (θ_n,O_0).

(2) O_1 couvre O_2 dans K implique O_1 couvre O_2 dans (θ_n,O_0).

Si, de plus, K est distributif on dit qu'il est un *sous-treillis distributif couvrant* (S.T.D.C.).

Exemple : $X = \{x,y,z\}$ $\quad n = 3 \quad O_0 = xyz$.



$K_0 = \{xyz, yzx, zxy, zyx\}$ et $K_3 = \{xyz, yxz, xzy, zyx\}$ sont des S.T.D.
$K_1 = \{xyz, yxz, yzx\}$ est un S.T.D.C.
$K_2 = \{xyz, yxz, zyx\}$ est un S.T.D.F.

Ces exemples montrent que tout S.T.D. n'est pas forcément S.T.D.F. ou S.T.D.C. et que tout S.T.D.F. n'est pas forcément S.T.D.C. d'une part, et d'autre part, que les conditions $O_1 \vee O_2 = F_M(O_0,O_1,O_2)$ et $O_1 \wedge O_2 = F_M(O_0^r,O_1,O_2)$ qui définissent les S.T.D.F. sont indépendantes (car dans K_3 on a bien $O_1 \vee O_2 = F_M(O_0,O_1,O_2)$ sans avoir $O_1 \wedge O_2 = F_M(O_0^r,O_1,O_2)$ et dans K_0 c'est le contraire). Ceci prouve aussi que toutes les propriétés du lemme 2.10 sont indépendantes de toutes les propriétés du lemme 2.10*.

LEMME 3.5. Soit K un sous-treillis couvrant de (θ_n,O_0) avec O_0 et O_0^r appartenant à k ; s'il existe O_1 et O_2 deux éléments de K tels que (O_0,O_1,O_2) soit non condorcéen, alors il existe O_1'' et O_1' dans K tels que :

$$O_1' \wedge O_2 = O_1'' \wedge O_2$$

$$O_1 \leq O_1' \prec O_1'' < O_0 \quad \text{et}$$

$$O_1' \vee O_2 = O_1'' \vee O_2$$

DEMONSTRATION. (O_0,O_1,O_2) non condorcéen est équivalent à (O_0,O_1,O_2) contient un triplet cyclique donc il existe $X_3 = \{x,y,z\} \subseteq X$ tel que $O_0/X_3 = xyz$, $O_1/X_3 = zxy$ et $O_2/X_3 = yzx$. O_0 étant le plus grand élément de K, il existe une chaîne $Ch = O_1 \prec O'_2 \prec O'_3 \dots O'_p \prec O_0$ maximale de K, allant de O_0 à O_1 ; notons par O'_1 le plus grand élément de cette chaîne qui classe x,y,z de la même façon que O_1, c'est-à-dire que $O'_1/X_3 = zxy$; donc (O_0,O'_1,O_2) reste non condorcéen et K étant couvrant, il existe $O''_1 \in K$ tel que $O_1 \le O'_1 \prec O''_1 < O_0$; puisque $O'_1 \prec O''_1$, nécessairement $O_0 \cap O'_1 = O_0 \cap O''_1 - \{(x,z)\}$, car $(x,y) \in O_0 \cap O_1$ et O'_1 est le plus grand élément de Ch qui classe x,y,z comme O_1 ; O''_1/X_3 est donc égal à xzy et si $t_1,t_2 \notin \{x,y,z\}$, $(t_1,t_2) \in O_1$ est équivalent à $(t_1,t_2) \in O''_1$. Avec les notations du lemme 2.9

$$O'_1 \wedge O_2 = (D'_1 \cup D_2 \cup D'^{+}_{12}) \cup (A'_1 \cap A_2) - (D'^{+}_{12})^r$$

$$O''_1 \wedge O_2 = (D''_1 \cup D_2 \cup D''^{+}_{12}) \cup (A''_1 \cap A_2) - (D''^{+}_{12})^r$$

Mais nous venons de voir que $D''_1 = D'_1 - \{(z,x)\}$, $(z,y) \in D''_1$ et $(y,x) \in D_2$ implique $(z,x) \in D''_1 \cup D_2 \cup D''^{+}_{12}$ et donc $O'_1 \wedge O_2 = O''_1 \wedge O_2$. De même $A'_1 = A''_1 - \{(x,z)\}$; $(x,y) \in A''_1$ et $(y,z) \in A_2$ implique $(x,z) \in A''_1 \cup A'_2 \cup A^{+}_{12}$ et donc $O'_1 \vee O_2 = O''_1 \vee O_2$. □

On a une proposition duale de la proposition précédente dont la démonstration est similaire, O_0 étant remplacé par O_0^r .

LEMME 3.5*. Soit K un sous-treillis couvrant de (θ_n,O_0) contenant O_0 et O_0^r ; s'il existe O_1,O_2 deux éléments de K tels que (O_0^r,O_1,O_2) soit non condorcéen, alors il existe O''_1 et O'_1 dans K tels que :

$$O'_1 \vee O_2 = O''_1 \vee O_2$$

$$O_0^r < O''_1 \prec O'_1 \le O_1 \quad \text{et}$$

$$O'_1 \vee O_2 = O''_1 \vee O_2$$

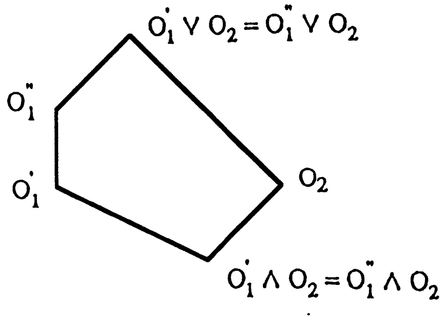
THEOREME 3.6. Si K est un sous-treillis de (θ_n,O_0) contenant O_0 et O_0^r alors :

K S.T.D.C. implique K S.T.D.F.

DEMONSTRATION. Supposons que K ne soit pas S.T.D.F., alors il existerait O_1 et O_2 dans K tels que (O_0,O_1,O_2) ou (O_0^r,O_1,O_2) soit non condorcéen. Si (O_0,O_1,O_2) est non condorcéen, d'après le lemme 3.5, il existerait O'_1, O''_1 tels que :

$$O_1 \le O'_1 \prec O''_1 < O_0, \quad O'_1 \wedge O_2 = O''_1 \wedge O_2 \quad \text{et} \quad O'_1 \vee O_2 = O''_1 \vee O_2$$

donc K possèderait un sous-treillis de la forme :



ce qui est impossible, car K est distributif. Si (O_0^r, O_1, O_2) non condorcéen, on applique le lemme 3.5* pour aboutir à une contradiction similaire. ▫

THEOREME 3.7. L'ensemble des sommets d'un S.T.D.C. de $(\theta_n, 0_0)$ forme un état d'opinion fortement condorcéen.

DEMONSTRATION. Si K est un S.T.D.C. de (θ_n, O_0), ou bien K contient O_0 et O_0^r et est un S.T.D.F., donc est fortement condorcéen, ou bien K ne contient pas O_0 ou O_0^r et on peut toujours trouver une chaîne C : $O_0 \succ O_1 \succ O_2 \ldots \succ 0_K$ (de (θ_n, O_0)) qui va de O_0 au plus grand élément O_K de K et une chaîne C' : $O_K^{'} \succ O_1^{'} \succ O_2^{'} \ldots \succ O_0^r$ qui va du plus petit élément $O_K^{'}$ de K à O_0^r. Pour $K' = K \cup C \cup C'$, K' est un S.T.D.C. de (θ_n, O_0), $O_0 \in K'$ et $O_0^r \in K'$, d'où K' est un S.T.D.F. et donc K' est fortement condorcéen. K étant inclus dans K' qui est fortement condorcéen, K est aussi fortement condorcéen. ▫

COROLLAIRE 3.8. Si K est un S.T.D.C. de (θ_n, O_0) alors K est un S.T.D.F.

4. EXEMPLES DE SOUS-TREILLIS DISTRIBUTIFS COUVRANTS DE (θ_n, O_0)

Dans ce paragraphe nous allons montrer que plusieurs ensembles fortement condorcéens classiques sont des S.T.D.C.

4.1. Unimodalité (ou *ordres Blackiens*)

DEFINITION 4.1.1. Etant donné $O_0 \in \theta_n$, on dit que $O_0 \in \theta_n$ est *unimodal par rapport à* O_0, si pour tout $\{x,y,z\} = X_3 \subseteq X$ avec $O_0/X_3 = xyz$, y n'est jamais "surclassé" par x et z simultanément sur 0 (i.e. $\{(x,y),(z,y)\} \nsubseteq O$).

L'ensemble des ordres totaux unimodaux par rapport à O_0 est noté $\mathcal{U}(O_0)$ M. Barbut et C. Frey (1971) ont montré que $\mathcal{U}(O_0)$ est un S.T.D.F. de (θ_n, O_0) contenant O_0 et O_0^r. Pour montrer que $\mathcal{U}(O_0)$ est un S.T.D.C. il suffit de montrer que $\mathcal{U}(O_0)$ est couvrant.

LEMME 4.1.2 (M. Barbut et C. Frey, 1971). Une condition nécessaire et suffisante pour que $O \in \theta_n$ appartienne à $\mathcal{U}(O_0)$ est que : pour tout triplet $X_3 = \{z,y,z\}$ de X, avec $O_0/X_3 =$ xyz, si x et z sont contigus sur O alors y se trouve placé dans O avant eux.

LEMME 4.1.3. Pour tout $O_0 \in \theta_n$, $\mathcal{U}(O_0)$ contient une chaîne maximale allant de O_0 à O_0^r

DEMONSTRATION. Considérons la chaîne maximale C de (θ_n,O_0) construite de la manière suivante :
soit $O_0 = x_1x_2...x_i...x_n$. On amène x_1 à la dernière place par n-1 transpositions puis x_2 à l'avant dernière place par n-2 transpositions etc...

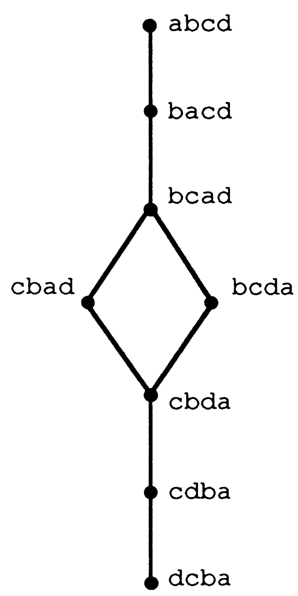
$x_1x_2...x_i...x_n \succ x_2x_1...x_i...x_n \succ x_2x_3x_1...x_n \succ ... \succ x_2x_3...x_nx_1 \succ x_3x_2x_4...x_nx_2 \succ ...$
on obtient ainsi une chaîne $O_0O_1O_2...O_i...O_p = O_0^r$

O_1 est unimodal par rapport à O_0, car le seule couple de contiguïté sur O_1 différent des couples de contiguïtés sur O_0 est (x_1,x_3) et x_2 étant bien placé avant eux sur O_1, les conditions du lemme 4.1.2 sont alors vérifiées. Si O_k est unimodal par rapport à O_0, il est facile de voir, en utilisant le lemme 4.1.2. comme précédemment, que O_{k+1} est aussi unimodal par rapport à O_0. □

THEOREME 4.1.4. Pour tout $O_0 \in \theta_n$, $\mathcal{U}(O_0)$ est un ST.D.C. de (θ_n,O_0) contenant O_0 et O_0^r .

DEMONSTRATION. $\mathcal{U}(O_0)$ étant un sous-treillis distributif, toutes ses chaînes maximales ont la même longueur ; nous venons de voir que $\mathcal{U}(O_0)$ contient une chaîne maximale de (θ_n,O_0) allant de O_0^r à O_0 donc $\mathcal{U}(Oo)$ est un sous-treillis couvrant de (θ_n,O_0). □

Exemple : n=4 X = {a,b,c,d} O_0 = abcd



4.2. Quasi unimodalité

Si $O \in \theta_n$, $x \in X$, on pose $Ox = \{y \in X \,/\, (y,x) \in O\}$.

DEFINITION 4.2.1. Soit $\mathcal{L} \subseteq \theta_X$, on dira que O *est quasi-unimodal à* $\mathcal{L}$ si pour tout x de X il existe O' appartenant à $\mathcal{L}$ tel que Ox soit inclus dans $O'x$.

On pose $m(\mathcal{L}) = \{O \in \theta_X, O$ quasi unimodal à $\mathcal{L}\}$.

D. Romero (1978) fut le premier à étudier les ordres quasi-unimodaux ; il montrait que si $|\mathcal{L}| = 2$, $m(\mathcal{L})$ est fortement condorcéen et que $m(\{O_0,O_0^I\}) = \mathcal{U}(O_0)$.

PROPRIETES.

L'application $m : 2^{\theta_X} \to 2^{\theta_X}$ définie par $\mathcal{L} \to m(\mathcal{L})$ est une fermeture c'est-à-dire :

(1) $\forall\, \mathcal{L} \subseteq \theta_X \quad \mathcal{L} \subseteq m(\mathcal{L})$

(2) $\forall\, \mathcal{L}, \mathcal{L}' \subseteq \theta_X \quad \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ implique $m(\mathcal{L}) \subseteq m(\mathcal{L}')$

(3) $\forall\, \mathcal{L} \subseteq \theta_X, \quad m^2(\mathcal{L}) = m(\mathcal{L})$.

LEMME 4.2.2. Pour tout $O,O' \in \theta_X$, avec $O = x_1x_2...x_i...x_n$ et différent de O' il existe $i \in \{1,2,...,n-1\}$ tel que $Ox_{i+1} \subseteq O'x_i$.

DEMONSTRATION. Nous allons montrer que si, pour tout $i \in \{1,2,...,n-1\}$, $Ox_{i+1} \subseteq O'x_i$, alors nécessairement, $O = O'$ en montrant par récurrence sur i que $(x_i,x_{i+1}) \in O'$. Pour $i=1$, $Ox_2 = \{x_1,x_2\}$ donc $Ox_2 \subseteq O'x_1$ signifie que $(x_2,x_1) \notin O'$ d'où $(x_1,x_2) \in O'$.

Supposons que la propriété soit vraie jusqu'à l'ordre i ; $Ox_{i+2} = \{x_1,x_2...x_{i+1}\} \cup \{x_{i+2}\}$, donc $Ox_{i+2} \subseteq O'x_{i+1}$ signifie que $(x_{i+2},x_{i+1}) \notin O'$ car $x_{i+1} \in O'x_{i+1}$ par hypothèse de récurrence, $\{x_1,x_2...x_i\} \subseteq O'x_{i+1}$, donc $(x_{i+1},x_{i+2}) \in O'$. ◻

LEMME 4.2.3. Si O_0 et O_1 sont deux ordres totaux distincts, alors il existe O appartenant à $m(\{O_0,O_1\})$ tel que $O > O_1$ dans (θ_n,O_0).

D'après le lemme précédent, il existe $i \in \{1,2...n-1\}$ tel que $O_0x_{i+1} \subseteq O_1x_i$ (avec $O_0 = x_1x_2...x_i...x_n$) , d'où $(x_{i+1},x_i) \in O_1$; on prendra alors $O = x_1x_2...x_{i+1}x_i...x_n$. ◻

LEMME 4.2.4. Pour tout O_0 et O_1 distincts, $m(\{O_0,O_1\})$ contient une chaîne maximale de (θ_n,O_0) allant de O_0 à O_1.

Pour construire cette chaîne, il suffit d'appliquer plusieurs fois et consécutivement le lemme 4.2.3.

THEOREME 4.2.5. Pour tout O_0 et $O_1 \in \theta_X$, $m(\{O_0,O_1\})$ est un S.T.D.C. du treillis (θ_X,O_0).

DEMONSTRATION.

1°) Montrons que $m\{O_0,O_1)$ est un sous-treillis. Soient O et O' appartenant à $m(\{O_0,O_1\})$; supposons que $O'' = O \vee O' \notin m(\{O_0,O_1\})$. Il existe alors $x \in X$ avec $O''x \nsubseteq O_0x$ et $O''x \nsubseteq O_1x$; cela implique qu'il existe $a \in X$, $[(a,x) \in O''$ et $(x,a) \in O_0]$ et qu'il existe $b \in X$, $[(b,x) \in O''$ et $(x,b) \in O_1]$, mais $m(\{O_0,O_1\})$ étant fortement condorcéen $O'' = O \vee O' = (O_0 \cap O) \cup (O_0 \cap O') \cup (O_0^{r} \cap O \cap O')$, d'où l'on déduit $[(a,x) \in O$ et $(a,x) \in O']$ et $[(b,x) \in O$ ou $(b,x) \in O']$; or O et O' appartiennent à $m(\{O_0,O_1\})$ implique que $Ox \subseteq O_0x$ ou $Ox \subseteq O_1x$ et $O'x \subseteq O_0x$ ou $O'x \subseteq O_1x$;

Si $Ox \subseteq O_0x$ ou $O'x \subseteq O_0x$, on a $(a,x) \in O_0$, ce qui est impossible.
Si $Ox \subseteq O_1x$ et $O'x \subseteq O_1x$, on a $(b,x) \in O_1$, ce qui est impossible.

On montre de même que $O \wedge O'$ appartient à $m(\{O_0,O_1\})$.

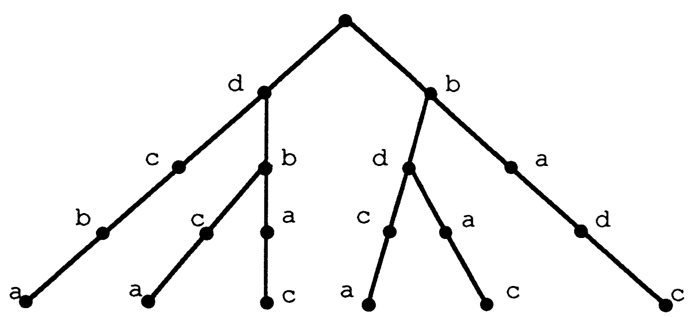
2°) $m(\{O_0,O_1\})$ étant un treillis fortement condorcéen, est un sous-treillis distributif de (θ_n,O_0).

3°) O_1 est le plus petit élément de $m(\{O_0,O_1\})$ car pour tout $O \in m(\{O_0,O_1\})$ $O \cap O_1 \subseteq O$.

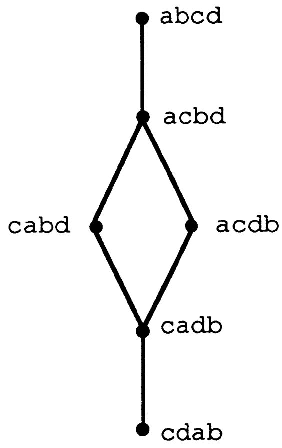
4°) $m(\{O_0,O_1\})$ est couvrant car il contient une chaîne maximale de (θ_n,O_0) allant de O_0 à O_1 (Lemme 4.2.4) ; celui-ci étant un treillis distributif, toutes les chaînes de O_0 à O_1 ont la même longueur et sont donc des chaînes maximales de O_0 à O_1. □

Exemple : $X = \{a,b,c,d\}$ $\quad O_0 = abcd \quad O_1 = cdab$

On construit $m(\{O_0,O_1\})$ en partant du dernier élément qui peut être soit d, soit b ; b et d étant placés, l'avant dernier élément d'un élément de $m(\{O_0,O_1\})$ doit être soit c soit a ; en continuant ainsi on obtient l'arbre suivant :



On obtient alors tous les éléments de $m(\{O_0,O_1\})$ en remontant l'arbre : $m(\{O_0,O_1\}) = \{abcd, acbd, cabd, acdb, cadb, cdab\}$. Ce qui donne le sous-treillis distributif couvrant :



4.3. Extension linéaire d'ordre partiel de largeur deux.

DEFINITION 4.3.1. On appelle *largeur* d'un ordre partiel P, le nombre maximum d'éléments incomparables de cet ordre. Un ordre total O qui contient un ordre partiel P est appelé une *extension linéaire* de P.

LEMME 4.3.2. Une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble des extensions linéaires d'un ordre partiel P soit fortement condorcéen est que P soit de largeur 2.

La démonstration de ce lemme se fait facilement en construisant un triplet cyclique si la largeur de P est supérieure à deux.

DEFINITION 4.3.3. On appelle *base* d'un ordre partiel P tout ensemble d'extensions linéaires de P de cardinal minimum dont l'intersection est égale à P ; la *dimension* de P est le cardinal d'une base de P.

Un résultat classique établit que la dimension d'un ensemble ordonné est bornée par sa largeur ; il en résulte qu'un ordre partiel de largeur 2 a pour dimension 2.

THEOREME 4.3.4. L'ensemble $\mathcal{L}(P)$ des extensions linéaires d'un ordre partiel P de largeur 2 est un S.T.D.C. de (θ_n, O_0) où O_0 appartient à une base de P (i.e. il existe O_1 tel que $O_1 \cap O_0 = P$).

LEMME 4.3.5. Si T est un sous-treillis fortement condorcéen de (θ_n, O_0) alors T est distributif.

DEMONSTRATION du lemme. Soient O et O' le plus grand et le plus petit élément de T ; pour tout $O_1 \in T$, $O_1 \cap O_0 \subseteq O \cap O_0$ et $O_1 \cap O_0^r \subseteq O_0^r \cap O'$ car $O_0^r \leq O' \leq O_1 \leq O \leq O_0$. Nous allons montrer que si $O_1, O_2 \in T$, $O_1 \vee O_2 = (O_1 \cap O_0) \cup (O_2 \cap O_0) \cup (O_1 \cap O_2 \cap O_0^r)$ $= (A_1 \cup A_2) \cup (D_1 \cap D_2)$ ce qui prouvera que (O_0, O_1, O_2) est condorcéen. $O_1 \vee O_2 \neq (A_1 \cup A_2) \cup (D_1 \cap D_2)$ implique $A_1 \cup A_2$ non transitif ; il existe donc x,y,z tels que $(x,y),(y,z) \in A_1 \cup A_2$ et $(z,x) \in D_1 \cap D_2$; cela entraîne que, par exemple, $(x,y) \in A_1$,

$(y,z) \in A_2$ ((x,y) et (y,z) ne peuvent tous deux appartenir à A_1 ou A_2 sinon par transitivité (y,z) appartiendrait à A_1 ou A_2) et $(z,x) \in O_0^r \cap O_1 \cap O_2 \subseteq O_0^r \cap O'$; O_1,O_2,O forment un triplet cyclique sur $\{x,y,z\}$, ce qui contredit le fait que T est fortement condorcéen. De même on montre que (O_0^r,O_1,O_2) est condorcéen.

DEMONSTRATION du théorème. Dans (θ_n,O_0) il est clair que $O_1 \leq O \leq O_0$ est équivalent à $P = O_1 \cap O_0 \subseteq O$ donc $\mathcal{L}(P)$ est égal à l'intervalle $[O_1,O_0]$ qui est un sous-treillis couvrant de (θ_n,O_0) ; $\mathcal{L}(P)$ étant fortement condorcéen d'après le lemme 4.3.2 est ainsi un S.T.D.C. de (θ_n,O_0) d'après le lemme précédent. □

Nous allons examiner plusieurs cas particuliers (étudiés par Barbut et Frey) du théorème précédent, où $\mathcal{L}(P)$ est soit un "fuseau d'insertion" soit un "fuseau régulier" soit un "faisceau d'indifférence".

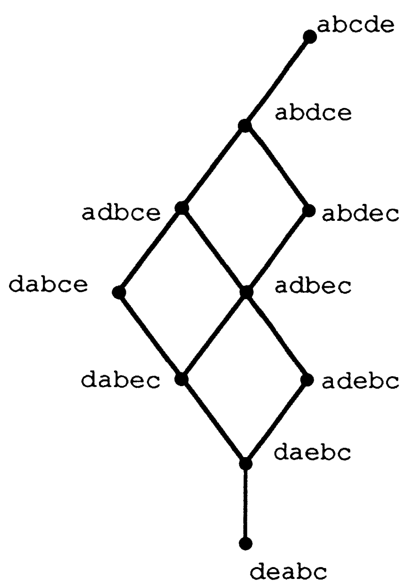
FUSEAU D'INSERTION.

Dans ce cas, l'ordre partiel P est obtenu comme la réunion de deux ordres totaux L_1 et L_2 définis sur X_1 et X_2 respectivement avec $X = X_1 + X_2$. L'ensemble $\mathcal{L}(P)$ des extensions linéaires d'un tel ordre partiel est égal à l'intervalle $[L_1L_2, L_2L_1]$ dans (θ_n,L_1L_2) où L_iL_j est l'ordre total sur X défini par concaténation.

Exemple : $X = \{a,b,c,d,e\}$ P est la réunion des deux ordres totaux abc et de ; O_0 = abcde ; O_1 = deabc.

$\mathcal{L}(P)$ = {abcde, abdce, adbce, abdec, dabce, adbec, dabec, adebc, daebc, deabc}

ce qui donne le sous-treillis distributif couvrant :

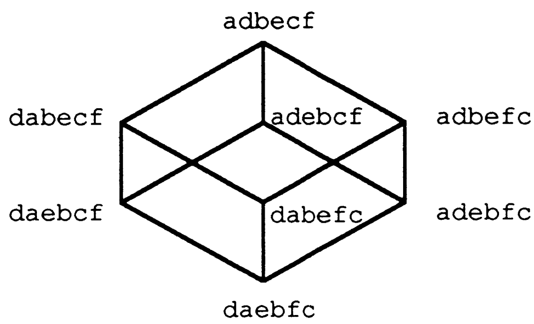


FUSEAU REGULIER.

C'est le cas où l'ordre partiel P de largeur deux est un ordre fort (i.e. la relation d'incomparabilité associée est une relation d'équivalence). P est alors partitionné en antichaînes $A_1,\ldots,A_i,\ldots,A_k$ (dont l'une au moins de cardinal 2) tel que pour $i<j$ tout élément de A_i est inférieur à tout élément de A_j. Dans ce cas, il est facile de voir que toute extension linéaire est dans une base et $\mathcal{L}(P)$ est un S.T.D.C. de (θ_n,O_0), pour tout $O_0 \in \mathcal{L}(P)$.

Exemple : $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ $A_1 = \{a,b\}$ $A_2 = \{c,d\}$ $A_3 = \{e,f\}$.

$\mathcal{L}(P) = \{$adbecf, adebcf, adbefc, adebfc, dabecf, daebcf, dabefc, daebfc$\}$, pour O_0 = adbecf on obtient le sous-treillis distributif couvrant :



Plus généralement, si q est le nombre d'antichaînes de cardinal 2 de P, $\mathcal{L}(P)$ est le treillis booléen 2^q.

FAISCEAU

Un faisceau est l'ensemble des extensions linéaires d'un ordre partiel P défini de la manière suivante :

- X est partitionné en deux classes X_1 et X_2 totalement ordonnées,
- tout élément de rang i dans X_1 est inférieur à tout élément de rang supérieur à i dans X_2,
- tout élément de rang i dans X_2 est inférieur à tout élément de rang supérieur à i+1 dans X_1.

Tout faisceau est évidemment un S.T.D.C. car l'ordre partiel P associé est de largeur deux. De plus, on peut montrer que P admet une seule base, formée des 2 extensions "gloutonnes" associées aux deux chaînes définies sur X_1 et X_2 (une extension est *gloutonne* par rapport à une chaîne $C = x_1x_2\ldots x_i\ldots x_p$ de P si entre x_i et x_{i+1} elle n'intercale que les éléments de (P-C) inférieurs à x_{i+1}).

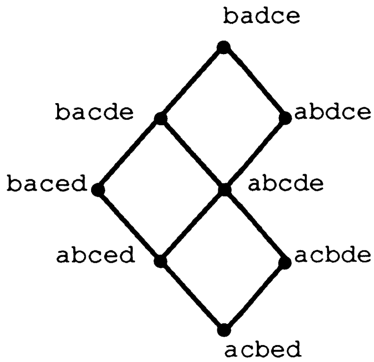
Un cas particulier de faisceau est le faisceau équilibré défini par : $|X| = n$ et $|X_1| = \left[\frac{n+1}{2}\right] = k$; il a été étudié par Barbut et Frey (1970) sous le nom de faisceau d'indifférence de centre O où $O = x_{11}x_{12}x_{21}x_{22}\ldots x_{i1}x_{i2}\ldots x_p$ ($x_p = x_{(q+1)1}$ si n est impair et égal à 2q+1, $x_p = x_{q2}$ si n est pair et égal à 2q), avec l'ordre total sur X_1 égal à $x_{11}x_{21}x_{31}\ldots x_{i1}\ldots x_{k1}$ et l'ordre total sur X_2 égal à $x_{12}x_{22}\ldots x_{i2}\ldots x_{(n-k)2}$.

Les auteurs définissent en fait un tel faisceau comme l'ensemble des ordres totaux déduits d'un ordre total en ne modifiant que des couples contigus sur O ; d'où la justification du terme faisceau d'indifférence de centre O, la notion formalisant des situations de psychologie expérimentale pour lesquels deux stimulis voisins sont indiscernables ; on vérifie aisément que les deux définitions ci-dessus d'un tel faisceau coïncident.

Exemple de faisceau d'indifférence :

$X = \{a,b,c,d,e\}$ $\quad X_1 = \{a,c,e\}$ $\quad X_2 = \{b,d\}$ $\quad L_1 = ace$ $\quad L_2 = bd$
$\mathcal{L}(P) = \{badce, bacde, abdce, baced, abcde, abced, acbd, acbed\}$.

Le centre du faisceau est abcde et la base de P, obtenue en prenant les deux extensions gloutonnes par rapport aux deux chaînes L_1 et L_2 est {badce, acbed} d'où le sous-treillis distributif couvrant :

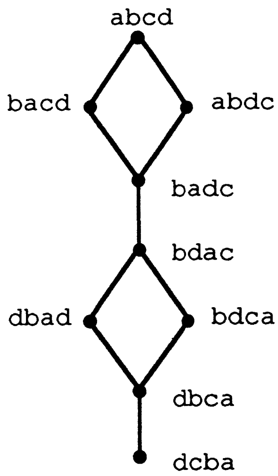


CONCLUSION

Nous avons montré dans ce travail que les S.T.D.C. de (θ_n, O_0) sont des ensembles fortement condorcéens (i.e. des ensembles d'ordres totaux sur lesquels l'application de la règle majoritaire ne peut jamais aboutir à l'effet Condorcet) et qu'ils contiennent des ensembles classiques fortement condorcéens. Une autre raison de s'intéresser aux S.T.D.C. est qu'ils constituent une catégorie d'ensemble fortement condorcéen de cardinalité importante. En effet, un problème que se posent plusieurs auteurs, notamment J.M. Abello (1985) est de déterminer le cardinal maximum d'un ensemble fortement condorcéen ou (ce qui est équivalent) de construire un ensemble fortement condorcéen de cardinal maximum (E.F.C.C.M.).

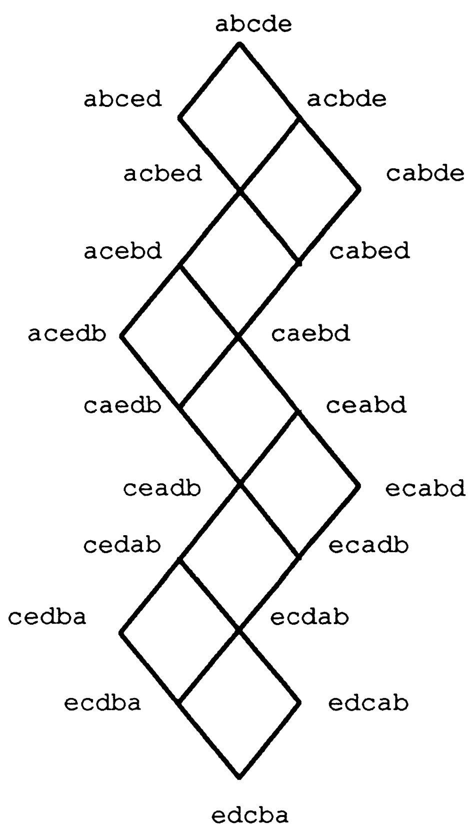
Pour $n=3$, il est facile de voir que le cardinal d'un E.F.C.C.M. est 4 et la chaîne maximale (donc un S.T.D.C.) allant de O_0 à O_0^r dans (θ_n, O_0) est un E.F.C.C.M.

Pour $n=4$, Abello a montré que le cardinal maximum d'un ensemble fortement condorcéen est 9 ; l'exemple suivant montre qu'il existe dans ce cas des E.F.C.C.M. qui sont des S.T.D.C.

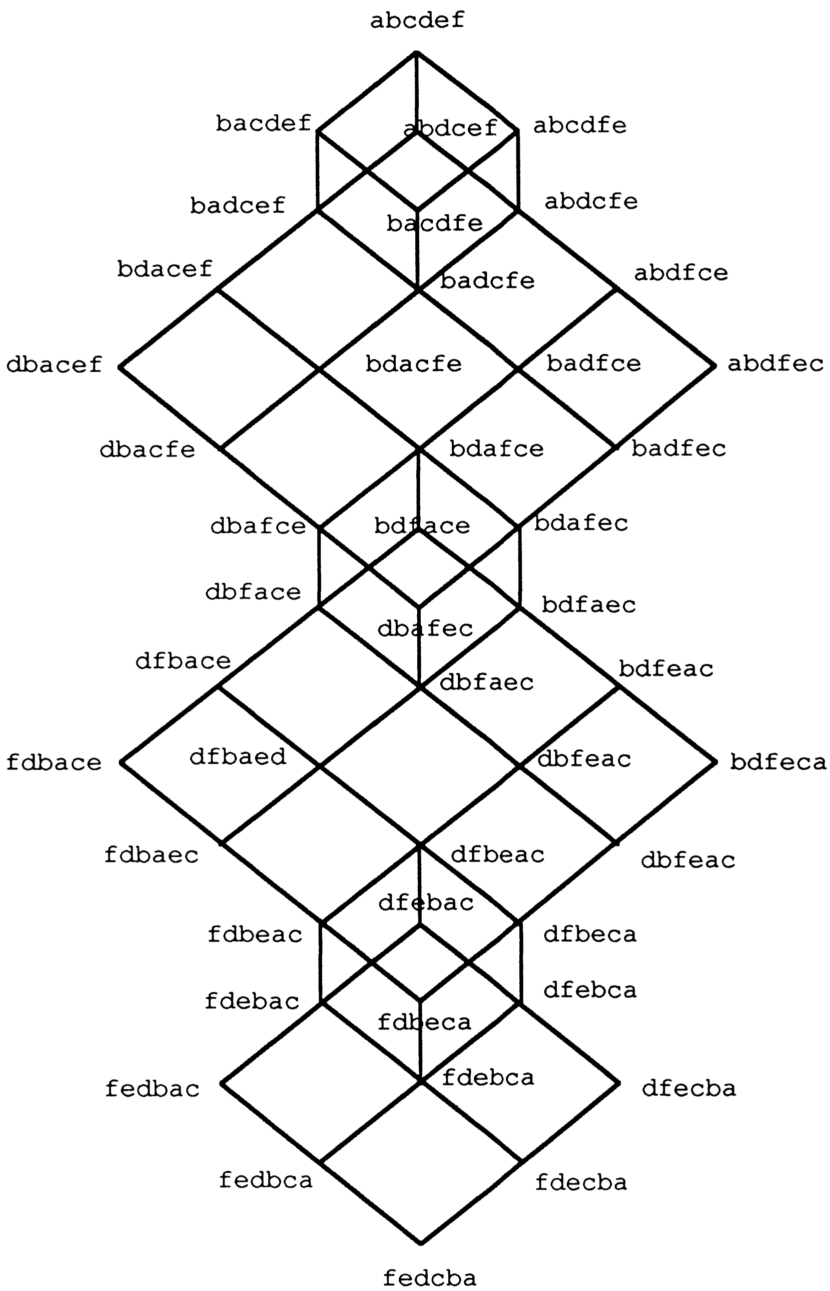


Pour $n \geq 5$, on ne sait pas construire des E.F.C.C.M. et le plus grand ensemble fortement condorcéen et "connexe" (i.e. tel que deux ordres totaux de cet ensemble sont toujours reliés par une suite d'ordres totaux de cet ensemble), à ma connaissance, est construit par Abello et a pour cardinal $3.2^{n-2} - 4$. Nous donnons ici deux exemples de S.T.D.C. ; le premier obtenu avec $n=5$ a pour cardinal 20 (donc égal à $3.2^{n-2} - 4$) et le deuxième (Monjardet, 1989) obtenu avec $n=6$ a pour cardinal 45 (donc supérieur à $44 = 3.2^{n-2} - 4$).

$N = 5$ $X = \{a,b,c,d,e\}$ $O_0 = abcde$



N = 6 X = {a,b,c,d,e,f} O_0 = abcdef



Le cas n=6 prouve en particulier qu'il existe des S.T.D.C. connexes de cardinal supérieur à $3.2^{n-2} - 4$ et ouvre ainsi une voie vers des recherches ultérieures : déterminer la structure et le cardinal des S.T.D.C. de cardinalité maximum ; sont-ils des ensembles fortement condorcéens et connexes de cardinalité maximum ?

REFERENCES

ABELLO, J.M., et JOHNSON C.R., How large are transitive simple majority domains ? *S.I.A.M. J. Alg. Disc. Meth.*, vol.5, n°4, 1984.

ABELLO, J.M., Intrinsic limitations of the majority rule and algorithmic approach, *S.I.A.M. J. Alg. Disc. Math.*, vol.6, n°1, 1985.

ARROW, K.J., *Social choice and individual value*, New York, Wiley, 1951, 2e edition 1963.

ARROW, K.J., RAYNAUD, H., *Social choice and multicriterion decision-making*, Cambridge, MA, MIT Press, 1986, p.127.

BARBUT, M., MONJARDET, B., *Ordre et classification, algèbre et combinatoire*, Paris, Hachette, 1970, T.1,2.

BARTHÉLEMY, J.P., MONJARDET B., The median procedure in cluster analysis and social choice theory, *Math. Soc. Sci.*, 1,3, 1981, 235-267.

BATTEAU, P., JACQUET-LAGREZE, E., MONJARDET, B., Analyse et Agrégation des Préférences dans les Sciences Sociale, Economiques et de Gestion, *Economica*, Paris, 1981.

BLACK, D., *The theory of committees and elections*, London, Cambridge University Press, 1958.

BJÖRNER, A., Orderings of Coxeter groups, *Contemporary Mathematics*, Vol.34, 175-195, 1984.

CHAMENI Nembua C., Permutoèdre et choix social, thèse doctorat Université Paris V, juin 1989.

CONDORCET, Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix, Paris, 1785.

COOMBS, *Theory of data*, New York, Wiley, 1965.

FREY, C., BARBUT, M., *Technique ordinales en analyse des données*, Paris, Hachette, 1970.

GUILBAUD, G.Th., ROSENSTIEHL, P., Analyse algébrique d'un scrutin, *Math. Sci. hum.*, 4, 9-33,1963.

HÖGAASEN-FELDMAN, J., Ordres partiels et permutoèdre, *Math. Sci. hum.*, 28, 27-38, 1969.

INADA, A note on the simple majority decision rule, *Econometrica*, 32, 525-531, 1964.

KREWERAS, G., Les décisions collectives, *Math. Sci. hum.*, 2, 25-35, 1963.

MONJARDET, B., Treillis d'ordres in *Ordres totaux finis*, Paris/La Haye, Mouton, Gauthiers-Villars, 29-45, 1971.

MONJARDET, B., Communication personnelle, 1989.

ROMERO, D., *Variation sur l'effet Condorce*t, thèse de 3e cycle, Grenoble 1978.

WARD, B., Majority and allocation, *Journal of Conflict resolution*, Vol.15, n°4, 1961.

YANAGIMOTO, T., OKAMOTO, M., Partial orderings of permutations and monotonocity of a rank correlation statistic, *Ann. Inst. Stat. Math.*, 21, 489-506, 1969.