MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

DOMINIQUE DUBARLE

Essai sur la généralisation naturelle de la logique usuelle (premier mémoire)

Mathématiques et sciences humaines, tome 107 (1989), p. 17-73
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1989__107__17_0>

Math. Inf. Sci. hum. (27e année, n° 107, *1989*, p. 17-73).

ESSAI SUR LA GENERALISATION NATURELLE DE LA LOGIQUE USUELLE
(Premier mémoire)

Dominique DUBARLE

INTRODUCTION

Les recherches de logique mathématique qui se sont poursuivies au cours des cinquante dernières années ont permis de mieux reconnaître l'étroitesse de la base de rationalité que la tradition logicienne a fournie à la pensée. L'humanité ne dispose point de logique rigoureuse en dehors de celle qui se fonde sur l'opposition analytique du vrai et du faux. Or le développement mathématique qui s'est fait des virtualités de cette logique a fait ressortir son inadéquation, passé un certain point, au propos de l'intelligence. Les célèbres théorèmes modernes qui ont trait aux limitations congénitales des présents formalismes logico-mathématiques sont à leur manière l'attestation de cette inadéquation.

Diverses tentatives faites par les logiciens modernes témoignent d'ailleurs déjà d'un effort pour s'affranchir de l'encadrement trop étroit de la logique traditionnelle. Si nous laissons de côté les logiques "dialectiques" proposées par certaines philosophies, nous trouvons, au niveau de la logique mathématique, l'essai intuitionniste d'une part, les ébauches de logiques à plus de deux valeurs d'autre part. Or aucun de ces essais n'a vraiment donné satisfaction à l'esprit ni jeté les bases d'une logique que la pensée humaine se sente en mesure de pratiquer avec commodité et avec fruit. L'intuitionnisme apparaît frustrer la rationalité d'une partie de sa ressource traditionnelle bien plus encore que lui donner de nouveaux moyens. Les logiques à plus de deux valeurs, telles qu'elles ont été proposées du moins jusqu'à présent, égarent l'intelligence dans les structures de formalismes abstraits où l'action de la pensée n'est pas en mesure de reconnaître une règle qui lui convienne. C'est ainsi que l'essai d'une logique à trois valeurs, l'un de ceux qui a été poussé le plus avant, s'est montré fort décevant.

La raison foncière de ce genre d'échecs apparaît assez clairement, semble-t-il, pour peu que l'on comprenne de quoi il s'agit avec la logique. Celle-ci, en effet, est destinée à fournir à la pensée vivante l'appareil de son cheminement rationnel. Si cet appareil est destiné à se faire quelque jour plus puissant qu'il n'a été antérieurement, rien cependant de l'instrument nouveau ne doit compromettre l'acquis logique antérieur, qui constitue de l'inaliénable pour la raison. La logique du vrai et du faux avec le tout de sa réalisation traditionnelle et moderne est à présent cet inaliénable. Or celui-ci paraît entamé avec les propositions de la logique intuitionniste. De leur côté les essais jusqu'ici connus de logiques multivalentes font à peu près comme s'il était non-avenu. De part et d'autre, la logique n'y trouve point son compte.

Pourtant, une fois reconnu ce caractère inaliénable de la logique du vrai et du faux et à proportion des structures de l'algèbre binaire, selon lesquelles se fait son organisation systématique, il est possible de revenir utilement à l'idée d'une logique à plus de deux valeurs. L'algèbre sait en effet que les grandes structures de l'algèbre binaire sont à la fois maintenues et étendues dans les structures définissables non point sur des ensembles quelconques, mais sur ceux qui comportent exactement 2^n éléments. Ce qui, logiquement parlant, est plein de sens. Dès là du moins qu'il s'agit de structures suffisamment étoffées, celle de l'anneau booléen K^n par exemple, deux et deux seulement de 2^n éléments sont à considérer comme primordiaux et "entiers". Les autres se disposent de façon relative à ces premiers, suivant ce qu'en indiquent les structures algébriques considérées. Ceci correspond à la primordialité logique du vrai et du faux, dont la logique doit continuer de sous-tendre, inaltérée, toute l'extension désormais envisagée de l'appareil logique. Les formalismes logico-mathématiques à 2^n valeurs logiques apparaissent ainsi comme les seuls dans lesquels la pensée rationnelle humaine puisse entrer pour s'en faire un véritable appareil logique : seuls, en effet, ils maintiennent l'inaliénable d'une raison qui s'est conquise en vertu de l'opposition entière du vrai et du faux. Une fois cependant l'idée de cette extension acquise, l'idée peut être poussée à bout, régulièrement à l'infini, fournissant, suivant le degré où on la conduit techniquement, une plate-forme de rationalité plus ou moins large, et aussi, comme on le verra, une ressource d'instrumentation mentale plus ou moins fine et plus ou moins souple, au degré de finesse et de souplesse que l'intelligence peut bien juger opportun de s'assurer explicitement.

Dans une suite de mémoires dont celui-ci est le premier[1], on se propose de fournir l'esquisse, encore sommaire et rapide, de l'extension ainsi envisagée pour la logique. On se bornera, à peu de choses près, à ce qui a trait à la mise sur pied, techniquement faite, des appareillages formels dans leur généralité première. Toute exploitation ultérieure sera laissée de côté pour le moment.

Cette mise sur pied sera faite à deux niveaux : d'une part celui de la logique propositionnelle, d'autre part celui d'une "logique des catégories" ayant pour objet d'étendre la logique des classes parallèlement à l'extension faite de la logique des propositions. Pour des raisons qui apparaîtront par la suite, on laissera de côté le point de vue, très courant aujourd'hui, du développement de la logique mathématique en "calcul fonctionnel".

Toute logique de catégories procède d'une logique propositionnelle de façon semblable à celle dont la logique usuelle des classes procède de la logique usuelle des propositions. Une logique propositionnelle et la logique de catégories qui en est ainsi solidaire forment tout ensemble une "logique" dont la logique propositionnelle considérée sera dite alors *l'axe*. L'ensemble des valeurs logiques auxquelles a égard la logique propositionnelle sera dit *la base* $B[m]$ de la logique en question, la lettre m de l'écriture $B[m]$ notant le nombre de valeurs logiques de la base.

On appellera ici *logiques binaires* les logiques ayant pour base un ensemble de 2^n valeurs logiques, n étant quelconque, aussi grand que l'on voudra.

On dira *quasi-booléennes* les logiques dont l'axe est la logique propositionnelle associée à une algèbre d'anneau booléen K^n (l'anneau comportant 2^n éléments) tout comme la logique propositionnelle du vrai et du faux est elle-même associée à l'algèbre de l'anneau booléen K^1.

Une logique propositionelle binaire sera *fonctionnellement complète* lorsque ses ressources d'expression (symboles et connectifs) permettent de caractériser n'importe quelle loi de composition interne concevable sur son ensemble de base. Par "loi de composition interne" on

---

[1] NDRL. Nous n'avons pas de traces de cette suite du point de vue mathématiques.

entendra ici toute application de l'ensemble E^m (avec m = 1,2,3... etc.) dans l'ensemble de base E.

Les logiques propositionnelles quasi-booléenne proprement dites L^n (logiques associées aux algèbres d'anneau K^n avec $n > 1$) ne sont pas fonctionnellement complètes.

Un des objectifs du présent travail est de montrer comment on peut passer des logiques propositionnelles L^n aux logiques fonctionnellement complètes Λ^n correspondantes.

D'autre part en faisant croître n indéfiniment, on est amené à envisager une logique propositionnelle à une infinité de valeurs que l'on désignera par le signe Λ^∞ et dont on esquissera également la mise sur pied de principe.

Le présent mémoire, consacré à l'étude relativement détaillée du tout premier échelon de généralisation de la logique propositionnelle, à savoir la logique propositionnelle de base $B[2^2]$, doit être pris comme constituant la première section de la première partie de l'ensemble des recherches évoquées ci-dessus. Les divisions de cette première partie et de cette première section elle-même sont indiquées au début du corps même du mémoire.

Première partie.

LOGIQUES PROPOSITIONNELLES

Cette première partie comportera trois sections : dans la première on fera une étude relativement détaillée de la logique ayant pour base un ensemble de quatre valeurs logiques, ceci afin de montrer les principales possibilités offertes, ne serait-ce que par la toute première des généralisations de la base logique traditionnelle B[2] = {v,f}. ; (dans la seconde on fera les généralisations aux logiques de base $B[2^n]$; une troisième section s'occupera enfin de la logique de base $B[2^\infty]$)[2].

Section 1

ETUDE DE LA BASE $B[2^2]$

Cette section comportera cinq paragraphes : le premier consacré à la logique L^2, le second à la logique fonctionnellement complète Λ^2, le troisième à certaines logiques de puissance en quelque sorte intermédiaire entre celle de Λ^2 et celle de L^2, le quatrième à la logique de l'équivalence sur la base $B[2^2]$, le cinquième à quelques considérations d'algèbre relatives aux formalismes propositionnels de la base $B[2^2]$.

§. I. LA LOGIQUE L^2

L'anneau booléen K^2 auquel la logique L^2 sera associée est l'extension quadratique booléenne de l'anneau simple K défini sur un ensemble de deux éléments identifiés aux valeurs logiques vrai et faux. Les structures de la logique L^2 sont, dans l'optique propre de la logique, la simple expression de ce fait algébrique, dont on va voir à l'instant à quel point il importe pour le formalisme. Avant cependant d'en venir à celui-ci, on va faire quelques considérations

---

[2] NDRL. Non réalisées ici

préalables sur les valeurs logiques elles-mêmes, puis sur ce que l'on appellera les *espaces propositionnelles* de la présente logique.

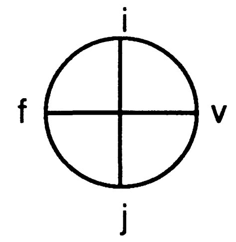
1. VALEURS LOGIQUES

La base B[2^2] comporte quatre valeurs logiques. Deux d'entre elles sont le vrai et le faux dont les dénotations objectales seront les deux lettres latines minuscules v et f. Le vrai et le faux ont *toutes* les propriétés du vrai et du faux de la logique classique : en particulier leur opposition est celle que la logique ancienne a caractérisée en la disant division formelle, définitive, sans rien d'intermédiaire. On dira ces deux valeurs logiques valeurs *entières* ou *absolues*, tout formalisme prétendant se faire accepter comme formalisme *logique* étant tenu de leur assurer les caractères ci-dessus.

Les deux autres valeurs logiques n'ont pas été envisagées ni dénommées explicitement dans le passé. Du point de vue algébrique, elles correspondent aux deux atomes de l'anneau K^2, atomes dont la réunion équivaut à l'unité. On les dira pour cette raison valeurs logiques *intégrantes* de la logique L^2. Sur le plan d'une ontologie, il y correspondrait un couple de facteurs intégrants de l'être, à concevoir et à appeler conformément aux intentions d'une pensée philosophique s'occupant de mettre l'ontologie sur pied. Ces intentions comportent peut-être de la liberté : de même peut-être, au niveau de la logique, y a-t-il de la liberté intellectuelle possible en ce qui concerne la conception et l'appellation de ces deux nouvelles valeurs logiques coordonnées au vrai et au faux. A titre de suggestion, on proposera ici de dire *idéel* ce qui a l'une de ces deux nouvelles valeurs logiques, *réel*, ce qui a l'autre de ces deux valeurs. La valeur logique "idéel" sera dénotée objectalement par la lettre i, la valeur logique "réel" par la lettre j.

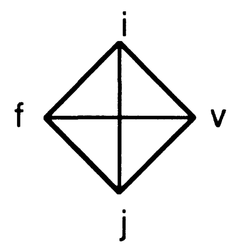
En vue de mieux comprendre le rôle logique de ces deux valeurs, il faut remarquer tout d'abord que, comme le vrai et le faux, elles s'opposent elles aussi en vertu d'une négation réciproque : en cela, elles sont, elles aussi, *valeurs contradictoires*. Mais alors que l'opposition contradictoire du vrai et du faux doit être comprise rationnellement et scientifiquement comme l'opposition par division formelle et définitive que l'on a dite tout à l'heure, ce pour quoi on appellera cette opposition *opposition analytique*, l'opposition contradictoire entre valeurs i et j doit être comprise comme une opposition laissant place à une *synthèse effective* dans la positivité une du vrai, nonobstant la distinction formelle faite de ces valeurs et leur mutuelle négation. Ceci correspond au caractère algébrique des deux valeurs en question, qui les fait l'une et l'autre *atomes* de l'anneau K^2 intégrant l'unité par leur réunion. L'opposition contradictoire à laquelle on a affaire ici est donc, logiquement parlant, une opposition contradictoire d'une autre espèce que l'opposition contradictoire de la logique formelle classique, opposition par *complémentarité* et non plus par division définitive : pour la contraster avec l'opposition, dite *analytique* du vrai et du faux, on la dira volontiers "*opposition synthétique*". On peut remarquer à ce propos qu'il y a là des choses assez fondamentales pour la pensée, que la philosophie semble avoir cherchées à maintes reprises sans jamais avoir été capable de les fixer de façon satisfaisante pour l'entendement scientifique.

Pour faire droit aux besoins élémentaires de schématisme comportés par la pensée humaine, on peut proposer la coordination de ces quatre valeurs logiques sous forme de la figure suivante



Les lignes qui unissent deux à deux les quatre points figurent alors les opérations logiques simples qui transforment une valeur en une autre. Les deux diamètres perpendiculaires de la figure montrent les deux oppositions contradictoires et leur coordination, figurant l'un et l'autre une opération logique de *négation*. Les deux lignes vi et fj d'une part, vj et fi d'autre part sont associées à deux autres sortes d'opposition que l'on appellera oppositions *relatives*. Elles figurent par paires bornant les quadrants opposés deux nouvelles opérations logiques, auxquelles ne correspondent ni dénomination explicite ni adverbe spécial dans la langue de la logique courante. On pourra dire ces opérations opérations *conjuguées* de "semi négation" en les repérant par des signes appropriés, tels les signes + et ~ + dans le formalisme logique. Il est peut-être loisible de guider un peu plus avant la pensée dans la compréhension de ces opérations logiques d'une nouvelle sorte en appelant "*déposition*" l'opération qui transforme la valeur logique vrai en valeur logique j (réel) et "*relèvement*" celle qui transforme la valeur logique vrai en valeur logique i (idéel). La déposition, notée par le signe + , et le relèvement, noté par le signe ~ +, correspondent alors dans une certaine mesure à deux significations conjuguées de l'opération que la logique hégélienne a essayé de signifier avec le terme d'*Aufhebung*.

Il peut être utile également de figurer les quatre valeurs logiques f,i,j,v comme les quatre sommets d'un tétraèdre régulier, la figuration matérialise alors des symétries que la théorie logique peut mettre à profit. Elle matérialise aussi, compte tenu de la position de l'observateur par rapport à la figuration, certaines façons que les valeurs logiques peuvent avoir de se présenter en fait à la pensée. Dans la figuration ci-dessus, l'opposition analytique, première et prépondérante, du vrai et du faux sera représentée par l'arête fv supposée vue au-dessus de l'arête représentation de l'opposition synthétique, seconde et subordonnée, des valeurs i et j.



Avec l'opération identique, l'opération de négation, notée ~, et les deux nouvelles opérations + et ~ + constituent le groupe caratéristique de l'addition pour l'anneau K^2. C'est le groupe bien connu appelé "groupe de Klein" et souvent désigné par le signe V_4. Ce fait commande en profondeur les structures de la logique de base $B[2^2]$.

2. ESPECES PROPOSITIONNELLES

On appellera "espèces propositionnelles" de L^2 les diverses sortes d'entités propositionnelles que constituent soit l'une des valeurs logiques elles-mêmes, soit une expression du genre proposition affectée ou non par l'une des opérations logiques monadiques concevables à raison de l'ensemble des quatre valeurs f,i,j,v qui constituent la base de L^2.

Les symboles formels de constantes de L^2 font notation des valeurs logiques. On prendra les majuscules romaines V et F pour faire notation formelle du vrai et du faux, le symbole I pour faire notation formelle de la valeur logique i et le symbole J pour faire notation de la valeur logique j.

Quant aux symboles d'indéterminées propositionnelles, faisant notation formelle de propositions ou d'expressions propositionnelles quelconques, ils seront choisis tout à fait semblablement à la façon dont sont choisis les symboles de la logiques propositionnelle usuelle : on conviendra ici de prendre à cet effet les majuscules romaines P, Q, R...etc. les indéterminées seront formellement *quadrivalentes* au lieu de n'être que divalentes comme elles le sont en logique propositionnelle usuelle.

Cette dernière admet pour son compte quatre espèces propositionnelles : les deux espèces constantes V et F, les deux autres étant les espèces P (espèce propositionnelle fondamentale, correspondant à l'application identique de E dans E) et ~ P. Les espèces propositionnelles classiques (non constantes) se réduisent à l'affirmation P et à la négation ~ P.

Ici par contre l'ensemble des espèces propositionnelles comporte seize espèces distinctes, quatre constantes et douze autres. A l'affirmation P et à la négation ~P s'adjoindront tout d'abord deux autres espèces ⍭P et ~ ⍭P par intervention des "semi-négations" dont il a été parlé ci-dessus, puis huit autres, dont on va présenter, conjointement aux précédentes, les spécifications dans le tableau ci-après :

Valeurs de P	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
v	v	j	i	f	v	j	i	f	v	j	i	f	v	j	i	f
j	j	v	f	i	v	j	i	f	j	v	f	i	v	j	i	f
i	i	f	v	j	i	f	v	j	v	j	i	f	v	j	i	f
f	f	i	j	v	i	f	v	j	j	v	f	i	v	j	i	f

P étant l'argument fonctionnel, les quatre espèces F_1-F_4 s'identifient respectivement à P, ⍭P, ~ ⍭P et ~P. On dira ces espèces principales, pour signifier que leur spécification est faite au moyen d'une *permutation* des quatre valeurs logiques prises en considération. On dira au contraire *dégénérées* les autres pour signifier que les valeurs qu'elles sont susceptibles de prendre ne sont pas toutes les valeurs logiques de la base. On dira de plus *secondaires* les espèces F_5-F_{12} qui sont dégénérées sans être constantes. Outre l'apparition des espèces principales ⍭P et ~ ⍭P, en plus de l'affirmation et de la négation, l'apparition des espèces secondaires F_5-F_{12} est un trait caractéristique de L^2, disant la puissance nouvelle qu'elle donne à la pensée de signifier et de traiter certaines façons d'avoir lieu en fait que la logique propositionnelle usuelle n'était pas en mesure de signifier ni de traiter adéquatement. Les espèces secondaires F_5-F_8 d'une part F_9-F_{12} d'autre part proposent deux systèmes partiels dont la structure n'est pas sans avoir quelque rapport avec la structure bien connue des préfixes de quantification ou de modalité de la logique classique. Notons en effet ∇P l'espèce F_5 et ΔP l'espèce F_9. On aura :

$$F_6 = \sim\nabla \sim P \qquad F_{10} = \Delta \sim P$$
$$F_7 = \nabla \sim P \qquad F_{11} = \sim\Delta \sim P$$
$$F_8 = \sim\nabla\, P \qquad F_{12} = \sim\Delta\, P$$

De fait, les opérations notées ici ∇ et Δ correspondent à des manières de préfixes adverbiaux de teneur conceptuelle différente de celle du préfixe de modalité et laissées jusqu'à présent en dehors du traitement logique. On pourra considérer ∇P et ΔP comme fournissant les *moments conjonctifs* de l'affirmation : P, ainsi qu'on peut aisément s'en rendre compte, est identique à la conjonction de ∇P et ΔP. Par dualité ~∇P et ~ΔP fournissent les *moments disjonctifs* de la négation : ~P est identique à la disjonction de ~∇P et de ~ΔP. On a ainsi une décomposition régulière des espèces propositionnelles simples de la logique usuelle, ce qui ouvre à la pensée et au raisonnement certaines virtualités intéressantes. P, de même, est identique à l'implication de ~Δ~P par ∇ ~P et également à l'implication de ~∇ ~P par Δ~P. P est encore identique à la différence symétrique de ~∇ ~P et de ~Δ ~P ou celle de ∇ ~P et Δ ~P. Compte tenu de ces faits la suggestion peut être faite, semble-t-il, d'attacher au signe Δ un sens voisin de celui que prend parfois dans le langage l'adverbe "formellement", attachant alors au signe ∇ le sens d'une modalité adverbiale conjugée, celui qu'aurait à peu près l'adverbe "thétiquement", lisant donc ΔF : "P est formellement vrai" et ∇ P "P est thétiquement vrai", et en comprenant que ce qui est vrai à la fois formellement et thétiquement est vrai de façon entière et absolue.

On prendra d'autre part le signe $\blacktriangle$ pour noter le préfixe ~Δ ~ auquel on pourra attacher le sens de l'adverbe "hypothétiquement" et le signe $\blacktriangledown$ pour noter le préfixe ~∇ ~ auquel on pourra attacher le sens de l'adverbe "matériellement". Ce qui est à la fois matériellement et hypothétiquement faux est faux de façon entière et absolue.

3. CONNECTIFS

De même qu'en logique propositionnelle à deux valeurs, on peut spécifier 16 formes propositionnelles à deux arguments P, Q, de même peut-on présentement en spécifier 256. De façon générale l'algèbre de l'ensemble de deux éléments permet de spécifier 2^{2^n} formes à *n* arguments, cependant que l'algèbre quasi-booléenne de l'ensemble de quatre éléments permet d'en spécifier 4^{2^n}. On va se borner à indiquer ici la spécification des formes propositionnelles binaires faisant l'extension quadratique booléenne de la somme et du produit booléen, caractérisant ainsi la conjonction et la différence symétrique de L^2 ; puis les spécifications des connectifs qui y correspondent à la disjonction, à l'équivalence et enfin à l'implication, et auxquels on gardera les noms de la logique usuelle.

Produit [Conjonction] P Q

v	f	i	j	v
j	f	f	j	j
i	f	i	f	i
f	f	f	f	f
Q/P	f	i	j	v

Somme [Différence symétrique] P $\nparallel$ Q

v	v	j	i	f
j	j	v	f	i
i	i	f	v	j
f	f	i	j	v
Q/P	f	i	j	v

Certaines remarques algébriques peuvent être faites tout de suite : à la différence de l'anneau des deux valeurs logiques vrai et faux, l'anneau K^2 caractérisé par le produit P.Q et la somme P $\ddagger$ Q ci-dessus spécifiés n'est ni un corps ni un anneau d'intégrité, puisque les valeurs i et j se comportent fonctionnellement comme des diviseurs de zéro. D'autre part les idéaux de l'anneau K^2 ne se réduisent pas soit à l'élément neutre pour la somme soit à l'anneau lui-même. L'anneau K^2 des quatre éléments v,j,i,f admet en effet en outre les deux idéaux {f,i} et {f,j}. Dès lors son algèbre n'est pas celle d'un anneau *simple* et ceci ne manque pas de conséquences pour le développement ultérieur de la logique.

Les diverses formes propositionnelles à n arguments de L^2 correspondent aux divers polynômes à n arguments de l'algèbre de K^2, les 16 espèces propositionnelles aux 16 binômes $\alpha P + \beta$, α et β étant l'une des quatre constantes V, F, I, J, les 256 formes propositionnelles binaires aux 256 polynômes $(\alpha P + \beta)\ (\gamma Q + \delta)$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ étant derechef l'une des quatre constantes V,F,I,J,... etc.. Ceci montre tout de suite qu'en passant à la logique L^2 la pensée peut s'en tenir pour les connectifs binaires, ternaires... etc, aux conceptions qu'elle a déjà acquises en logique propositionnelle usuelle. Toutes les formes propositionnelles présentement envisageables sont en effet représentables par des formes convenablement choisies construites en ne faisant appel qu'aux connectifs binaires, (ternaires... etc.) correspondant directement à ceux que connaît déjà la logique propositionnelle usuelle. Foncièrement donc il n'y a de conceptuellement nouveau que ce qui a trait aux valeurs logiques et à la diversité des espèces propositionnelles.

Les spécifications de la disjonctions P v Q, de l'équivalence P $\equiv$ Q et de l'implication P $\supset$ Q sont les suivantes, aisément déduites des spécifications ci-dessus de celles de la conjonction et de la différence symétrique.

Disjonction P v Q

v	v	v	v	v
j	j	v	j	v
i	i	i	v	v
f	f	i	j	v
Q/P	f	i	j	v

Equivalence P $\equiv$ Q

v	f	i	j	v
j	i	f	v	j
i	j	v	f	i
f	v	j	i	f
Q/P	f	i	j	v

Implication P $\supset$ Q

v	v	v	v	v
j	v	j	v	j
i	v	v	i	i
f	v	j	i	f
Q/P	f	i	j	v

4. FORMALISME DE LA LOGIQUE L^2

a. *Moyens primitifs d'expression*

1. Les symboles de constantes F et I
2. Les symboles d'indéterminées, en liste illimitée

$P,\ Q,\ R,\ \ldots..$

$P_1,\ Q_1,\ R_1,\ \ldots..$ (affectés d'indices numériques)

$P_2,\ Q_2,\ R_2,\ \ldots..$

....

$P_i,\ Q_i,\ R_i,\ \ldots..$ (affectés d'indices littéraux)

$P_n,\ Q_n,\ R_n \ldots...$

....

3. Le signe constitutif $\supset$
4. Les signes auxiliaires (et)
5. Les indicatifs métalinguistiques $\vdash$ (indicatif d'une thèse et .... = ... Df (indicatif d'une définition lorsque les points à droite et à gauche de l'écriture = sont remplacés par des expressions, celle à gauche à définir, celle à droite définissante).

b. *Règle de construction des expressions*

1. Tout symbole isolément pris est une expression.
2. Les symboles d'indéterminées peuvent être pris comme représentations génériques d'expressions quelconques.
3. Si P et Q sont des expressions, alors $(P \supset Q)$ est une expression.
4. Il n'y a pas d'autre façon de construire les expressions sans faire appel à des définitions particulières.
5. On pourra remplacer les parenthèses par des ponctuations, conformément aux conventions admissibles à ce sujet.

PROPOSITION. Toute forme propositionnelle de L^2 peut être équivalemment représentée par une expression du formalisme ci-dessus institué.

Ce point s'établit facilement. Les moyens d'expression admis, si l'on interprète le signe constitutif $\supset$ comme signifiant l'implication spécifiée au numéro précédent, permettent de définir les constantes V et J, puis le produit et la somme de l'anneau booléen K^2. On peut alors représenter toutes les diverses formes propositionnelles de L^2 par les polynômes booléens construits sur K^2 et, de là, par application des définitions envisagées, repasser à des expressions du formalisme équipollentes à ces polynômes.

DEFINITIONS.

$$V = F \supset F \qquad \text{Df.}$$

$$J = I \supset F \qquad \text{Df.}$$

$$P.Q = (P \supset (Q \supset (Q \supset F)) \supset F \qquad \text{Df.}$$

$$P \ddagger Q = ((P \supset Q) . (Q \supset P)) \supset F \qquad \text{Df.}$$

Ceci ne signifie pas que le formalisme présentement institué soit *fonctionnellement complet* pour l'ensemble des quatre valeurs logiques f i j v, mais qu'il est *grammaticalement adéquat* à la structure d'algèbre de l'anneau K^2 extension quadratique booléenne de l'anneau booléen à deux éléments K.

On peut alors traiter de façon complète, par transposition des techniques routinières de la logique propositionnelle usuelle, les questions de la construction des formes propositionnelles de

L^2, du calcul de leur valeur pour toute assignation de valeurs logiques qu'il est possible de faire aux symboles figurant dans ces formes, et enfin la détermination par calcul des formes dont la valeur est constante, en particulier de celles que l'on dit tautologies ou lois logiques (V valeur constante de la forme).

c. *Système déductif de* L^2

On va maintenant présenter L^2 sous forme de système déductif, en en fournissant une axiomatisation *déductivement complète*, c'est-à-dire permettant de prouver toute tautologie formulable dans le formalisme ci-dessus.

Cette constitution de L^2 en système déductif est chose des plus simples : *toute axiomatique suffisant à constituer la logique propositionnelle usuelle est également suffisante pour constituer* L^2 *en système déductivement complet.* On prendra ici, pour donner la preuve de ce fait, l'axiomatique suivante, complète pour la logique propositionnelle usuelle.

1. *Règle de déduction*

La convention b2 ci-dessus étant adoptée quant au pouvoir représentatif des symboles d'indéterminées, on conviendra en outre que l'écriture :

$P_1, P_2, \dots P_n \vdash Q$

veut dire que les hypothèses $P_1, P_2, \dots P_n$ entraînent la conclusion Q. Cela étant, l'unique règle de déduction est la suivante :

O. $P, P \supset Q \vdash Q$

2. *Axiomes*

1. $\vdash P \supset .Q \supset P$
2. $\vdash P \supset Q. \supset P : \supset P$
3. $\vdash P \supset Q. \supset : Q \supset R. \supset. P \supset R$
4. $\vdash F \supset P$

Dire que cette axiomatique est déductivement complète pour L^2, c'est dire que toutes les preuves de tautologies propres à L^2 ne nécessitent formellement rien de plus que le jeu des définitions nouvelles permises par l'introduction du nouveau symbole de constante I. L'extension des capacités de la pensée tient donc seulement à l'interprétation plus étendue, quadrivalente, des indéterminées du formalisme et à ces nouvelles possibilités de définition.

La démonstration du caractère déductivement complet de l'axiomatique ci-dessus pour L^2 suit pas à pas la démonstration qui peut être donnée de son caractère déductivement complet pour la logique propositionnelle usuelle.

On commence par vérifier le fait que les axiomes proposés pour la logique usuelle demeurent des tautologies par extension du sytème à deux valeurs logiques en système à quatre valeurs. On vérifie également le fait que la règle de déduction ne permet de dériver que des tautologies à partir d'hypothèses constituant elles-mêmes des tautologies. Ainsi tous les théorèmes de la logique usuelle sont aussi des théorèmes de L^2, et du coup les spécialisations constructibles dans L^2 sont aussi des théorèmes de L^2.

D'autre part, les métathéorèmes essentiels de la logique propositionnelle usuelle L, tel le métathéorème appelé "théorème de la déduction", à savoir :

THEOREME 1. La thèse formelle $P_1, P_2,... P_n \vdash Q$ autorise à poser $P_1, P_2,... P_{n-1} \vdash P_n \supset Q$ et le métathéorème classique sur le remplacement des expressions équivalentes les unes par les autres, à savoir :

THEOREME 2. Si $\vdash P \equiv Q$ et si R résulte de S en remplaçant P par Q en certains endroits de R, point forcément tous ceux où figure P, alors $\vdash R \equiv S$

sont aussi des métathéorèmes de L^2 puisque les moyens d'expression et de preuve de L sont conservés dans L^2 qui est, elle aussi, une logique purement propositionnelle et que, en conséquence, la construction de la preuve pour L^2 coïncidera purement et simplement avec la construction classique de la preuve de ces métathéorèmes pour L.

La remarque ainsi faite pourra s'étendre d'elle-même au cas des logiques purement propositionnelles qui conservent les moyens d'expression et de preuve de la logique propositionnelle usuelle L.

On peut maintenant en venir au lemme qui permet d'établir le caractère déductivement complet de L^2.

Soit donc une expression R du formalisme, $P_1, P_2, ... P_n$ une liste de n indéterminées parmi lesquelles figurent toutes celles qui apparaissent dans R. Soit $a_1, a_2, ... a_n$ une assignation arbitraire de valeurs faite aux indéterminées $P_1, P_2, ... P_n$, b la valeur logique prise alors par R et que l'on peut calculer, R étant connu, au moyen de la table fournissant les valeurs de $P \supset Q$ en fonction des valeurs assignées à P et à Q.

Les assertions "P_i a la valeur a_i" d'une part, "R a la valeur b" d'autre part, peuvent s'exprimer, l'équivalence étant supposée définie en termes d'implication, sous la forme d'équivalences entre P_i et le symbole de constante du formalisme servant à noter formellement la valeur a_i, entre R et le symbole servant à noter la valeur b. Appelons Q_i chacune des équivalences obtenues pour les P_i, S l'équivalent obtenu pour R.

LEMME. $Q_1, Q_2, ... Q_n \vdash S$.

On va raisonner par récurrence sur la construction de l'expression R.

1er cas. R se réduit à un seul symbole.

a) Le symbole est un symbole de constante, soit F, soit I. En ce cas S est soit $F \equiv F$ soit $I \equiv I$, expressions qui peuvent l'une et l'autre être prouvées à partir de l'axiomatique proposée. La thèse du lemme est donc *a fortiori* acquise.

b) Le symbole est celui d'une des indéterminées P_i de la liste considérée. Alors S est identique à Q_i et la thèse du lemme est triviale.

2ème cas. R est de la forme $R_1 \supset R_2$

L'hypothèse de la démonstration par récurrence est que l'on a déjà

$Q_1 , Q_2, ... Q_n \vdash S_1$ (1)

$Q_1 , Q_2, ... Q_n \vdash S_2$ (2)

et il faut montrer que ces hypothèses entraînent la thèse du lemme.

Seize sous-cas sont possibles suivant les valeurs logiques envisageables indépendamment pour R_1 et R_2. Certains d'entre eux peuvent être groupés. On aura alors les sous-cas suivants :
a) R_2 a la valeur v. Alors, quelle que soit la valeur assignée à R_1, $R_1 \supset R_2$ a la valeur v et S n'est autre que $R_1 \supset R_2 \equiv V$, S_2 étant $R_2 \equiv V$.

Pour obtenir la thèse du lemme, il suffit alors de disposer du théorème :

$$\vdash P \equiv V . \supset : Q \supset .P \equiv V.$$

et de l'adjoindre explicitement à la thèse (2). Or ce théorème n'est pas autre chose qu'une spécialisation de l'axiome 1.

b) R_1 a la valeur f. Dans ce cas S_1 est $R_1 \equiv F$. Quelle que soit la valeur assignée à R_2, $R_1 \supset R_2$ a la valeur v.
S est $R_1 \supset R_2 \equiv V$. La thèse du lemme s'obtiendra donc en adjoignant à la thèse (1) ci-dessus le théorème : $\vdash P \equiv F. \supset : P \supset Q . \equiv V.$

c) R_2 a la valeur F, de sorte que S_2 est $R_2 \equiv F$ et R_1 a la valeur v, de sorte que S_1 est $R_1 \equiv V$. En ce cas $R_1 \supset R_2$ a la valeur F, de sorte que S est $R_1 \supset R_2 .\equiv F$. Pour obtenir la thèse du lemme, il suffit d'adjoindre aux thèses (1) et (2) le théorème $\vdash P \equiv V. \supset :. Q \equiv F .\supset : P \supset Q. \equiv F.$

Les deux théorèmes ainsi adjoints dans les sous-cas b et c sont des théorèmes de la logique propositionnelle usuelle, donc eux-mêmes démontrables de façon directe à partir de l'axiomatique proposée ci-dessus, qui est déductivement complète pour la logique propositionnelle usuelle.

Ces trois premiers sous-cas rassemblent en fait huit cas d'assignation de valeurs. Restent alors les huit cas suivants.

d)
1. R_1 a la valeur v — R_2 a la valeur i
2. R_1 a la valeur v — R_2 a la valeur j
3. R_1 a la valeur i — R_2 a la valeur f
4. R_1 a la valeur i — R_2 a la valeur i
5. R_1 a la valeur i — R_2 a la valeur j
6. R_1 a la valeur j — R_2 a la valeur f
7. R_1 a la valeur j — R_2 a la valeur i
8. R_1 a la valeur j — R_2 a la valeur j

Pour démontrer la thèse du lemme à partir des thèses (1) et (2), il faut alors, suivant les différents cas de 1 - 8, disposer des huit théorèmes, que l'on adjoindra alors à ces deux thèses :

1. $\vdash P \equiv V. \supset :. \quad Q \equiv I. \supset : \quad P \supset Q. \equiv I$
2. $\vdash P \equiv V. \supset :. \quad Q \equiv J. \supset : \quad P \supset Q. \equiv J$
3. $\vdash P \equiv I. \supset :. \quad Q \equiv F. \supset : \quad P \supset Q. \equiv J$
4. $\vdash P \equiv I. \supset :. \quad Q \equiv I. \supset : \quad P \supset Q. \equiv V$
5. $\vdash P \equiv I. \supset :. \quad Q \equiv J. \supset : \quad P \supset Q. \equiv J$
6. $\vdash P \equiv J. \supset :. \quad Q \equiv F. \supset : \quad P \supset Q. \equiv I$
7. $\vdash P \equiv J. \supset :. \quad Q \equiv I. \supset : \quad P \supset Q. \equiv I$
8. $\vdash P \equiv J. \supset :. \quad Q \equiv J. \supset : \quad P \supset Q. \equiv V$

Or ces théorèmes deux à deux ne sont que des spécialisations des quatre théorèmes suivants de la logique propositionnelle usuelle :

9. $\vdash P \equiv V. \supset :. \quad Q \equiv R. \supset \quad : P \supset Q. \equiv \quad R$ (Th. 1 et 2)
10. $\vdash P \equiv R. \supset :. \quad Q \equiv F. \supset \quad : P \supset Q. \equiv \sim R$ (Th. 3 et 6)
11. $\vdash P \equiv R. \supset :. \quad Q \equiv R. \supset \quad : P \supset Q. \equiv \quad V$ (Th. 4 et 8)
12. $\vdash P \equiv R. \supset :. \quad Q \equiv \sim R. \supset \quad : P \supset Q. \equiv \sim R$ (Th. 5 et 7)

ceci en tenant compte du fait que $I \equiv \sim J$ et $J \equiv \sim I$.

Dès lors les hypothèses (1) et (2) entrainent dans tous les cas la thèse du lemme, dont la démonstration est donc acquise compte tenu de ce qui a été établi dans le cas 1.

On passe alors du lemme ci-dessus au théorème de complétude.

THEOREME III. Une axiomatique déductivement complète pour la logique propositionnelle usuelle est aussi déductivement complète pour L^2.

Preuve. Soient P_1, P_2, ... P_n les indéterminées figurant dans la tautologie R et définissons comme dans le lemme ci-dessus Q_1, Q_2, ... Q_n pour toute assignation de valeurs a_1, a_2, ... a_n à ces indéterminées. R étant une tautologie s sera toujours $R \equiv V$. On aura donc en vertu du lemme :

$Q_1, Q_2, \dots Q_n \vdash R \equiv V$

Ceci vaut pour tout choix de la valeur a_n. C'est-à-dire que l'on a tout à la fois :

$Q_1, Q_2, \dots P_n \equiv V \vdash R \equiv V$ (1)
$Q_1, Q_2, \dots P_n \equiv F \vdash R \equiv V$ (2)
$Q_1, Q_2, \dots P_n \equiv I \vdash R \equiv V$ (3)
$Q_1, Q_2, \dots P_n \equiv J \vdash R \equiv V$ (4)

Cela étant, le "théorème de la déduction" pemet de poser à partir des thèses (1) et (2) les thèses :

$Q_1, Q_2, \dots Q_{n-1} \vdash P_n \equiv V. \supset R \equiv V$ (1')
$Q_1, Q_2, \dots Q_{n-1} \vdash P_n \equiv F. \supset R \equiv V$ (2')

et une application du théorème $\vdash P \equiv F. \supset S : \supset :. P \equiv V. \supset S : \supset S$ suffit alors à établir la thèse

$Q_1, Q_2, \dots Q_{n-1} \vdash R \equiv V$ (5)

On a donc éliminé de la sorte l'hypothèse Q_n. Par répétition de la procédure on éliminera successivement toute la suite des hypothèses, de telle sorte que la thèse finale sera $\vdash R \equiv V$, d'où l'on déduit $\vdash R$ en vertu du théorème $\vdash R \equiv V. \supset R$. Ce qui établit le théorème.

On peut remarquer à ce propos que les thèses (3) et (4) ci-dessus ne jouent aucun rôle dans l'élimination de l'hypothèse Q_n. Autrement dit, si une proposition Q est impliquée à la fois par une autre proposition P et par la négation de celle-ci, elle est alors automatiquement impliquée par les "semi-négations" $\nsim P$ et $\sim \nsim P$. De façon plus générale :

THEOREME IV. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une expression R de L^2 soit une tautologie est que sa valeur soit v quelle que soit l'assignation de valeur restreinte aux deux valeurs v et f faite aux indéterminées P_1, P_2, ... P_n figurant dans R.

Ainsi, une fois connues les définitions permises par le formalisme de L^2 ont peut, en vue de la détermination des tautologies, se limiter à la considération des seules assignations de valeur v et f faites aux indéterminées figurant dans les expressions étudiées.

5. REMARQUE SUR LE DEVELOPPEMENT DE LA LOGIQUE L^2

Le développement du formalisme qui vient d'être constitué et de l'axiomatique que l'on a montré déductivement complète pour L^2 ne sera pas fait ici. On va simplement indiquer les définitions par lesquelles s'introduisent les notions des principales espèces propositionnelles de la logique considérée, ainsi que quelques théorèmes caractéristiques à leur propos.

La négation se définit classiquement :

$\sim P = . P \supset F$ Df.

La définition de $\dashv\!\vdash P$ demande à être faite au moyen d'une équivalence. On définit donc d'abord l'équivalence :

$P \equiv Q . = : P \supset Q . Q \supset P$ Df.

puis :

$\dashv\!\vdash P = . P \equiv J$ Df.

On définira d'autre part :

$\nabla P = . J \supset P$ Df.

$\Delta P = . I \supset P$ Df.

$\blacktriangledown P = \sim\nabla \sim P$ Df.

$\blacktriangle P = \sim\Delta \sim P$ Df.

Relativement à ces espèces propositionnelles non-classiques, on a quelques théorèmes simples et faciles à démontrer qui caractérisent leurs propriétés les plus essentielles. Par exemple :

$\vdash \Delta P \supset . \nabla P \supset P$ et même $\vdash \Delta P \equiv . \nabla P \supset P$

$\vdash \nabla P \equiv . \Delta P \supset P$

$\vdash \Delta P . \nabla P \equiv P$

$\vdash \blacktriangledown P \vee \blacktriangle P \equiv \sim P$

On a également :

$\vdash \nabla P \equiv . P \vee \dashv\!\vdash P$

$\vdash \Delta P \equiv . P \vee \sim \dashv\!\vdash P$

$\vdash \blacktriangledown P \equiv . P . \dashv\!\vdash P$

$\vdash \blacktriangle P \equiv . P . \sim \dashv\!\vdash P$

et de même :

$\vdash \Delta P \equiv . \dashv\!\vdash P \supset P$

$\vdash \nabla P \equiv . \sim \dashv\!\vdash P \supset P$

On peut traduire ces deux derniers théorèmes en disant que P est formellement vrai lorsque P est impliqué par sa déposition, et qu'il est thétiquement vrai lorsqu'il est impliqué par son relèvement. On peut ainsi entrevoir les premières avenues d'une algèbre et d'une logique associant à l'algèbre et à la logique familières de la disjonction et de la conjonction, la possibilité de décomposer mentalement ce dont la pensée traite en "moments conjugués" assujettis chacun pour soi aux procédures régulières de la rationalité et du calcul algébrique qui met en forme cette rationalité.

D'autre part les opérateurs Δ et ∇ donnent lieu aux théorèmes suivants qui permettent d'envisager une autre façon de mettre sur pied la logique L^2.

1. $\vdash P \supset \Delta P$
2. $\vdash P \supset \nabla P$
3. $\vdash \Delta P \equiv . \nabla P \supset P$
4. $\vdash \Delta P \equiv . \Delta P \supset P$
5. $\vdash \Delta(P \supset Q) \equiv . \Delta P \supset \Delta Q$
6. $\vdash \nabla(P \supset Q) \equiv . \nabla P \supset \nabla Q$

Ces deux derniers théorèmes font apparaître une propriété des espèces propositionnelles ΔP et ∇P que l'on appellera la *stabilité* par rapport à l'implication, et qui est le premier exemple d'une propriété par rapport à des connectifs de la logique usuelle des propositions appelée à jouer un rôle essentiel dans tous les développements de la logique binaire.

7. $\vdash \Delta\Delta P \equiv \Delta P$
8. $\vdash \nabla\nabla P \equiv \nabla P$
9. $\vdash \Delta\nabla P \equiv \nabla\Delta P \equiv V$.

Ces théorèmes permettent de mettre L^2 sur pied sans introduire directement la constante I mais par adjonction au formalisme de la logique propositionnelle usuelle L soit de l'espèce propositionnelle ΔP soit de l'espèce propositionnelle ∇P, (autrement dit, soit du signe constitutif Δ, soit du signe constitutif ∇) aux moyens primitifs d'expression du formalisme, avec en outre la règle 3 bis : Si P est une expression, alors ΔP - resp. ∇P - est une expression et par adjonction aux moyens de preuve de L de moyens de preuve relatifs à l'espèce propositionnelle adjointe au formalisme.

Ces axiomes pourraient être les thèses 5, 7 et 1 pour ΔP, ou les thèses 6, 8 et 2 pour ∇P. On peut alors définir soit ΔP à partir de ∇P soit ∇P à partir de ΔP. Moyennant quoi on peut aussi définir les valeurs logiques I et J, par exemple en posant :

$I = .\Delta P \supset \sim\Delta\sim P$ Df.

$J = .\nabla P \supset \sim\nabla \sim P$ Df.

de même que, dans certaines formulations de la logique propositionnelle usuelle, on définit :

$V = . P \supset P$ Df.

On peut alors introduire pour L une axiomatique n'explicitant aucune constante, mais, par exemple, assumant deux connectifs primitifs l'implication et la négation. Les trois axiomes suivants suffisent alors à constituer, avec la règle de déduction O ci-dessus, une axiomatique complète pour L.

1. $\vdash P \supset . Q \supset P$
2. $\vdash P \supset . Q \supset R : \supset : P \supset Q . \supset . P \supset R$
3. $\vdash \sim P \supset \sim Q . \supset . Q \supset P$.

On adjoindra alors à ces trois axiomes soit les thèses 5, 7 et 1 soit les thèses 6, 8 et 2. A partir de quoi il est possible de démontrer les équivalences $\Delta P \equiv . I \supset P$, $\nabla P \equiv . J \supset P$ permettant d'introduire ΔP et ∇P à partir des constantes I et J, de sorte que les systèmes ainsi proposés pour L^2 sont équivalents.

§.II. LA LOGIQUE QUADRIVALENTE COMPLETE Λ^2

1. ORIENTATION GENERALE

La logique L^2 n'est pas une logique complète. Or, au moment où l'on admet l'intervention de quatre valeurs logiques au principe de l'organisation rationnelle de la pensée, il n'y a pas lieu de supposer que seules les spécificités algébriques proposées par une algèbre d'anneau booléen K^2 ont un rôle à jouer. Les spécificités algébriquement envisageables à propos de quatre éléments et cependant étrangères aux précédentes ont sans doute, elles aussi, de l'importance. On verra ci-dessous qu'il en est bien ainsi en fait et qu'en particulier des liens essentiels existent entre ces spécificités nouvelles et les conceptions que déjà la logique classique a mises en oeuvre avec la logique dite "des modalités".

L'algèbre connaît une structure algébrique fonctionnellement complète sur tout ensemble fini comportant p^n éléments, p étant un nombre premier : c'est la structure de corps de Galois $G[p^n]$. Cette structure existe donc dans le cas présent et on pourrait songer un instant à instituer directement une logique quadrivalente complète comme la logique correspondant directement à l'algèbre de corps $G[2^2]$, de même que la logique L^2 correspond à l'algèbre de l'anneau K^2. D'autant que, dans le cas de la logique propositionnelle usuelle, cette dernière correspond à la fois à l'algèbre du corps G[2] et à celle de l'anneau K, qui se confondent. Dans le formalisme logique à envisager à présent la différence symétrique resterait ce qu'elle est dans L^2 et on substituerait au produit booléen la "multiplication galoisienne" $P \times Q$ spécifiée par la table suivante :

$P \times Q$

v	f	i	j	v
j	f	v	i	j
i	f	j	v	i
f	f	f	f	f
Q/P	f	i	j	v

Cette façon de procéder ne correspondait cependant pas à l'économie rationnelle véritable de la pensée. Car elle ne serait pas conforme à ce que pose déjà l'entrée première de la pensée humaine dans la discipline logique. Celle-ci se fait par la voie booléenne. Or le remplacement du produit booléen par la multiplication galoisienne dans le formalisme conduirait à prendre pour base conceptuelle de la logique des spécifications rationnelles étrangères à l'agir coutumier de l'esprit en laissant de côté celles qui lui sont familières. Le principe de maintien de l'inaliénable serait ainsi derechef entamé. Dans la circonstance présente une voie différente s'ouvre à la pensée logicienne. C'est cette voie que l'on se propose maintenant de reconnaître.

On procédera en *adjoignant* aux espèces propositionnelles déjà admises par L^2 telles ou telles nouvelles espèces propositionnelles relevant à leur tour, de la façon que l'on va voir, de la logique L^2 qui ne fait elle-même qu'une extension toute directe de la logique usuelle. En vertu des adjonctions ainsi faites, on pourra alors spécifier des ensembles de formes propositionnelles de la pensée logiquement quadrivalente plus étendus que celui de L^2, jusqu'à rejoindre, grâce à quelque adjonction convenable, la totalité des formes propositionnelles spécifiables en correspondance avec le système complet des lois de composition interne envisageable sur un ensemble de quatre éléments. On va voir que la chose est possible de façon fort simple.

La structure algébrico-logique ainsi obtenue a alors certains rapports avec la structure algébrique du corps $G[2^2]$. Toutes deux permettent une appréhension complète du système algébrique des lois de composition interne. Mais du point de vue de la logique qui doit définir la discipline de l'action pensante humaine, et point simplement spécifier une forme possible de l'actualité mathématique objective, elles sont essentiellement différentes. La pensée ne se coule pas directement en tant qu'action mentale subjective, dans un formalisme correspondant directement à l'algèbre du corps $G[2^2]$. Par contre il semble qu'elle puisse se couler comme il en est besoin pour qu'on parle de logique dans un formalisme de l'espèce que l'on va proposer. Il semble même qu'avant de s'y reconnaître explicitement elle en ait déjà, dans une certaine mesure, épousé spontanément telles ou telles dispositions.

2. LA BASE LOGIQUE DE Λ^2

On va considérer ici la logique obtenue par adjonction faite à L^2 de l'espèce propositionnelle P' spécifiée par la correspondance ci-dessous :

v	v
j	i
i	j
f	f
P	P'

PROPOSITION. Le formalisme obtenu par adjonction de l'espèce propositionnelle P' au formalisme de L^2 est fonctionnellement complet.

Preuve. On peut en effet définir dans ce formalisme les quatre espèces propositionnelles suivantes :

$P_\alpha = P.P'$ Df.

$P_\beta = \not{+}P. \sim \not{+}P'$ Df.

$P_\gamma = \sim \not{+}P. \not{+}P'$ Df.

$P_\delta = \sim P. \sim P'$ Df.

spécifiées respectivement par les correspondances suivantes :

v	v	f	f	f
j	f	v	f	f
i	f	f	v	f
f	f	f	f	v
P	P_α	P_β	P_γ	P_δ

Les produits booléens de P_α - P_δ par la constante J (resp. I) permettent alors de construire les espèces propositionnelles dans lesquelles la valeur j (resp. i) n'apparaît que dans un seul cas, la valeur logique étant f dans les autres cas. Moyennant alors l'appel fait à la différence symétrique et au produit booléen, on peut construire l'expression représentation de n'importe quelle loi de composition à n arguments sur l'ensemble des quatre valeurs logique f, i, j, v. Ce qui établit la proposition.

COROLLAIRE. L'ensemble des polynômes booléens en P_1, P'_1, P_2, P'_2, ... etc. est représentatif, par correspondance bi-univoque de la totalité des lois de composition interne définissables sur un ensemble de quatre éléments.

Preuve. Deux lois de composition interne différentes sont représentées par deux polynômes distincts et toute loi de composition interne est représentable par un polynôme de l'espèce considérée. Or le nombre des lois de composition interne à n arguments définissables sur un ensemble de quatre éléments est de $4^{(4^n)}$. Le nombre des polynômes distincts de l'espèce considérée est lui aussi de $4^{(4^n)}$. Il y a donc correspondance bi-univoque entre lois de composition et polynômes représentatifs.

Avec l'espèce propositionnelle P' on voit apparaître une espèce propositionnelle ignorée de la logique usuelle et de grande importance. C'est une espèce coïncidant avec l'affirmation en ce qui concerne le vrai ou le faux, valeurs logiques entières ; mais en même temps elle en diverge par contraposition en ce qui concerne les valeurs non classiques, intégrantes, i et j. Cette contraposition "seconde", sous-jacente à la coïncidence quant aux valeurs logiques principales est au principe de multiples faits de structure algébrico-logique. Ces faits sont susceptibles semble-t-il, de donner la clef de divers phénomènes présentés par l'agir mental et qui ont été, de fait, entrevus de façon plus ou moins distincte, par l'étude réfléchie de la conduite pensante.

La contraposition des valeurs i et j dans P' permet lorsque P représente effectivement l'espèce propositionnelle fondamentale de la logique, l'affirmation, de concevoir P' comme *divergeant* en sous-main de P. La divergence de l'une de ces deux espèces propositionnelles par rapport à l'autre sera mesurée par leur différence symétrique : $P_\Delta = P \mathrel{\ddagger} P'$. P_Δ est spécifié comme suit :

v	f
j	v
i	v
f	f
P	P_Δ

Or l'espèce P_Δ apparaîtra revêtir une signification importante en logique modale. Elle correspond de près, en effet, à la modalité classique de *contingence* (non pas le *possible* classique, mais l'ἐνδέχεσθα aristotélicien, conjonction de la possibilité d'avoir lieu et de la possibilité de ne pas avoir lieu). Ceci indique dès maintenant les liens étroits de la logique présentement envisagée avec la logique modale classique. On verra cependant qu'il n'y a pas pure et simple identification entre le point de vue présent et celui de la logique modale classique. Le point de vue présent déborde conceptuellement le champ classique de la logique modale ; d'autre part il est plus défini que le point de vue de cette logique modale, d'une manière assez semblable à celle dont la logique usuelle à deux valeurs se trouve plus définie que ne l'est la logique intuitionniste. Ces points se préciseront par la suite.

Algébriquement, l'espèce propositionnelle P' est la première d'une classe d'espèces propositionnelles principales conjuguées à la classe des quatre espèces principales de L^2 : P, ~ P, et +P et ~+P. Avec ces dernières elles forment ensemble un groupe de huit formes qu'on peut considérer comme l'un des trois sous-groupes de Sylow d'ordre huit des groupes des permutations de quatre éléments, groupe octique, tout comme les quatre espèces principales de L^2 peuvent être considérées comme le sous-groupe dit "groupe de Klein" du groupe des permutations de quatre éléments. On reviendra plus loin sur ces points d'algèbre qui intéressent la structure d'ensemble de la logique de base $B[2^2]$.

3. FORMALISME ET SYSTEME DEDUCTIF DE Λ^2

L'institution de Λ^2 se fera de la façon suivante :

A. *FORMALISME*

a. *Moyens primitifs d'expression.*

Les mêmes que ceux de L^2, sauf en plus :

3bis : le signe constitutif ' .

b. *Règles de construction des expressions.*

Les mêmes que celles de L^2, sauf en plus :

3bis : Si P est une expression, alors P' est une expression.

B. *SYSTEME DEDUCTIF*

a. *Règle de déduction*

Identique à celle de L^2.

b. *Axiomes.*

Axiomes 1 - 4 de L^2, plus :

5. $\vdash (P \supset Q)' \equiv . P' \supset Q'$
6. $\vdash P'' \equiv P$
7. $\vdash (P \equiv I)' \equiv . P' \equiv J.$

L'axiome 5 dit que P' a un comportement indiscernable de celui de P pour l'implication. On déduira en outre de l'axiome 6 et de l'axiome 5 le théorème $(P \supset F)' \equiv P' \supset F$ qui fait voir que P' a également un comportement indiscernable de celui de P pour la négation, de sorte que les comportements de P et P' sont indiscernables pour l'ensemble des structures fonctionnelles de la logique élémentaire des propositions L. L'axiome b dit le caractère involutif de l'opération de passage de P à P'. Il concourt à la caractérisation de P' et assure également au formalisme le moyen de démontrer que l'attribution d'une valeur donnée à une expression P détermine la valeur à attribuer à l'expression P' (théorème VII). L'axiome 7 achève la caractérisation de P' en déterminant son comportement particulier pour les valeurs secondes et intégrantes i et j.

On va montrer maintenant que ce système déductif est déductivement complet pour Λ^2. Ce qui suppose au préalable les développements suivants.

THEOREME I. $\vdash V' \equiv V,\ F' \equiv F,\ I' \equiv J,\ J' \equiv I$.

Preuve. 1°) $\vdash V' \equiv V$

En vertu de l'axiome 5, on a :

$$\vdash (F \supset F)' \equiv F' \supset F' \qquad (1)$$

Or V est par définition $F \supset F$ et $F' \supset F'$ est une spécialisation du théorème $\vdash P \supset P$ de la logique usuelle, de sorte que $\vdash F' \supset F' . \equiv V$. En portant dans (1) on a bien

$\vdash V' \equiv V$ Q.E.D.

2°) $\vdash F' \equiv F$

En vertu de l'axiome 5, on a :

$$\vdash (F \supset F')' \equiv . F' \supset F'' \qquad (1)$$

L'axiome 4 $\vdash F \supset P$, permet de poser :

$\vdash F \supset F' . \equiv V$

En vertu de l'axiome 6, on a :

$\vdash F'' \equiv F$ d'où, en portant dans (1)

$V' \equiv . F' \supset F$

puis, en vertu de $\vdash V' \equiv V$ démontré en 1°,

$\vdash V \equiv . F' \supset F$

et comme on a le théorème de la logique usuelle

$\vdash V \equiv . P \supset F : \supset . P \equiv F$ on en tire

$\vdash F' \equiv F$

3°) $\vdash I' \equiv J$

En vertu de l'axiome 7, on a :

$$\vdash (V \equiv I)' \equiv . V' \equiv J \qquad (1)$$

En vertu de L^2 on a :

$\vdash V \equiv I . \equiv I$ $\qquad \vdash V \equiv J . \equiv J$

et comme $\vdash V' \equiv V$ 1°) on obtient, en portant dans (1)

$\vdash I' \equiv J$ Q.E.D.

4°) $\vdash J' \equiv I$

En vertu de l'axiome 7, on a :

$$\vdash (F \equiv I)' \equiv .\ F' \equiv J$$

d'où en vertu de L^2 et de 2°

$$\vdash J' \equiv I \qquad \text{Q.E.D.}$$

THEOREME II. $\vdash (P \supset F)' \equiv P \supset F$

Preuve. Ax.7 et Th.I n°2

Compte tenu de la définition de la négation dans L ce théorème énonce l'indiscernabilité des comportements de P et P' pour la négation :

$$\vdash (\sim P)' \equiv \sim P'$$

THEOREME III. $\vdash (P \equiv Q)' \equiv .\ P' \equiv Q'$

Preuve. Le connectif d'équivalence appartenant à L, le théorème est acquis en conséquence de l'axiome 5 et du théorème II, à partir desquels on en construit la preuve formelle.

On va maintenant introduire la relation *d'égalité*, fondamentale pour le système Λ^2. L'équivalence qui est une égalité dans le cas de la logique à deux valeurs cesse de l'être au niveau de la logique à quatre valeurs : les deux relations sont alors conceptuellement et effectivement distinctes. L'égalité doit se caractériser comme suit :

v	f	f	f	v
j	f	f	v	f
i	f	v	f	f
f	v	f	f	f
Q/P	f	i	j	v

Sa définition sera la suivante :

$$P = Q\ .=:\ (P \equiv Q)\ .\ (P \equiv Q)' \qquad \text{Df.}$$

THEOREME IV. $\vdash P \equiv Q$ autorise à poser $\vdash P = Q$

C'est le *principe de majoration de l'équivalence en égalité.*

Preuve. $\vdash P \equiv Q$ autorise à poser $\vdash P' \equiv Q'$ (par substitution de P' à P et de Q' à Q).

Donc en vertu du Th. III

$\vdash P \equiv Q$ autorise à poser $\vdash (P \equiv Q)'$.

Si donc on peut poser $\vdash P \equiv Q$, on peut aussi poser :

$\vdash (P \equiv Q)\ (P \equiv Q)'$

c'est-à-dire : $\vdash P = Q$ en vertu de la définition de l'égalité.

THEOREME V. $\vdash V' = V$, $\vdash F' = F$, $\vdash I' = J$, $\vdash J' = I$

Preuve. Th. I et Th. IV

THEOREME VI. 1°) $\vdash P \equiv Q . \supset . R \equiv S$ autorise à poser

$\vdash P = Q . \supset . R = S$

2°) $\vdash P \equiv Q . \supset : R \equiv S . \supset . T \equiv U$ autorise à poser

$\vdash P = Q . \supset : R = S . \supset . T = U$

Preuve. 1°) En logique usuelle on a le théorème :

$\vdash P \supset Q . R \supset S : \supset . PR \supset QS$ (1)

D'autre part : $\vdash P \equiv Q . \supset . R \equiv S$ autorise à poser

$\vdash (P \equiv Q)' \supset (R \equiv S)'$.

En effet, on peut substituer dans la thèse proposée P' à P, Q' à Q, R' à R et S' à S, puis appliquer le Th. III. Dès lors :

$\vdash P \equiv Q . \supset . R \equiv S$ autorise à poser

$\vdash P \equiv Q . \supset . R \equiv S : (P \equiv Q)' \supset (R \equiv S)'$ (2)

On applique le théorème (1) à la thèse (2) puis la définition de l'égalité et on obtient ce qu'annonce le théorème en 1°).

2°) A partir du théorème (1) du n°1, on démontre en logique usuelle :

$\vdash P \supset . Q \supset R : S \supset . T \supset U . : \supset : PS \supset . QT \supset RU$ (3)

D'autre part, la thèse $\vdash P \equiv Q . \supset : R \equiv S . \supset . T \equiv U$ autorise à poser

$\vdash (P \equiv Q)' \supset . (R \equiv S)' \supset (T \equiv U)'$.

En combinant ces deux thèses au moyen du théorème (3), puis en appliquant la définition de l'égalité, on obtient ce qu'annonce le théorème.

THEOREME VII $\vdash P = Q . \equiv . P' = Q'$

Preuve. On a : $\vdash (P \equiv Q) . (P \equiv Q)' : \equiv : (P \equiv Q)' . (P \equiv Q)$.

En vertu de l'axiome 6 on peut remplacer dans le second membre de cette équivalence $P \equiv Q$ par $(P \equiv Q)''$ et alors appliquer le Th.III aux expressions du second membre. Ce qui donne

$$\vdash (P \equiv Q) . (P \equiv Q)' : \equiv : (P' \equiv Q') . (P' \equiv Q')' .$$

Il suffit alors d'appliquer aux deux membres la définition de l'égalité pour obtenir l'énoncé du théorème.

THEOREME VIII. $\vdash P = V . \supset R : \supset :: . P = J . \supset R : \supset :: P = I . \supset R : \supset : . P = F . \supset R : \supset R$

Preuve. On peut démontrer dans L^2 le théorème :

$$\vdash P \equiv V . Q \equiv V : \supset R . : \supset ::: P \equiv J . Q \equiv I : \supset R . : \supset :: . P \equiv I . Q \equiv J : \supset R . : \supset :: P \equiv F . Q \equiv F : \supset R . : \supset R .$$

Le théorème I permet alors d'écrire :

$$\vdash P \equiv V . Q \equiv V : \supset R . : \supset ::: P \equiv J . Q \equiv J' : \supset R . : \supset :: . P \equiv I . Q \equiv I' : \supset R . : \supset :: P \equiv F . Q \equiv F : \supset R . : \supset R .$$

On substitue alors P' à Q, puis on applique le théorème III quatre fois et ensuite quatre fois la définition de l'égalité, ce qui fournit l'énoncé du théorème.

Ces théorèmes acquis, considérons une expression R et soit $P_1, P_2, ..., P_n$ une liste d'indéterminées parmi lesquelles se trouvent toutes celles figurant dans R. Soit $a_1, a_2, ..., a_n$ une assignation de valeurs logiques faites à $P_1, P_2, ..., P_n$. On construit alors les expressions Q_i comme étant $P_i = A_i$, A_i étant le symbole de constante notant a_i pour $1 \leq i \leq n$. Soit b la valeur logique que prend R pour l'assignation considérée et S construit comme R = B, B étant le symbole de constante dénotant la valeur b. Dans ces conditions :

LEMME. $Q_1, Q_2, ... Q_n \vdash S$.

La démonstration de ce lemme est toute semblable à celle du lemme analogue pour L^2, aux différences suivantes près :

Il faut considérer les cas où R est de la forme R'_k. Ces cas se traitent comme suit :

a) R_k est un symbole de constante, F ou I. En ce cas S est soit l'équivalence $F' \equiv F$ soit l'équivalence $I' \equiv J$, l'une et l'autre démontrables dans Λ^2 (Th.I ci-dessus). On a donc bien la thèse du lemme.
b) R_k est un symbole d'indéterminée P_i. Alors S est $P'_i = A'_i$ qui peut se démontrer dans Λ^2 à partir de Q_i (théorème VII ci-dessus).
c) R_k est lui-même de forme R'_h. Donc R est de la forme R''_h. On raisonne alors sur R_h et on adjoint aux hypothèses l'axiome 5 ($\vdash P'' \equiv P$) qui permet de démontrer R''_h à partir de R_h.
d) R_k est de la forme $R_1 \supset R_2$: en ce cas on raisonne sur l'expression $R'_1 \supset R'_2$ qui est de l'une des formes déjà traitées dans la démonstration du lemme pour L^2 et on adjoint aux hypothèses le théorème $\vdash R'_1 \supset R'_2 . \equiv (R_1 \supset R_2)'$ dérive de l'axiome 5 et qui permet de démontrer $(R_1 \supset R_2)'$ à partir de $R'_1 \supset R'_2$.

Moyennant quoi les théorèmes de L^2, dans lesquels les équivalences auront été remplacées lorsqu'il y a lieu par des égalités en faisant jouer le théorème IV et ses conséquences (en particulier en appliquant l'énoncé 2° du théorème VI aux huit théorèmes mentionnés p.30 qui servent à la preuve du lemme de complétude pour L^2) suffisent à la démonstration du lemme dans le cas présent.

On passe alors au théorème de complétude en considérant les thèses :

$Q_1, Q_2, \ldots\ldots, P_n = V \vdash R = V$ (1)

$Q_1, Q_2, \ldots\ldots, P_n = J \vdash R = V$ (2)

$Q_1, Q_2, \ldots\ldots, P_n = I \vdash R = V$ (3)

$Q_1, Q_2, \ldots\ldots, P_n = F \vdash R = V$ (4)

qui doivent être posées si R est une tautologie. L'application à ces thèses du théorème de la déduction, puis du théorème VIII démontré ci-dessus, permet alors de poser la thèse :

$Q_1, Q_2, \ldots\ldots, Q_{n-1} \vdash R = V$.

On élimine ainsi successivement les hypothèses Q_n, $Q_{n-1}, \ldots$, Q_1 et on obtient la thèse $\vdash R = V$ d'où l'on repasse à la thèse $\vdash R$. En conséquence :

THEOREME IX. Si R est une tautologie de Λ^2, alors $\vdash R$.

On peut remarquer que tout l'ensemble des raisonnements qui viennent d'être faits en particulier pour la preuve du lemme et du théorème de complétude, montrent que pourvu que Λ^2 soit obtenu à partir de L^2 par adjonction d'espèces propositionnelles vérifiant les axiomes 5 et 6 d'une part, entièrement caractérisées d'autre part au moyen des axiomes ultérieurs (ici axiome 7) on peut construire la preuve du caractère complet du système déductif ainsi obtenu. Cette remarque est susceptible de larges généralisations qui dispensent de refaire à chaque fois le détail de la preuve du caractère déductivement complet d'un système logique.

4. LOGIQUE QUADRIVALENTE ET LOGIQUE CLASSIQUE DES MODALITES

On va montrer maintenant que la logique tirée de Λ^2 en y effaçant le symbole primitif de constante I et en ne retenant que les axiomes 1-6 de son système déductif contient la logique modale proposée par le système S_5 de Lewis.

Elle est en fait le système logique qui correspond de façon fonctionnellement et déductivement complète à la représentation finie de S_5 sur un ensemble de quatre éléments.

La description du système S_5 peut se faire comme suit.

FORMALISME.

Mêmes moyens d'expression que pour la logique propositionnelle usuelle L avec, en plus le signe constitutif $\Diamond$.

Mêmes règles de construction des expressions avec en plus :

si P est une expression, $\Diamond$ P est une expression.

Système déductif.

a) On commence par les *définitions*

$\sim P = . P \supset F$ Df.

$\Box P = \sim \Diamond \sim P$ Df.

$P.Q : = : \sim . P \supset \sim Q$ Df.
$P \prec Q . = : \square . P \supset Q$ Df.
$P = Q . = : P \prec Q . Q \prec P$ Df.

b) *Règle de déduction*
$P, P \prec Q \vdash Q$

c) *Axiomes*
1. $\vdash PQ \prec QP$
2. $\vdash PQ \prec P$
3. $\vdash P \prec PP$
4. $\vdash (PQ) R \prec P (QR)$
5. $\vdash P \prec \sim\sim P$
6. $\vdash P \prec Q . Q \prec R : \prec . P \prec R$
7. $\vdash P . P \prec Q : \prec Q$
8. $\vdash \Diamond P \prec \sim \Diamond \sim \Diamond P$

Le signe constitutif $\Diamond$ fait notation de la modalité de *possibilité*. Le signe $\square$ fait notation de la modalité de *nécessité*. Le signe $\prec$ fait notation de "l'implication stricte" que Lewis prend initialement pour notion primitive transcendant la définition fonctionnelle mathématique. De même le signe $=$ fait notation de l'équivalence "stricte" ou égalité.

Les nombreuses études de logique algébrique faites à propos des divers systèmes de la modalité ont amené à penser l'algèbre modale comme ce qu'on appelle maintenant une "algèbre de clôture" (closure algebra) sur une algèbre booléenne. L'opérateur $\Diamond$ est alors dit opérateur de clôture. Les expressions de S_5 sont alors mises en rapport avec le système algébrique suivant, dit *matrice de Henlé* :

a) Eléments de l'ensemble de base : toutes les classes possibles d'entiers de 1 à *n*.

b) Eléments "désignés" : la classe $\{1, 2, ..., n\}$ ou classe univers de l'ensemble.

c) Structure algébrique imposée à l'ensemble de base :
- α) l'algèbre complète de Boole-Schröder,
- β) les deux thèses :

$\vdash \Diamond N = N$ Si N est la classe vide appartenant à l'ensemble de base.
$\vdash \Diamond A = \{1, 2, ..., n\}$ Si A est une classe quelconque non-vide appartenant à l'ensemble de base.

Le système S_5 peut alors être montré *déductivement complet* pour ce système algébrique en ce sens qu'il permet de prouver toutes les expressions du formalisme que leur interprétation à raison de ce système fait vraies en tout état de cause, ceci quelle que soit la valeur finie de *n*.[3]

On va alors montrer tout d'abord que les moyens de preuve de S_5 se déduisent de ceux de Λ^2. On a d'abord dans Λ^2 :

[3] On peut consulter par exemple à ce sujet S.A. KRIPKE, "A Completeness Theorem in Modal Logic. Th.8", *Journal of Symbolic Logic*, vol.24, n°1, 1959, pp.1-16.

THEOREME I. $\vdash P \supset Q$ autorise à poser $\vdash P \prec Q$.

C'est le principe de majoration de l'implication matérielle en implication stricte.

On pose en effet comme définition de l'implication stricte la définition ci-dessous :

$$P \prec Q \,.=:\, P \supset Q \,.\, (P \supset Q)' \qquad \text{Df.}$$

La démonstration du présent théorème est alors exactement parallèle à celle donnée pour le Théorème IV du numéro précédent.

THEOREME II. La règle de déduction $P, P \supset Q \vdash Q$ autorise à prendre la thèse $P, P \prec Q \vdash Q$ comme règle de déduction.

Preuve. L'hypothèse $P \supset Q$ entraîne (par substitution de P' à P et de Q' à Q puis application de l'axiome 5 de Λ^2) l'assertion $(P \supset Q)'$. Cette assertion peut donc être adjointe par conjonction à l'assertion $P \supset Q$ dans l'antécédent de la thèse $P, P \supset Q \vdash Q$. et on obtient alors la thèse $P, P \supset Q \,.\, (P \supset Q)' \vdash Q$. Or $P \supset Q \,.\, (P \supset Q)'$ n'est autre que $P \prec Q$ en vertu de la définition de $P \prec Q$ dans Λ^2. La thèse $P, P \prec Q \vdash Q$ est donc bien valide dans Λ^2 et peut y servir de règle de déduction.

Ceci étant acquis, les axiomes 1-5 de S_5 suivent immédiatement des théorèmes correspondants de la logique propositionnelle usuelle (donc aussi de Λ^2) dans lesquels une simple implication matérielle intervient à la place de l'implication stricte.

L'axiome 6 de S_5 se déduit en combinant les deux théorèmes :

$\vdash P \supset Q \,.\, Q \supset R :\supset .\, P \supset R$

$\vdash (P \supset Q)' \,.\, (Q \supset R)' \,.\supset (P \supset R)'$

Le second de ces théorèmes étant obtenu à partir de :

$\vdash P' \supset Q' \,.\, Q' \supset R' : \supset .\, P' \supset R'$

Spécialisation du premier, et des applications voulues de l'axiome 5 de Λ^2.

On procède de façon analogue pour l'axiome 7 de S_5.

Quant à l'axiome 8 il se déduit lui aussi facilement des axiomes 1-6 de Λ^2. On définit :

$\Diamond\ P = P \vee P' \qquad\qquad \text{Df.}$

et on démontre aisément :

$\vdash \Box P \equiv \sim \Diamond \sim P. \qquad\qquad (1)\ \ [\text{d'où} \vdash \Box P \equiv PP']$

Le conséquent $\sim \Diamond \sim \Diamond P$ de l'implication stricte dans l'axiome 8 de S_5 est donc équivalent de $P \vee P' \,.\, (P \vee P')'$. Or on a :

$\vdash (P \vee P')' \equiv P \vee P' \qquad\qquad (2)$

A partir de l'axiome 5 de Λ^2 on peut en effet prouver :

$\vdash (P \vee Q)' \equiv P' \vee Q' \qquad\qquad (3)$

d'où, par substitution de P' à Q dans ce théorème, puis application de l'axiome 6 de Λ^2 $\vdash P \equiv P''$, et retournement de la disjonction du second membre, la thèse (2). Comme :

$$\vdash P \vee P' . P \vee P' :\equiv P \vee P' \quad (4)$$

Antécédent et conséquent de l'axiome 8 se réduisent à la même expression PvP' et l'axiome lui-même à une illustration du théorème $\vdash P \dashv P$.

On a donc finalement le théorème suivant :

THEOREME III. Les moyens de preuve du système S_5 peuvent se déduire des moyens de preuve de Λ^2 sans faire intervenir l'axiome 7 de ce dernier.

Par contre, à partir des moyens de preuve assumés pour le système S_5, on ne peut déduire l'axiome 5 $\vdash (P \supset Q)' \equiv . P' \supset Q'$ de Λ^2 relatif à la forme propositionnelle P', une fois celle-ci spécifiée dans S_5 à partir des moyens primitifs d'expression de ce système. S_5, tout comme le système logique actuellement envisagé, permet de spécifier 16 formes propositionnelles à une seule indéterminée P. Parmi celles-ci l'homologue de P' peut se définir comme suit :

$$P' =: P \equiv \Box P . \equiv \Diamond P \qquad (1)$$

définition qui met en évidence le fait que P' est une espèce propositionnelle qui reste indiscernable de l'espèce fondamentale tant que la pensée ne connaît que la modalité classique comme principe de différenciation entre elles des espèces propositionnelles affirmatives. A partir de cette définition on peut en effet démontrer dans S_5 les deux équivalences :

$$\vdash \Box P' \equiv \Box P \qquad \text{et} \qquad \vdash \Diamond P' \equiv \Diamond P$$

Mais alors il est facile de voir que, dans une algèbre booléenne à plus de quatre éléments, huit par exemple, il est possible d'attribuer aux deux indéterminées P et Q de l'expression objet de l'axiome 5 de Λ_2 des valeurs logiques qui, compte tenu de la définition (1) ci-dessus de P' et de la spécification de $\Box P$ et de $\Diamond P$ par la matrice de Henlé, font que cette expression n'a pas la valeur logique vrai. Ainsi en est-il quand on assigne à P une valeur logique atomique et à Q une valeur logique distincte de la valeur vrai et que la valeur assignée à P implique. Il est facile de voir, en outre, que le nombre de formes propositionnelles à deux indéterminées admises par S_5 (2^{32} - cf. R. Carnap, "Modalities and Quantification", *Journal of Symbolic Logic*. Vol.11, (1946), n°2, § 6, pp.47-48) dépasse de beaucoup le nombre de formes propositionnelles à deux indéterminées du présent système (2^8). Par rapport à l'axiomatique de S_5 l'axiome 5 de Λ^2 se présente comme un principe de réduction au maximum du nombre des formes propositionnelles comportant plus d'une indéterminée et faisant état de conditions de modalité.

De fait, le système actuellement envisagé, que nous appellerons M_α et qui est équivalent à celui de la logique propositionnelle usuelle L avec adjonction de l'espèce propositionnelle P' et des deux axiomes (5) et (6) de Λ^2, a pour caractéristique la plus simple des représentations finies de S_5, qu'on peut obtenir en considérant l'algèbre booléenne finie sur un ensemble de quatre éléments (en n'explicitant alors dans le formalisme que les dénotations de l'élément nul et de l'élément unité) et en adjoignant à cette algèbre la loi de composition interne monadique caractéristique par exemple de $\Diamond P$ (ou de $\Box P$, ou de P'... etc). On sait, par contre, que le système S_5, quant à lui, n'a pas de "matrice caractéristique finie"[4].

[4] Théorème de Dugundji, *Journal of Symbolic Logic* (1940), 150-151.

Les considérations faites à présent sur la logique à quatre valeurs logiques amènent alors à se demander quelle peut être la signification propre au système M_α d'à présent et quels seront ses rapports logiques avec le système S_5 de la modalité. A la vérité les notations modales de M_α dénotent des modalités qui sont le fait *intrinsèque*, dû à leur constitution interne propre, des propositions considérées, alors que les opérateurs modaux de S_5 dénotent des modalités qui sont un fait *extrinsèque* des propositions, dû à un certain contexte logique qui leur demeure extérieur et les affecte du dehors. L'esprit peut en effet penser comme de deux façons différentes la nécessité de quelque chose : ce quelque chose, tel ou tel fait, peut être pensé nécessaire non point parce qu'il se suffit à soi-même pour se constituer dans sa nécessité, mais parce qu'il se propose dans un contexte tel que ce que comporte pareil contexte le rend nécessaire, comme de par ailleurs, alors que ce contexte s'avère ne point faire plus que rendre certaines autres choses possibles, on laisse certaines d'entre elles à la contingence proprement dite... etc. C'est l'optique du système S_5 de la modalité. Mais d'autre part ce que l'esprit pense nécessaire peut être pensé nécessaire parce que dans sa réalité *propre*, indépendamment de tout contexte extérieur il possède de quoi se constituer, dans son propre fait. La chose est alors comprise comme par soi et intrinsèquement nécessaire. Certaines vérités premières approchent pour le moins de cette condition : l'appréhension même de leur contenu les rend d'elles-mêmes certaines. C'est l'optique du système M_α présentement envisagé. La philosophie a l'habitude de distinguer ces deux sortes de nécessité en parlant d'une part de nécessité *par soi* (M_α), d'autre part de nécessité *par fait d'autre chose* (la "*necessarium per aliud*" de la scolastique - système S_5). C'est de la première sorte de ces nécessités que l'on peut traiter logiquement avec le système de la modalité actuellement envisagé.

Examinons maintenant ce qu'ajoute, du point de vue de S_5 le fait d'expliciter la constante I dans Λ^2. La logique classique des modalités connaît en somme un ensemble de huit espèces propositionnelles modales formant anneau si l'on prend la différence symétrique pour somme et le produit booléen pour produit.

Ce sont les formes : V, F

$\Box P$ (nécessité) $\Diamond \sim P$.

$\Diamond P$ ($= \sim \Box \sim P$, possibilité) $\sim P$.

$\Diamond P \,.\, \Diamond \sim P$ (contingence) $\Box P \vee \Box \sim P$ (non contingence).

La forme $\Diamond P \,.\, \Diamond \sim P$ coïncide dans Λ^2 avec la forme P_Δ dont il a été parlé au n°2 du présent paragraphe (p.36). Dans Λ^2 ces huit formes se spécifient comme suit :

v	v	f	v	f	f	v	v	f
j	v	f	f	f	v	f	v	v
i	v	f	f	f	v	f	v	v
f	v	f	f	v	f	v	f	v
P	V	F	$\Box P$	$\Box \sim P$	$\Diamond P . \Diamond \sim P$	$\Box P \vee \Box \sim P$	$\Diamond P$	$\Diamond \sim P$

On voit qu'en logique quadrivalente les modalités s'obtiennent en ne considérant que les valeurs v et f pour spécifier les espèces propositionnelles. Or 2^4 telles spécifications sont possibles en logique quadrivalente. Les huit qui ne correspondent pas à des modalités classiques peuvent être obtenues par définition dans S_5 une fois que l'on y adjoint la constante I. Ce sont les suivantes :

v	f	v	f	v	f	v	f	v
j	v	v	f	f	f	f	v	v
i	f	f	v	v	v	v	f	f
f	f	f	v	v	f	f	v	v
P	P_a	P_b	P_c	P_d	P_e	P_f	P_g	P_h

En définissant alors, ce que nous proposons de faire, une espèce propositionnelle *modale* comme une espèce propositionnelle ne faisant intervenir que les valeurs logiques classiques v et f pour sa caractérisation, on peut envisager de constituer à partir de S_5 une *logique étendue des modalités* en introduisant directement les huit modalités non classiques P_a - P_h ci-dessus spécifiées sans introduire la constante I. Le système de ces huit nouvelles espèces propositionnelles est intéressant à considérer.

Il comporte tout d'abord les deux couples de modalités P_b et P_c , P_f et P_g. On pourra noter P_b P^+ et lire cette expression : "il est vrai substantiellement que P" ; P_c sera $\sim P^+$. et se lira alors : "il est faux substantiellement que P". On pourra de même noter P_f P^* et lire cette expression : "il est vrai essentiellement que P" ; P_g se notera alors : $\sim P^*$ et se lira :"il est faux essentiellement que P".

Il comporte en second lieu les quatre modalités P_a , P_d , P_e , P_h qui forment un système analogue à celui que forment les modalités classiques du nécessaire et du possible. On notera P_a OP ; P_d sera alors ~OP, P_e O~P et P_h ~O~P . On peut proposer de lire ces expressions comme suit :

OP	il est thétiquement nécessaire que P .
~OP	il est formellement possible que P .
O~P	il est formellement nécessaire que P .
~O~P	il est thétiquement possible que P .

La différence conceptuelle entre les modalités classiques du nécessaire et du possible est que les négations consécutives à la notification de la modalité correspondent à un remaniement conceptuel de la compréhension de la modalité plus qu'à une simple négation de la proposition affectée de modalité. Tout ceci, bien entendu à titre de tentative conceptuelle sujette à rediscussion.

Entendue de la sorte ou autrement, cette logique étendue des modalités se laisse axiomatiser assez facilement en termes de logique booléenne à partir de la considération des modalités P^+ et P^*. Comme ces espèces propositionnelles jouent un rôle important dans la constitution de logiques qui vont avoir à être considérées au paragraphe suivant, on va différer jusqu'après l'étude de ces logiques ce qui a trait à l'axiomatisation en question.

5. LA RELATION D'APPARTENANCE DANS Λ^2

Avec la logique quadrivalente on voit apparaître la possibilité de caractériser une relation destinée à avoir une grande importance pour la logique des catégories. C'est une relation que l'on appellera dès maintenant relation *d'appartenance*, encore que la pleine justification de cette appellation ne puisse venir que de considérations ultérieures.

L'idée de cette relation présuppose celle d'une connexion mise par la pensée entre certaines valeurs logiques d'un ensemble donné, tel celui des quatre valeurs f, i, j, v de $B[2^2]$ et celles des valeurs logiques du même ensemble qui, à raison de la structure de système booléen imposée à celui-ci ont le caractère *d'atomes*.

On sait qu'en algèbre booléenne on appelle *atome* tout élément a distinct de l'élément nul tel que si un autre élément b vérifie la relation $b \supset a$ (le plus souvent écrite $b \subseteq a$ en pensant à l'inclusion des termes plus qu'à l'implication de valeurs logiques) alors ou bien b est lui-même l'élément nul ou bien b est identique à a. Dans la logique propositionnelle usuelle, de base $B[2]$, le vrai a le caractère d'un atome, alors qu'il n'a plus ce caractère dans la logique de base $B[2^2]$: ce sont les valeurs i et j qui y ont ce caractère et la valeur logique vrai peut alors être considérée comme la réunion des deux atomes i et j.

Cela étant, on dira *image* d'une certaine valeur logique choisie par la pensée dans $B[2^2]$ l'atome de $B[2^2]$ avec lequel cette valeur est associée par la pensée, sous la condition qu'un atome ne peut être image que d'une seule valeur logique. Comme $B[2^2]$ ne contient que deux atomes, deux valeurs logiques de cette base et deux seulement peuvent trouver leur image au-dedans de celle-ci. On prendra alors pour valeurs logiques de $B[2^2]$ ayant leur image au-dedans de celle-ci les deux valeurs logiques entières, vrai et faux, qui constituent elles-mêmes la base $B[2]$ de la logique propositionnelle usuelle. On associe donc par la pensée le couple des atomes de $B[2^2]$ au couple des valeurs logiques v et f, choisissant en outre d'associer la valeur logique f à la valeur logique i, qui sera dite son image, la valeur logique v à la valeur logique j, dite à son tour image de cette valeur v.

On dira alors qu'une entité propositionnelle P *appartient à l'entité propositionnelle* Q, et on notera ce fait par l'écriture $P \in Q$, lorsque P a une valeur logique qui a une image dans $B[2^2]$ et que Q a pour valeur logique soit l'image de P soit une valeur impliquée par cette image. En ce cas la forme propositionnelle $P \in Q$ a elle-même la valeur logique vrai. Dans tout autre cas elle a la valeur logique faux. On doit alors prendre la relation $P \in Q$ dans Λ^2 comme spécifiée par la table suivante :

v	v	f	f	v
j	f	f	f	v
i	v	f	f	f
f	f	f	f	f
Q/P	f	i	j	v

Cette relation est donc définissable dans le formalisme de $\Lambda 2$. Il est, en effet, facile de voir que l'on a :

$$P \in Q . = : P = P' . + P ⥽ Q \qquad \text{Df.}$$

$P = P'$ est une clause de limitation de la validité de la relation aux valeurs vrai et faux, (on pourrait prendre aussi bien $P \equiv P'$). Quant à l'expression $+P ⥽ Q$ elle notifie pour ainsi dire la spécificité même de la relation, disant que *la déposition de l'entité* P *implique strictement l'entité* Q. La logique de l'appartenance, que l'on ne développera pas dans ce qui suit immédiatement, se réservant d'y revenir dans la seconde partie du présent travail, est tout entière préfigurée dans cette définition. Celle-ci fournit la première formalisation rigoureuse correspondant au schématisme usuel de la relation $\in$ d'appartenance, auquel ont recours et en restent jusqu'à présent la pensée logicienne et, à sa suite, la mathématique.

On peut remarquer que la mise en avant de cette relation d'appartenance a pour effet de donner des fonctions conceptuellement différentes aux deux atomes i et j de la base $B[2^2]$. Dans cette base munie de la structure de système booléen par la constitution du formalisme de la logique A^2 les deux valeurs v et f sont distinguées chacune des autres par leurs rôles respectifs d'élément nul et d'élément-unité. Mais les deux atomes i et j, dont la classe est discernable, restent fonctionnellement indiscernables l'un de l'autre. En précisant par contre la spécificité de la relation d'appartenance comme un trait essentiel de la structure imposée à l'ensemble des éléments de $B[2^2]$ on définit alors pour cet ensemble une structure que l'on peut dire *maximale fonctionnellement*, c'est-à-dire telle que chacun des éléments qu'elle concerne se distingue en conséquence de tous les autres par un rôle fonctionnel propre. La structure individualise alors par elle-même chacun des éléments dont elle fait l'organisation intelligible. Ce n'est pas le cas de la plupart des structures envisagées en algèbre : la structure d'anneau booléen K^n par exemple pour $n > 1$, ou du corps de Galois $G[2^n]$ pour $n > 1$ laissent plus ou moins avant certains éléments à l'indiscernabilité. Ici les valeurs logiques i et j non seulement sont chacune, atomes du système booléen, mais i a en propre d'être l'atome image de la valeur logique f, élément nul du système, et j d'être l'atome image de la valeur logique v, élément unité du système, discernable de f. On achève ainsi de faire porter à la base logique $B[2^2]$ tout ce qu'elle peut porter conceptuellement.

§. III. LES LOGIQUES $\mathcal{L}^2$

1. IDEE PREMIERE DES LOGIQUES $\mathcal{L}^2$

L'axiome 5 et le théorème II de A^2 posent que, du point de vue de la logique propositionnelle usuelle L, l'espèce propositionnelle P' est fonctionnellement indiscernable de l'espèce fonctionnelle P, ou encore, comme l'on dira, *stable* pour chacun de ses connectifs. Soit une expression Q quelconque, construite au moyen des symboles d'indéterminées et de constantes F et V, ainsi que des signes constitutifs de L, soit primitifs soit introduits en vertu de quelque définition rendue possible par le formalisme adopté pour L et considérons l'expression Q_1 construite de façon semblable à Q au moyen des expressions $P_1, P_2, ..., P_n$: l'axiome 5 et le théorème II de A^2 permettent d'établir le théorème :

$$\vdash Q_1 \equiv Q' .$$

La chose commence à devenir différente au moment où l'on introduit la constante I, ce qui est spécifique du formalisme de L^2 et l'axiome 7 de A^2. On n'a pas en effet $(P\supset I)' \equiv P'\supset I$ comme on a $(P\supset F)' \equiv P'\supset F$. L'espèce propositionnelle P' n'est pas stable pour chacun des connectifs de L^2.

Il est alors assez naturel de considérer l'axiome 5 de A^2 et le théorème II dérivé des axiomes 5 et 6 comme proposant une propriété des espèces propositionnelles essentielle, au moment où il s'agit de formalismes comportant adjonction de classes nouvelles d'espèces propositionnelles à la classe constituée sur la base de l'espèce propositionnelle fondamentale, si de tels formalismes veulent pouvoir être pris comme des *logiques*. En elle-même, en effet, la classe adjointe de nouvelles espèces propositionnelles doit suivre exactement la logique que suivent les propositions qui font la base première du discours. On appellera donc *logique* de base $B[2^2]$

soit l'extension L^2 de la logique usuelle L de base B[2], soit encore les systèmes formels ou déductifs obtenus par adjonction à L^2 d'espèces propositionnelles vérifiant l'axiome 5 et le théorème II de Λ^2. P' est une espèce propositionnelle de cette sorte, la seule qui suffise à elle seule à la mise sur pied d'une logique fonctionnellement complète pour la base B[2^2]. Mais à côté de P' il existe encore d'autres espèces propositionnelles vérifiant cet axiome 5 et ce théorème II de Λ^2, qui permettent donc la constitution de logiques offrant quelque intérêt.

Les espèces propositionnelles en question sont au nombre de deux et de deux seulement, notées respectivement P+ et P* et spécifiées comme suit :

v	v
j	v
i	f
f	f
P	P+

v	v
j	f
i	v
f	f
P	P*

Il est aisé de vérifier à leur propos que l'on a :

$\vdash (P \supset Q)^+ \equiv . P^+ \supset Q^+$

$\vdash (P \supset Q)^* \equiv . P^* \supset Q^*$

$\vdash (P \supset F)^+ \equiv . P^+ \supset F$

$\vdash (P \supset F)^* \equiv . P^* \supset F$

Ces deux espèces propositionnelles sont des espèces *modales* au sens du numéro 4 du paragraphe précédent où elles ont été déjà rencontrées. On a proposé alors d'interpréter la première : "il est *substantiellement* vrai que P" et la seconde : "il est *essentiellement* vrai que P".

On peut donc avoir avec P+ et P* les bases de deux systèmes logiques, d'économie toute semblable de l'un à l'autre de ces systèmes, traitant l'un de ce qu'on appellera le "substantiellement vrai" dans son association avec le vrai au sens usuel du terme, l'autre de ce qu'on appellera l'"essentiellement vrai" dans son association derechef avec le vrai au sens usuel du terme, sources premières d'une "logique de l'essence" et d'une "logique de la substance", si l'on veut. Les mots "substance" et "essence" sont, il est vrai, jusqu'à présent des mots de la langue philosophique et non du vocabulaire mathématique, mots de portée significative encore mal distincte et du reste assez fréquemment pris l'un pour l'autre dans le discours philosophique. On peut néanmoins tenter de conférer à ces mots un caractère plus accentué de rationalité stricte : leur mise en rapport tel qu'il est fait présentement avec des entités logiques spécifiées avec rigueur constitue un essai de cette sorte.

Quoi qu'il en soit de cette herméneutique, il suffira de présenter ici l'une des deux logiques $\mathbf{L}^2$ obtenues par adjonction faite à L^2, soit de l'espèce propositionnelle P+ soit de l'espèce P*, puisque les constitutions de ces deux logiques sont entièrement semblables. On choisira ici la logique qui a pour base l'espèce propositionnelle P+, le désignant alors par la notation $\mathbf{L}^2_+$.

2. CHAMP DE LA LOGIQUE $\mathcal{L}_+^2$

Le champ de la logique $\mathcal{L}_+^2$ se caractérise en disant quel est l'ensemble des espèces propositionnelles dont elle permet de traiter et en comparant cet ensemble d'une part à celui des espèces propositionnelles dont L^2 permet de traiter d'autre part à celui dont il est traité avec Λ^2. Pour L^2 cet ensemble est celui des 16 formes F_1 - F_{16} spécifiées au paragraphe 1, n°2. Pour Λ^2 cet ensemble est celui de toutes les 256 espèces propositionnelles spécifiables sur la base $B[2^2]$. On va montrer que pour $\mathcal{L}_+^2$ cet ensemble comporte 64 espèces propositionnelles énumérables comme suit :

1) Les 16 espèces dont la spécification ne fait apparaître que les deux valeurs logiques v et j et les 16 espèces dont la spécification ne fait apparaître que les deux valeurs logiques f et i.

2) Les 32 autres espèces qui peuvent être obtenues en prenant la différence symétrique de ces 32 premières espèces avec P^+.

Cet ensemble constitue un anneau booléen sur la base $B[2^2]$. Il contient en effet les quatre constantes F, I, J, V. D'autre part il est clos pour les deux opérations de la différence symétrique et du produit booléen.

En premier lieu l'ensemble des 32 espèces énumérées en 1) est un anneau booléen sur la base $B[2^2]$. Appelons $\mathfrak{F}$ ce premier anneau.

Cela étant, toute espèce de l'ensemble considéré peut se mettre sous la forme :

$F_\alpha \mathrel{\not\equiv} \beta.P^+$.

$F\alpha$ étant une espèce propositionnelle appartenant à $\mathfrak{F}$ et β étant soit la constante F soit la constante V. La différence symétrique de deux telles formes est bien encore de cette forme. Quant au produit booléen de deux telles formes, il sera :

$$(F_\alpha \mathrel{\not\equiv} \beta.P^+) . (F_\gamma \mathrel{\not\equiv} \delta\, P^+) \qquad (1)$$

soit encore :

$$F_\alpha.F_\gamma \mathrel{\not\equiv} F_\alpha.\delta\, P^+ \mathrel{\not\equiv} F_\gamma.\beta\, P^+ \mathrel{\not\equiv} \beta.\delta\, .P^+ \qquad (2)$$

Le produit de deux espèces de l'anneau est une espèce de cet anneau. Le produit d'une espèce de $\mathfrak{F}$ par P^+ est également une espèce de cet anneau. Enfin $\beta.\delta.P^+$ est ou bien F ou bien P^+. L'expression (2) représentera donc bien une espèce de l'ensemble des 64 espèces énumérées ci-dessus, ce qui établit le caractère d'anneau booléen sur $B[2^2]$ de cet ensemble.

L'ensemble ainsi constitué comporte tout d'abord les espèces propositionnelles de L^2. Il comporte ainsi quatre autres espèces principales, spécifiées comme suit, la première d'entre elles étant noté P^j :

v	v	j	i	f
j	j	v	f	i
i	f	i	j	v
f	i	f	v	j
P	P^j	$+P^j$	$\sim +P^j$	$\sim P^j$

On voit que ∇P^j coïncide avec ∇P. C'est une caractéristique de $\mathbf{L}_+^2$. Si l'on considérait le champ de la logique $\mathbf{L}_*^2$ il y apparaîtrait une espèce propositionnelle principale P^i spécifiée comme suit :

v	v
j	f
i	i
f	j
P	P^i

et telle que ΔP^i coïncide avec ΔP.

La caractéristique des logiques $\mathbf{L}^2$ est donc de se construire sur la base d'un ensemble de huit espèces propositionnelles principales, ou si l'on préfère de deux espèces dont l'une est l'espèce fondamentale et l'autre une espèce associée P^j ou P^i coïncidant avec la fondamentale quant au vrai et une des deux valeurs intégrantes.

Algébriquement on peut caractériser ces deux logiques en disant que l'ensemble de leurs formes principales respectives peut être considéré comme l'un des deux sous-groupes de Sylow d'ordre 8 du groupe des permutations de quatre lettres f, i, j, v qui ne contiennent pas la permutation fjiv. Le troisième de ces sous-groupes d'ordre 8, contenant la permutation fjiv permet, lui, d'obtenir avec les opérations booléennes la totalité des espèces propositionnelles spécifiables sur la base $B[2^2]$.

3. FORMALISME ET AXIOMATIQUE DE $\mathbf{L}_+^2$

A. *FORMALISME*

a. *Moyens d'expression* : les mêmes que ceux de L^2 sauf, en plus, le signe constitutif $^+$.

b. *Règles de construction des expressions* : les mêmes que celles de L^2 sauf, en plus la règle 3bis : "Si P est une expression, alors P^+ est une expression".

B. *SYSTEME DEDUCTIF*

Le même que celui de L^2, avec en plus les axiomes :

5. $\vdash (P \supset Q)^+ \equiv . P^+ \supset Q^+$
6. $\vdash (P \supset F)^+ \equiv . P^+ \supset F$
7. $\vdash (P \equiv I)^+ \equiv . P^+ \equiv F$
8. $\vdash P^{++} \equiv P^+$

L'axiome 8 est jusqu'à un certain point l'analogue de l'axiome 6 de Λ^2. Il permettra en particulier de démontrer un théorème essentiel, analogue du théorème VII de Λ^2. Mais à la différence de son analogue, il ne permet pas de démontrer la relation énoncée ici avec l'axiome 6 analogue de celle énoncée dans le théorème II de Λ^2. C'est que d'autres espèces propositionnelles encore, à savoir ΔP et ∇P de L^2 vérifient et la relation de l'axiome 5 et celle de l'axiome 8 ci-dessus, sans vérifier celle de l'axiome 6 qui doit donc être énoncée de façon indépendante. Les axiomes 5, 6 et 7 fournissent la caractérisation complète de l'espèce propositionnelle P^+. La logique $\mathbf{L}_*^2$ ne diffèrerait quant à la forme des axiomes que pour l'axiome 7, qui serait :

7_* $\vdash (P \equiv I)^* \equiv . P^* \equiv V$.

Le théorème de complétude pour $\mathbf{L}_+^2$ s'obtient de façon fort semblable à celle dont s'obtient le théorème de complétude pour Λ^2, à condition d'introduire une relation analogue à l'égalité, mais de spécification distincte et que l'on écrira $P \simeq Q$

$P \simeq Q$

v	f	f	j	v
j	f	f	v	j
i	j	v	f	f
f	v	j	f	f
Q/P	f	i	j	v

Cette relation est à la fois plus stricte que l'équivalence et moins que l'égalité. On peut l'appeler relation *d'homologie* substantielle. Dans le système logique $\mathbf{L}_*^2$ on aurait une relation correspondante, spécifiée comme suit :

v	f	i	f	v
j	i	f	v	f
i	f	v	f	i
f	v	f	i	f
Q/P	f	i	j	v

qu'on pourrait appeler relation d'homologie *essentielle*, noter $P \approx Q$ et considérer par rapport à la précédente comme un moment conjugué de l'égalité puisque :

$\vdash P = Q . \equiv : P \simeq Q . P \approx Q$

On définira présentement $P \simeq Q$ de façon semblable à celle de définir $P = Q$.

$P \simeq Q . = : (P \equiv Q) . (P \equiv Q)^{+}$ Df.

L'analogue du théorème I de Λ^2 se démontre aisément à partir des axiomes 5-7 de $\mathbf{L}^{2}_{+}$; l'analogue du théorème II est l'axiome 6 lui-même ; l'analogue du théorème III suit des axiomes 5 et 6 ; les analogues des théorèmes IV - VI se démontrent de façon exactement semblable à ceux-ci. Quant à l'analogue du théorème VII en voici la démonstration.

THEOREME VII+. $\vdash P \simeq Q . \supset . P^{+} \simeq Q^{+}$

Preuve. On a le théorème :

$$\vdash (P \equiv Q)^{+} \equiv : (P \equiv Q)^{+} . (P \equiv Q)^{+}$$

On applique alors l'axiome 8 à la seconde partie du second membre de cette équivalence.
Ce qui donne :

$$\vdash (P \equiv Q)^{+} \equiv : (P \equiv Q)^{+} . (P \equiv Q)^{++}$$

On applique alors l'analogue du théorème III de Λ^2 aux deux parties du second membre :

$$\vdash (P \equiv Q)^{+} \equiv : (P^{+} \equiv Q^{+}) . (P^{+} \equiv Q^{+})^{+}$$

c'est-à-dire, en vertu de la définition de $P \simeq Q$:

$$\vdash (P \equiv Q)^{+} \equiv : P^{+} \simeq Q^{+} \qquad (1)$$

D'autre part, en vertu de la définition de $P \simeq Q$ et du théorème de la logique usuelle :

$$\vdash P.Q : \supset Q$$

On a, en tenant compte de (1) :

$$\vdash P \simeq Q . \supset . P^{+} \simeq Q^{+} \qquad \text{Q.E.D.}$$

On voit qu'il faut remplacer l'équivalence du théorème VII de Λ^2 par une implication. La réciproque ne serait pas exacte ainsi qu'il est facile de s'en apercevoir. Mais la démonstration de l'équivalence n'est pas nécessaire à l'usage qui sera fait du théorème VII^+ pour la démonstration du lemme de complétude.

Enfin l'analogue du théorème VIII de $\Lambda 2$ se démontre ici de façon entièrement parallèle à la démonstration donnée ci-dessus.

La seule modification à faire dans la transposition de la preuve du lemme de complétude donnée pour Λ^2 est la suivante :

......

c. R_k est lui-même de forme $R^+{}_h$. Donc R est de la forme $R^{++}{}_h$. On raisonne alors sur R_h et on adjoint aux hypothèses l'axiome 8 $P^{++} \equiv P^+$ qui permet de démontrer $R^{++}{}_h$ à partir de $R^+{}_h$. On est alors ramené à l'un des autres cas de la démonstration.

Tout le reste de la démonstration du lemme et toute celle du théorème de complétude lui-même se transposent point par point.

4. CONJUGAISON DES LOGIQUES $\boldsymbol{L}^2_+$ et $\boldsymbol{L}^2_*$

Les deux systèmes $\boldsymbol{L}^2_+$ et $\boldsymbol{L}^2_*$ représentent les logiques d'espèces propositionnelles constituant des moments conceptuels conjugués redonnant les propositions nécessaire et possible de la logique classique, et permettant d'atteindre à la définition de celles-ci par une voie autre que celle de la considération de l'espèce propositionnelle P'. On a en effet non seulement :

$\vdash \square P \equiv . P . P'$

$\vdash \Diamond P \equiv . P \vee P'$

mais encore :

$\vdash \square P \equiv . P^+ . P^*$

$\vdash \Diamond P \equiv . P^+ \vee P^*$

thèses qui peuvent s'interpréter en disant que le nécessairement vrai est ce qui est à la fois substantiellement et essentiellement vrai, le possiblement vrai ce qui est ou substantiellement ou essentiellement vrai.

On peut donc constituer un système logique fonctionnellement et déductivement complet pour la base B [2^2] en adjoignant à L^2 les deux espèces propositionnelles P^+ et P^* avec les deux séries d'axiomes supplémentaires caractéristiques de chacune d'elles. L'axiomatique serait donc :

1. Les axiomes 1-4 de L^2
2. 5. $\vdash (P \supset Q)^+ \equiv \cdot P^+ \supset Q^+$

   5bis. $\vdash (P \supset Q)^* \equiv \cdot P^* \supset Q^*$

   6. $\vdash (P \supset F)^+ \equiv \cdot P^+ \supset F$

   6bis. $\vdash (P \supset F)^* \equiv \cdot P^* \supset F$

7.	$\vdash (P \equiv I)^+$	$\equiv \cdot P^+ \equiv F$
7bis.	$\vdash (P \equiv I)^*$	$\equiv \cdot P^* \equiv V$
8.	$\vdash P^{++}$	$\equiv P^+$
8bis.	$\vdash P^{**}$	$\equiv P^*$

De cette axiomatique on peut tirer sans peine une axiomatique pour la logique étendue des modalités au sens du paragraphe II n° 4 ci-dessus, c'est-à-dire une logique n'introduisant pas la constante I, mais présentant, outre l'affirmation et la négation les espèces propositionnelles correspondantes aux 16 espèces modales concevables en logique quadrivalente (V, F, les six modalités classiques et les huit non classiques spécifiées plus haut). L'axiomatique de cette logique étendue des modalités sera constituée par les axiomes ci-dessus, moins les deux axiomes 7 et 7bis. On peut en effet définir l'ensemble des seize modalités envisagées au paragraphe précédent n°4 sans introduire la constante I c'est-à-dire sans expliciter les notions de nouvelles valeurs logiques.

§. IV. LA LOGIQUE DE L'EQUIVALENCE SUR LA BASE B [2^2]

1. GENERALITES

On a dit précédemment (§ III, n°1) *logiques* les formalismes et systèmes déductifs comportant adjonction faite à L^2 d'espèces propositionnelles donnant lieu à des thèses formellement semblables à l'axiome 5 et au théorème II de Λ^2. Il y a des cas dans lesquels une classe d'espèces propositionnelles $\{P^0, Q^0, ...\}$ ne donne pas lieu à des thèses formellement semblables à ces axiomes, mais donne lieu cependant à la thèse :

$\vdash (P \equiv Q)^0 \equiv . P^0 \equiv Q^0$ (1)

Tel est, en particulier, le cas des espèces propositionnelles appartenant aux deux classes caractérisées par les spécifications suivantes des espèces propositionnelles P^α et P^β

v j i f	v i f j
P	P^α

v j i f	v f j i
P	P^β

Or, en logique propositionnelle usuelle on a parfois envisagé des formalismes (fonctionnellement incomplets) constitués sur la base de la seule équivalence, et alors étudié les systèmes déductifs déductivement complets qui leur correspondent [5]. On considèrera donc ici comme également des *logiques* les formalismes et systèmes déductifs correspondants pour les bases B[2^n], en explicitant, dans le présent paragraphe ce qui a trait à la base B[2^2].

Pour la base B[2], la logique de l'équivalence peut être présentée comme suit :

[5] Par exemple : Wajsberg dans : *Widomosci Matematyczne*,Vol. 43, (1937), p. 165.

I. *FORMALISME*

A. *Moyens primitifs d'expression*

a. *Symboles* : les mêmes que ceux de L^2 sauf le symbole de constante I.

b. *Signes* : les mêmes que ceux de L^2 sauf le signe constitutif $\equiv$ à la place du signe constitutif $\supset$

B. *Règles de construction des expressions*

Les mêmes que celles de L^2 sauf, à la place de la règle 3, la règle suivante :

"Si P et Q sont des expressions, alors $(P \equiv Q)$ est une expression".

II. *SYSTEME DEDUCTIF*

a. *Règle de déduction*

$$P, P \equiv Q \vdash Q$$

b. *Axiomes*

1. $\vdash P \equiv Q. \equiv .Q \equiv P$
2. $\vdash P \equiv .Q \equiv R : \equiv : P \equiv Q. \equiv R.$

Les deux axiomes posent la commutativité et l'associativité de l'équivalence. On peut alors montrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une expression du formalisme supposée écrite en ne faisant appel qu'aux moyens primitifs d'expression soit un théorème du système déductif est que les symboles qui y figurent y figurent chacun un nombre pair de fois, qu'ils soient symboles d'indéterminées ou de constantes. Comme ceci est aussi la condition nécessaire et suffisante pour qu'une expression du formalisme soit une tautologie, on montre ainsi que le système déductif est déductivement complet.

L'extension simple de cette logique au cas de la base $B[2^2]$ est immédiate. Il suffit d'adjoindre la constante I aux symboles du formalisme. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une expression du formalisme soit une tautologie reste la même et le système déductif proposé ci-dessus reste déductivement complet. Au moyen de la constante J $(=.I \equiv F \quad Df.)$, les "semi-négations" $\dotplus P$, $\sim \dotplus P$, et les deux "divergences" $P \equiv \dotplus Q$ et $P \equiv \sim\dotplus Q$. peuvent être explicitées.

Ceci acquis, on peut maintenant considérer diverses logiques faisant adjonction à cette extension de classes d'espèces propositionnelles satisfaisant à la thèse (1) ci-dessus. On va d'abord examiner de quelles classes d'espèces propositionnelles l'adjonction peut être ainsi envisagée sur $B[2^2]$.

THEOREME. Lorsque deux classes d'espèces propositionnelles $\{P^0, Q^0,...\}$ et $[P^1, Q^1,...\}$ donnent lieu chacune à la thèse (1), la classe d'espèces propositionnelles $\{P^2, Q^2,...\}$ obtenue au moyen de la définition :

$$P^2 = . P^0 \equiv P^1 \text{ Df.}$$

satisfait également à la thèse (1)

Preuve. On a en vertu même de la définition ci-dessus :

$$\vdash (P \equiv Q)^2 \equiv . (P \equiv Q)^0 \equiv (P \equiv Q)^1 \qquad (2)$$

et comme on a, en vertu de la thèse (1)

$\vdash (P \equiv Q)^0 \equiv . \; P^0 \equiv Q^0$

$\vdash (P \equiv Q)^1 \equiv . \; P^1 \equiv Q^1$

(2) peut s'écrire :

$\vdash (P \equiv Q)^2 \equiv \; : P^0 \equiv Q^0 . \equiv . \; P^1 \equiv Q^1$ (3)

à partir de quoi l'on démontre :

$\vdash (P \equiv Q)^2 \equiv \; : P^0 \equiv P^1 . \equiv . \; Q^0 \equiv Q^2$ (4)

C'est-à-dire, en vertu de la définition de P^2 et Q^2 :

$\vdash (P \equiv Q)^2 \equiv . \, P^2 \equiv Q^2$ Q.E.D.

COROLLAIRE. La constante V, équivalente à $P \equiv P$ peut être considérée comme une espèce propositionnelle P^0 satisfaisant à la thèse (1). En effet on a alors $(P \equiv Q)^0 \equiv V$ quels que soient P et Q et $P^0 \equiv Q^0$ n'est autre que $V \equiv V$, expression elle-même équivalente à V. Ce n'est le cas d'aucun des autres symboles de constantes. Si, par exemple, on posait :

$P^0 = I$ Df.

alors $(P \equiv Q)^0$ serait I et $P^0 \equiv Q^0$ serait V.

La logique usuelle de l'équivalence et son extension simple sur $B[2^2]$ font donc état de deux classes d'espèces propositionnelles satisfaisant à la thèse (1), la classe constituée par le symbole V et la classe des indéterminées {P,Q,...}. Si l'on fait adjonction d'une classe nouvelle d'espèces propositionnelles, {P^0, Q^0,...} satisfait à la thèse (1). Alors, en vertu du théorème ci-dessus, la classe des espèces propositionnelles obtenue en vertu de la définition :

$P^1 = . \, P \equiv P^0$ Df.

sera distincte des précédentes et satisfera à la thèse (1). On aura alors un système de quatre classes distinctes d'espèces propositionnelles. C'est ainsi qu'en adjoignant à la logique usuelle de l'équivalence la classe des espèces propositionnelles {P^α,Q^α,...} caractérisée ci-dessus, on adjoint du même coup la classe des espèces propositionnelles {P^β,Q^β...} également caractérisée ci-dessus puisque l'on peut définir P^β comme suit :

$P^\beta = . \, P \equiv P^\alpha$ Df.

Plus généralement, si à la logique usuelle de l'équivalence on adjoint n classes d'espèces propositionnelles indépendantes par rapport à la relation d'équivalence et satisfaisant à la thèse (1), on obtient un système logique faisant état de 2^{n+1} classes distinctes d'espèces propositionnelles satisfaisant à cette thèse (1).

On peut alors vérifier que sur $B[2^2]$ on peut adjoindre à la logique usuelle trois classes d'espèces propositionnelles indépendantes par rapport à la relation d'équivalence et satisfaisant à la thèse (1), de sorte que le système logique alors obtenu fait état de $2^4 = 16$ classes distinctes d'espèces propositionnelles satisfaisant à la thèse (1). Ces trois classes génératrices du système peuvent être choisies de diverses façons. On peut prendre par exemple les classes caractérisées par les espèces P', P^α et P^j du paragraphe précédent, n° 2. Les spécifications caractéristiques des 16 classes alors obtenues sont données dans le tableau ci-dessous :

v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v
v	j	i	f	i	f	v	j	j	v	f	i	f	i	j	v
v	i	j	f	f	j	i	v	f	j	i	v	v	i	j	f
v	f	f	v	j	i	i	j	i	j	j	i	f	v	v	f
E_0	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}

E_0 est V, E_1 est P, E_2 est P', E_4 est P^α et E_8 est P^j.

On voit que l'ensemble de ces spécifications contient les spécifications des six espèces propositionnelles principales qui fixent la valeur logique v comme elle l'est dans l'affirmation usuelle P ; les trois spécifications modales : "non-contingence" classique (E_3), P^+ (E_{15}) et P^* (E_{12}) ; enfin les six spécifications qui, fixant la valeur logique v de l'affirmation, font la distribution de deux cas de vérité et de deux cas de valeur logique soit i soit j. Cet ensemble constitue l'ensemble des spécifications propositionnelles de $B[2^2]$ que l'on dira *stables* pour l'équivalence. L'ensemble des spécifications constituées par ces spécifications stables, et les spécifications correspondantes aux négations et semi-négations, pourra être dit l'ensemble des spécifications *centrales* de $B[2^2]$. C'est cet ensemble qui concerne la logique de l'équivalence sur $B[2^2]$.

En fait, l'adjonction des deux classes d'espèces propositionnelles caractérisées par les spécifications de P' et de P^α suffit à la définition de toutes les classes d'espèces propositionnelles caractérisées par les spécifications E_0-E_{15}. En effet, l'espèce P^j n'est autre que l'espèce $P^{\alpha'}$ indépendante de P, P' et P^α par rapport à l'équivalence, mais définissable à partir de P' et de P^α, suffisant alors à engendrer avec P, P' et P^α tout l'ensemble des classes stables pour l'équivalence. Il suffit donc d'assurer les classes d'espèces propositionnelles caractérisées par P' et P^α pour mettre sur pied le système de la logique de l'équivalence sur $B[2^2]$.

2. SUR LA PORTEE THEORIQUE DE LA LOGIQUE DE L'EQUIVALENCE SUR LA BASE $B[2^2]$

En elle-même, la logique classique de l'équivalence est assez triviale. En passant à la base $B[2^2]$ elle ne l'est plus autant. La première raison de ce fait, c'est que l'équivalence doit désormais être distinguée de la relation d'égalité et peut alors être utilement considérée comme une opération portant sur deux sortes d'entités logiques et fournissant un résultat nouveau. C'est ainsi, par exemple, que l'entité logique P^β, qui s'avère au demeurant identique à $P^{\alpha\alpha}$, peut être considérée comme le résultat de l'association par équivalence des deux autres entités P et P^α. En logique usuelle ceci ne se rencontre guère qu'à propos de la thèse :

$$\vdash \sim P \equiv . P \equiv F$$

qui propose la proposition négative ~P comme résultat de l'association par équivalence entre la proposition affirmation P et la constante propositionnelle F.

Le cas de la thèse :

$$\vdash P^\beta \equiv . P \equiv P^\alpha$$

et des analogues est assez différent. Aucune des trois entités P, P^{α}, P^{β} n'est une constante logique, de telle sorte que l'équivalence fait ici pleinement figure d'opération combinant deux entités pour en former une troisième.

Une thèse telle que la thèse ci-dessus a d'ailleurs, en raison de l'associativité de l'équivalence, un autre aspect important pour la logique. Chacune des trois entités qui y figurent est le résultat de l'association par équivalence des deux autres. Il y a circularité des opérations et relations, et ceci peut devenir comme le principe de modes inédits du raisonnement logique. De fait, du point de vue de l'histoire de la pensée, il semble que la structure logique de la thèse ci-dessus se retrouve sous-jacente au système de la dialectique hégélienne, où elle joue alors un rôle important [6].

Les espèces propositionnelles principales P^{α} et P^{β} sujettes à cette logique de l'équivalence n'ont pas encore fait jusqu'à présent l'objet d'une interprétation conceptuelle. Elles sont définissables dans le formalisme de la logique Λ^2. On a :

$$P^{\alpha} = . \sim \nrightarrow (P' \equiv \nabla \sim P) \quad \text{Df.}$$

$$P^{\beta} = . \nrightarrow (P' \equiv \Delta \sim P) \quad \text{Df.}$$

définitions qui, à première vue, ne sont pas très parlantes. La raison semble en être que la logique qui roule directement sur les espèces propositionnelles P et P', et qui ouvre alors sur lesperspectives classiques de la logique modale, constitue pour ainsi dire un *registre* de la pensée logique. Avec les espèces propositionnelles P^{α} et P^{β}, auxquelles il est possible de coordonner respectivement les espèces P^i et P^j caractérisées plus haut (§ III, n°2) comme les analogues de P' pour P, ce sont pour ainsi dire deux autres registres de la pensée logique qui semblent se proposer, associés et subordonnés au registre principal [P-P'], mais pourvus en eux-mêmes d'une économie logique analogue à celle du registre principal. Les définitions données ci-dessus représentent alors la machinerie logique de ce changement de registre. Elle se propose en termes trop peu classiques pour être aisément identifiable à quelque chose de déjà familier à la pensée.

Ceci dit, on peut remarquer que l'espèce propositionnelle P^{α} fait en quelque sorte jouer le rôle du faux à la valeur j, associée jusqu'à présent avec le concept du réel, du thétique, du substantiel, annulant donc opératoirement cet aspect de ce qui a lieu, et fait par contre jouer au faux le rôle de l'idéel. Tout ceci semble assez caractéristique de ce que la logique classique appellera *l'universel*. Corrélativement P^{β} présente des caractéristiques qui rapprochent cette entité propositionnelle de ce que la logique moderne (non mathématique) couple à l'universel en l'appelant alors *le singulier*. De sorte qu'on pourrait peut-être attacher à P^{α} la compréhension "P est vrai *dans l'universel*", à P^{β} la compréhension "P est vrai *dans le singulier*" cependant que P est compris : "P est vrai" absolument parlant, dans l'avoir lieu pris absolument. L'absolu, l'universel et le singulier, constituent alors les trois registres logiques fondamentaux de la pensée et les formes P^{α} et P^{β} les racines respectives des conditions logiques d'universalité et de singularité présentées par les déterminations de la pensée conceptuelle proprement dite. On remarquera alors qu'on a la thèse :

$$\vdash \Box\, P \equiv . \, P^{\alpha} \, P^{\beta}$$

thèse qui peut s'interpréter : "est nécessaire ce qui est vrai à la fois dans l'universel et dans le singulier". Les relations entre l'universel, le singulier et le possible sont par contre plus

[6] Voir, chez Hegel sa théorie fort particulière des trois figures du syllogisme. (*Wissenschaft der Logik.*, Bd II., chapitre III.A. Encyclopédie § 183-187) et les applications qu'il en fait en divers domaines. (Par exemple : Encyclopédie § 567-571, 575-577).

complexes. Mais cette thèse, qui fait intervenir la conjonction, reste extérieure à la logique de l'équivalence. La logique de l'équivalence sur la base B[2^2] met alors un lien direct entre ces trois divers registres du discours pensant et c'est, semble-t-il, en suivant ses indications qu'on peut, au moins dans une certaine mesure, tirer au clair la rationalité des procédures mentales envisagées à l'époque moderne sous le titre de Dialectique.

3. SYSTEME DE LA LOGIQUE DE L'EQUIVALENCE DE BASE B[2^2]

Quoi qu'il en soit de ces possibles interprétations des espèces propositionnelles P^{α} et P^{β}, comme de ces vues sur la diversité des registres sur lesquels s'exécute le développement pensant, la logique faisant état de ces espèces propositionnelles (et plus généralement de l'ensemble des espèces propositionnelles centrales pour B[2^2] se laisse assez facilement axiomatiser et, une fois convenablement axiomatisée, démontrer déductivement complète.

Une remarque importante doit cependant être faite. Adjoindre à l'extension simple de la logique usuelle de l'équivalence, la classe d'espèces propositionnelles {P','Q',...} ne fait aucune difficulté : les modifications voulues étant faites dans la proposition du formalisme, on introduire les axiomes :

3. $\vdash (P \equiv Q)' \equiv . P' \equiv Q'$
4. $\vdash (P \equiv F)' \equiv . P' \equiv F$
5. $\vdash (P \equiv J)' \equiv . P' \equiv I$

qui permettent de démontrer, quoique de façon légèrement différente, les thèses du théorème I du paragraphe II, n°3. Ceci fait, on peut montrer que compte tenu des équivalences

$$\vdash F' \equiv F, \quad \vdash I' \equiv J, \quad \vdash J' \equiv I \qquad (1)$$

ainsi que l'équivalence :

$$\vdash J \equiv . F \equiv I \qquad (2)$$

la condition nécessaire et suffisante pour qu'une expression du formalisme (supposée écrite en ne faisant appel qu'aux moyens primitifs d'expression) soit un théorème du système déductif est qu'on puisse le remplacer, en utilisant l'axiome 3 ci-dessus, par une expression dans laquelle seuls les symboles élémentaires sont accentués, telle que les symboles d'indéterminées qui y figurent, soit accentués soit non accentués, y figurent chacun un nombre pair de fois, le nombre des accents offerts aux diverses occurences d'une même indéterminée étant au total pair et qu'en remplaçant les symboles de constantes accentuées par ce qu'indiquent les équivalences (1) et (2) ci-dessus, on obtienne une expression dans laquelle les symboles de constantes F et I qui y figurent y figurent sans accentuation elles aussi chacune un nombre pair de fois. Ce qui est aussi la condition nécessaire et suffisante pour que l'expression soit une tautologie.

On établit ainsi le caractère déductivement complet de l'axiomatique pour le formalisme en question.

L'adjonction, par contre, de la classe d'espèces propositionnelles {P^{α}, Q^{α},...}, oblige de recourir à des procédures moins simples au moment où on veut mettre sur pied un système logique déductivement complet. Car l'espèce propositionnelle P^{α} n'est plus involutive comme l'est l'espèce propositionnelle P' et à la thèse : $\vdash P'' \equiv P$ correspond la thèse :

$$\vdash P^{\alpha\alpha} \equiv . P \equiv P^{\alpha}$$

de nature très différente et qui compromet le critère trivial de la parité des occurences des symboles primitifs dans les expressions du formalisme. Les questions de la déduction et de l'assurance intellectuelle de posséder, avec un système déductif donné, des moyens de preuve adéquats au formalisme obligent alors semble-t-il de recourir à certains artifices formels que l'on va exposer à présent.

Le seul connectif de l'équivalence ne permet pas d'exprimer dans un théorème le fait que l'attribution d'une valeur donnée à une indéterminée P entraîne l'attribution déterminée de telle valeur soit à l'espèce propositionnelle P' soit à l'espèce propositionnelle P^{α}. Par exemple, les deux expressions :

$$P \equiv V . \equiv . P' \equiv V$$
$$P \equiv V . \equiv . P^{\alpha} \equiv V$$

ne sont nullement des tautologies ni ne peuvent être prises pour des expressions démontrables dans un système logique de l'équivalence. Il faudrait s'exprimer en termes d'égalité, laquelle n'est pas une relation définissable à partir de la donnée de l'équivalence et des constantes primitives F et I en logique quadrivalente. Donc un système logique comportant des espèces propositionnelles telles que P', P^{α}, P'^{α} ... etc. constitué avec le seul connectif primitif d'équivalence ne saurait admettre, s'il est déductivement complet, une démonstration de complétude d'un type exactement semblable à celui des démonstrations données ci-dessus pour Λ^2 ou $\mathbf{L}_+^2$, démonstrations dans lesquelles le théorème VII du paragraphe II n°3 et son analogue pour $\mathbf{L}_+^2$ jouent un rôle essentiel. Certains moyens détournés doivent être pris. Il semble que les considérations suivantes puissent les fournir à suffisance.

Tout d'abord on doit remarquer qu'il ne peut y avoir que quatre espèces propositionnelles indépendantes les unes des autres par équivalence à pouvoir vérifier la thèse

$$\vdash (P \equiv Q)^0 \equiv P^0 \equiv Q^0$$

Ce que peuvent être par exemple les espèces propositionnelles P, P', P^{α} et P'^{α}. Toutes les autres espèces propositionnelles vérifiant la thèse en question pourront s'exprimer équivalamment au moyen de ces quatre espèces propositionnelles. Autrement dit, la détermination des valeurs logiques à attribuer aux autres espèces propositionnelles peut être reconduite, cette fois par des théorèmes du formalisme, à la détermination des valeurs logiques faites à quatre telles espèces propositionnelles indépendantes les unes des autres du point de vue de l'équivalence.

Considérons alors ce qu'il est possible de se signifier par des thèses formelles telles que

$$P_1, P_2, ...P_n \vdash Q \quad (1)$$

qui veulent dire que dans un système déductif donné, l'expression Q peut être prouvée à partir des expressions P_1, P_2,...P_n supposées admises à titre d'hypothèses, quelles que soient les justifications que l'on ait par ailleurs de les admettre.

Le fait que l'attribution d'une certaine valeur logique a à l'indéterminée P détermine l'attribution de la valeur logique a' à l'expression P', celle de la valeur logique a^{α} à l'expression P^{α} et celle de la valeur logique a'^{α} à l'expression P'^{α} peut alors se traduire par la présence liée des quatre hypothèses $P \equiv A$, $P' \equiv A'$, $P^{\alpha} \equiv A^{\alpha}$, $P'^{\alpha} \equiv A'^{\alpha}$ dans une expression de l'espèce (1), A étant la dénotation formelle de la valeur a. Dans une démonstration de complétude, on exprimera donc le fait de détermination de la valeur logique des expressions P', P^{α} et P'^{α} à partir de celui qui concerne P par une présence simultanée d'hypothèses écrites en termes d'équivalences dans l'antécédent d'une thèse formelle telle que (1).

Cela fait, de même que, sans passer par le théorème de la déduction et l'usage d'un théorème tel que le théorème VIII de Λ^2, on pourrait poser a priori comme principe de déduction en logique quadrivalente le principe suivant :

Principe : Les quatre thèses formelles :

$P_1 \ldots P_i = V \vdash Q$, $P_1 \ldots P_i = J \vdash Q$

$P_1 \ldots P_i = I \vdash Q$, $P_1 \ldots P_i = F \vdash Q$

autorisent à poser la thèse formelle

$P_1, P_2, \ldots P_{i-1} \vdash Q$

Ce qui élimine de la preuve formelle de Q l'hypothèse P_i, de même peut-on envisager de poser un principe analogue relatif aux groupements d'hypothèses simultanées relatives à P, P', P^α et P'^α, les quatre hypothèses $P_i = V$ .. etc. étant alors remplacées par les quatre groupes :

$P_i = V$, $P'_i = V'$, $P^\alpha{}_i = V^\alpha$, $P'^\alpha = V'^\alpha$

[... etc.].

On utilisera donc dans ce qui suit le détour de la construction de ces hypothèses quasi-indépendantes pour les expressions de forme P, P', P^α, P'^α compensé par un principe de déduction de l'espèce qui vient d'être envisagé et que l'on adjoindra à la règle de déduction ci-dessus admise :

$$P , P \equiv Q \vdash Q$$

la justification de ce principe ne pouvant être qu'extérieure au système envisagé, mais reposant immédiatement sur les considérations de spécification effective des espèces propositionnelles P', P^α et P'^α.

En conséquence on va constituer comme suit la logique de l'équivalence.

I. *FORMALISME*

a) *Moyens primitifs d'expression*

Les mêmes que ceux de Λ^2 sauf

α) le signe constitutif $\equiv$ à la place du signe constitutif $\supset$.

β) en plus : le signe constitutif $^\alpha$.

b) *Règles de construction des expressions*

Les mêmes que celles de Λ^2 sauf, à la place de la règle 3 :

3. Si P et Q sont des expressions, $(P \equiv Q)$ est une expression

et en plus :

3ter. Si P est une expression, P^α est une expression.

II. *SYSTEME DEDUCTIF*

a) *Principe de validation d'une thèse*

Les quatre thèses formelles :

$$P_1 \ldots P_{i-1}, \quad P_i \equiv V, \quad P'_i \equiv V', \quad P_i^{\alpha} \equiv V^{\alpha}, \quad P'^{\alpha}_i \equiv V' \vdash Q$$

$$P_1 \ldots P_{i-1}, \quad P_i \equiv J, \quad P'_i \equiv J', \quad P_i^{\alpha} \equiv J^{\alpha}, \quad P'^{\alpha}_i \equiv J' \vdash Q$$

$$P_1 \ldots P_{i-1}, \quad P_i \equiv I, \quad P'_i \equiv I', \quad P_i^{\alpha} \equiv I^{\alpha}, \quad P'^{\alpha}_i \equiv I' \vdash Q$$

$$P_1 \ldots P_{i-1}, \quad P_i \equiv F, \quad P'_i \equiv F', \quad P_i^{\alpha} \equiv F^{\alpha}, \quad P'^{\alpha}_i \equiv F' \vdash Q$$

simultanément acquises, autorisent à poser la thèse :

$$P_1, \ldots P_{i-1} \vdash Q.$$

b) *Règle de déduction*

$$P, P \equiv Q \vdash Q\,.$$

c) *Axiomes*

1. $\vdash P \equiv Q . \equiv . Q \equiv P$
2. $\vdash P \equiv . Q \equiv R :\equiv: P \equiv Q . \equiv R$
3. $\vdash (P \equiv Q)' \equiv . P' \equiv Q'$
4. $\vdash P'' \equiv P$
5. $\vdash (P \equiv I)' \equiv . P' \equiv J$
6. $\vdash (P \equiv Q)^{\alpha} \equiv . P^{\alpha} \equiv Q^{\alpha}$
7. $\vdash P^{\alpha\alpha} \equiv . P \equiv P^{\alpha}$
8. $\vdash (P \equiv I)^{\alpha} \equiv . P^{\alpha} \equiv F$
9. $\vdash P^{\alpha} \equiv . P^{\alpha'} \equiv P'.$

Les axiomes spécifiquement non-triviaux de cette axiomatique sont les axiomes 7 et 9. L'axiome 7 énonce la relation fondamentale entre les trois espèces propositionnelles P, P^{α} et P^{β}, identique à $P^{\alpha\alpha}$ dont il a été parlé ci-dessus au numéro 1. L'axiome 9 est un axiome qui permettra la réduction du nombre des espèces propositionnelles obtenues par combinaison de P' et de P^{α} : ces espèces se réduisent au nombre de six correspondantes aux six permutations des valeurs logiques f, i, j, la valeur v restant fixée.

THEOREME I. $\vdash V' \equiv V, \quad \vdash J' \equiv I, \quad \vdash F' \equiv F, \quad \vdash I' \equiv J$

Preuve.

1°) $\vdash V' \equiv V$ Se démontre de façon semblable à cette équivalence dans Λ^2

2°) $\vdash I' \equiv J$ On substitue V à P dans l'axiome 5 et on tient compte de 1°)

3°) $\vdash F' \equiv F$ En substituant F à P dans l'axiome 5

$\vdash J' \equiv . F' \equiv J$ (1)

En substituant F' à P et J à Q dans l'axiome 3

$\vdash (F' \equiv J)' \equiv . F'' \equiv J'$ (2)

d'où, compte-tenu de (1) et de l'axiome 4

$\vdash J \equiv . F \equiv J'$ (3)

(1) et (3) permettent alors de prouver $F' \equiv F$

4°) $\vdash J' \equiv I$ On substitue F à P dans l'axiome 5 et on tient compte de 3°).

THEOREME II. $\vdash P \equiv (P \equiv P^\alpha)^\alpha$

Preuve. Axiomes 7 et 6.

THEOREME III. $\vdash V^\alpha \equiv V$ $\vdash J^\alpha \equiv I$ $\vdash F^\alpha \equiv J$ $\vdash I^\alpha \equiv F$

Preuve.

1°) Se prouve comme $V' \equiv V$

2°) $\vdash I^\alpha \equiv F$ On substitue V à P dans l'axiome 8 et on tient compte de 1).

3°) $\vdash J^\alpha \equiv I$ On substitue I à P dans la thèse du théorème II.

4°) $\vdash F^\alpha \equiv J$ On substitue J à P dans la thèse du théorème II.

$\vdash J \equiv (J \equiv I)^\alpha$ d'où $\vdash J \equiv F^\alpha$.

THEOREME IV. $\vdash V^\alpha \equiv V$, $\vdash J^\alpha \equiv F$, $\vdash F^\alpha \equiv I$, $\vdash I^\alpha \equiv J$

Preuve. Théorème III et axiome 7.

THEOREME V. $\vdash P^{\alpha\alpha\alpha} \equiv P$

Preuve. En substituant $P \equiv P^\alpha$ à P, $P^{\alpha\alpha}$ à Q dans l'axiome 6, il vient

$\vdash (P \equiv P^\alpha \,.\equiv P^{\alpha\alpha})^\alpha \equiv . (P \equiv P^\alpha)^\alpha \equiv P^{\alpha\alpha\alpha}$

Le premier membre de l'équivalence principale est équivalent à V, $(P \equiv P^\alpha)^\alpha$ est équivalent à P en vertu du théorème II. On a donc bien $\vdash P \equiv P^{\alpha\alpha\alpha}$.

THEOREME VI. $\vdash P^{\alpha'} \equiv P^{\alpha\alpha}$

Preuve. On remplace P par P' dans l'axiome 9.

$\vdash P''^\alpha \equiv . P^{\alpha'} \equiv P''$ (1)

puis P'' par P en vertu de l'axiome 4.

$\vdash P^\alpha \equiv . P^{\alpha'} \equiv P$

Ce qui au moyen des axiomes 1 et 2 se transforme en :

$\vdash P^{\alpha'} \equiv . P \equiv P^\alpha$ (2)

et en tenant compte de l'axiome 7

$$\vdash P'\alpha' \equiv P\alpha\alpha$$

THEOREME VII. $\vdash P\alpha' \equiv P'\alpha\alpha$

$$\vdash P\alpha'\alpha \equiv P'$$

$$\vdash P'\alpha \equiv P\alpha\alpha'$$

Preuve.

1°) Substituer P' à P dans l'axiome 9

$$\vdash P''\alpha' \equiv P'\alpha\alpha.$$

On applique alors l'axiome 4 au premier membre de l'équivalence.

2°) Substituer P' à P dans le théorème 2

$$\vdash P'\alpha\alpha\alpha. \equiv P'$$

et en tenant compte de 1°)

$$\vdash P\alpha'\alpha. \equiv P'$$

3°) Substituer $P\alpha\alpha$ à P dans 2°) et tenir compte du théorème II.

Il apparaît alors que toute suite de trois signes α ou ' et plus peut-être ramenée à une suite de deux signes au plus. En effet :

$\vdash P\alpha\alpha\alpha \equiv P$	$\vdash P''\alpha \equiv P\alpha$
$\vdash P\alpha\alpha' \equiv P'\alpha$	$\vdash P'\alpha' \equiv P\alpha\alpha$
$\vdash P\alpha'\alpha \equiv P'$	$\vdash P\alpha'' \equiv P\alpha$
$\vdash P'\alpha\alpha \equiv P\alpha'$	$\vdash P''' \equiv P'$

On obtient bien ainsi six espèces propositionnelles distinctes, par superposition des opérations ' et α.

THEOREME VIII. $\vdash V'\alpha \equiv V$, $\vdash J'\alpha \equiv F$, $\vdash I'\alpha \equiv I$, $\vdash F'\alpha \equiv J$

$\vdash V\alpha' \equiv V$, $\vdash J\alpha' \equiv J$, $\vdash I\alpha' \equiv F$, $\vdash F\alpha' \equiv I$

Preuve. Théorème I et Théorème III.

THEOREME IX. $\vdash (P\equiv Q)\alpha\alpha \equiv . P\alpha\alpha \equiv Q\alpha\alpha$

$$\vdash (P\equiv Q)'\alpha \equiv . P'\alpha \equiv Q'\alpha$$

$$\vdash (P\equiv Q)\alpha' \equiv . P\alpha' \equiv Q\alpha'$$

s'établit à partir des axiomes 3 et 6.

A quelques complications près, la démonstration du lemme et du théorème de complétude se fera suivant une procédure assez semblable à celle employée pour $\Lambda 2$.

Soit une expression R, P_1, P_2, ..., P_n une liste d'indéterminées comportant toutes celles qui figurent dans R, $a_1, a_2, ..., a_n$ une assignation de valeurs logiques faites à ces indéterminées. En vertu des spécifications de P' de P^{α} et de P'^{α}, cette assignation détermine les trois autres assignations suivantes de valeur logique.

$a'_1, a'_2, ..., a'_n$	faite aux expressions	$P'_1, P'_2, ..., P'_n$
$a^{\alpha}_1, a^{\alpha}_2, ..., a^{\alpha}_n$	faite aux expressions	$P^{\alpha}_1, P^{\alpha}_2, ..., P^{\alpha}_n$
$a'^{\alpha}_1, a'^{\alpha}_2, ..., a'^{\alpha}_n$	faite aux expressions	$P'^{\alpha}_1, P'^{\alpha}_2, ..., P'^{\alpha}_n$

On construit alors les expressions Q_i comme étant $P_i \equiv A_i$, A_i étant le symbole de constante notant a_i pour $1 \leq i \leq n$ Q_{n+i} comme étant $P'_i \equiv A'_i$, A_i' étant le symbole de constante notant a'_i pour $1 \leq i \leq n$ de même Q_{2n+i} comme étant $P^{\alpha}_i \equiv A^{\alpha}_i$ et Q_{3n+i} comme étant $P'^{\alpha}_i \equiv A'^{\alpha}_i$. Si d'autre part b est la valeur logique qu'il faut attribuer à R pour l'assignation $a_1, a_2, ..., a_n$, on construit S comme étant $R \equiv B$, B étant le symbole de constante dénotant la valeur b. Dans ces conditions :

LEMME. $Q_1, Q_{n+1}, Q_{2n+1}, Q_{3n+1}, ..., Q_n, Q_{2n}, Q_{3n}, Q_{4n} \vdash S$

La démonstration du lemme se fait par récurrence sur la construction de R comme dans les cas précédents des § II et III.

1er cas : R se réduit à un seul symbole : même raisonnement que dans les démonstrations analogues.

2ème cas : R est une expression T affectée d'une suite de signes ' et $^{\alpha}$.

1ère éventualité : T est un symbole.

a) de constante. S se réduit alors à une équivalence démontrable en vertu des théorèmes I et III-VIII ci-dessus.

b) d'indéterminée. Les axiomes 7 et 9, d'une part et les théorèmes V-VII permettent de ramener S soit à l'une des hypothèses Q_i - Q_{3n+1}, soit à une équivalence entre de telles hypothèses.
Le lemme est alors trivialement vrai.

2ème éventualité : T est une expression de forme $R_1 \equiv R_2$.

On peut alors prouver l'équivalence de R à une expression de forme $R_1 \equiv R_2$ affectée au plus de deux signes ' ou $^{\alpha}$ (théorème VII), on applique alors soit l'axiome 3, soit l'axiome 6, soit le théorème IX, et on est ramené au cas où R est de la forme $R_1 \equiv R_2$; le cas lui-même se traite de façon tout à fait analogue à la façon dont on traite le cas des expressions de forme $R_1 \supset R_2$ dans les démonstrations précédentes du lemme de complétude.

Le lemme étant établi, dire que R est une tautologie c'est-à-dire que R est vrai donc que S est $R \equiv V$ quelles que soient les hypothèses $Q_1 ... Q_{4n}$, faites quatre par quatre solidaires les unes des autres. On fera alors jouer le principe de validation pour chaque groupe de quatre hypothèses Q_i, Q_{n+1}, Q_{2n+} , Q_{3n+i} et on obtiendra finalement $\vdash$ S d'où l'on tire sans peine $\vdash$ R. On a donc bien le théorème

THEOREME Si R est une tautologie du système considéré, alors $\vdash$ R.

4. REMARQUE SUR LA LOGIQUE DE L'EGALITE

Etant donné la possibilité de définir une implication stricte $P \prec\!\!\!3\ Q$ et une équivalence stricte ou égalité $P = Q$ sur la base $B[2^2]$, on peut se demander quelles sont les classes d'espèces propositionnelles susceptibles de satisfaire à des thèses telles que :

$(P \prec\!\!\!3\ Q)^0 \quad = .\ P^0 \prec\!\!\!3\ Q^0 \qquad (1)$
$(P = Q)^0 \quad = .\ P^0 = Q^0 \qquad (2)$

La réponse est immédiate : seules les classes propositionnelles {V}, {P,Q,...}, {P',Q',...} satisfont à la thèse (1). Outre ces trois classes, la classe caractérisable par l'égalité P = P' ("non-contingence" classique - E_3 de l'énumération faite au n°1) satisfait à la thèse (2). Les autres classes d'espèces propositionnelles ne sont pas stables pour ces relations. En particulier la logique de l'égalité ne donne guère plus qu'une transposition banale de la logique usuelle de l'équivalence.

On peut poser une question analogue à propos des relations d'homologie au sens du § III n°3. Pour l'homologie de la logique $\mathcal{L}^2_+$ il y a derechef quatre classes propositionnelles, à savoir {V}, {P,Q,...}, $\{P^j,Q^j,...\}$ et la classe caractérisée par l'homologie $P \simeq P^j$ qui satisfait à la thèse :

$(P \simeq Q)^0 \simeq .\ P^0 \simeq Q^0\,.$

On peut construire là-dessus une logique, de même qu'on en construira une sur l'homologie conjuguée. On n'en explicitera pas ici la constitution, qui ne présente pas de difficultés particulières, après ce qui a été dit sur l'équivalence.

§ V - CONSIDERATIONS ALGEBRIQUES SUR L'ORGANISATION DE LA PENSEE RATIONNELLE EN PRESENCE D'UNE BASE DE QUATRE VALEURS LOGIQUES

Avec la logique quadrivalente, l'ensemble des espèces propositionnelles cataloguant les formes rationnelles de l'énonciation se présente tout autrement qu'il ne le fait en logique usuelle. Dans cette dernière, les deux constantes V et F mises à part, il n'y a que deux espèces propositionnelles : l'affirmation et la négation. A présent, par contre, on se trouve avoir affaire à un grand nombre d'espèces propositionnelles diverses : 252 en tout, si l'on met à part les quatre constantes V, F, I et J. Leur variété paraît à première vue surpasser ce dont il peut être question avec les spontanéités humaines de la pensée. Elle donne lieu en tout cas à des possibilités logiques inconnues de la théorie usuelle. Les systèmes logiques envisagés dans les paragraphes précédents se sont occupés de donner à l'esprit le moyen d'en traiter régulièrement, de façon plus ou moins étendue suivant la particularité de chacun de ces systèmes. Il convient maintenant de revenir sur cette pluralité de systèmes, faisant quelques considérations générales à leur propos et tentant de reconnaître ce que peuvent bien être rationnellement les structures maîtresses d'une pensée qui n'en reste pas à la dualité classique des valeurs logiques vrai et faux. Ceci se fera en deux étapes, indiquant ainsi deux ordres de problèmes que l'organisation logique de sa propre activité pose à la pensée.

1. LOGIQUE DE L'EQUIVALENCE, THEORIE DES GROUPES ET FORMATION GENETIQUE DES STRUCTURES RATIONNELLES DE LA LOGIQUE QUADRIVALENTE

En logique quadrivalente il s'impose de distinguer entre les espèces propositionnelles *principales*, dont la spécification fait apparaître chacune des valeurs logiques et celles dans la spécification desquelles certaines valeurs logiques ne figurent pas, alors qu'en logique usuelle cette distinction est sans objet pratique, les seules espèces non-principales étant alors les deux constantes F et V. Les espèces propositionnelles principales correspondant chacune à une des permutations possibles des valeurs logiques assumées, leur ensemble donne lieu à des organisations structurales qui ne sont pas sans une étroite parenté avec celles qui font l'objet de la théorie des groupes. La logique propositionnelle usuelle, avec le couple de l'affirmation et de la négation n'a à faire fond en tout et pour tout, que sur le plus simple de tous les groupes, le groupe cyclique d'ordre 2. Avec l'ensemble des 24 espèces propositionnelles principales en logique quadrivalente, c'est du groupe symétrique de degré quatre et de ses sous-groupes qu'il devient question, et tout de suite les choses prennent une allure sensiblement plus complexe.

Ce que la théorie des groupes a à proposer au sujet des espèces propositionnelles envisagées comme permutations de valeurs logiques dans le cas de la base $B[2^2]$ s'incorpore à la logique elle-même par le biais de la logique de l'équivalence. Car dans ce cas il se trouve que l'holomorphe du groupe abélien d'ordre 2^2 et de type (1,1) est précisément le groupe symétrique des permutations de quatre objets. C'est donc au niveau de cette logique que les traits de constitution, les symétries et les rapports dont traite ordinairement la théorie des groupes apparaissent le mieux à propos des espèces propositionnelles principales et des ensembles particuliers de celles-ci dont tel ou tel système logique fait considération. D'où l'intérêt de la logique de l'équivalence mise sur pied au paragraphe précédent.

Dans sa constitution même celle-ci fait apparaître, d'une part avec l'ensemble des quatre espèces-permutations P, +P, ~ +P, et ~ P, d'autre part avec les deux espèces P' et P^{α}, c'est-à-dire, avec l'ensemble des six espèces-permutations qu'elles forment les déterminant structuraux essentiels du groupe symétrique de degré quatre et du jeu de sous-groupes que celui-ci comporte. Tout le détail des relations que l'algèbre peut inventorier et manier à ce propos se retrouve alors dans les expressions d'équivalences que la logique est en mesure de formuler et d'établir.

Si l'on revient à la considération des diverses logiques L^2, Λ^2, $\mathbf{L}^2_+$ et $\mathbf{L}^2_*$ mises sur pied dans ce qui précède, il apparaît que toutes ont en commun l'ensemble des quatre espèces P, ~ P, ~ +P, ~ P, dont le rôle capital pour toute logique de base $B[2^2]$ ressort du fait qu'il constitue l'ensemble des espèces principales appartenant à l'extension simple de la logique usuelle, ensemble et groupe qu'on peut dire ensemble et groupe extension simple de l'ensemble et groupe cyclique d'ordre 2 que constitue, en logique usuelle, le couple de l'affirmation et de la négation. Au centre de toute logique de base $B[2^2]$ on trouvera donc, explicitement ou non, le groupe de ces quatre opérations mentales, qui sont l'affirmation, opération identique, la négation, et les deux "semi-négations", ce groupe étant avec évidence isomorphe au groupe communément dit "groupe de Klein", et dont les propriétés sont bien connues.

Au-delà de la logique L^2, on a vu apparaître les trois systèmes Λ^2, $\mathbf{L}^2_+$ et $\mathbf{L}^2_*$. Du point de vue des ensembles d'espèces propositionnelles dont ils traitent, ils ne semblent pas à première vue se trouver en même condition : le premier en effet de ces trois systèmes est fonctionnellement complet et renferme donc la totalité de 24 espèces principales, alors que les deux autres n'en comportent chacun que huit ; de même le premier se constitue par adjonction à L^2 d'une espèce principale, les deux autres par adjonction d'espèces modales, qui permettent alors de caractériser les quatre espèces principales venant s'adjoindre dans ces systèmes à l'ensemble, commun à tous, des espèces P, +P, ~ +P et ~ P. Mais par-dessous cette dissemblance apparente et en en comprenant le principe, il convient maintenant de considérer une beaucoup plus foncière ressemblance, qu'éclaire alors la façon dont la rationalité de la pensée peut se former organiquement au niveau, encore mal familier à son appréhension réfléchie, de l'univers logique plus complexe que l'on essaie présentement d'envisager.

Les logiques $\mathbf{L}^2_+$ et $\mathbf{L}^2_*$, a-t-on dit, font état chacune de huit espèces principales. Quant à la logique Λ^2 elle se constitue elle-même en mettant bien en avant un ensemble, lui aussi, de huit espèces princpales à savoir P, +P, ~ +P, ~ P, P', +P', ~ +P', ~ P' les seize autres étant ainsi qu'il a été occasionnellement remarqué plus haut (§ IV n°2, p.46) beaucoup moins directement accessibles à la pensée. Ne retenons pour le moment que ces huit espèces principales et (en nous contentant de les écrire comme des permutations de valeurs logiques) mettons les en parallèle avec celles dont font état les deux autres logiques $\mathbf{L}^2_+$ et $\mathbf{L}^2_*$. Il vient :

$\Lambda 2$	$\mathbf{L}^2_+$	$\mathbf{L}^2_*$
f i j v	f i j v	f i j v
i f v j	i f v j	i f v j
j v f i	j v f i	j v f i
v j i f	v j i f	v j i f
f j i v	i f j v	j i f v
i v f j	f i v j	v f i j
j f v i	v j f i	f v j i
v i j f	j v i f	i j v f

Ces trois ensembles constituent chacun un groupe d'ordre 8 de nature également bien connue de l'algèbre. Ils ont en commun le groupe d'ordre 4 isomorphe au groupe de Klein : ce sont les trois sous-groupes de Sylow d'ordre 8 conjugués dans le groupe symétrique de degré quatre. Les transformations qui permettent de passer de l'un à l'autre sont précisément définies par les permutations $T = jfiv$ et $S = T^{-1} = ijfv$. On a alors, en désignant par les sigles Λ^2, $\mathbf{L}^2_+$ et $\mathbf{L}^2_*$ les groupes associés ci-dessus à chacun de ces sigles, $\mathbf{L}^2_+ = T(\Lambda^2)T^{-1}$, $\mathbf{L}^2_* = T^{-1}(\Lambda^2)T$, $\Lambda^2 = T^{-1}(\mathbf{L}^2_+)T$ ... etc.. Sur ce plan, les trois structures sont équivalentes.

Ce qui fait les différences entre les logiques $\Lambda 2$, $\mathbf{L}^2_+$ et $\mathbf{L}^2_*$ c'est essentiellement la différence du comportement des trois espèces propositionnelles fjiv, ifjv, jifv par rapport à l'implication. Les trois espèces en question sont stables pour l'équivalence, mais seule la première d'entre elles l'est pour l'implication. C'est la raison pour laquelle les logiques $\mathbf{L}^2_+$ et $\mathbf{L}^2_*$ doivent se constituer en faisant appel à l'adjonction non des espèces principales ifjv ou jifv, mais des espèces modales ffvv ou fvfv stables, elles, pour l'implication. L'ensemble Λ^2 voir alors l'espèce principale fjiv devenir la base d'une logique complète, tandis que les ensembles $\mathbf{L}^2_+$ et $\mathbf{L}^2_*$ voient leurs espèces principales ifjv et jifv ravalées en quelque sorte, passant comme au second plan pour faire place aux espèces modales mises en avant dans l'axiomatique. Les deux systèmes $\mathbf{L}^2_+$ et $\mathbf{L}^2_*$ apparaissent alors en condition de moments conjugués non-complets subordonnés au système Λ^2 qui a pris le pas.

On peut donc comprendre l'organisation de l'univers logique de la pensée quadrivalente comme se faisant génétiquement par étapes successives. Un tout premier noyau d'organisation mentale est représenté, non par la logique L^2, mais bien par la théorie de l'équivalence qu'elle comporte, c'est-à-dire par *le groupe* des quatre espèces propositionnelles P, +P, ~ +P, ~ P. Au-delà de ce premier noyau se propose un système de trois "arêtes" logiques de l'appréhension énonciative caractérisées chacune par l'acception, qui se fait pour chacune d'elles, de quatre autres formes de l'énonciation déduites des quatre premières par l'échange de deux des valeurs logiques autres que le vrai, de telle sorte que ces arêtes se transforment les unes dans les autres par les transformations considérées ci-dessus.

Cette infrastructure étant alors présupposée le passage à la considération de l'implication ou, ce qui revient au même, le passage du point de vue des lois de groupe au point de vue des lois d'anneau booléen entraîne le privilège de l'une de ces trois arêtes et la subordination des deux autres à titre de moments conjugués adjacents. On voit sans peine à quoi correspondent ce privilège acquis et le passage d'un point de vue à l'autre au terme duquel s'affirme le privilège en question : tout cela atteste l'identification qui s'est faite distinctivement du faux au sein de la globalité du non-vrai. La logique de l'équivalence, c'est-à-dire le point de vue de la loi du groupe, ne fait pas de discrimination entre négation et semi-négation, qui restent sur le même pied, interchangeables, ni non plus, du coup, entre les trois valeurs logiques F, J et I. Au niveau d'une logique de l'implication, au contraire, le faux se propose comme la seule des valeurs logiques qui implique, non seulement le vrai, mais toutes les valeurs logiques, donnant donc lieu à la thèse $\vdash F \supset P$ caractéristiques de l'implication. La discriminatin du faux peut donc être considérée comme le ressort génétique d'un troisième stade d'organisation mentale, celui auquel apparaît la différenciation entre les systèmes logiques Λ^2 d'une part $\mathbf{L}_+^2$ et $\mathbf{L}_*^2$ de l'autre. Rien de tout ceci bien entendu, ne saurait apparaître ni se représenter rationnellement tant que le "non-vrai", supposé à présent comporter le faux et les deux valeurs logiques j et i, reste identifié mentalement au faux de la logique traditionnelle. Car c'est alors le tout de la structure intermédiaire ici entrevu qui s'effondre : au niveau de l'équivalence il ne reste plus que le couple de l'affirmation et de la négation correspondant par réduction au groupe des espèces propositionnelles P, $+P$, $\sim +P$, $\sim P$, simple premier noyau d'organisation de la pensée logicienne.

Les considérations qui viennent d'être faites montrent l'importance logique tant d'un fait de possible confusion entre les trois valeurs logiques f, i et j, que d'un fait de possible permutation entre deux d'entre elles, soit l'une des deux valeurs i ou j et le faux soit les deux valeurs du couple i et j lui-même. Ces confusions et ces échanges annoncent les très naturelles et possibles fluctuations de la pensée dans ce domaine où la rationalité demeure encore psychologiquement mal fixée. Réciproquement, les considérations logiques qui viennent d'être faites et celles qui vont suivre permettent de tirer au clair diverses formes de fluctuations mentales qui peuventavoir leur importance au moment où certaines institutions fermes de la rationalité sont encore à la recherche d'elles-mêmes.

Il faut remarquer déjà, en complément de ce qui vient d'être dit, que ce qui a valeur logique i et j, de soi n'est pas à tirer davantage logiquement du côté du faux que du côté du vrai. Le "non-faux", comportant à la fois le vrai, ce qui a valeur logique i et ce qui a valeur logique j, est tout aussi plausible que le "non-vrai" de tout à l'heure. Si l'on a égard aux choses et non aux seules formes logiques, il est même davantage plausible que ce "non-vrai". Car de ce point de vue le faux est à mettre en correspondance avec le pur et simple non-être et si l'on parle de valeurs logiques i et j comme facteurs intégrants du vrai, mis en correspondance, lui, avec ce qui est, c'est qu'il y a dans l'actualité de fait quelque chose qui se laisse analyser en "facteurs" qui, sans représenter le tout de l'être, ne sont point cependant choses inexistantes, ont quelque être et quelque vérité , et ainsi quelque titre a être rangés avec le vrai bien plus encore qu'avec le faux. C'est pourquoi, à la logique de l'équivalence envisagée ci-dessus, il y aurait lieu d'adjoindre encore la logique développée du point de vue dual, faisant confuses et interchangeables l'affirmation usuelle et les deux "semi-affirmations", considérant également les permutations de deux valeurs logiques au sein de cet ensemble de trois valeurs qui sont le vrai, la valeur j et la valeur i. Ce développement n'offre point de difficulté technique. C'est pourquoi on se bornera à indiquer ici sa possibilité et son utilité.

2. STRUCTURES EQUIMORPHES, FORMALISMES LOGIQUES ET OPTIQUES MENTALES

L'incertitude au sujet des identifications de valeur logique à faire au moment où il s'agit d'un régime quadrivalent de la pensée a des conséquences logiques qui peuvent se présenter encore de façons autres que celles que l'on vient de dire. Jusqu'à présent on a raisonné en supposant l'esprit bien fixé non seulement quant à la nature de l'affirmation, mais quant à la réalité effective de celle-ci, faisant alors du dire exactement et directement correspondant aux choses son propos ferme et distinct. On a raisonné également en supposant l'esprit bien fixé quant à la nature et à la réalité effective des valeurs logiques, donc également quant à la nature et à la réalité effective de l'implication. Or, psychologiquement confusions et échanges de valeurs attestent au contraire que l'esprit est mal fixé tant quant à la nature de ces choses, que quant à leur réalité effective au moment où il devient question de plus de deux valeurs logiques. Ces incertitudes peuvent alors se traduire par des façons de faire qui ne sont pas encore apparues ci-dessus et dont il reste maintenant à signaler la possibilité et à esquisser la théorie.

Le principe de ces façons de faire est fort simple : il consiste en un certain acte soit de fixation du propos de l'esprit autrement encore qu'il ne l'est dans la façon de le fixer que l'on considère comme "normale", soit de "méprise" au sujet de ce qui est à considérer comme telle ou telle forme logiquement mise en jeu de l'activité pensante. Quant à la théorie qu'il convient d'en faire, c'est derechef une algèbre simple qui la fournit.

Le germe de cette théorie se trouve déjà esquissé avec le cas de la logique usuelle. On sait que la logique mathématique pense la logique propositionnelle usuelle comme solidaire d'une structure d'anneau booléen conférée à un ensemble de deux éléments, la valeur logique vrai et la valeur logique faux. C'est alors ordinairement la valeur logique faux qui est considérée comme ayant à jouer le rôle de l'élément nul de l'anneau, et la valeur logique vrai comme ayant à jouer le rôle d'élément unité. Cette identification des rôles confère alors à la différence symétrique le caractère de l'opération additive de l'anneau et à la conjonction le caractère du produit, l'équivalence étant prise pour relation d'égalité servant à mettre les termes en relation dans la pensée. Mais c'est aussi une remarque bien courante de la logique mathématique que de noter la possibilité d'échanger les fonctions algébriques entre les deux éléments, le vrai étant alorsconsidéré comme l'élément nul d'un anneau booléen, et le faux comme son élément unité, ce qui confère le caractère de l'addition cette fois à l'équivalence et celui du produit à la disjonction, l'équivalence restant la relation d'égalité selon lesquels la pensée met les termes en relation entre eux pour former ses assertions. De cette remarque la logique mathématique tire ordinairement deux façons différentes de proposer un critère algébrique fort simple du fait, pour une expression donnée, d'être ou ne pas être une tautologie et, par un autre biais, le fondement algébrique de ce qu'on appelle la dualité en algèbre booléenne.

De ce fait, cependant, on peut encore tirer tout autre chose au point de vue logique, à savoir la possibilité de constituer, déduction comprise, un "système logique" du faux exactement semblable à celui du vrai. Supposons un esprit intellectuellement "pervers", pour qui le faux représente l'essentiellement désirable, dans lequel il fasse fermement et distinctement le propos de s'établir. En logique à deux valeurs le faux sera alors pour lui la valeur logique "distinguée", ainsi que l'on dit aujourd'hui ordinairement le vrai, les expressions formelles fausses en tout état de cause seront érigées en thèses, et le propos logique de la déduction sera celui de passer du faux au faux avec régularité et assurance. Or il est tout aussi facile de donner suite à ce propos que de donner suite au propos normal de la logique. Pour concrétiser les choses, soit, en logique à deux valeurs, l'opération notée $P \to Q$ et spécifiée comme suit :

v	v	f
f	f	f
Q/P	f	v

Il est évident que si P est faux et si P → Q est également faux, alors Q aussi est faux. Donnons au signe métalinguistique ⊦ la puissance d'indiquer à l'esprit que l'expression qu'il précède est fausse à condition que les expressions le précédant le soient, et proposons le système déductif suivant :

Règle de déduction.

P, P → Q ⊦ Q

Axiomes.

1. ⊦ P → . Q → Q
2. ⊦ P → Q . → P : → P
3. ⊦ P → Q . → : Q → R . → . P → R
4. ⊦ V → P

C'est un système déductif du faux et il est isomorphe au système déductif du vrai que l'on a pris pour base au cours de ce qui précède.

Supposons maintenant qu'en possession de son système déductif, l'esprit en question décide d'appeler "faux" ce que désigne pour lui le symbole V et "implication" le connectif P → Q ci-dessus spécifié. Il se trouvera parler, point par point, le langage logique usuel, de façon entièrement cohérente sauf à désigner à chaque moment ce qui, psychologiquement parlant, est diamétralement opposé à ce que l'on désigne ordinairement par les termes employés : la négation serait dite affirmation, la différence symétrique équivalence... etc..

Psychologiquement parlant, le cas a peu de chance de se produire et, expérience faite, il ne donnerait guère lieu à difficulté : une algèbre sommaire le réglerait et il suffirait de connaître une fois pour toutes la différence diamétrale qu'offre de part et d'autre l'affectation des vocables.L'algèbre en question n'est pas autre que celle de la correspondance entre les deux structures d'anneau booléen qu'il est loisible d'imposer à l'ensemble des deux éléments vrai et faux.

Ce n'est pas tout à fait, hâtons-nous de le remarquer, l'usuelle algèbre dite "de la dualité", mais c'en est quelque chose de très proche. La différence avec l'algèbre de la dualité est que, la correspondance entre les deux structures d'anneau étant envisagée, la pensée maintient l'un des éléments, mettons le vrai, comme *le même élément distingué dans les deux cas*, tandis qu'ici il y a aussi échange d'éléments distingués ; le vrai l'était dans le premier cas, le faux le devient dans le second. C'est pourquoi, dans l'interprétation "par dualité" du phénomène il apparaît une dissymétrie entre les deux cas, qui tient à ce que l'équivalence est *dans l'un et l'autre* cas considérée comme relation "intéressante" pour l'assertion. A présent la symétrie devient entière : l'équivalence était la relation "intéressante" pour l'assertion du vrai ; la différence symétrique devient la relation "intéressante" pour l'assertion du faux.

On distinguera donc la correspondance que l'on a présentement en vue de la correspondance par dualité au sens classique du terme, en parlant de correspondance par équimorphisme. L'équimorphisme diffère de l'automorphisme en ce qu'il ne conserve pas aux éléments de l'ensemble les mêmes fonctions dans les deux structures mises en correspondance : il est *une conservation de structure admettant le transport de fonction* : sur l'ensemble du vrai et du faux les deux structures d'anneau booléen envisagées ci-dessus sont de soi *équimorphes* ; c'est en réalité un sous-entendu mental qui les fait dire *duales* ; sur cet ensemble également le système déductif de la logique propositionnelle usuelle assumé au départ et le système déductif Δ proposé à l'instant sont équimorphes. La dualité n'est pour ainsi dire qu'une réfraction de l'équimorphisme dans le système d'un propos intellectuel resté bien fixe.

Si maintenant, de l'ensemble des deux valeurs logiques F et V, on passe à l'ensemble des quatre valeurs logiques de la base B $[2^2]$ il va falloir considérer également un ensemble bien plus complexe d'équimorphismes possibles que celui fondant la dualité en algèbre booléenne usuelle. Dans la mesure où chacune des valeurs logiques possède son identitié propre, comme c'est le cas pour le vrai et le faux dans la psychologie pensante courante, il y aura alors vingt-quatre équimorphismes possibles, et de ces vingt-quatre, certains se trouveront laisser fixe soit la valeur logique vrai, soit la valeur logique faux, ce qui est de signification logique et épistémologique capitale, étant données en particulier les possibilités naturelles de confusion ou de permutation entre valeurs logiques qui semblent bien, en tout état de cause, celles de la pensée humaine.

Dans un univers mental à quatre valeurs logiques, en effet, se désigner par exemple le vrai comme la valeur logique à poursuivre, ou le faux comme la valeur logique à éviter, n'est plus se fixer entièrement le propos intellectuel ou rationnel comme c'est le faire dans le cas de l'univers mental à deux valeurs logiques seulement. D'où il se trouve que, même en concordance à cet égard, des propos intellectuels et rationnels peuvent encore diverger entre eux à d'autres égards, tout en gardant chacun pour soi une parfaite cohérence logique. Le fait de la cohérence reconnu et correctement éprouvé, les clefs de la transcription logique des systèmes doivent être forgées : c'est alors l'algèbre de l'équimorphisme, et de tel ou tel d'entre eux en particulier, qui les fournit.

Supposons par exemple que la pensée envisage de construire un système logique en prenant l'implication comme connexion primitive entre énoncés en ayant alors une idée précise du vrai et du rôle fonctionnel que le vrai joue dans la caractérisation de l'implication, mais en restant dansun certain vague en ce qui concerne les trois autres valeurs logiques d'un univers mental quadrivalent. Dans ces conditions, elle pourra se proposer, sans faire de sérieuses différences, l'une ou l'autre des six caractérisations équimorphes de l'"implication", toutes préservant les attributions fonctionnelles du vrai. Pour bien faire voir de quoi il s'agit on en fait ci-après l'énumération.

I

v	v	v	v	v
j	v	j	v	j
i	v	v	i	i
f	v	j	i	f
Q/P	f	i	j	v

II

v	v	v	v	v
i	v	i	v	i
f	v	v	f	f
j	v	i	f	j
Q/P	j	f	i	v

III

v	v	v	v	v
f	v	f	v	f
j	v	v	j	j
i	v	f	j	v
Q/P	i	j	f	v

IV

v	v	v	v	v
i	v	i	v	i
j	v	v	j	j
f	v	i	j	f
Q/P	f	j	i	v

V

v	v	v	v	v
f	v	f	v	f
i	v	v	i	i
j	v	f	i	j
Q/P	j	i	f	v

VI

v	v	v	v	v
j	v	j	v	j
f	v	v	f	f
i	v	j	f	i
Q/P	i	f	j	v

A raison alors de ces caractéristiques, il sera possible à chaque fois de construire et de développer de façon entièrement régulière un ensemble de systèmes logiques équimorphes des divers systèmes logiques envisagés au cours des paragraphes précédents. Du point de vue algébrique les systèmes en question seront équimorphes d'une façon toute semblable à celle dont le système déductif Δ ci-dessus l'est d'un système normalement déductif du vrai plutôt que du faux, mais avec cette différence considérable pour le propos pensant que les systèmes présentement envisagés seront tous également des systèmes de l'affirmation et de la déduction du vrai. Du point de vue de la certitude du vrai il y a concordance. On pourrait de même construire les systèmes de l'implication équimorphes du point de vue des maintiens du rôle joué par le faux dans l'implication. Les systèmes construits sur les caractérisations équimorphes I et IV ci-dessus de l'implication sont en outre les deux systèmes conservant à la fois le rôle joué par le vrai et celui joué par le faux. Ce qui apparaît à sa façon dans la procédure de constitution du système Λ^2 etc... .

On appellera alors équimorphismes *simplement formels* les équimorphismes qui ne maintiennent pas de l'un à l'autre le caractère distingué à l'avance de telles ou de telles valeurs logiques, équimorphismes *concordant épistémologiquement* ceux qui assurent ce maintien. On pourra dire également "optique formelle" le mode de prise de possession d'un univers de valeurs logiques au moyen d'une instrumentation mentale équimorphe à celle que l'on a décidée avec la mise sur pied des diverses logiqes étudiées ci-dessus et "optiques épistémologiques" celles qui concordent épistémologiquement avec l'instrumentation mentale ainsi décrite... La théorie de ces "optiques formelles et épistémologiques " est simple : c'est l'algèbre du groupe symétrique de degré quatre, que l'on peut normaliser en théorie des symétries de l'octaèdre et des vues que l'on peut avoir alors sur la proposition des quatre valeurs logiques figurée en forme de tétraèdre régulier, ainsi qu'on l'a dit au § I n° 1 ci-dessus, les axes de symétrie de l'octaèdre étant les trois droites joignant deux à deux les milieux des arêtes opposées du tétraèdre.

Paris, Octobre 1963