MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

ALAIN DEGENNE

Un domaine d'interaction entre les mathématiques et les sciences sociales : les réseaux sociaux

Mathématiques et sciences humaines, tome 104 (1988), p. 5-18

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1988__104__5_0>

Math. Inf. Sci. hum. (26e année, n°104, *1988*, p.5-18).

UN DOMAINE D'INTERACTION ENTRE LES MATHEMATIQUES ET LES SCIENCES SOCIALES : LES RESEAUX SOCIAUX

Alain DEGENNE[1]

Par "réseaux sociaux", on désigne un secteur de recherche très foisonnant, surtout aux Etats-Unis, même si actuellement on voit apparaître de nombreux travaux en France et en Allemagne.

L'expression doit être prise comme un tout. Elle ne s'analyse pas, en ce sens que l'on ne peut pas transposer les différentes problématiques qui existent autour de la notion de réseau (en ingénierie, dans les neurosciences ou en informatique par exemple), pour les appliquer aux sciences sociales.

L'importance de ce courant peut se mesurer au nombre des publications qu'il inspire. Outre de nombreux articles publiés en particulier dans *The American Journal of Sociology*, deux revues lui sont entièrement consacrées: *Social Networks* et *Connection*, cette dernière publication étant le bulletin du très actif "International Network for Social Network Analysis", association dont le siège est à Tampa en Floride.

On peut évidemment rechercher très loin dans le passé l'origine des travaux sur les réseaux sociaux. En psychologie sociale par exemple, d'après Moreno (1954), l'usage des sociogrammes, c'est à dire l'analyse des relations observées entre des individus remonte à 1923. Les premiers numéros de la revue "*Sociometry*" apparaissent en 1937.

Dans la longue liste des ouvrages qui ont fondé les relations de la psychologie sociale et des mathématiques, citons en particulier celui de Flament (1963) et le livre collectif de Harary, Norman et Cartwright (1965), l'un et l'autre ayant joué un rôle important dans la diffusion de ce mode d'analyse.

Du côté des ethnologues, la parenté a très tôt constitué un domaine d'application de concepts structuralistes que l'on relie en général au thème des réseaux sociaux, dans la mesure où ils mettent en jeu des relations entre clans. Citons en particulier les travaux d'Harrison White (1963) et en France ceux de Levi-Strauss (1949) en collaboration avec André Weil. La littérature sur ce sujet est très importante et ne saurait être recensée ici. François Lorrain (1975) a tenté de présenter une synthèse mathématique de ces questions, moins à vrai dire dans le langage des réseaux sociaux que dans celui de la théorie des catégories. Les ethnologues ont ouvert le

[1] C.N.R.S., LASMAS, I.R.E.S.C.O.

champ de leur utilisation de la notion de réseau. Citons comme l'un des premiers, l'ouvrage devenu classique de Boissevain et Mitchell (1974).

Dans un article de synthèse, Linton Freeman (1984) s'interroge sur les rapports entre le courant de recherche sur les réseaux sociaux et les mathématiques. Il est vrai qu'aux Etats-Unis comme en France, la littérature sur les réseaux sociaux donne l'impression d'être largement supportée par les mathématiques en ce sens que les concepts de la sociologie s'y traduisent encore par une expression formelle que certains trouvent très réductrice. Freeman relève dans la littérature des auteurs tels que Wolfe (1978) qui expriment une grande confiance dans la capacité heuristique des mathématiques pour l'étude des réseaux et d'autres auteurs comme Boissevain (1979) par exemple qui mettent cette idée en question et pensent que l'usage généralisé des mathématiques dans ce champ constitue un frein à la productivité scientifique.

Freeman évoque, par exemple, la notion de groupe, couramment utilisée par les psychosociologues et formalisée en 1949 par Luce et Perry comme une clique dans le graphe d'une relation. De nombreux auteurs ont assoupli et généralisé cette définition formellement brutale. Ils ont, du point de vue de l'auteur, progressivement défini un ensemble de conceptions qui s'inspirent toutes fondamentalement de la même idée issue de la théorie des graphes et qui constituent autant de clarifications du concept initial. L'auteur considère ce processus scientifique comme réellement cumulatif.

L'autre exemple qu'il choisit est plus riche, il s'agit de la notion de rôle et des voies par lesquelles elle est formalisée aujourd'hui dans la théorie des réseaux sociaux. Ce chapitre important conduit là aussi à un ensemble de définitions liées entre elles ou en tous cas susceptibles d'être situées les unes par rapport aux autres et qui sont autant de traductions formelles d'un concept au départ assez flou.

La conclusion de Freeman est résolument optimiste. Il pense qu'à travers les recherches sur les réseaux sociaux, les mathématiques et la sociologie se fécondent mutuellement. Examinons les questions que se posent aujourd'hui les sociologues dans ce domaine.

Généralités

On appellera réseau sur un ensemble X, une famille de relations R_i.

Les données sont donc constituées par une famille de matrices d'incidence associées à chacune des relations. Si la population X se compose de n sujets et que le réseau comporte p relations, les données sont constituées d'un ensemble de p matrices $n \times n$.

L'analyse d'un tel ensemble de données peut parfaitement être entreprise par des méthodes habituelles d'analyse des données, qu'il s'agisse par exemple d'analyse factorielle ou de classification ascendante hiérarchique. Dans cette optique, deux sujets se ressemblent d'autant plus qu'ils sont en contact avec les mêmes individus. Si l'on veut tenir compte des relations dans les deux sens, il est possible d'exploiter complètement l'information dont on dispose en accolant à chacune des matrices R_i sa transposée R'_i. Ainsi retiendra-t-on comme indicateur de ressemblance, non seulement le fait d'émettre un choix vers les mêmes sujets mais aussi le fait d'être choisi par les mêmes sujets.

Le tableau à traiter se compose alors de n lignes et 2np colonnes: $R_1R'_1R_2R'_2...R_pR'_p$.

Assez souvent dans les applications $p = 1$, car on ne traite que d'une relation à la fois. Si les matrices sont symétriques, il n'y a évidemment pas lieu d'accoler les transposées.

La matrice sur laquelle on travaille peut contenir autre chose que des 0 ou des 1. On utilise souvent des nombres mesurant l'intensité de la relation entre les éléments. C'est ce qui se produit en particulier dans un exemple célèbre et assez important dans le champ thématique qui est l'atlas des liaisons entre organisations de Lévine (1985).

La population étudiée par Lévine se compose de 442 sociétés qui sont les plus importantes au niveau mondial au moment de son enquête. 15000 responsables de ces sociétés sont recensés. Ils appartiennent à plusieurs d'entre elles à la fois. L'indicateur de liaison entre deux sociétés est donc constitué par le nombre d'administrateurs qu'elles ont en commun.

Dans ce cas, il s'agit d'un indicateur dont l'évaluation est en quelque sorte naturelle mais on utilise également des valeurs calculées, ce qui nous amène à une première catégorie d'exploitations qui sont les indices caractérisant la relation.

Quels indices choisir ?

L'idée qui est généralement retenue est qu'il faut tenir compte des liaisons directes mais aussi des liaisons indirectes entre les individus. Il faut sans doute y voir l'effet d'une représentation de la notion de réseau comme support d'une communication possible. Lorsqu'il s'agit de communication, en effet il est naturel de considérer que l'on peut joindre quelqu'un en utilisant un ou plusieurs intermédiaires. Même lorsqu'il s'agit de calculer par exemple un indicateur de statut des différents individus, on a tendance à prendre en compte les liens directs et un certain nombre de liens indirects. Jusqu'où faut il aller? Doit on prendre en compte les liaisons indirectes quel que soit le nombre d'intermédiaires qu'elles supposent ou doit on ne retenir que quelques pas et combien?

Ronald Burt (1986) évoque l'exemple des citations que 32 médecins font de leurs travaux respectifs. Il observe 82 citations, soit 8% de toutes les citations possibles (992) qui sont donc assimilées à des choix directs. 13% des couples sont liés par une relation qui suppose un intermédiaire et 12% nécessitent deux intermédiaires. Il note que 57% des couples ne peuvent pas être mis en relation, quelle que soit la longueur du chemin pris en considération et qu'aucune liaison attestée ne demande plus de six intermédiaires. Il n'est évidemment pas question de tirer une règle de conduite générale d'un tel exemple. La pertinence d'un choix dépend beaucoup du contenu de la relation étudiée et de la forme du graphe de la relation.

Il est donc toujours possible de laisser l'analyste décider du seuil qui lui paraît le meilleur. Ronald Burt propose quant à lui une valeur déduite d'une pondération automatique dont la définition mérite d'être examinée, d'autant plus qu'elle est utilisée systématiquement par son programme "*Structure*". Ce programme est l'un des plus complets disponibles actuellement sur le marché, au moins en ce qui concerne les programmes destinés aux micro-ordinateurs.

Soit n_i le nombre d'individus que i peut atteindre, lui compris et quel que soit le nombre des intermédiaires nécessaires et soit f_{ij} le nombre d'individus qu'il peut contacter au moyen d'une chaîne de longueur inférieure ou égale à celle qu'il doit mobiliser pour joindre j. La force z_{ij} de la relation entre i et j est alors définie de la manière suivante :

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 1 - f_{ij}/n_i & \text{si i peut atteindre j} \\ 0 & \text{si i ne peut pas atteindre j.} \end{cases}$$

La force de la liaison entre deux individus i et j fait donc intervenir deux notions : la distance entre i et j en nombre d'intermédiaires nécessaires à l'établissement de la relation et la position de j dans l'ensemble des sujets que peut joindre i.

Ainsi si l'on se situe dans un univers fictif tel que le type idéal de la société communautaire traditionnelle où "tout le monde connaît tout le monde", la force de la liaison entre un individu i et un individu j, sera presque nulle, bien que cette liaison soit directe. Si au contraire on suppose un réseau régulièrement maillé, la force de la relation sera une fonction quasiment monotone de la distance en termes d'intermédiaires. Partant d'un indice d'intensité de relation comme celui-ci, on peut définir différentes statistiques et différentes manières de décrire la forme du réseau. En fait c'est la définition de l'indice qui est primordiale et c'est à travers elle que se transmettent les hypothèses.

La définition des sous-groupes

Parmi tous les traitements que l'on peut faire subir aux données concernant un réseau de relations les plus intéressants sont ceux qui visent à définir des sous-groupes que l'on appelle des blocs dans la littérature anglo-saxonne.

L'idée de créer des blocs dans le tableau des données représentant un réseau est apparue au départ sous un double aspect, d'une part une procédure, d'autre part une réflexion théorique sur la notion de rôle. Elle débouche maintenant sur une notion clé de l'analyse des réseaux qui est celle d'équivalence structurale.

Une procédure

Plusieurs auteurs ont proposé comme outil universel, un programme appelé CONCOR. L'algorithme sur lequel est fondé ce programme est inspiré par l'idée que deux individus se ressemblent d'autant plus qu'ils ont en commun un plus grand nombre de descendants et un plus grand nombre d'ascendants. Le terme de descendant désigne les personnes qu'un individu peut joindre directement ou indirectement et le terme d'ascendant celles qui peuvent le joindre directement ou indirectement.

Partant de la matrice d'incidence de la relation, on lui accole sa transposée. On calcule alors la matrice de corrélation associée à ce tableau. La corrélation entre deux individus i et j est d'autant plus forte que ces deux sujets ont les mêmes ascendants et les mêmes descendants. Cette matrice de corrélation est elle-même considérée comme une matrice de proximité entre les sujets du réseau à partir de laquelle on calcule une nouvelle matrice de corrélation et ainsi de suite. Dans la pratique cet algorithme converge vers un état final dans lequel toutes les corrélations valent soit 1 soit -1. Ce tableau peut être réorganisé de telle sorte que la matrice soit découpée en quatre blocs, deux blocs remplis de 1, à cheval sur la diagonale principale, deux blocs remplis de -1 sur l'autre diagonale.

On obtient donc ainsi une partition de l'ensemble des sujets en deux sous-ensembles. Chacun de ces sous-ensembles est repris et traité de la même manière et ainsi de suite. Cet algorithme engendre une segmentation de la population.

Il est clair que cette méthode dont on comprend bien le principe fonctionne assez largement comme une boite noire. L'itération des corrélations ne reflète que partiellement l'idée initiale. Il faut reconnaître que ce traitement donne cependant des résultats généralement intéressants. On peut penser que n'importe quelle autre méthode de classification par segmentation bien choisie donnerait également des résultats intéressants. (On peut d'ailleurs remarquer que cet algorithme s'applique à n'importe quelle sorte de données et peut donc être considéré comme une procédure universelle d'analyse).

L'équivalence structurale

Intuitivement, la notion d'équivalence structurale évoque l'idée d'une interchangeabilité des sujets équivalents dans le cadre d'une structure donnée. Si l'on s'appuie sur cette intuition le concept peut être opérationalisé de façon très souple et l'on peut étendre la notion d'équivalence structurale jusqu'aux traitements statistiques à base de similitude comme celui dont on vient de parler.

Si l'on veut que les termes gardent un sens précis, il nous semble plus judicieux de réserver l'appellation d'équivalence structurale aux cas où l'on aura pu mettre en évidence une véritable relation d'équivalence entre éléments, relation fondée sur certaines caractéristiques de la structure.

Les structures élémentaires de parenté ont été traitées sous une forme qui répond bien à cette définition. Nous prendrons ici un exemple plus récent et moins rebattu, celui des réseaux sportifs étudiés par Parlebas (1986). Parlebas étudie les jeux sportifs. A chaque jeu sportif, il associe son *réseau des communications motrices. C'est : le graphe associé dont les sommets représentent les joueurs et dont les arcs symbolisent les communications et/ou les contre-communications motrices autorisées par les règles et l'esprit du jeu.*

L'auteur constate qu'il existe deux types de relations de communication motrice, les relations de solidarité et les relations de rivalité. Le réseau d'un jeu peut être exclusif, *si les partenaires et les adversaires sont définis formellement de façon exclusive, de telle sorte que deux joueurs ne peuvent être en même temps solidaires et rivaux.* Dans le cas contraire, il est qualifié d'ambivalent. Le réseau est qualifié de stable si les relations S et R, de solidarité et de rivalité sont invariantes pendant toute la durée du jeu.

Une dernière notion permet de compléter la classification des jeux sportifs, celle d'équilibre. La notion d'équilibre du graphe d'une relation est ancienne. Elle a été proposée par Heider en 1946 et a suscité par la suite de nombreux travaux, en psychologie sociale expérimentale en particulier. Le système est composé de deux relations symétriques désignées par R et S. Il est dit équilibré si les deux relations se composent suivant la table suivante :

	S	R
S	S	R
R	R	?

Ce qui intuitivement se traduit par les propositions:

- Les partenaires de mes partenaires sont mes partenaires.
- Les partenaires de mes adversaires sont mes adversaires.

Le point d'interrogation dans la case qui concerne la combinaison de deux relations de rivalité signifie que l'on peut obtenir soit R soit une incertitude suivant que le jeu est à deux équipes ou à plus de deux équipes.

Parlebas analyse sur ces bases un grand nombre de jeux sportifs et en arrive à distinguer dans cet ensemble ceux que l'on appelle communément les sports, qui ont un statut institutionnel en particulier dans l'enseignement et à travers les Jeux Olympiques. Les sports ont en commun un certain nombre de propriétés remarquables:

- Les réseaux sont tous stables.
- Les réseaux sont tous exclusifs.
- Les réseaux sont tous complets.
- Les réseaux sont tous équilibrés.

Dans l'exemple précédent, on prend en compte deux relations simultanément : la solidarité et la rivalité. C'est déjà une situation complexe. On peut développer une théorie plus précise de la décomposition en blocs des matrices d'incidence dans le cas où l'on ne considère qu'une seule relation. Si limité qu'il puisse paraître aux utilisateurs, ce cas est déjà fort intéressant.

White et Reitz (1978) définissent la notion d'homomorphisme complet de graphe (*full graph homomorphism*).

Etant donné une relation R sur un ensemble X et une relation R' sur X', G = (X,R) et G' = (X',R') les graphes associés à ces relations, $f : G \rightarrow G'$ est un homomorphisme complet de graphe si et seulement si :

- $f : X \rightarrow X'$ est une surjection et que quels que soient $a,b \in X$ et $a',b' \in X'$
- $aRb \Rightarrow f(a)\,R'\,f(b)$ et
- $a'R'b' \Rightarrow$ il existe $c,d \in X$ tels que cRd, $a' = f(c)$ et $b' = f(d)$.

Arabie, Boorman et Levitt (1978) ont appelé "*blockmodels*" ces sortes d'homomorphismes. De nombreux auteurs s'y sont intéressés. Nous utiliserons ici le terme francisé de bloc-modèle, plus simple que celui d'homomorphisme complet de graphe.

Cette définition est très large et recouvre une assez grande diversité de cas. Considérons quelques exemples pour lesquels nous supposerons :

$$X = \{a,b,c,d\},\ X' = \{x,y\},\ f(a) = f(b) = x,\ f(c) = f(d) = y.$$

Exemple 1 :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right]$$

C'est l'épimorphisme "simple". Il suffit que chaque bloc contienne un 1 pour que la définition soit vérifiée. Les blocs que l'on constitue sont donc en relation entre eux dès que la relation est attestée entre un individu du premier bloc et un individu du second.

Exemple 2 :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right]$$

Dans ce cas, la relation n'existe entre deux blocs que si les sujets de chaque bloc sont liés deux à deux:

$$f(a)\ R'\ f(b) \Rightarrow aRb$$

On qualifiera ce cas d'épimorphisme strict (White et Reitz utilisent "strong").

Exemple 3 :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right]$$

Dans ce dernier cas, la relation existe entre deux blocs s'il apparaît au moins un 1 dans chaque ligne et dans chaque colonne de la sous-matrice correspondante :

$$f(a)\ R'\ f(b) \Rightarrow \text{il existe } c,d \in X \text{ tels que } cRb,\ aRd,\ f(c) = f(a),\ f(d) = f(b).$$

Cet épimorphisme est qualifié de régulier (Sailer,1978). Ce terme de régulier est parfois critiqué comme étant peu spécifique de la notion visée ici. Mais depuis l'article de Sailer, il est systématiquement utilisé par les auteurs anglo-saxons. C'est la raison pour laquelle nous le conservons ici. On a évidemment la relation : strict $\Rightarrow$ régulier $\Rightarrow$ simple.

On rejoint par ces définitions une autre approche théorique de la recherche des sous-groupes utiles dans les relations, qui s'appuie sur le semi-groupe des relations (Boyd, 1983).

X étant un ensemble, une relation R est définie comme un sous-ensemble de $X \times X$. On lui associe la matrice carrée d'incidence de la relation.

Composition : Soit R_1 et R_2 deux relations. Il leur correspond deux matrices carrées que l'on note également R_1 et R_2. On définit la relation $R_3 = R_1 \circ R_2$ par $R_{3 \cdot ij} = \Sigma_k R_{1 \cdot ik} \cdot R_{2 \cdot kj}$, les opérateurs de multiplication et d'addition obéissant aux règles suivantes :

$$1.1 = 1\ ;\ 1.0 = 0.1 = 0.0 = 0\ ;\ 1{+}1 = 1{+}0 = 0{+}1 = 1\ ;\ 0{+}0 = 0.$$

Cette opération admet un élément neutre qui est la relation associée à la matrice unité qui ne contient que des 1 sur la diagonale principale et des 0 partout ailleurs.

La composition des relations est associative : $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$. Elle n'est pas commutative en général.

Muni de cette opération de composition, l'ensemble des relations est un demi-groupe.

Parallèlement aux définitions qu'ils se donnent sur les graphes, White et Reitz (1983) utilisent trois notions distinctes d'équivalence dans le demi-groupe des relations:

1. L'équivalence structurale forte :

Soit R une relation sur un ensemble X. G = (X,R) le graphe associé. $\equiv$ est une équivalence forte si et seulement si, pour tout triplet a,b,c d'éléments de X, elle répond aux conditions suivantes :

$a \equiv b$ implique :

aRb si et seulement si bRa
aRc si et seulement si bRc et cRa si et seulement si cRb.

2. L'équivalence structurale simple définie par :
   Pour tout triplet a,b,c d'éléments de X tels que $a \neq b \neq c$,

$a \equiv b$ implique :

aRb si et seulement si bRa
aRc si et seulement si bRc et cRa si et seulement si cRb
aRa implique aRb.

3. L'équivalence régulière, définie par :
   Pour tout triplet a,b,c d'éléments de X,

$a \equiv b$ implique :

aRc $\Rightarrow$ il existe $d \in X$ tel que bRd et $d \equiv c$, et
cRa $\Rightarrow$ il existe $d \in X$ tel que dRb et $d \equiv c$.

Dans ces conditions, les équivalence induites par les bloc-modèles (respectivement structurelle, forte ou régulière) sont dans le demi-groupe des relations des équivalences (respectivement structurelle, forte ou régulière) correspondant à des homomorphismes du demi-groupe.

La question de savoir si les homomorphismes du demi-groupe des relations induisent inversement des homomorphismes de graphes est plus complexe. Elle a été étudiée par Bonacich (1982).

Si la notion d'équivalence stricte a été étudiée depuis longtemps, et utilisée en particulier dans le cadre des structures élémentaires de parenté (Lorrain, 1975), l'équivalence faible est d'un usage plus récent en psychologie sociale (Arabie, Boorman, Levitt, 1978) dans le cadre de la formalisation des notions de rôle et de statut.

Quant à l'équivalence régulière, bien qu'intellectuellement très séduisante, son opérationalisation en tant que modèle en sociologie semble poser de nombreux problèmes.

L'équivalence régulière en effet correspond à ce qu'Ossowski(1971) appelle "les classes corrélatives". Deux classes sont corrélatives quand les éléments de l'une se définissent dans leur relation avec les éléments de l'autre. Par exemple, la classe des enseignants se définit corrélativement à celle des élèves : est enseignant celui qui a au moins un élève avec lequel il entre dans une certaine relation que l'on peut qualifier de relation didactique. Inversement est élève celui qui entre dans une relation didactique avec un enseignant. Les enseignants n'entretiennent éventuellement aucune relation entre eux. De même les élèves n'entrent pas nécessairement en relation. Il n'est pas nécessaire de supposer que les enseignants et les élèves possèdent des caractéristiques différentes. La relation que nous avons appelée didactique suffit à les regrouper en deux classes corrélatives. Il en va de même pour de nombreuses relations qui intéressent les sociologues comme par exemple la relation "soigner" qui définit corrélativement la classe des médecins et celle des patients et plus traditionnellement la relation d'exploitation qui définit corrélativement les classes des employeurs et des employés.

On comprend que les chercheurs en sciences humaines soient vivement intéressés par des procédures qui permettent de construire des classes corrélatives à partir d'une relation.

On peut rapprocher du problème précédent celui, plus général de la recherche d'un découpage de la matrice de la relation en blocs sur la base de deux partitions non nécessairement identiques.

Du point de vue du contenu, ce genre de découpage apparaît assez naturellement. Reprenons l'exemple des enseignants et des élèves. Supposons que nous ayons un ensemble de cinq individus. Le cas suivant peut représenter une relation tout à fait réelle.

$$
\begin{array}{c|cc|ccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Les individus 1, 2 et 3 sont enseignants à un moment donné. Les individus 3, 4 et 5 sont élèves dans la même période. Le numéro 3 se trouve à la fois enseignant (ses élèves sont 4 et 5) et élève, (il suit les cours de 1). On conçoit aussi très naturellement que quelqu'un puisse être à la fois employeur et employé, médecin et patient, etc..

Il est donc intéressant de savoir, étant donné la matrice d'une relation comment y faire apparaître des sous-matrices régulières correspondant à une partition sur les lignes et une partition sur les colonnes, non nécessairement identiques.

Les cas extrêmes sont assez faciles à repérer :

La partition la plus fine de l'ensemble des lignes d'une part, des colonnes d'autre part, en classes d'équivalence qui contiennent un seul point répond à la question.

Si l'on regroupe toutes les lignes qui ne contiennent que des 0 en une classe, les autres lignes constituant l'autre classe de la partition des lignes et que l'on procède de même sur les colonnes, on définit bien des sous-matrices de 0 et une sous-matrice régulière (comme dans l'exemple ci-dessus).

Il est en revanche difficile de trouver un algorithme qui propose des solutions intermédiaires en fonction d'un critère de pertinence.

Riguet (1948) a étudié ces relations sous le terme de relations difonctionnelles qu'il définit de la façon suivante:

R étant une partie du produit $E \times F$ de deux ensembles est une relation difonctionnelle lorsque $RR^{-1}R=R$.

Elles sont également évoquées dans la littérature anglo-saxonne sous le nom de "matching relations" (Falmagne et Doignon, 1984) et reprises par Degenne et Flament (1984).

Doreian (1988) étudie sur des cas simples les effets de trois algorithmes de classification arborescente fonctionnant, le premier sur la similitude des individus induite par des relations (CONCOR), le second inspiré de l'indice de distance pondérée défini par Burt (STRUCTURE), le dernier (REGE) utilisant une similitude fondée sur le principe de l'équivalence régulière :

Soit $A=[a_{ij}]$ une matrice décrivant les liens entre éléments d'un réseau, où $a_{i,j}$ est une mesure de l'intensité de la relation entre i et j. On pose alors:

$${}_{ij}\mathrm{Match}_{km} = \min(a_{ik},a_{jm}) + \min(a_{ki},a_{mj}) \qquad \text{et} \qquad {}_{ij}\mathrm{Max}_{km} = \max(a_{ik},a_{jm}) + \max(a_{ki},a_{mj}).$$

A partir de ces notions, on définit l'équation de récurrence dans laquelle les valeurs successives de m_{ij} prennent à partir de la seconde itération la place des a_{ij} :

$$m_{ij}^{t+1} = \frac{\Sigma \max \left(\Sigma m_{km}{}^{t} \left[{}_{ij}\mathrm{Match}^{t}_{km} + {}_{ji}\mathrm{Match}^{t}_{mk} \right] \right)}{\Sigma \max \left(\Sigma\, {}_{ij}\mathrm{Max}^{t}_{km} + \Sigma\, {}_{ij}\mathrm{Max}^{t}_{mk} \right)}$$

Les m_{ij} sont initialisés à 1. Trois itérations suffisent d'après l'auteur pour obtenir des valeurs stables. On applique ensuite un algorithme de classification.

Comme Freeman, White et Reitz, après avoir développé une étude très complète des types d'homomorphismes dans le semi-groupe des relations pensent disposer d'un outil intellectuel décisif: "*Nos résultats ouvrent la porte à une étude des relations entre le demi-groupe et les homomorphismes de graphes sur les réseaux. Pour l'analyste des réseaux sociaux, nos théorèmes représentent une avance pratique considérable dans les méthodes pour calculer des images homomorphiques des réseaux sociaux. De telles méthodes constituent la base formelle pour l'analyse de structures sociales complexes en termes de réseaux*".

Ces auteurs ont incontestablement raison dans leur optimisme chaque fois qu'il s'agit d'étudier des réseaux sociaux entièrement construits sur une population définie avec des relations parfaitement identifiées. Un grand nombre de concepts sont maintenant bien cernés, qu'il s'agisse de décrire le réseau et d'évaluer la position des différents acteurs ou qu'il s'agisse de dégager des équivalences de rôle et de statut des individus. Le programme *Structure* de Ronald Burt (1986), par exemple fournit un outil d'analyse tout à fait complet et assimilable dans ce domaine aux grands logiciels de dépouillement de données.

Il faut cependant admettre que le point de vue centré sur les réseaux en sociologie est plus large que le noyau dur dont nous venons de parler et qu'un grand nombre d'autres pistes sont ouvertes, qui suscitent une production très variée.

Les conditions de recueil de données qui permettent l'application des modèles évoqués ci-dessus conviennent en effet lorsqu'on étudie des systèmes d'organisations, des petits groupes ou des règles normatives. Lorsque l'objet de la recherche porte sur une société ouverte comme c'est le cas dans de nombreux problèmes de sociologie, il faut développer d'autres outils.

Un très important domaine de recherche est constitué par les développements de la théorie des sondages en vue de la reconnaissance de caractéristiques de structure. Granovetter (1976) et surtout Frank ont contribué à ce courant. Ove Frank présente dans ce numéro une revue de questions sur ce thème.

Si l'on veut bien comprendre les questions que se posent aujourd'hui les sociologues, le plus simple est de considérer un exemple. Nous prendrons l'étude du marché du travail.

Traditionnellement, le marché du travail est conçu par les économistes suivant le paradigme général du marché au sens néo-classique et les évolutions théoriques que subit ce thème sont les mêmes que celles qui affectent le concept de marché. Or de nombreux travaux ont montré les limites de cette conception, à commencer par les théories du marché segmenté.

Granovetter est l'un des premiers à s'être intéressé au rôle des réseaux sociaux dans le fonctionnement du marché du travail. A travers une enquête conduite,partie par entretiens, partie par questionnaire auprès d'employés et de cadres d'une banlieue de Boston, Newton, Massachusetts (Granovetter,1974), il montre l'importance des contacts personnels dans la recherche d'un emploi. Cette voie prime sur les moyens formels (annonces..etc.) et sur les contacts directs. Par ailleurs les contacts personnels, qui sont plus souvent mis en oeuvre chez les personnes de plus de 34 ans que chez les plus jeunes permettent l'accès à des emplois mieux rémunérés et dont on se déclare plus souvent satisfait que ceux obtenus par les autres moyens.

Dans la même période Granovetter (1973) publiait un article intitulé *"The strength of weak ties"* (la force des liens faibles) dans lequel il posait l'hypothèse que la nature des liens utilisés dans une démarche instrumentale devait avoir une influence sur le résultat obtenu. La force du lien n'est pas une notion complètement construite. elle a à voir avec l'ancienneté de la relation, l'intensité émotionnelle, le degré d'intimité dans l'échange et la nature des services échangés. Le raisonnement, en fait porte sur la transitivité des liens. Granovetter pose qu'il y a peu de chances que si deux personnes sont liées à une même troisième par des liens forts, elles ne soient pas liées entre elles également par un lien fort. C'est donc une hypothèse d'équilibre sur les liens forts. Il en déduit que les liens forts tendent à créer des systèmes clos dans lesquels les individus sont enfermés. Les liens faibles en revanche, qui sont des liens de simple connaissance permettent de jeter des ponts entre les groupes.

Cet article doit être considéré comme fondateur de tout un courant de recherches empiriques qui ont visé à vérifier cette hypothèse que les liens faibles, puisqu'ils représentaient un facteur d'ouverture sur l'extérieur étaient porteurs de plus de possibilités que les liens forts. Nan Lin (1982) s'est particulièrement intéressé à ce problème . Il a, par exemple, réalisé une expérience. 300 personnes ont été invitées à faire parvenir en utilisant leurs relations un paquet à un destinataire inconnu d'elles. Les résultats ont montré que plus le niveau social de la personne contactée était élevé, plus le succès était fréquent. L'utilisation des liens forts se révèle aussi moins efficace que celle des liens faibles. Plus récemment, Lin et Dumin (1986) reprenant l'étude des réseaux d'accès à l'emploi font intervenir à la fois la position sociale du demandeur (mesurée par le statut économique du père) et la nature des liens utilisés. Ils montrent que si l'origine sociale est élevée, la nature des liens avec la personne utilisée comme intermédiaire joue peu, en revanche, quand l'origine sociale est basse, l'utilisation des liens faibles donne de meilleurs résultats que l'utilisation des liens forts.

Dans cette même ligne de pensée, il faut classer deux catégories de travaux qui d'ailleurs se rejoignent :
- des recherches théoriques et empiriques sur la notion de marché (Burt, 1982, Granovetter, 1985),
- des tentatives pour fonder une théorie de l'insertion et des réseaux sociaux sur la notion de cercle social plutôt que sur des relations binaires.

Burt fait jouer dans sa théorie un rôle central à la notion d'équivalence structurale. Des acteurs structuralement équivalents auront selon lui une même appréciation de l'utilité de telle ou telle intervention. Bien que l'équivalence structurale ne suppose pas l'interaction des acteurs, elle les place dans leur environnement dans des positions semblables qui les conduisent à avoir des réactions semblables. La mise à l'épreuve de cette hypothèse peut être faite, même dans des travaux de sociologie qui ne supposent pas la connaissance exacte du réseau des relations. Elle peut se traduire en effet dans un questionnement individuel.

Dans le domaine de l'adoption des innovations, Burt développe par exemple un modèle qui suppose que des acteurs placés dans des positions structuralement équivalentes vont adopter une innovation à travers un processus de contagion, indépendamment de toute relation directe entre eux. Johnson (1986) a testé cette hypothèse de Burt à propos de l'adoption d'une innovation technique en matière de chalutage par des pêcheurs. Ses conclusions vont dans le sens de l'hypothèse de Burt, même si l'auteur se montre prudent. En effet, les données utilisées n'avaient pas été conçues dans ce but et la mise à l'épreuve réelle du modèle mériterait un plan plus rigoureux.

On voit bien que le concept d'insertion sociale, tel que Burt par exemple l'utilise ne peut pas être construit uniquement sur la base des relations interpersonnelles qu'entretiennent des individus. Il s'agit de construire ce concept de manière à ce qu'il permette d'exprimer comment y fonctionnent et s'y transforment les normes et les rationalités sur lesquelles les acteurs fondent leurs décisions. L'insertion doit donc être vue non plus comme un système de relations entre des individus mais comme l'ensemble des relations de celui-ci avec les cercles sociaux dont il fait partie. On appelle donc réseau d'insertion d'un sujet précisément cet ensemble de cercles sociaux dont il participe (Degenne, 1986). Cette option rejoint d'ailleurs une tradition sociologique représentée par exemple par Bouglé (1897) et Simmel (1977).

D'un point de vue formel on ne représente plus le réseau tout à fait de la même façon. C'est moins la notion de graphe qui joue que celle d'hypergraphe. Mc Pherson (1982) parle d'ailleurs d'"*Hypernetwork*". Suivant les auteurs la notion de cercle social varie. Chez Blau (1984) il s'apparente à une clique, ce qui demeure une vision relativement réductrice par rapport à la conception classique.

Le domaine que recouvre désormais l'appellation de réseaux sociaux dans le champ de la recherche est à la croisée de deux courants indépendants qui tendent à interférer aujourd'hui: d'une part la tradition des applications de la théorie des graphes, qui met l'accent sur les relations inter-individuelles, d'autre part la tradition de l'écologie sociale pour laquelle les groupes réels sont fondamentaux.

Il semble bien que les modèles mathématiques développés à partir de la notion de réseau aient atteint un développement tel qu'ils peuvent réagir sur la manière dont les sociologues précisent leurs concepts. C'est le cas de l'équivalence structurale, dans ses différentes formulations. Actuellement se posent de nouveaux problèmes qui touchent à la fois à la théorie sociologique et aux représentations mathématiques qui peuvent en être données. De ce point de vue, l'optimisme de Freeman dont nous avons fait état au début de cette présentation peut aussi nous servir de conclusion.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARABIE P., BOORMAN S.A., LEVITT P.R., "Constructing blockmodels how and why", *Journal of mathematical psychology*, 17(1978), 21-63.
[2] BLAU P.M., SCHWARTZ J.E., *Crossscutting social circles,* New York, Academic Press, 1984.
[3] BOISSEVAIN J., MITCHELL J.C., *Network analysis : studies in human interaction*, Paris La Haye, Mouton, 1973.

[4] BOISSEVAIN J., "Network analysis : a reappraisal", *Current anthropology*, 20(1979), 392-394.
[5] BONACICH P., "Representation for homomorphisms", *Social networks*, 5(1983), 173-192.
[6] BOORMAN S.A., WHITE H.C., "Social structure from multiple networks II role structure", *AJS*, 81(1976), 1384-1446.
[7] BOUGLE C., "Qu'est-ce que la sociologie", *Revue de Paris*, 1897.
[8] BOYD J.P., "Structural similarity, semi groups and idempotents", *Social networks*,5 (1983), 157-182.
[9] BREIGER R.L., PATTISON P.E., "Cumulated social roles : the duality of persons and their algebras",*Social networks*, 8(1986), 215-256.
[10] BURT R.S., *Toward a structural theory of action*, New York, Academic Press, 1982
[11] BURT R.S., *Structure, version 3.0, Technical report*, New York, Centre for the Social sciences, Columbia University, 1986.
[12] DEGENNE A., FLAMENT C., "La notion de régularité dans l'analyse des réseaux sociaux", *BMS*, 2(1984), 3-16.
[13] DEGENNE A., "Un langage pour l'étude des réseaux sociaux", in Programme observation du changement social, *L'esprit des lieux*, Paris, Editions du CNRS, 1986, 291-312.
[14] DOREIAN P., "Equivalence in a social network", *Journal of mathematical sociology*, 13(1988), 243-282.
[15] FALMAGNE J.C., DOIGNON J.P., "Matching relations and the dimensional structure of social choices", *Mathematical social sciences*, 3(1984), 211- 229.
[16] FLAMENT C., *Théorie des graphes et structure sociale*, Paris, Mouton Gauthier-Villars, 1965. Première édition: *Application of graph theory to group structure*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1963.
[17] FREEMAN L., "Turning a profit from mathematics : the case of social networks", *The journal of mathematical sociology*, 10(1984), 343-360.
[18] GRANOVETTER M.S., "The strength of weak ties", *AJS*, 78(1973), 1360- 1380.
[19] GRANOVETTER M.S., "Network sampling: some first steps", *AJS*, 81(1976), 1287-1303.
[20] GRANOVETTER M.S., "The strength of weak ties : a network theory revisited" in MARSDEN P., LIN N., *Social structure and network analysis*, Beverly Hill, Sage Publishers, 1982.
[21] HARARY F., NORMAN R.Z., CARTWRIGHT D., *Structural models, an introduction to the theory of directed graphs*, New York, Wiley, 1965.
[22] HEIDER F., "Attitude and cognitive organisation", *Journal of Psychology*, 21(1946), 107-112.
[23] HEIDER F., "On balance and attribution", in HOLLANDT P.V., LEINHARDT S., *Perspective in social network research*, New York, Academic Press, 1979.
[24] JOHNSON J.C., "Social network and innovation adoption: a look at Burt's use of structural equivalence", *Social Networks*, 8(1986), 343-369.
[25] LEVINE J.H., *Atlas of world corporate interlocks*, Hanover N.H., Worldnet,1985.
[26] LEVINE J.H., "The methodology of the atlas of corporate interlocks", *BMS*, 17(1988), 20-58.
[27] LEVI STRAUSS C., *Les structures élémentaires de la parenté*, Paris, Presses Universitaires de France, 1949.
[28] LIN. N., "Social resources and instrumental action" in MARSDEN P., LIN N. (Eds), *Social structure and network analysis*, Beverly Hill, Sage Publishers, 1982.
[29] LIN N., DUMIN M., "Access to occupations through social ties", *Social networks*, 8(1986), 365-386.
[30] LORRAIN F., *Réseaux sociaux et classifications sociales*, Paris, Hermann, 1975.
[31] Mc PHERSON J.M., "Hypernetworks sampling : duality and differentiation among voluntary organizations", *Social networks*, 3(1982), 225-249.

[32] MORENO J.L., *Fondements de la sociométrie*, Paris, Presses universitaires de France, 1954.
[33] OSSOWSKI S., *La structure de classe dans la conscience sociale*, Paris, Anthropos, 1971.
[34] PARLEBAS P., *Eléments de sociologie du sport*, Paris, Presses universitaires de France, 1986.
[35] RIGUET J., "Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois", *CRAS*, 1948, 114-159.
[36] SAILER L.D., "Structural equivalence, meaning and definition, computation and applications", *Social networks*, 1(1978), 73-90.
[37] SIMMEL G., *Philosophie des Geldes*, Berlin, Duncker und Humblot, 7eme édition, 1977. Traduction française: *Philosophie de l'argent*, Paris, Presses Universitaires de France, 1987.
[38] WHITE D.R., REITZ K.P., "Graphs and semigroup homomorphisms on networks of relations", *Social networks*, 5(1983), 193-234.
[39] WHITE H.C., *An anatomy of kinship*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1963.
[40] WHITE H.C., BOORMAN S.A., BREIGER R.L., "Social structure from multiple networks I, blockmodels of roles and positions", *AJS*, 81(1976), 730- 780.
[41] WOLFE A.W., "The rise of network thinking in anthropology", *Social networks*, 1(1978), 53-64.