MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

A. LACHENY
J. L. PETIT
E. TEROUANNE

Étude des méthodes proportionnelles sur l'exemple des élections législatives françaises du 16 mars 1986

Mathématiques et sciences humaines, tome 104 (1988), p. 35-59
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1988__104__35_0>

Math. Inf. Sci. hum. (26e année, n°104, *1988,* p.35-59).

ETUDE DES METHODES PROPORTIONNELLES SUR L'EXEMPLE DES ELECTIONS LEGISLATIVES FRANCAISES DU 16 MARS 1986

A. LACHENY [1], J. L. PETIT [2], E. TEROUANNE [2]

PRESENTATION

Quand il s'agit de choisir un système électoral il est important de savoir de quoi l'on parle. Or, comme le dit Guilbaud, "La littérature concernant la "représentation proportionnelle" est effrayante. En volume d'abord, et souvent par le mélange d'arguments proprement politiques et d'arguments prétendument mathématiques "([7]). Le but de ce papier est d'apporter des éléments d'information à la fois sur l'infinie variété des méthodes proportionnelles et sur les moyens de guider son choix parmi elles.

Et d'abord qu'existe-t-il au juste comme méthodes proportionnelles ? Nombre de "spécialistes" des problèmes électoraux semblent penser qu'il n'existe que la méthode de la plus forte moyenne et la méthode des plus forts restes, ou au mieux une demi-douzaine d'autres méthodes. Balinski et Young ([1]) ont donné un modèle commun à ces méthodes classiques, les généralisant dans la famille infinie des "méthodes à diviseurs". Seule la méthode des plus forts restes n'appartient pas à cette famille. Nous reprenons et élargissons l'idée de ces auteurs avec notre famille des "méthodes multiplicatives", et nous la doublons d'une famille de "méthodes additives" qui, elle, généralise la méthode des plus forts restes.

En France, où l'on change souvent les modes d'élections, à peu près personne ne discute sérieusement du choix de ces méthodes. Ainsi, lors de l'adoption de la loi électorale de 1985, il n'y a eu pratiquement aucun débat sur la façon de répartir les sièges entre les différents départements proportionnellement à leurs populations. Or le même problème suscite des discussions acharnées aux U.S.A. depuis près de deux siècles ([1]). Nous définirons et illustrerons ici un certain nombre de propriétés qui permettent d'éclairer ce choix.

[1] Département d'Informatique, I.U.T., 99 avenue d'Occitanie 34075 Montpellier Cedex.

[2] Département de Mathématiques Informatique Appliquées, Université Paul Valéry, B.P. 5043 34032 Montpellier Cedex.

PLAN

I. INTRODUCTION

Les problèmes de "partage proportionnels" sont particulièrement importants dans les situations électorales. Donnons en deux versions, que nous appellerons premier et deuxième étage : dans une élection "à la proportionnelle", on rencontre souvent ces deux versions, le premier étage précédant chronologiquement le deuxième étage.

Premier étage : soit un pays découpé en p unités territoriales. On décide de constituer une chambre de n représentants. Quel nombre de représentants doit avoir chaque état si l'on veut respecter la *proportionnalité* entre ces nombres et les populations des unités territoriales ?

Deuxième étage : soit une élection au "scrutin de liste" qui concerne n sièges à pourvoir, chaque électeur choisissant une liste parmi p listes candidates. Quel nombre d'élus doit avoir chaque liste si l'on veut respecter la *proportionnalité* entre ces nombres et les nombres de voix recueillies par les listes ?

Dans cet article, nous parlerons uniquement du deuxième étage. Les problèmes concernant le premier étage sont traités en détail dans [1] et [2]. Nous utiliserons les résultats des élections proportionnelles qui ont eu lieu le 16 Mars 1986 dans les 96 départements français métropolitains (résultats recueillis dans [3]), pour élire les 555 membres de la chambre des députés. Nous appliquerons à chacune de ces 96 élections différentes méthodes de représentation proportionnelle. Il existe une grande variété de telles méthodes. Outre la famille contenant la plus part des méthodes classiques, et que nous appellerons famille des *méthodes multiplicatives*, il existe une autre famille de méthodes, généralisant la méthode des plus forts restes, que nous appellerons famille des *méthodes additives*.

Cette grande variété pose un problème de choix auquel on peut contribuer à donner des solutions par la définition d'un certains nombre de propriétés souhaitables pour une méthode proportionnelle, propriétés que nous allons illustrer dans ce travail. Pour un traitement plus formel des méthodes proportionnelles et de leurs propriétés nous renvoyons le lecteur à [4]. Les principaux outils mathématiques utilisés dans ce travail sont illustrés dans [6].

Dans le paragraphe 2 nous présentons sommairement les deux familles de méthodes proportionnelles.

Le paragraphe 3 est consacré à l'application de treize méthodes particulières (sept additives et six multiplicatives) sous diverses hypothèses (avec ou sans élimination des "petites listes", avec ou sans regroupement des listes en "coalitions").

Dans le paragraphe 4 nous examinons l'influence du choix de l'unité territoriale sur le résultat final, en comparant les résultats obtenus si l'on applique la même méthode au même scrutin avec divers niveaux de regroupement des voix : départemental, régional ou national.

Au paragraphe 5 nous introduisons un outil important pour la comparaison des méthodes entre elles, formalisant la notion de "biais" ([1]).

Dans le paragraphe 6 nous étudions la variation des résultats produits par une méthode donnée quand on fait varier le nombre de sièges à répartir, situation qui engendre le classique "paradoxe d'Alabama".

Le paragraphe 7 est consacré à deux moyens de comparer deux élections tenues par exemple à des dates différentes mais dans les mêmes conditions : mêmes listes en présence, même nombre de sièges à pourvoir, même méthode proportionnelle. Nous formalisons et généralisons ainsi la notion de "population monotonicity" ([1]).

Au paragraphe 8 on étudie la notion de "sous-problèmes proportionnels" qui consistent à ne considérer qu'une partie des listes en présence et à redistribuer entre elles les sièges qu'elles ont obtenus. Le problème ainsi posé est similaire à celui de l'"independence of irrelevant alternatives" en matière d'agrégation des préférences.

Enfin dans le paragraphe 9 nous illustrons une notion de "robustesse d'une méthode proportionnelle" qui a été introduite dans [5].

II. PRESENTATION DES DIFFERENTES METHODES

Précisons le problème posé dans les termes du deuxième étage "scrutin de listes" (nous utilisons les notations de [5]). Nous devons distribuer n sièges entre p listes, proportionnellement aux nombres de vois recueillies par ces listes. Soient :

$L = \{l_1, ..., l_p\}$ l'ensemble des p listes,

$v_1, ..., v_p$ les nombres de voix recueillies par ces listes,

nous poserons $V = (v_1, ..., v_p)$.

Une méthode proportionnelle est un processus P qui associe, à chaque valeur de n et à chaque V, un partage :

$S = P(n, V) = (s_1, ..., s_p)$, où

s_α = nombre de sièges obtenus par la liste l_α,

S devant vérifier les deux conditions suivantes :

$s_1, ..., s_p$ sont des nombres entiers et

$s_1 + ... + s_p = n$.

La nature proportionnelle du problème entraîne que le partage ne dépend pas explicitement des "effectifs" v_α, mais seulement des "fréquences" f_α définies par :

$f_\alpha = v_\alpha / (v_1 + \quad + v_n)$ (ou encore des pourcentages $p_\alpha = 100 f_\alpha$).

Nous appellerons $F = (f_1, \quad , f_p)$, ou encore $V = (v_1, ..., v_p)$, le résultat du scrutin et f_α, ou v_α, le score de la liste l_α.

méthodes multiplicatives ([4], [5]). On donne dans [5] deux présentations de ces familles, l'une algorithmique et l'autre géométrique. Nous en donnons ici une troisième présentation, généralisant la présentation classique des métodes à diviseurs ([1]).

Si le vecteur $nF = (nf_1, ..., nf_p)$ avait des coordonnées entières, c'est évidemment lui que l'on prendrait pour partage S. Seulement une telle coïncidence ne se produit pratiquement jamais. Une idée naturelle est alors d'arrondir les nombres nf_α. Cette idée simple pose deux problèmes : d'abord il existe une grande variété de "procédures d'arrondiement" ; ensuite le vecteur ainsi obtenu a bien des coordonnées entières, mais la somme de ces coordonnées n'est pas forcément n.

La solution du second problème consiste à modifier le vecteur nF avant d'en arrondir les coordonnées, jusqu'à ce que la somme des arrondis ainsi obtenus soit n. Il y a deux façons standard d'effectuer cette modification, donnant naissance l'une aux méthodes additives et l'autre aux méthodes multiplicatives.

Chaque procédure d'arrondiement donne ainsi lieu à une méthode dans chacune de ces deux familles. Or il existe une infinie variété de procédures d'arrondiement . Une telle procédure est en effet définie par une suite (u_k) de nombres réels : le réel x est arrondi à l'entier k si et seulement si il est compris entre u_k et u_{k+1}. Nous nous restreindrons ici à la famille infinie des procédures d'arrondiement associées à des suites de la forme :

(∗) $u_k = k+r$ où r est un nombre réel donné.

Par exemple les valeurs -1, -1/2 et 0 du paramètre r correspondent respectivement aux arrondiements à la partie entière, à l'entier le plus proche et au plus petit entier supérieur.

Nous noterons PO_r la méthode additive associée à la suite (∗). Elle consiste à chercher un "additeur" a tel que la somme des arrondis des nombres $nf_1+a, ..., nf_p+a$ par la procédure d'arrondiement choisie soit n. On prend alors pour partage $PO_r(n,V)$ le vecteur S dont les coordonnées sont ces arrondis.

De même nous noterons $P1_r$ la méthode multiplicative associée à la suite (∗). Elle consiste à chercher un "multiplicateur" a tel que la somme des arrondis des nombres $anf_1, ..., anf_p$ par la procédure d'arrondiement choisie soit n. On prend alors pour partage $P1_r(n,V)$ le vecteur S dont les coordonnées sont ces arrondis.

A titre indicatif, le problème du premier étage en France (répartition de 555 sièges entre 96 départements proportionnellement à leur population) a été règlé par la loi électorale de 1985 en utilisant (vraisemblablement) la méthode $P1_{-1}$, avec la contrainte que tout département devait recevoir au moins deux sièges. On a montré dans [2] les répartitions de sièges qu'auraient produites d'autres méthodes classiques.

III. APPLICATIONS DES DIFFERENTES METHODES PROPORTIONNELLES

Nous traitons uniquement du problème du deuxième étage, scrutin de liste, à partir des résultats des élections législatives du 16 Mars 1986 ([3]). Pour simplifier les résultats, nous ferons les hypothèses suivantes :

III.1. Hypothèses de travail

1) Nous ne considérons que les 96 départements de la "métropole" (y compris les deux départements de la Corse). Ces 96 départements devaient élire 555 députés à l'Assemblée Nationale.

2) Nous regroupons les différentes listes en l'ensemble L des 15 listes suivantes :

EXT-GA	EXTrême GAuche ;
PC	Parti Communiste ;
PS	Parti Socialiste ;
UN-GA	UNion de la GAuche ;
MRG	Mouvement des Radicaux de Gauche ;
DIV-GA	DIVers GAuche ;
ECO	ECOlogistes ;
REG	REGionalistes ;
RPR	Rassemblement Pour la République ;
UDF	Union pour la Démocrate Française ;
UN-DR	UNion de la DRoite ;
DIV-DR	DIVers DRoite ;
FN	Front National ;
EX-DR	EXtrême DRoite ;
DIV	DIVers.

3) Quand nous parlons de coalitions des listes, nous considérons un ensemble de 8 coalitions :

L_c = {EXT-GA ; PC ; UNI-GA ; ECO ; REG ; UNI-DR ; EXT-DR ; DIV}

où

UNI-GA = {PS ; UN-GA ; MRG ; DIV-GA},
UNI-DR = {RPR ; UDF ; UN-DR ; DIV-DR},
et EXT-DR = {FN ; EX-DR}.

4) Les conditions mathématiques nous imposent de prendre, dans les cas traités ici :

$-2 < r$ pour une méthode additive et
$-1 \leq r$ pour une méthode multiplicative

(les méthodes multiplicatives classiques utilisent des valeurs de r comprises entre -1 et 0. Nous utiliserons dans ce travail trois valeurs de r qui sortent de cet intervalle : 0.5, 1 et 2).

5) Nous utilisons 7 méthodes additives et 6 multiplicatives, associées à 7 valeurs de r (figure1).

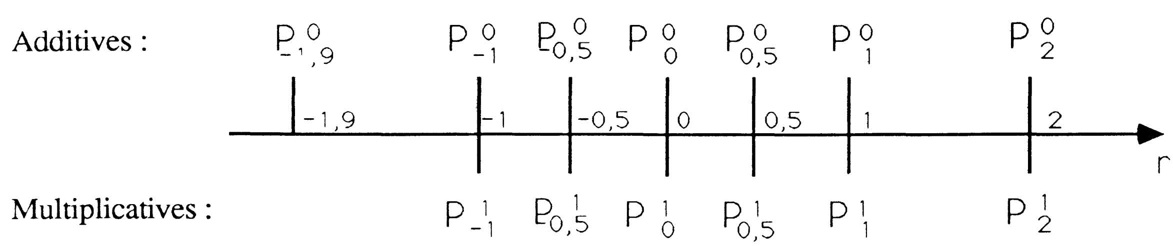


Figure 1 : Les 13 méthodes utilisées.

6) La théorie mathématique montre que, pour $0 < r$, les méthodes additives et multiplicatives peuvent faire apparaître des nombres de sièges négatifs. Pour éliminer ces effets parasites, nous

imposons la condition suivante : chaque liste doit recevoir un nombre de sièges positif ou nul .

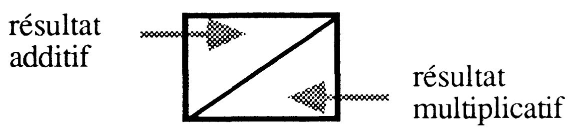
7) Nous calculons les répartitions de sièges dans chacun des 3 cas suivants :

(A) : Non-intervention du seuil d'élimination des listes en dessous de 5%,

(B) : Intervention du seuil d'élimination des listes en dessous de 5%,

(C) : Elimination des listes en dessous de 5% et coalition des listes.

8) Dans les tableaux de résultats, nous utiliserons la convention suivante :



Tous les calculs ont été effectués à l'aide d'un logiciel écrit par l'un des auteurs ([8]) sur la base de la présentation algorithmique des méthodes proportionnelles. Cet algorithme consiste en la recherche du minimax d'un "critère de représentation" ([4]) et s'est avéré très performant.

III.2. Résultats du cas (A)

Les tableaux (1) à (4) donnent les résultats correspondant à ce cas pour les départements suivants (les scores sont exprimés en pourcentages) :

Hérault (34)	: n = 7 sièges,	p = 7 listes
Lozère (48)	: n = 2 sièges,	p = 5 listes
Nord (59)	: n = 24 sièges,	p = 10 listes
Paris (75)	: n = 21 sièges,	p = 10 listes.

Les départements du Nord (n=24) et de Paris (n=21) sont, vis à vis du critère population, les deux plus gros départements ; le département de l'Hérault (n=7) est un département moyen et le département de la Lozère (n=2) est un petit département.

Dans chaque département, les différences de répartition des sièges d'une méthode à l'autre portent généralement sur un petit nombre de sièges. Mais une différence d'un seul siège peut sembler importante à certains, notamment à ceux qui veulent s'asseoir sur ce siège. On peut encore mieux évaluer l'importance de ces différences quand on cumule les résultats obtenus département par département et que l'on compare les treize Chambres des Députés ainsi obtenues (tableau 5).

Rappelons que la méthode réellement utilisée dans cette élection fut la méthode "des plus fortes moyennes", c'est à dire la méthode multiplicative P^{1}_{0} (colonne centrale de nos tableaux).

Hérault		r						
listes	scores	-1.9	-1	-0.5	0	0.5	1	2
UN-GA	33.96	2	2 1	2 3	2 3	2 3	2 4	3 4
RPR	21.55	1	2 1	2 1	2 1	2 2	2 2	1 2
FN	15.55	1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
PC	12.84	1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0
UDF	12.82	1	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0
DIV-DR	2.63	1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
EXT-GA	0.64	0	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0

Tableau 1 : Résultat des 13 méthodes pour le département de l'Hérault sous l'hypothèse (A).

Lozère		r						
listes	scores	-1.9	-1	-0.5	0	0.5	1	2
UN-DR	60.00	1	1 1	1 1	1 2	1 2	1 2	2 2
PS	28.08	1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0	0 0
FN	5.79	0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
PC	4.32	0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
EXT-GA	0.80	0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0

Tableau 2 : Résultat des 13 méthodes pour le département de la Lozère sous l'hypothèse (A).

Nord		r						
listes	scores	-1.9	-1	-0.5	0	0.5	1	2
UN-GA	30.02	7	7 6	7 7	7 8	7 9	7 9	8 9
RPR	23.18	5	6 5	6 6	6 6	6 6	6 7	6 7
PC	13.74	3	3 3	3 3	3 3	3 3	3 3	3 3
UDF	12.83	3	3 3	3 3	3 3	3 3	3 3	3 3
FN	11.35	3	3 2	3 3	3 3	3 3	3 2	3 2
EXT-GA	3.98	1	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0
ECO	2.99	1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0	0 0
DIV-DR	1.25	1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
DIV-GA	0.35	0	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
EXT-DR	0.32	0	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0

Tableau 3 : Résultat des 13 méthodes pour le département du Nord sous l'hypothèse (A).

Paris		r						
listes	scores	-1.9	-1	-0.5	0	0.5	1	2
RPR	35.04	7	7 6	7 7	7 8	7 9	8 9	8 10
PS	31.95	6	7 5	7 7	7 8	7 8	7 8	7 8
UDF	11.83	3	3 2	3 3	3 2	3 2	2 2	3 2
FN	10.99	2	2 2	2 2	2 2	2 2	2 2	2 1
PC	4.57	1	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0
DIV-DR	2.79	1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0	0 0
ECO	1.76	1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
EXT-GA	0.97	0	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
EX-DR	0.07	0	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
DIV-GA	0.03	0	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0

Tableau 4 : Résultat des 13 méthodes pour le département de Paris sous l'hypothèse (A).

Chambre	r						
	-1.9	-1	-0.5	0	0.5	1	2
EXT-GA	6	2 36	2 2	2 1	2 0	2 0	1 0
PC	73	65 74	59 50	54 32	51 21	43 18	39 14
PS	99	106 75	108 115	112 121	112 124	117 128	79 126
UN-GAU	63	68 50	71 72	71 85	72 89	75 91	80 96
MRG	1	1 5	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
DIV-GAU	5	5 15	5 5	5 5	5 2	5 1	5 0
ECO	13	6 21	4 2	3 0	3 0	1 0	0 0
REG	0	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
RPR	64	69 52	72 75	74 75	74 77	77 79	75 80
UDF	48	49 37	51 51	52 55	54 55	53 54	54 53
UN-DR	93	106 71	114 127	120 139	125 152	132 155	137 165
DIV--DR	17	14 29	14 13	13 6	10 4	8 4	6 4
FN	73	64 70	54 42	48 35	46 30	41 24	38 16
EXT-DR	0	0 13	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
DIV	0	0 6	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0

Tableau 5 : Composition des treize Chambres des Députés produites par l'application des treize méthodes à chacun des 96 départements métropolitains.

Nous pouvons représenter graphiquement ces différents tableaux. Par exemple,les figures (2) et (3) illustrent les résultat additifs et multiplicatifs obtenus dans le cas de l'Hérault. Sur ces figures on peut constater le phénomène suivant : L'augmentation du paramètre r tend à favoriser les grosses listes aux dépens des petites (nous reviendrons sur ce point important au paragraphe 5).

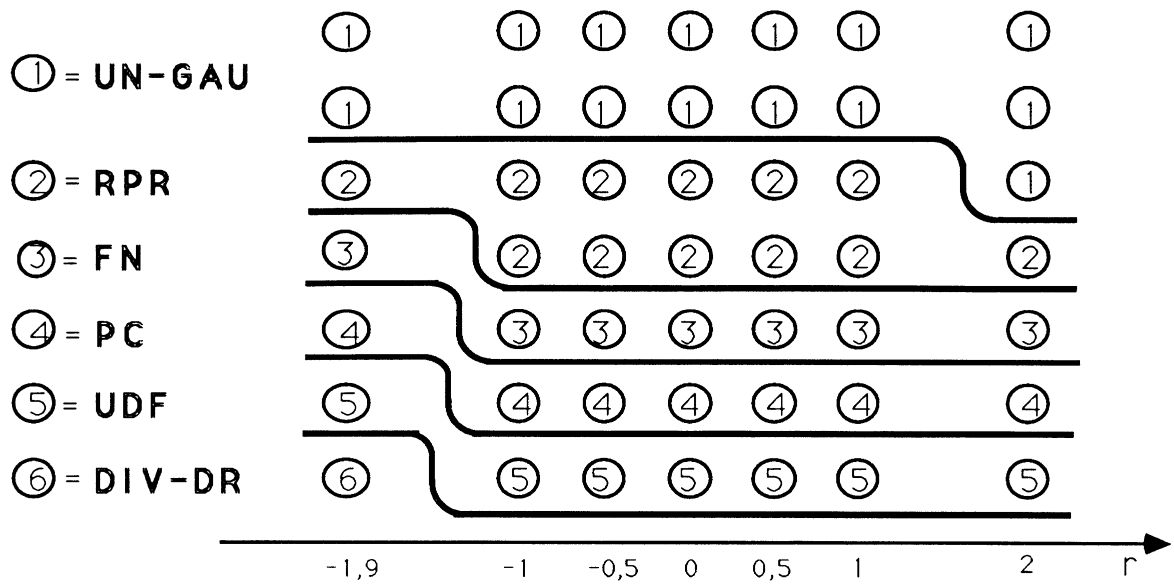


Figure 2 : Représentation graphique des résultats de 7 méthodes additives dans le département de l'Hérault (tableau 2).

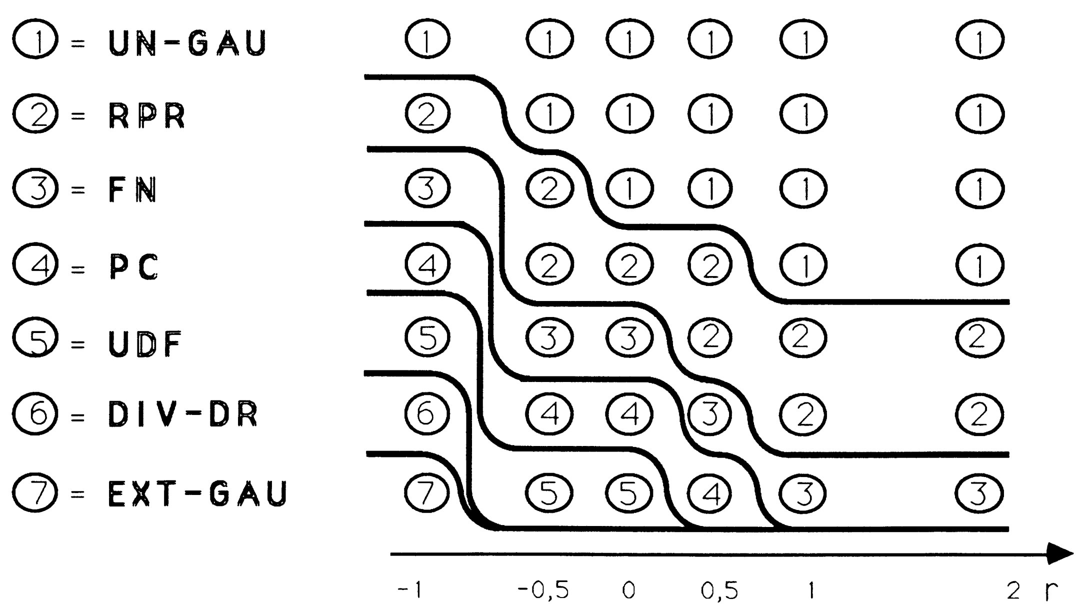


Figure 3 : Représentation graphique des résultats de 6 méthodes multiplicatives dans le département de l'Hérault (tableau 2).

Les figures 4 et 5 illustrent les différences entre quatre des Chambres ainsi obtenues (tableau 5).

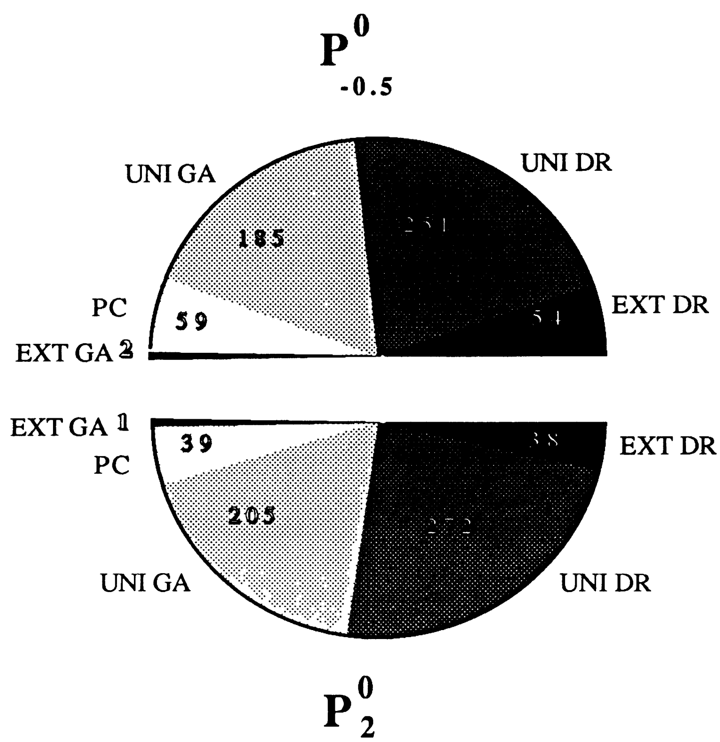


Figure 4: Les deux Chambres obtenues par les méthodes additives $P^0_{-0.5}$ et P^0_2 sous l'hypothèse (A).

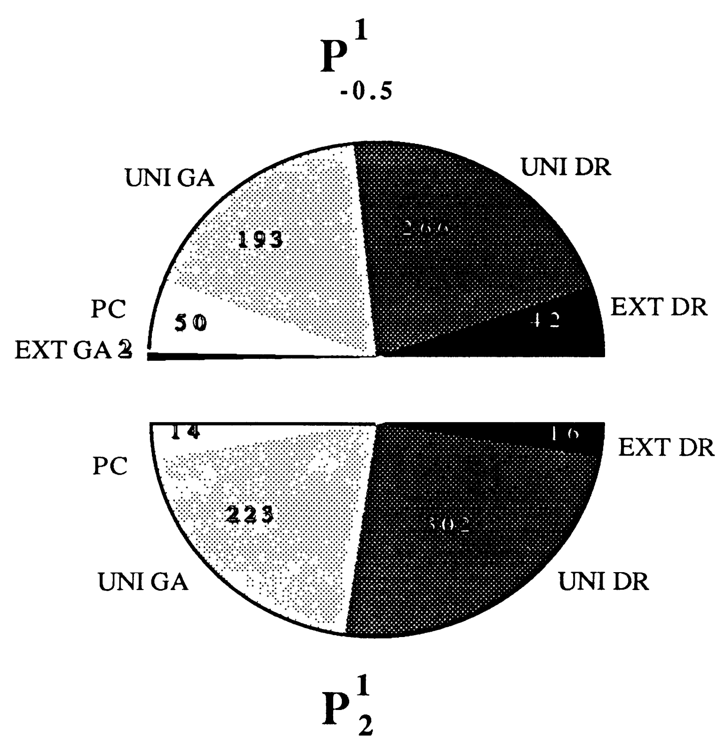


Figure 5 : Les deux Chambres obtenues par les méthodes multiplicatives $P^1_{-0.5}$ et P^1_2 sous l'hypothèse (A).

Les figures (4) et (5) montrent aussi que les méthodes multiplicatives sont plus sensibles que les méthodes additives aux variations du paramètre r. On peut le montrer en utilisant le classique indice du χ^2. Posons :

s_α = nombre de sièges obtenus par la liste α avec la méthode P et

s'_α = nombre de sièges obtenus par la liste α avec la méthode P'

et appliquons la formule bien connue :

$$\chi^2(P'/P) = \sum_\alpha \frac{(s'_\alpha - s_\alpha)^2}{s_\alpha}$$

Nous obtenons en particulier :

$$\chi^2(P_2^0/P_{-0,5}^0) = 15{,}94$$

$$\chi^2(P_2^1/P_{-0,5}^1) = 79{,}71$$

La différence entre les deux méthodes multiplicatives apparaît ainsi nettement plus grande que la différence entre les méthodes additives correspondant aux deux mêmes valeurs du paramètre r.

III.3. Résultats du cas (B)

Nous appliquons maintenant les mêmes méthodes aux mêmes scrutins, après élimination dans chaque scrutin des listes qui n'ont pas obtenu 5% des voix. En cumulant les résultats ainsi obtenus dans les 96 départements nous obtenons les 13 chambres du tableau 6. Rappelons que ce seuil d'élimination est effectivement appliqué dans la loi électorale Française de 1985. La Chambre élue en 1986 correspond donc à la colonne centrale du tableau 6 (exception faite des députés non métropolitains).

Le tableau 7 permet de vérifier l'influence de ce seuil. Il montre les gains ou pertes de sièges correspondant au passage du tableau 5, sans application du seuil, au tableau 6, avec application du seuil.Dans chaque case, on a inscrit les nombres $s_\alpha(B)$ - $s_\alpha(A)$ où :

$s_\alpha(A)$ = nombre de sièges obtenus par la liste α pour une méthode donnée sous l'hypothèse (A) et

$s_\alpha(B)$ = nombre de sièges obtenus par la liste α pour la même méthode sous l'hypothèse (B).

Nous constatons sur le tableau 7 le phénomène suivant : pour $r \geq 0$, le seuil d'élimination de 5% ne joue pratiquement plus aucun rôle pour les méthodes multiplicatives. Nous reviendrons, dans les paragraphes suivants, sur le rôle de ce seuil d'élimination. On voit en particulier que $P_1^1(A) = P_1^1(B)$. Ce fait est à rapprocher de la propriété d'indépendance conditionnelle des méthodes multiplicatives qui sera développée au paragraphe 8.

Chambre	r						
	-1.9	-1	-0.5	0	0.5	1	2
EXT-GA	0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
PC	72	63 71	56 51	54 32	50 21	44 18	32 14
PS	104	108 103	110 115	112 121	115 124	120 128	120 126
UN-GAU	67	72 66	73 75	75 85	76 89	78 91	84 96
MRG	1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
DIV-GAU	5	5 5	5 5	5 4	5 2	5 1	5 0
ECO	0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
REG	0	0 0	0 0	0 0	0 0	 0	0 0
RPR	69	73 68	76 77	76 75	76 77	75 79	75 80
UDF	53	55 55	56 54	56 57	53 55	53 54	56 54
UN-DR	101	111 101	117 127	122 139	130 152	133 155	142 165
DIV--DR	10	8 11	8 7	7 6	6 4	6 4	6 3
FN	73	59 74	53 43	47 35	43 30	40 24	35 16
EXT-DR	0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
DIV	0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0

Tableau 6 : Résultat des 13 méthodes pour les 96 départements sous l'hypothèse (B).

Chambre	r						
	-1.9	-1	-0.5	0	0.5	1	2
EXT-GA	-6	-2 -36	-2 -2	-2 -1	-2 =	-2 =	-1 =
PC	-1	-2 -3	-3 -1	= =	-1 =	+1 =	-7 =
PS	+5	+2 +28	+2 =	= =	+3 =	+3 =	+1 =
UN-GAU	+4	+4 +16	+2 +3	+4 =	+4 =	+3 =	+4 =
MRG	=	= -4	= =	= =	= =	= =	= =
DIV-GAU	=	= -10	= =	= -1	= =	= =	= =
ECO	-13	-6 -21	-4 -2	-3 =	-3 =	-1 =	= =
REG	=	= -1	= =	= =	= =	= =	= =
RPR	+5	+4 +16	+4 +2	+2 =	+2 =	+2 =	= =
UDF	+5	+6 +18	+5 +3	+4 +2	-1 =	= =	+2 +1
UN-DR	+8	+5 +30	+3 =	+2 =	+5 =	+1 =	+5 =
DIV--DR	-7	-6 -18	-6 -6	-6 =	-4 =	-2 =	= -1
FN	=	-5 +4	-1 +1	-1 =	-3 =	-1 =	-3 =
EXT-DR	=	= -13	= =	= =	= =	= =	= =
DIV	=	= -6	= =	= =	= =	= =	= =

Tableau 7 : Influence du seuil d'élimination des listes en dessous de 5%.

III.4. Résultats du cas (C)

Les mêmes méthodes sont maintenant appliquées à des scrutins fictifs obtenus à partir des scrutins réels en opérant les coalitions de listes indiquées au paragraphe III-1. On élimine de chacun de ces scrutins les coalitions n'atteignant pas 5% des voix.

Le tableau 8 donne les 13 chambres ainsi obtenues.

Le tableau 9 établit la différence entre les cas (B) et (C), ou entre les tableaux (6) et (8), pour deux des treize méthodes : la méthode additive P^0_0 et la méthode multiplicative P^1_0.

Dans le cas réellement appliqué par la loi française de 1985, l'effet du regroupement en coalitions aurait donc été une perte de 15 sièges par la gauche (6 Communistes et 9 Union de la Gauche) au profit de l'Union de la Droite.

Chambre	r						
	-1.9	-1	-0.5	0	0.5	1	2
EXT-GA	0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
PC	77	65 76	60 47	54 26	44 18	37 14	26 8
UNI-GA	178	183 179	188 196	194 202	195 202	200 202	198 192
ECO	0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
REG	0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
UNI-DR	222	241 222	253 269	262 292	273 307	279 320	296 345
EXT-DR	78	66 78	54 43	45 35	43 28	39 19	35 10
DIV	0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0

Tableau 8 : Résultats des 13 méthodes pour les 96 départements sous l'hypothèse (C).

Chambre	r=0		
	B	C	C-B
PC	54 32	54 26	= -6
UNI-GA	193 211	194 202	+1 -9
ECO	251 277	262 292	+1 +15
EXT-DR	47 35	45 35	-2 =

Tableau 9 : Comparaison des cas (B) et (C) pour la méthode additive P^0_0 et la méthode multiplicative P^1_0.

Remarque

Il existe certaines transformations qui permettent de passer d'une méthode P^i_r à une autre méthode $P^i_{r'}$ (cf [4]). Par exemple, dans le cas des méthodes multiplicatives, nous avons une opération de décalage sur le nombre de sièges qui peut s'exprimer de la manière suivante :

$$P^1_{r-1}(n+p) = P^1_r(n) + P_u(p)$$

où P_u (p) est le "partage uniforme" qui donne 1 siège à chaque liste.

Le tableau 10 illustre cette loi sur l'exemple du département du Nord.

Nord	P^1_{-1} (24)	P^1_0 (14)	P_u(10)
UN-GA	6	5	1
RPR	5	4	1
PC	3	2	1
UDF	3	2	1
FN	2	1	1
EXT-GA	1	0	1
ECO	1	0	1
DIV-DR	1	0	1
DIV-GA	1	0	1
EXT-DR	1	0	1

Tableau 10 : Vérification sur l'exemple du département du Nord du décalage des méthodes multiplicatives.

IV. PROBLEME DE LA CHIRURGIE ELECTORALE

La loi électorale de 1985 prenait comme découpage de la métropole les départements. On peut considérer d'autres découpages, comme :

$\mathbb{M}$: le découpage consistant à prendre un seul morceau, la métropole,
$\mathbb{R}$: le découpage en 22 régions,
$\mathbb{D}$: le découpage suivant les 96 départements
ou $\mathbb{C}$: le découpage en 555 circonscriptions établi en juillet 1987.

Ces divers découpages sont emboîtés les uns dans les autres, comme l'illustre la figure 6 : un département est un ensemble de circonscriptions, une région un ensemble de départements...

A l'une des extrémités de l'arbre, $\mathbb{C}$, on retrouve le scrutin uninominal à un tour : un seul siège par circonscription et élection du candidat qui a le plus de voix. Il est difficile de simuler ce cas dans notre exemple : il faudrait en particulier faire une quantité d'hypothèses hasardeuses sur l'identité (au moins politique) des candidats qui se seraient présentés dans chaque circonscription.

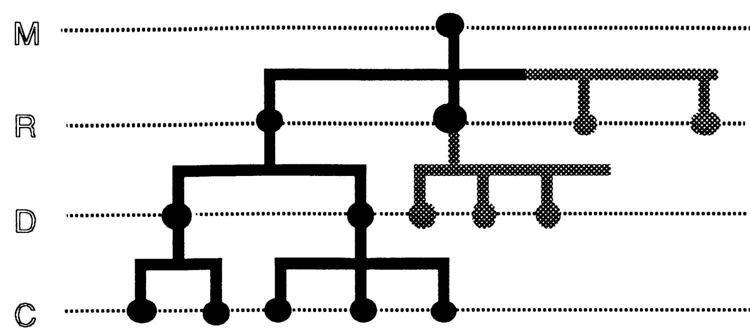


Figure 6 : Dendrogramme des quatre découpages.

A l'autre extrémité de l'arbre, $\mathbb{M}$, on trouve le scrutin proportionnel pur : les 555 députés sont répartis entre toutes les listes présentes proportionnellement à leurs scrutins nationaux. Cette situation peut raisonnablement être simulée en utilisant le regroupement des listes par coalitions (cas "C") et en cumulant leurs voix au niveau national. Un traitement similaire peut être fait au niveau intermédiaire des régions, $\mathbb{R}$.

Le tableau 11 donne les résultats des 13 méthodes sous les hypothèses (C) et ($\mathbb{R}$) et le tableau 12 le résultat des 13 méthodes sous les hypothèses (C) et ($\mathbb{M}$).

Chambre	r						
	-1.9	-1	-0.5	0	0.5	1	2
EXT-GA	0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
PC	61	60 61	57 56	56 45	54 43	50 39	46 27
UNI-GA	186	183 184	186 187	187 191	189 193	193 197	192 204
ECO	0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
REG	1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
UNI-DR	245	254 247	255 256	256 266	256 274	256 281	265 294
EXT-DR	63	58 62	57 56	56 53	56 45	56 38	52 30
DIV	0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0

Tableau 11 : Résultat des 13 méthodes sous les hypothèses (C) et ($\mathbb{R}$).

La comparaison du tableau 11 avec le tableau 8 montre que les différences entre les distributions de sièges à la Chambre obtenues par nos treize méthodes sont beaucoup moins grandes lorsque les scrutins sont regroupés par régions que lorsque le calcul est fait département par département. Ceci est dû au fait que les nombres de sièges mis en jeu à chaque répartition sont beaucoup plus grands.

C'est encore plus vrai quand la répartition est calculée directement au niveau national (tableau 12) : nous constatons alors que le résultat est presque indépendant de la méthode choisie.

Ceci illustre une sorte de "loi des grands nombres" que nous pouvons énoncer comme suit :

- Si s_α est le nombre de sièges attribués par une méthode P à la liste α quand il y a n sièges à répartir, le rapport s_α/n tend vers le score f_α de cette liste quand n augmente.

Chambre	r						
	-1.9	-1	-0.5	0	0.5	1	2
EXT-GA	0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
PC	56	55 56	55 55	55 55	55 55	55 54	55 54
UNI-GA	187	187 187	187 187	188 188	188 188	188 188	188 188
ECO	0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
REG	0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
UNI-DR	254	255 254	255 255	255 255	255 255	255 256	255 257
EXT-DR	58	58 58	58 58	57 57	57 57	57 57	57 56
DIV	0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0

Tableau 12 : Résultat des 13 méthodes sous les hypothèses (C) et ($\mathbb{M}$).

Nous pouvons quantifier l'influence du découpage en comparant les tableaux 8, 11 et 12 à l'aide de l'indicateur du χ^2. A une méthode P, appliquée dans certaines conditions :

ici (C) et ($\mathbb{D}$) ou (C) et ($\mathbb{R}$) ou (C) et ($\mathbb{M}$),

nous associons :

$$\chi^2(P) = \sum_\alpha \frac{(n_\alpha - n\, f_\alpha)^2}{n\, f_\alpha} = \sum_\alpha \frac{(n_\alpha - 555\, f_\alpha)^2}{555\, f_\alpha}$$

χ^2	r				
Découpages	-0.5	0	0.5	1	2
$\mathbb{N}$	0.007 0.007	0.006 0.006	0.006 0.006	0.006 0.036	0.006 0.084
$\mathbb{R}$	0.078 0.059	0.059 2.782	0.081 7.006	0.688 14.52	2.563 30.66
$\mathbb{D}$	0.650 6.038	3.168 30.77	7.513 51.98	5.061 74.30	31.06 111.6

Tableau 13 : les χ^2 pour 10 méthodes et 3 découpages.

Cet indicateur traduit la "distance" entre le partage S et le résultat du scrutin. Le tableau 13 montre ces différents χ^2 calculés avec un score réduit à quatre coalitions :

$f_{PC} = 9.94\%$; $f_{UNI\text{-}GA} = 33.79\%$; $f_{UNI\text{-}DR} = 45.91\%$; $f_{FN} = 10.36\%$.

Remarques :

1. L'hypothèse ($\mathbb{M}$) a sur les hypothèses ($\mathbb{R}$), ($\mathbb{D}$) ou ($\mathbb{C}$), les avantages suivants :
   - elle minimise la distance introduite précédemment,
   - l'influence du choix d'une méthode devient négligeable,
   - elle évite d'avoir à résoudre les problèmes du premier étage qui présentent autant d'arbitraire que les problèmes du deuxième étage (Cf [2]).

2. Quand on utilise un découpage du genre ($\mathbb{C}$), dans chaque morceau du découpage (circonscription), on est conduit à un problème proportionnel où le paramètre n vaut 1 (dans le cas où $n=1$, le scrutin proportionnel s'appelle "**scrutin majoritaire**"). L'avantage de l'hypothèse ($\mathbb{C}$) est que, dans ce cas, toutes les méthodes proportionnelles coïncident mais cette hypothèse présente deux inconvénients :
   - la distance introduite ci-dessus devient grande : c'est la solution la plus éloignée de la règle : «Un homme, une voix» ,
   - le problème du découpage ("comment découper équitablement la métropole en 555 morceaux homogènes ?") est pratiquement insoluble.

V. COMPARAISON DES METHODES

Pour pouvoir comparer deux méthodes proportionnelles P et P' il nous faut donner un sens précis à la relation de "biais" ([1]), que nous noterons " $P < P'$," et qui traduit le fait que :

P' "favorise plus les grosses listes" que P , ou
P "favorise plus les petites listes" que P'.

Pour cela nous utiliserons la notion d'ordre du cumul ([4],[6]), relation d'ordre sur l'espace des mesures sur un ensemble ordonné.

Commençons par indexer les listes dans l'ordre de leurs scores : le scrutin V étant fixé, on note $L = \{ l_1 , ... , l_p \}$, avec : $v(l_1) \geq v(l_2) \geq \ldots \geq v(l_p)$.

Ainsi avons nous, dans le cas du Nord (tableau 3) :

l_1 = UN-GA ; l_2 = RPR ; ... ; l_{10} = EX-DR.

Soient S et S' les partages $S = P(n,V)$ et $S' = P'(n,V)$. Nous noterons $S < S'$ si :

$s_1 \leq s'_1$,
$s_1 + s_2 \leq s'_1 + s'_2$,
$s_1 + s_2 + s_3 \leq s'_1 + s'_2 + s_3$, etc.

En utilisant la notion de "fonction de répartition" (ou "effectifs cumulés") les inégalités ci-dessus se traduisent (figure 7) par : "la fonction de répartition de $S = (s_1, s_2, \ldots, s_p)$ est inférieure ou égale à la fonction de répartition de $S' = (s'_1, s'_2, \ldots, s'_p)$."

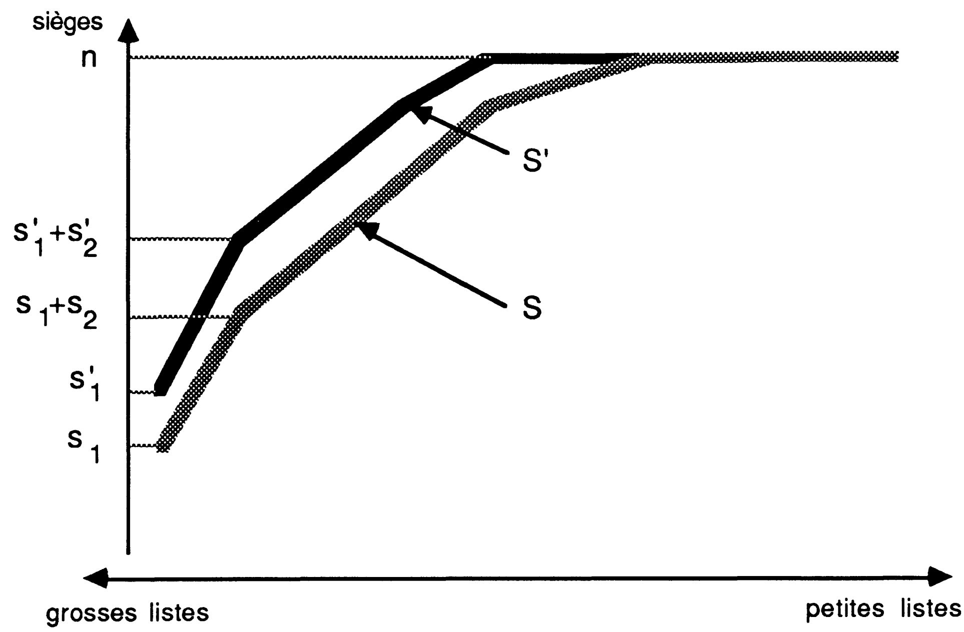


Figure 7 : Illustration graphique de S<S'.

Nous définissons alors la relation $P < P'$ par les inégalités suivantes :

$$S = P(n,V) < S' = P'(n,V) \text{ pour tout n et pour tout } V.$$

Si nous prenons pour n et V les données du département du Nord, les effectifs cumulés pour deux méthodes additives et deux méthodes multiplicatives (tableau 14) montrent que l'on a (figure 8) : $P^0{}_0(n,V) < P^0{}_2(n,V) < P^1{}_0(n,V) < P^1{}_2(n,V)$.

Nord		r	
listes	scores	0	2
UN-GA	30.02	7 9	8 9
RPR	23.18	13 15	14 16
PC	13.74	16 18	17 19
UDF	12.83	19 21	20 22
FN	11.35	22 24	23 24
EXT-GA	3.98	23 24	24 24
ECO	2.99	24 24	24 24
DIV-DR	1.25	24 24	24 24
DIV-GA	0.35	24 24	24 24
EXT-DR	0.32	24 24	24 24

Tableau 14 : Résultats cumulés dans le département du Nord, pour r=0 et r=2.

La figure 8 traduit, en particulier, l'expression courante : « La méthode des plus forts restes favorise plus les petites listes que la méthode des plus fortes moyennes » (nous donnons, ici, une définition précise de "favoriser les plus petites listes").

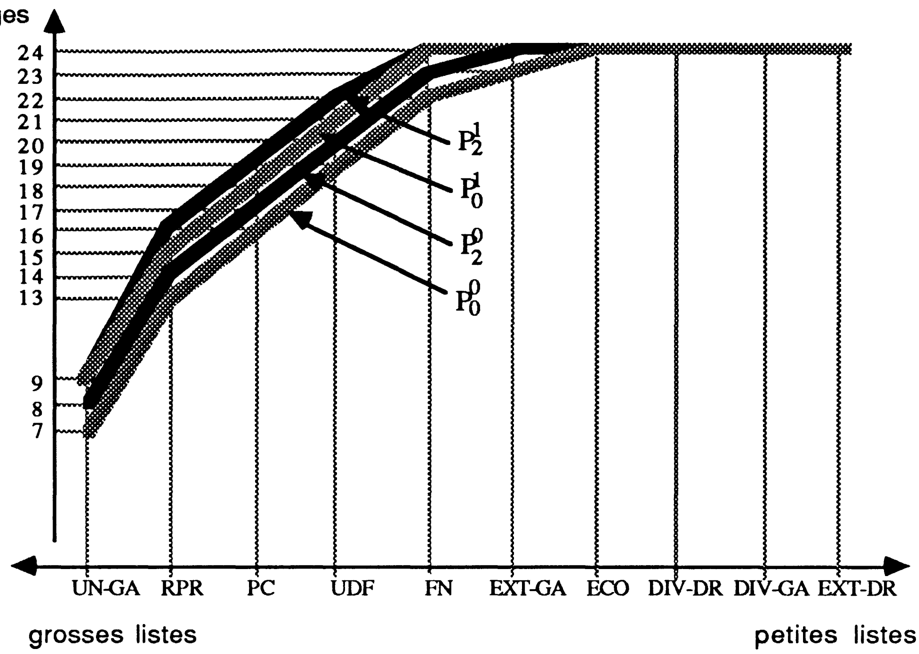


Figure 8 : Illustration graphique des relations $P0_0 < P0_2 < P1_0 < P1_2$.

La comparaison $P < P'$ est abondamment illustrée par les différents résultats donnés dans le §3. Nous pouvons, en particulier, retenir les règles suivantes :

1. l'augmentation de r tend à favoriser les grosses listes,
2. La diminution de r tend à favoriser les petites listes,
3. pour $r \geq 0$, une méthode additive favorise plus les petites listes que la méthode multiplicative correspondant à la même valeur de r.

On peut, en effet, démontrer les résultats suivant ([4]) :

- comparaison des méthodes additives entre elles :

$$r \leq r' \Rightarrow P0_r < P0_{r'}$$

- comparaison des méthodes multiplicatives entre elles :

$$r \leq r' \Rightarrow P1_r < P1_{r'}$$

- comparaison des méthodes additives et multiplicatives :

$$0 \leq r \Rightarrow P0_r < P1_r \text{ et } r \leq -1 \Rightarrow P1_r < P0_r.$$

Dans la zone $-1 \leq r < 0$, on ne peut pas comparer les méthodes additives et multiplicatives. En effet, dans cet intervalle, on peut obtenir chacun des trois cas suivants :

- $P0_r < P1_r$,
- $P1_r < P0_r$, ou
- $P0_r$ non comparable à $P1_r$.

VI. COMPORTEMENT DES METHODES VIS-A-VIS DE LA VARIATION DU NOMBRE DE SIEGES

Nous dirons qu'une méthode P possède la propriété de *croissance forte* vis à vis de la variation du paramètre n, si elle vérifie :

- le nombre de sièges d'une liste ne peut pas diminuer quand on augmente le nombre total de sièges à répartir.

Une méthode qui ne vérifie pas la propriété précédente est une méthode qui présente l'« *effet Alabama* ». On peut montrer les résultats suivants :

- aucune méthode multiplicative ne peut produire l'effet Alabama,

Le tableau 15 est un exemple d'effet Alabama (données fictives) : pour n=3 le PC a un siège, pour n=4 il n'en a pas.

"Alabama/Oise"		$P_0^0(3)$	$P_0^0(4)$
listes	scores		
UN-GA	42.99	1	2
UN-DR	37.38	1	2
PC	13.08	1	0
EX-DR	3.74	0	0
DIV	2.80	0	0

Tableau 15 : Résultats de la méthode P^0_0 pour n=3 et n=4 et avec l'hypothèse (C).

Remarque

Les méthodes additives ne possèdent pas la propriété de croissance forte précédente ; mais elles possèdent la propriété de *croissance faible* suivante :

- si on range les listes par ordre décroissant selon le résultat du scrutin V, comme nous l'avons fait au §5, alors les sommes cumulées obtenues pour une valeur du paramètre n sont inférieures ou égales aux sommes cumulées obtenues pour $n'>n$.

VII. COMPORTEMENT DES METHODES VIS-A-VIS DE LA VARIATION DU RESULTAT D'UN SCRUTIN

Etant donnés une méthode de partage proportionnel P et deux scrutins V et V', nous cherchons à comparer les résultats P(V) aux résultats P(V'), les autres paramètres (n, p) ne variant pas. Nous allons reprendre les idées du § 5 (utilisation des courbes cumulées) avec les changements suivants :

situation du §5		situation du §7
deux méthodes,		*une* seule méthode
et *un* seul résultat de scrutin	=>	et *deux* résultats de scrutin
P(n,V), P'(n,V).		P(n,V), P(n,V').

Si quand on passe du score V au score V' le partage de n sièges passe de S à S', on peut mesurer l'évolution du nombre des sièges obtenus par une liste l_α de deux manières différentes:

- comparaison additive : $s'_\alpha - s_\alpha$,
- comparaison multiplicative : s'_α / s_α .

Si l'on note l_1 la liste "la plus avantagée" dans le passage de V à V', l_2 la suivante, ... l_p la liste "la plus désavantagée", on obtient, selon la comparaison utilisée, deux classements qui ne coïncident en général pas :

- classement additif : $v'_1 - v_1 \geq \ldots \geq v'p - vp$,
- classement multiplicatif : $v'_1 / v_1 \geq \ldots \geq v'p / vp$.

Nous dirons que la méthode P a la propriété de *croissance additive* vis-à-vis de la variation du résultat du scrutin, si l'on a pour tout n et tout V $P(n,V) < P(n,V')$ quand les listes sont classées additivement.

Nous définissons, de même la *croissance multiplicative* en remplaçant le classement additif par le classement multiplicatif.

Illustrons ces notions sur un exemple. Le tableau 16 donne les résultats dans le département de l'Hérault pour des scores modifiés en se plaçant dans l'hypothèse (A).

Hérault		r						
listes	scores	-1.9	-1	-0.5	0	0.5	1	2
UN-GA	13.96	1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
RPR	10.55	1	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0
FN	5.55	0	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
PC	27.90	2	2 1	2 2	2 2	2 3	2 3	2 3
UDF	18.22	1	1 1	1 2	1 2	1 2	2 2	2 2
DIV-DR	17.57	1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
EXT-GA	5.65	1	1 1	1 0	1 0	1 0	0 0	0 0

Tableau 16 : Résultat des 13 méthodes pour le département de l'Hérault (scrutin arbitraire).

La figure 9 illustre la croissance additive pour $P0_0$ et la figure 10 la croissance multiplicative pour $P1_0$.

On montre que toutes les méthodes additives possèdent la croissance additive et que toutes les méthodes multiplicatives possèdent la croissance multiplicative. On peut aussi montrer que les méthodes additives ne possèdent pas la croissance multiplicative et que les méthodes multiplicatives ne possèdent pas la croissance additive ([4]).

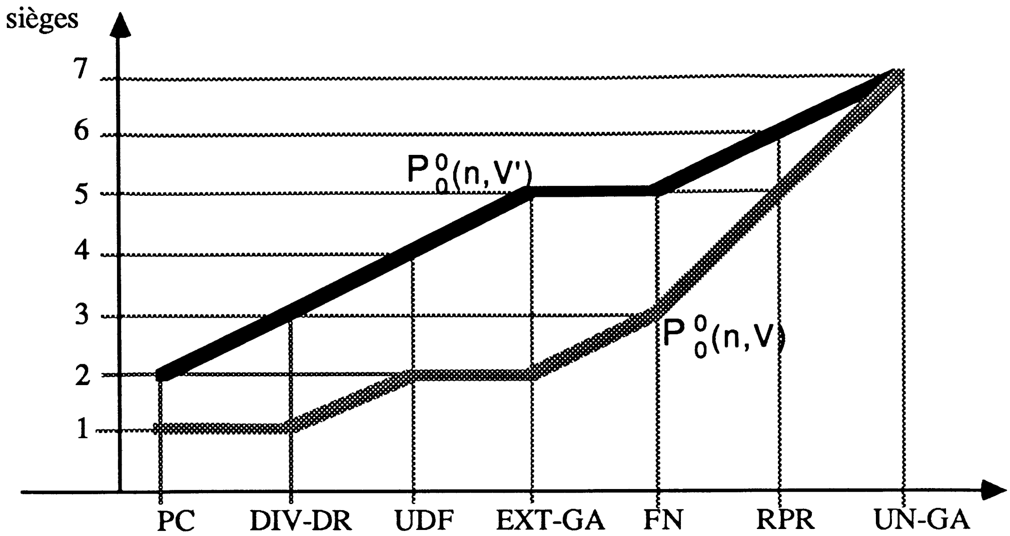


Figure 9 : Croissance additive de $P^0{}_0$ observéee en comparant les tableaux 3 et 16.

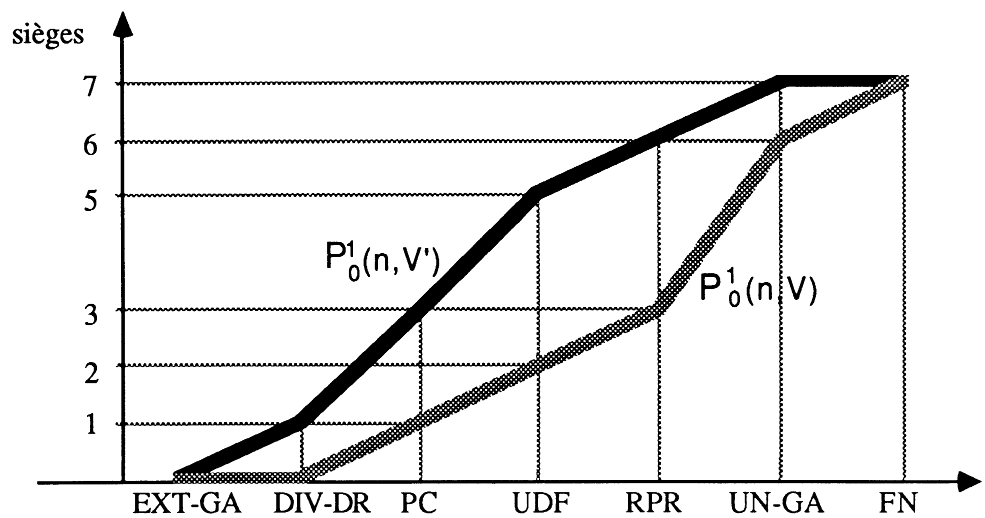


Figure 10 : Croissance multplicative de $P^1{}_0$ observée en comparant les tableaux 3 et 16.

VIII. INDEPENDANCE CONDITIONNELLE

Considérons le partage S de n sièges par une méthode P et un sous-ensemble L' de l'ensemble L des listes. Soit $n' = \sum_{l' \in L'} s(l')$ le nombre total des sièges obtenus par les listes de L'. On dit que la méthode P possède la propriété d'*indépendance conditionnelle* si le partage par P de n' sièges entre les listes de L' est identique à la restriction de S à L'.

On démontre que les méthodes multiplicatives sont conditionnellement indépendantes alors que les méthodes additives ne le sont pas ([4]). Nous avons vu une illustration de l'indépendance conditionnelle de la méthode multiplicative $P^1{}_1$ dans le tableau 6 : les listes en dessous de 5% n'ayant pas obtenu de sièges, leur élimination ne modifie pas le résultat. Montrons, sur un exemple, qu'une méthode additive ne vérifient pas cette propriété. Le département de Paris reçoit, par la méthode $P^0{}_{0.5}$ sous l'hypothèse (A), le partage suivant :

s(RPR) = 7 ; s(PS) = 7 ; s (UDF) = 3 ; s(FN) = 2 ; s(PC) = 1 ;
s(DIV-DR) = 1 ; s(ECO) = 0 ; etc...

Si l'on élimine les listes au dessous de 5% (PC ; DIV-DR ; ECO etc ...) et que l'on répartisse 19 sièges (19 = 21 - 2 sièges attribués à des listes éliminées) ; on obtient le partage suivant :

s(RPR)=8 ; s(PS)=7 ; s(UDF)=2 ; s(FN)=2 .

L'indépendance conditionnelle n'est donc pas vérifiée par cette méthode puisque le RPR et l'UDF voient leur nombre de sièges changer.

IX. MANIPULABILITE ET REGULARITE

Une méthode proportionnelle P est *régulière* si, une liste l ayant son score v(l) fixé, le nombre de sièges attribués à la liste l ne peut varier que d'une unité (en plus ou moins) alors que les suffrages restant se répartissent indifféremment entre les autres listes.

Les méthodes additives sont régulières alors que les méthodes multiplicatives ne le sont pas. Montrons ceci par l'exemple du département du Nord. Les tableaux (17) et (18) montrent les résultats des 13 méthodes sous l'hypothèse (A) avec différents scores, le score du RPR restant constant et égal à 23,18.

La comparaison de ces deux tableaux montre d'abord la régularité des méthodes additives : si nous comparons les nombres de sièges attribués au RPR par les méthodes additives, données par les secondes lignes des deux tableaux, nous constatons que les différences d'un tableau à l'autre pour une même méthode sont soit nulles soit d'un siège.

Si nous effectuons la même comparaison en ce qui concerne les méthodes multiplicatives nous vérifions leur non-régularité : par exemple, pour la méthode $P^1{}_2$, le nombre de sièges du RPR varie de 5 unités.

Connaissant le score du RPR, et sachant que la méthode appliquée est une méthode multiplicative, les autres listes peuvent considérer qu'elles ont avantage à s'unir (tableau 18) plutôt qu'à disperser leurs voix (tableau 17) afin de minimiser la représentation de celui-ci. Par contre cette union a peu d'effet dans le cas de méthodes additives. Les méthodes multiplicatives peuvent donc favoriser certaines "manipulations", davantage que les méthodes additives.

Nord		r												
listes	scores	-1.9	-1		-0.5		0		0.5		1		2	
UN-GA	10.10	3	2	3	2	2	2	2	2	3	2	3	2	3
RPR	23.18	5	6	5	6	6	6	6	6	7	6	8	6	9
PC	9.80	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
UDF	9.50	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
FN	9.30	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
EXT-GA	8.20	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
ECO	8.05	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1
DIV-DR	7.50	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	1
DIV-GA	7.20	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	1	2	1
EXT-DR	7.15	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	1	2	1

Tableau 17 : Résultat des 13 méthodes pour le département du Nord avec des scores modifiés.

Nord		r												
listes	scores	-1.9	-1		-0.5		0		0.5		1		2	
UN-GA	76.82	18	18	18	18	18	18	19	19	19	19	19	19	20
RPR	23.18	6	6	6	6	6	6	5	5	5	5	5	5	4
PC	0.00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
UDF	0.00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
FN	0.00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
EXT-GA	0.00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ECO	0.00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
DIV-DR	0.00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
DIV-GA	0.00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
EXT-DR	0.00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 18 : Résultat des 13 méthodes pour le département du Nord avec des scores modifiés.

X. CONCLUSION

La grande variété des méthodes proportionnelles et des résultats qu'elles produisent pose le problème du choix d'une méthode adaptée à chaque situation particulière. Ce choix doit se baser sur un cahier des charges précis en termes des diverses propriétés qui permettent de différencier les méthodes. Le tableau (19) résume celles qui différencient les deux grandes familles : méthodes additives et méthodes multiplicatives.

Propriétés \ Méthodes	Méthodes Additives	Méthodes Multiplicatives
Croissance forte par rapport au nombre de sièges	Non	Oui
Croissance additive par rapport au score	Oui	Non
Croissance multiplicative par rapport au score	Non	Oui
Indépendance conditionnelle	Non	Oui
Régularité	Oui	Non

Tableau 19 : Propriétés des méthodes additives et multiplicatives.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. L. Balinski & H. P. Young , *Fair Representation : Meeting the Ideal of one Man, one Vote.*, New-Haven, Yale Univ. Press, (1982).
[2] A. Lacheny, J. L. Petit & E. Térouanne (1986), «Vous avez dit Proportionnelle ?», *Math. Sci. Hum.*, 94, p.5-32.
[3] "*Le Monde*" «Les élections législatives du 16 Mars 1986.» Paris, *Le Monde, Dossiers et Documents,* (1986).
[4] J. L. Petit & E. Térouanne (1988), «A theory of proportional representation»,à paraître.
[5] J.L. Petit & E. Térouanne (1988), «Proportional Methods, Extremal Values and Manipulability», *Eur. Jour. Pol. Res.*, 16, p.339-356.
[6] J.L. Petit & E. Térouanne (1988) «Applications électorales de l'ordre du cumul ». A paraître.
[7] G.Th. Guilbaud, *Leçons d'à peu près* Paris, Bourgois, 1985.
[8] A. Lacheny (1987), «PROP : un logiciel de simulation des méthodes proportionnelles.», *doc. int. IUT Montpellier.*