MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

GUY MOREL

Coefficient de corrélation et prise de décision

Mathématiques et sciences humaines, tome 102 (1988), p. 5-15
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1988__102__5_0>

Math. Inf. Sci. hum. (26e année, n°102, *1988*, p. 5-15).

COEFFICIENT DE CORRELATION ET PRISE DE DECISION [1]

Guy MOREL [2]

1. INTRODUCTION.

a. *Tester* H_0 : $\rho=0$ *contre* H_1 : $\rho\neq0$.

Le coefficient de corrélation ρ de Bravais-Pearson (noté ρ) permet de prendre en compte l'intensité du lien linéaire existant entre deux variables quantitatives. Lorsque ρ est inconnu, l'interprétation s'appuie souvent sur le résultat du test entre l'hypothèse H_0 : $\rho=0$ et l'hypothèse H_1 : $\rho\neq0$. Le rejet de H_0 est alors fréquemment interprété comme l'existence d'une corrélation "notable" entre les deux variables. Pourtant, à un seuil donné, le rejet peut avoir une forte probabilité d'intervenir même pour des valeurs de ρ très faibles. Cette probabilité (valeur en ρ de la puissance du test) est d'autant plus élevée que l'échantillon est grand. Le rejet de H_0 ne peut donc pas être considéré comme la preuve d'une corrélation "non négligeable". L'interprétation dépend de l'ordre de grandeur de ρ.

Il nous semble donc intéressant de chercher à définir une limite inférieure de confiance lorsque ρ est positif et une limite supérieure de confiance lorsque ρ est négatif ; cette limite permettra de juger si on peut considérer ρ comme "notable". En d'autres termes, la procédure de décision que nous allons construire précise le test de H_0 contre H_1 ; c'est une procédure d'intervalle de confiance pour laquelle seuls certains intervalles sont autorisés, ceux qui sont les plus efficaces pour aider à l'interprétation. Dans la zone de rejet de ce test elle donne des intervalles de confiance de la forme $[\rho_1,+1]$ (resp. $[-1, \rho_1]$), avec $\rho_1 > 0$ (resp. $\rho_1 < 0$), lorsque l'estimation de ρ est positive (resp. négative) ; dans la zone d'acceptation de H_0, elle fournit l'intervalle $[-1,+1]$, ce qui traduit bien la dissymétrie traditionnelle entre les hypothèses H_0 et H_1, qui permet en fait seulement de conclure au non rejet de H_0.

b. *Tester* H_0 : $\rho \in]-\rho_0,+\rho_0[$ *contre* H_1 : $\rho \notin]-\rho_0,+\rho_0[$.

Le test d'hypothèse nulle précédent (H_0 : $\rho=0$) est couramment utilisé. Il est pourtant rare, dans les applications, que l'hypothèse réelle à tester soit H_0 : $\rho=0$. Ceci n'est souvent qu'une mauvaise traduction de "ρ est négligeable" (cf. [6], [7]). Une traduction du type "ρ appartient à l'intervalle $]-\rho_0,+\rho_0[$" semble plus adaptée. Elle conduit au test classique entre H_0 : $\rho \in]-\rho_0,+\rho_0[$ et H_1 : $\rho \notin]-\rho_0,+\rho_0[$ (cf. [2]). S'il est relativement peu utilisé c'est peut-être qu'il impose de donner un sens à la notion de négligeable par le choix de ρ_0. Son principal avantage provient du fait que le rejet de H_0 a peu de chance, au seuil choisi, de se produire lorsque ρ est négligeable. Mais la décision "ρ n'est pas négligeable" peut être insuffisante pour l'interprétation. Il est parfois nécessaire de savoir si ρ est "notable". Ceci nous conduit ici encore

1 Travail effectué dans le cadre de l'UA CNRS 759 de l'Université de Rouen.

2 UER des Sciences de l'Homme, Université de Tours, 37041 Cedex.

à proposer une procédure d'intervalle de confiance pour laquelle seuls certains intervalles sont autorisés, et qui précise le test de $\rho \in]-\rho_0,\rho_0[$ contre $\rho \notin]-\rho_0,\rho_0[$. Dans la zone de rejet cette procédure fournit un intervalle de confiance aussi petit que possible, de la forme $[\rho_1,+1]$ (resp. $[-1,\rho_1]$, avec $\rho_1 \geq \rho_0$ (resp. $\rho_1 \leq -\rho_0$) lorsque l'observation est dans la partie positive (resp. négative) de la zone de rejet ; pour les observations conduisant à l'acceptation de H_0 elle fournit comme intervalle de confiance $[-1,\rho_0[$ ou $]-\rho_0,+1]$. Ces décisions sont plus précises que le traditionnel non rejet de H_0, ρ peut soit être négligeable soit ne pas l'être, mais alors, la procédure propose une valeur pour son signe (une variante plus timide de cette procédure consiste à fournir, comme pour la précédente, seulement la conclusion $[-1,+1]$ dans la zone d'acceptation de H_0).

c. *Choisir un intervalle d'une partition de* $[-1,+1]$.
Dans les procédures que nous venons de présenter en a) et b), nous n'avons pas introduit de conclusion du type "ρ est négligeable". On verra que vouloir introduire une telle conclusion (c'est-à-dire fournir $]-\rho_0,+\rho_0[$ comme intervalle de confiance) impose de renoncer à proposer pour extrémités des intervalles de confiance associés aux observations dans la zone de rejet du test, les meilleures limites de confiance (inférieures ou supérieures) possibles. Ceci n'est pas gênant lorsque l'utilisateur ne se préoccupe pas de savoir, dans la situation de rejet, si $|\rho|$ est plus ou moins loin de $|\rho_0|$, mais seulement si ρ est inférieur à $-\rho_0$ ou supérieur à ρ_0. Nous avons ainsi été amené à proposer un troisième type de procédure, où l'interprétation de ρ ne fait intervenir que son appartenance à l'un des trois intervalles $[-1,\rho_0]$, $]-\rho_0,\rho_0[$ et $[\rho_0,+1]$, ou plus généralement à l'un des éléments d'une partition finie de $[-1,+1]$ en intervalles. Cette généralisation peut être utile dans le cas où les intervalles $[\rho_0,+1]$ et $[-1,-\rho_0]$ ne conduisent pas à des interprétations uniques mais où ils peuvent être partagés en intervalles y conduisant ; par exemple, si on peut définir ρ_1 tel que pour $\rho \geq \rho_1$ ou $\rho \leq -\rho_1$ la corrélation ρ peut être considérée comme "notable", on obtient une partition en cinq intervalles, les intervalles $[\rho_0,\rho_1[$ et $]-\rho_1,-\rho_0]$ étant des zones d'indétermination où l'interprétation est de la forme "ρ n'est ni négligeable ni notable". Pour pouvoir obtenir des procédures de décision qui permettent d'accorder la même confiance à toutes les décisions, il faudra accepter parmi l'ensemble des décisions possibles, non seulement les intervalles de la partition mais aussi les unions de deux intervalles consécutifs de cette partition. C'est ce que proposaient Neyman et Pearson [5] dans le cas des tests en ajoutant comme décision possible l'ensemble des paramètres, ceci afin de supprimer la dissymétrie de traitement entre H_0 et H_1. Une telle attitude semble totalement justifiée dans le cas de recherches expérimentales. Le chercheur n'est pas obligé d'obtenir une interprétation unique à la fin de l'expérience ; ce qui l'intéresse avant tout, c'est la fiabilité de ses réponses. En d'autres termes, pouvoir conclure que ρ appartient à tel ou tel intervalle de la partition considérée n'est souhaité que dans la mesure où la probabilité d'obtenir une décision correcte, c'est-à-dire un intervalle contenant la vraie valeur de ρ, est "grande". Mais pour discriminer entre les procédures réalisant la majoration uniforme des probabilités d'erreur par un même seuil, nous ferons intervenir les probabilités des décisions du type "intervalle unique", les privilégiant par rapport aux probabilités des décisions du type "union de deux intervalles contigus".

2. CADRE THEORIQUE.

a. *Problème de décision.*
Nous nous appuierons sur un travail [3] concernant les modèles statistiques à rapport de vraisemblance monotone dont l'ensemble des valeurs du paramètre est un intervalle Θ de $\mathbb{R}$, et les problèmes statistiques dont l'ensemble des décisions, D, est un sous-ensemble de l'ensemble des intervalles de Θ. L'exemple du coefficient de corrélation conduit asymptotiquement à un modèle de ce type si on utilise la transformation proposée par Fisher en 1926. Notons R l'estimateur classique du coefficient de corrélation ρ à partir d'un échantillon de taille n ; pour une réalisation de cet échantillon, l'estimation r correspondante est le coefficient de corrélation du nuage des points de l'échantillon. Lorsque n est grand, Fisher a montré

qu'on peut considérer la variable $T = (\sqrt{n-3/2}).\mathrm{Log}((1+R)/(1-R))$ comme normale, de moyenne $\theta = (\sqrt{n-3/2}).\mathrm{Log}((1+\rho)/(1-\rho))$ et de variance 1 (cf. par exemple [1]). Le modèle image de la statistique T est alors $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}, (N(\theta,1))_{\theta\in\Theta=\overline{\mathbb{R}}})$; $N(-\infty,1)$ et $N(+\infty,1)$ correspondent aux masses de Dirac en $-\infty$ et $+\infty$.

La fonction $(\sqrt{n-3/2}).\mathrm{Log}((1+r)/(1-r))$ étant une bijection croissante de $[-1,+1]$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, on obtient une bijection entre les intervalles de $[-1,+1]$ et ceux de $\overline{\mathbb{R}}$, qui est croissante pour l'ordre partiel "être avant", noté $\leq$ et défini par :

$$I_1 \leq I_2 \Leftrightarrow (\forall a \in I_1-I_2)\ (\forall b \in I_1 \cap I_2)\ (\forall c \in I_2-I_1)\ a < b < c.$$

Cet ordre joue un rôle primordial dans notre étude. En effet, pour tirer parti de la structure de rapport de vraisemblance monotone, assurée ici par la translation de la loi $N(\theta,1)$ lorsque θ croît, il est intéressant de considérer un ensemble de décisions, D, totalement ordonné par l'ordre partiel "être avant". Nous supposerons désormais D totalement ordonné par cet ordre partiel.

b. *Espaces des décisions étudiés.*
Les trois situations vues en introduction nous amènent à envisager successivement :

$D = \{[-\infty,\theta]\ ;\ \theta \in \overline{\mathbb{R}}\} \cup \{[\theta,+\infty]\ ;\ \theta \in \overline{\mathbb{R}}\}$,

$D = \{[-\infty,\theta]\ ;\ \theta < \theta_0\} \cup \{[\theta,\theta_0[\ ;\ \theta < -\theta_0\} \cup \{]-\theta_0,\theta_0[\} \cup \{]-\theta_0,\theta]\ ;\ \theta > \theta_0\} \cup$
$\{[\theta,+\infty]\ ;\ \theta > -\theta_0\}$ avec $\theta_0 = (\sqrt{n-3/2}).\mathrm{Log}((1+\rho_0)/(1-\rho_0))$,

$D = \{d_i\ ;\ 1 \leq i \leq k\} \cup \{d_i \cup d_{i+1}\ ;\ 1 \leq i < k\}$ les d_i étant les intervalles d'une partition de $\overline{\mathbb{R}}$.

On remarque que chacun des deux premiers ensembles de décisions définis ci-dessus contient strictement l'ensemble des décisions effectivement atteintes, dans la procédure sélectionnée pour cette situation, telle qu'elle a été présentée en introduction. Nous noterons $[\leftarrow,d]$ (resp. $[d,\rightarrow]$) l'ensemble des éléments de D avant d (resp. après d).

c. *Espace des règles de décision.*
Comme les probabilités du modèle sont diffuses, on peut se restreindre à l'étude des règles déterministes (cf. [3] III, 6-1), donc aux applications mesurables δ de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $(D, \mathcal{D})$, où $\mathcal{D}$ est la tribu borélienne correspondant à la topologie de l'ordre. Etant fixé α appartenant à $[0,1]$, nous considérons les procédures telles que la probabilité que la vraie valeur du paramètre appartienne à la conclusion (intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ élément de D) soit supérieure ou égale à $(1-\alpha)$. C'est en ce sens qu'on s'intéresse aux procédures d'intervalle de confiance de niveau $(1-\alpha)$, dont l'ensemble sera noté $\mathcal{C}(\alpha)$: une règle δ appartient à $\mathcal{C}(\alpha)$ si elle vérifie, pour tout θ, $P^{\delta}_{\theta}(C_\theta) \geq 1-\alpha$, où P^{δ}_{θ} est la loi de la décision prise par usage de la procédure δ quand θ est la valeur du paramètre et C_θ est l'ensemble des éléments de D qui contiennent θ (c'est un intervalle pour l'ordre "être avant").

d. *Critère de choix.*
Lorsque $\mathcal{C}(\alpha)$ n'est pas vide, il contient généralement plus d'un élément, il faut donc se donner un critère de choix et pour cela prendre en compte, pour chaque valeur du paramètre, le fait que certaines décisions sont préférables à d'autres. Dans nos exemples nous supposerons que l'ensemble des décisions optimales pour θ est un intervalle $[d^1_\theta,d^2_\theta]$ (vérifiant bien sûr $[d^1_\theta,d^2_\theta] \cap C_\theta \neq \emptyset$] et que, plus on s'éloigne de cet intervalle dans D, moins les décisions sont "intéressantes". On est alors amené à chercher δ qui concentre au maximum, pour tout θ, la probabilité P^{δ}_{θ} autour de $[d^1_\theta,d^2_\theta]$. Cette concentration est d'autant meilleure que la fonction $\epsilon^{\delta}_{\theta}$, qui associe à tout élément de $\mathcal{D}_\theta = \{[\leftarrow,d]\ ;\ d<d^1_\theta\} \cup \{[d,\rightarrow]\ ;\ d > d^2_\theta\}$ sa probabilité par rapport à P^{δ}_{θ}, est plus petite. $\epsilon^{\delta}_{\theta}$ est appelée *fonction de précision.* Lorsque les décisions d sont suffisamment éloignées de d^1_θ ou d^2_θ il peut y avoir lieu de les considérer comme uniformément mauvaises pour θ ; on restreint alors le domaine de définition $\mathcal{D}_\theta$ de la fonction

de précision $\epsilon^{\delta}{}_{\vartheta}$ en enlevant les intervalles $[\leftarrow, d]$ (resp. $[d, \rightarrow]$) correspondant à des décisions d trop petites (resp. trop grandes) pour l'ordre "être avant" (cf. [3] pour une définition plus générale avec la notion d'attracteur). Ces fonctions de précision définissent sur $\mathcal{C}(\alpha)$ un préordre partiel dénommé "plus précis" : δ est dit *plus précis* que δ' si pour tout ϑ, $\epsilon^{\delta}{}_{\vartheta} \leq \epsilon^{\delta'}{}_{\vartheta}$. Lorsqu'on cherche à sélectionner une procédure d'intervalle de confiance dans $\Delta \subset \mathcal{C}(\alpha)$, un élément δ de Δ est dit *uniformément plus précis* (U.P.P.) dans Δ, s'il est plus précis que tout élément de Δ.

e. *Procédures d'intervalle de confiance monotones.*
Pour tirer parti de l'ordre qui structure D et du modèle à rapport de vraisemblance monotone il faut que les meilleures décisions aient tendance à être d'autant plus grandes, pour l'ordre "être avant", que ϑ est grand. Ceci peut se traduire par l'existence d'une fonction croissante $f : \Theta \rightarrow D$ telle que $f(\vartheta)$ appartient à $[d^1{}_{\vartheta}, d^2{}_{\vartheta}] \cap C_{\vartheta}$. Pour un tel problème de décision, on "sent" que les règles de décision les plus précises se trouvent parmi celles qui associent aux observations t de $\overline{\mathbb{R}}$ une décision d'autant plus grande pour l'ordre "être avant" que t est grand, ce qui justifie la définition suivante.

DEFINITION. On appelle procédure d'intervalle de confiance *monotone* de niveau $(1-\alpha)$ toute application mesurable croissante δ de $\overline{\mathbb{R}}$ dans D telle que, pour tout ϑ, $P^{\delta}{}_{\vartheta}(C_{\vartheta}) \geq 1-\alpha$; leur ensemble est noté $\mathcal{C}_0(\alpha)$.

On peut démontrer dans un cadre très général que la recherche d'une "bonne" procédure d'intervalle de confiance de niveau $(1-\alpha)$ peut s'effectuer parmi celles qui sont monotones (cf. [3]). Les exemples esquissés dans le début de ce travail entrent dans ce cadre et permettent de définir une fonction f ayant les propriétés données précédemment. Nous allons maintenant les préciser et dans chaque cas sélectionner un "bon" élément de $\mathcal{C}_0(\alpha)$.

3. PROCEDURES DE DEMI-DROITE DE CONFIANCE.

Par l'usage de la transformation $\vartheta = (\sqrt{n-3/2}).\mathrm{Log}((1+\rho)/(1-\rho))$ la situation envisagée en 1-a apparaît comme un cas particulier d'emploi des procédures dites de demi-droite de confiance (P.D.D.C.) c'est-à-dire celles dont l'ensemble de décisions est $D = \{[-\infty, \vartheta] ; \vartheta \in \overline{\mathbb{R}}\} \cup \{[\vartheta, +\infty] ; \vartheta \in \overline{\mathbb{R}}\}$. On notera $d^i{}_{\vartheta} = [-\infty, \vartheta]$ et $d^s{}_{\vartheta} = [\vartheta, +\infty]$.

On peut se restreindre à considérer les procédures déterministes et monotones, c'est-à-dire celles appartenant à $\mathcal{C}_0(\alpha)$. Il en existe puisque celle qui associe à toute observation l'ensemble des paramètres $\overline{\mathbb{R}}$ est de niveau 1 (remarquons que pour l'ordre "être avant", $\overline{\mathbb{R}}$ sépare les demi-droites inférieures des demi-droites supérieures), elle ne présente bien sûr aucun intérêt pratique.

a. *Choix des fonctions de précision.*
Dans la situation 1-a, l'interprétation dépend d'abord du signe de ρ donc de celui de ϑ et ensuite de l'amplitude de ρ donc de celle de ϑ. Lorsque ϑ est négatif les décisions qui contiennent ϑ et ne sont pas ambiguës quant au signe de ϑ sont de la forme $d^i{}_{\vartheta}$, avec $\vartheta \leq \vartheta' < 0$; $d^i{}_{\vartheta'}$ est alors d'autant meilleure que ϑ' est proche de ϑ. Ceci nous conduit à adopter pour domaine de définition de la fonction de précision $\epsilon^{\delta}{}_{\vartheta}$, lorsque $\vartheta < 0$, $\mathcal{D}_{\vartheta} = \{[d^i{}_{\vartheta'}, \rightarrow] ; \vartheta < \vartheta' \leq 0\}$. Nous prenons ainsi, comme ensemble des décisions optimales $[d^1{}_{\vartheta}, d^2{}_{\vartheta}]$, l'intervalle $[\leftarrow, d^i{}_{\vartheta}]$. Il contient des demi-droites ne contenant pas ϑ, ceci n'est cependant pas très grave puisque l'ensemble de ces décisions, $[\leftarrow, d^i{}_{\vartheta}[$ a une $P^{\delta}{}_{\vartheta}$ probabilité majorée par le seuil α. De plus, si nous avions ajouté $[\leftarrow, d^i{}_{\vartheta}[$ à $\mathcal{D}_{\vartheta}$, afin d'avoir $[d^1{}_{\vartheta}, d^2{}_{\vartheta}] = [d^i{}_{\vartheta}]$, nous aurions été amené à

minimiser $P^{\delta}{}_{\vartheta}([\leftarrow, d^{i}{}_{\vartheta}[)$; ceci ne pouvant pas être obtenu pour tout ϑ, nous n'aurions pas pu sélectionner une P.D.D.C. dans $\mathcal{C}_0(\alpha)$ (cf. [3] §III-8). On retrouve d'ailleurs ce type de solution, donc ce petit défaut, dans la construction usuelle des limites inférieures de confiance uniformément plus précises au niveau $1-\alpha$ (cf. [8]). Par symétrie, lorsque $\vartheta > 0$, on prend pour domaine de définition de $\epsilon^{\delta}{}_{\vartheta}$: $\mathcal{D}_{\vartheta} = \{[\leftarrow, d^{s}{}_{\vartheta'}] \; ; \; 0 \leq \vartheta' < \vartheta\}$. Pour $\vartheta = 0$ la meilleure décision est encore $\overline{\mathbb{R}}$, c'est la seule qui accorde autant d'importance aux valeurs négatives et positives. On va donc poser $[d^1{}_{\vartheta}, d^2{}_{\vartheta}] = [\overline{\mathbb{R}}]$ et maximiser la probabilité d'obtenir $\overline{\mathbb{R}}$ quand $\vartheta = 0$ en définissant $\epsilon^{\delta}{}_0$ sur $\mathcal{D}_0 = \{[\leftarrow, \overline{\mathbb{R}}[,]\overline{\mathbb{R}}, \rightarrow]\}$.

b. *Restriction de l'espace des règles de décision.*
Les fonctions de précision $\epsilon^{\delta}{}_{\vartheta}$ que nous venons de définir ne permettent pas de trouver une P.D.D.C. uniformément plus précise dans $\mathcal{C}_0(\alpha)$. En effet dans la recherche d'un élément plus précis que tous les autres pour $\vartheta < 0$ (resp. $\vartheta > 0$) on peut se restreindre aux élément δ de $\mathcal{C}_0(\alpha)$ vérifiant $\delta(t) \leq \Theta = \overline{\mathbb{R}}$ (resp. $\delta(t) \geq \overline{\mathbb{R}}$), c'est-à-dire aux limites supérieures (resp. inférieures) de confiance. Pour ne pas avoir à choisir entre privilégier les ϑ inférieurs à 0 ou les ϑ supérieurs à 0, nous allons symétriser le problème en imposant pour $\vartheta = 0$ un partage équitable du risque α entre $[\leftarrow, d^{i}{}_0[$ et $]d^{s}{}_0, \rightarrow]$.
Notons $\Delta(\alpha)$, le sous-ensemble des éléments δ de $\mathcal{C}_0(\alpha)$ qui vérifient $P^{\delta}{}_0([\leftarrow, d^{i}{}_0[) = P^{\delta}{}_0(]d^{s}{}_0, \rightarrow]) = \alpha/2$ et désignons par F_{ϑ} la fonction de répartition de la loi normale $N(\vartheta, 1)$.

PROPOSITION. Soit α appartenant à $]0,1]$; t_α est défini par $F_0(t_\alpha) = 1-(\alpha/2)$; on note $\vartheta(.)$ l'application croissante de $]t_\alpha, +\infty]$ dans $]0, +\infty]$ telle que, pour $t \neq +\infty$, $F_{\vartheta(t)}(t) - F_{\vartheta(t)}(-t_\alpha) = 1-\alpha$ (donc $\vartheta(+\infty) = +\infty$).
Soit δ la procédure de demi-droite de confiance définie par :

$$\delta(t) = \begin{cases} [-\infty, -\vartheta(-t)] & \text{si } -\infty \leq t < -t_\alpha \\ \overline{\mathbb{R}} & \text{si } -t_\alpha \leq t \leq t_\alpha \\ [\vartheta(t), +\infty] & \text{si } t_\alpha < t \leq +\infty. \end{cases}$$

Alors δ est uniformément plus précise dans $\Delta(\alpha)$ et elle est unique à une P_{ϑ} équivalence près, pour tout ϑ.

DEMONSTRATION. Par définition de t_α et $\vartheta(.)$, δ appartient bien à $\Delta(\alpha)$. Soit δ' un autre élément de $\Delta(\alpha)$; pour tout ϑ, on doit démontrer que les fonctions de précision de δ et δ' vérifient : $\epsilon^{\delta}{}_{\vartheta} \leq \epsilon^{\delta'}{}_{\vartheta}$.
δ' appartenant à $\Delta(\alpha)$, c'est une P.D.D.C. déterministe et monotone telle que : $P^{\delta'}{}_0([\leftarrow, d^{i}{}_0[) = P^{\delta'}{}_0(]d^{s}{}_0, \rightarrow]) = \alpha/2$; ceci implique $\delta'(t) < d^{i}{}_0$ pour $t < -t_\alpha$ et $\delta'(t) > d^{s}{}_0$ pour $t > t_\alpha$. On en déduit $\{t \in \overline{\mathbb{R}} \; ; \; \delta'(t) = \overline{\mathbb{R}}\} \subset [-t_\alpha, +t_\alpha]$ et donc $\epsilon^{\delta}{}_0 \leq \epsilon^{\delta'}{}_0$. De plus pour $t > t_\alpha$ on a $\delta'(t) = [\vartheta'(t), \rightarrow]$ avec $\vartheta'(t) > 0$ et, pour tout ϑ dans $[0, \vartheta'(t)[$, $F_{\vartheta}(t) - F_{\vartheta}(-t_\alpha) \geq 1 - \alpha$; par définition de $\vartheta(t)$ on a donc $\vartheta'(t) \leq \vartheta(t)$, ce qui implique, pour $\vartheta' \geq 0$, $\{t \; ; \; \delta(t) \leq \delta s_{\vartheta'}\} \subset \{t \; ; \; \delta'(t) \leq d^{s}{}_{\vartheta'}\}$ donc $\epsilon^{\delta}{}_{\vartheta} \leq \epsilon^{\delta'}{}_{\vartheta}$ lorsque $\vartheta > 0$. Par symétrie on a aussi $\epsilon^{\delta}{}_{\vartheta} \leq \epsilon^{\delta'}{}_{\vartheta}$ pour $\vartheta < 0$. On obtient ainsi que δ est U.P.P. dans $\Delta(\alpha)$. Pour avoir l'unicité à une P_{ϑ} équivalence près, on peut suivre le raisonnement précédent avec δ' U.P.P. dans $\Delta(\alpha)$. On montre alors facilement que l'on a $\delta'(t) \neq \delta(t)$ au plus sur 2 points : $-t_\alpha$ et t_α.

Rappelons qu'à partir de la transformation de Fisher, on obtient un test entre $H_0 : \rho = 0$ et $H_1 : \rho \neq 0$ qui a pour région de rejet $[-1, -r_\alpha[\cup]r_\alpha, +1]$ (le t_α de la proposition précédente est égal à $(\sqrt{n-3/2}).\mathrm{Log}((1+r_\alpha) / (1-r_\alpha)))$. La règle que nous venons de sélectionner précise ce test dans le cas du rejet. En effet on obtient pour ρ une limite supérieure (resp. inférieure) de confiance négative (resp. positive) lorsque l'estimation r appartient à $[-1, -r_\alpha[$ (resp. $]r_\alpha, +1]$).

Dans le cas de l'acceptation elle décide [-1, +1]. Comme pour le test on ne peut alors pas rejeter l'hypothèse $\rho = 0$.

4. PROCEDURES D'INTERVALLE DE CONFIANCE AUTOUR DE $]-\rho_0, +\rho_0[$.

En posant $\vartheta = (\sqrt{n-3/2}).\mathrm{Log}((1+\rho)/(1-\rho))$ et $\vartheta_0 = (\sqrt{n-3/2}).\mathrm{Log}((1+\rho_0)/(1-\rho_0))$, la situation envisagée en 1-b revient à considérer le test de $H_0 : \vartheta \in]-\vartheta_0, \vartheta_0[$ contre $H_1 : \vartheta \notin]-\vartheta_0, \vartheta_0[$. Nous allons étudier les procédures d'intervalle de confiance ayant pour ensemble des décisions :

$$D = \{[-\infty,\vartheta] = d^i_\vartheta \ ; \ \vartheta < \vartheta_0\} \cup \{[\vartheta,\vartheta_0[= d^c_\vartheta \ ; \ \vartheta < -\vartheta_0\} \cup \{]-\vartheta_0,\vartheta_0[= d_0\} \cup$$
$$\{]-\vartheta_0,\vartheta] = d^c_\vartheta \ ; \ \vartheta > \vartheta_0\} \cup \{[\vartheta,+\infty] = d^s_\vartheta \ ; \ \vartheta > -\vartheta_0\}.$$

Les procédures d'intervalle de confiance (P.I.C.) sur D sont appelées P.I.C. autour de $]-\vartheta_0,\vartheta_0[$. Comme nous l'avons déjà signalé, on peut se restreindre à l'étude de l'ensemble $\mathcal{C}_0(\alpha)$ des règles déterministes et monotones de niveau $1-\alpha$.

a. *Condition d'existence.*

Le cas $\vartheta_0 = +\infty$ étant trivial, on suppose désormais $\vartheta_0 \neq +\infty$. $\mathcal{C}_0(\alpha)$ peut alors être vide. Pour qu'il ne le soit pas, il faut et il suffit qu'il existe une P.I.C. de niveau $1-\alpha$ sur $D_0 = \{[-\infty,\vartheta_0[,]-\vartheta_0,+\infty]\} = \{d^c_{-\infty}, d^c_{+\infty}\}$; ce qui est le cas si et seulement si $F_{\vartheta_0}(0) \leq \alpha$ (F_ϑ est la fonction de répartition de la loi normale $N(\vartheta,1)$) ; autrement dit $t_0 \geq 0$ (voir fig.1).

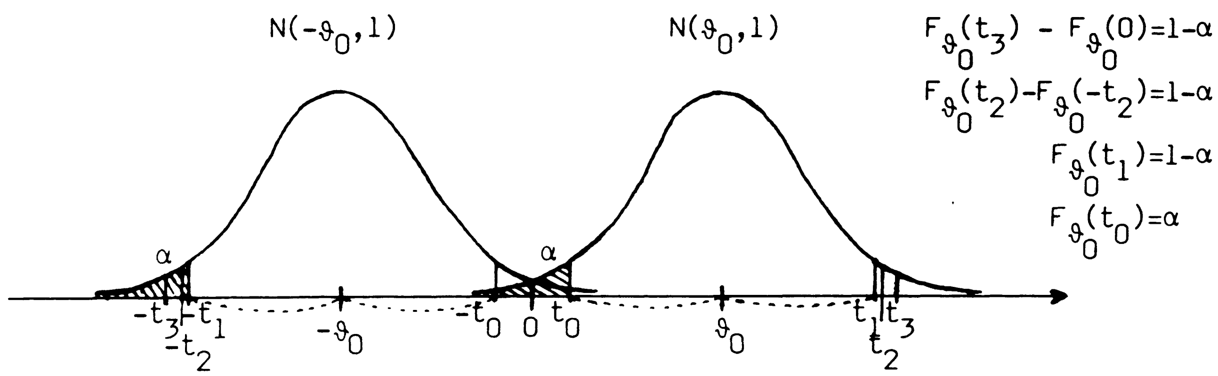

Figure 1

Comme $\vartheta_0 = (\sqrt{n-3/2}).\mathrm{Log}((1+\rho_0)/(1-\rho_0))$, les intervalles $]-\rho_0,\rho_0[$ qui permettent d'avoir $\mathcal{C}_0(\alpha)$ non vide peuvent être d'autant plus petits que l'échantillon est grand.

Dans la suite nous supposons $\mathcal{C}_0(\alpha)$ non vide donc ϑ_0 tel que $F_{\vartheta_0}(0) \leq \alpha$.

b. *Choix des fonctions de précision.*

Le problème de décision considéré étant celui décrit en 1-b, lorsque $\vartheta \leq -\vartheta_0$ (resp. $\vartheta \geq \vartheta_0$) une bonne décision est de la forme $d^i_{\vartheta'}$ (resp. $d^s_{\vartheta'}$) avec $\vartheta \leq \vartheta' \leq -\vartheta_0$ (resp. $\vartheta_0 \leq \vartheta' \leq \vartheta$) ; on peut ainsi conclure que ϑ n'est pas négligeable et ϑ' donne une borne supérieure (resp. inférieure) de confiance. La décision $d^i_{\vartheta'}$ (resp. $d^s_{\vartheta'}$) est d'autant meilleure que ϑ' est proche de ϑ. On va alors adopter pour domaine de définition de la fonction de précision $\epsilon^S{}_\vartheta$, pour $\vartheta \leq -\vartheta_0$, $\mathcal{D}_\vartheta = \{[d^i_{\vartheta'},\rightarrow] \ ; \ \vartheta < \vartheta' \leq -\vartheta_0\} \cup \{]d^i_{-\vartheta_0},\rightarrow]\}$ et de même, pour $\vartheta \geq \vartheta_0$, $\mathcal{D}_\vartheta = \{[\leftarrow,d^s_{\vartheta_0}[\} \cup \{[\leftarrow,d^s_{\vartheta'}] \ ; \ \vartheta_0 \leq \vartheta' < \vartheta\}$. L'intervalle des meilleures décisions $[d^1_\vartheta, d^2_\vartheta]$ est donc $[\leftarrow,d^i_\vartheta]$ (resp. $[d^s_\vartheta,\rightarrow]$) pour $\vartheta \leq -\vartheta_0$ (resp. $\vartheta \geq \vartheta_0$).

Il contient des demi-droites ne contenant pas ϑ ; on retrouve ainsi le petit défaut signalé au paragraphe précédent. Lorsque ϑ appartient à $]-\vartheta_0,\vartheta_0[$ une seule décision conduit à l'interprétation que ϑ est "négligeable", c'est l'intervalle $]-\vartheta_0,\vartheta_0[= d_0$. On prend donc dans ce cas $[d^1_\vartheta,d^2_\vartheta] = [d_0]$. Pour l'instant nous n'avons pas besoin de préciser plus $\mathcal{D}_\vartheta$ lorsque ϑ appartient à $]-\vartheta_0,\vartheta_0[$, seul le fait d'avoir à maximiser $P^\delta_\vartheta([d_0]$ nous est utile.

c. *Restriction de l'espace des règles de décision.*

Avec les fonctions de précision choisies il n'est pas possible de trouver un élément de $\mathcal{C}_0(\alpha)$ plus précis que tous les autres. En effet, dans la recherche d'un élément δ_1 (resp. δ_2) plus précis que tous les autres pour $\vartheta \le -\vartheta_0$ (resp. $\vartheta \ge \vartheta_0$) on peut se restreindre aux éléments de $\mathcal{C}_0(\alpha)$ qui ne donnent que des décisions dans $[\leftarrow,d^i_{-\vartheta_0}] \cup \{d^c_{-\infty},d^c_{+\infty}\}$ (resp. $\{d^c_{-\infty},d^c_{+\infty}\} \cup [d^s_{\vartheta_0},\rightarrow]$) ; il est donc possible d'imposer $\delta_1(t) = d^c_{+\infty}$ pour $t > t_0$ et $\delta_1(t) = d^c_{-\infty}$ pour $-t_1 < t \le t_0$ (voir fig.1) ; on a des conditions symétriques pour δ_2 ; il est alors évident que l'on ne peut pas regrouper les bonnes propriétés de δ_1 et δ_2, pour $\vartheta \le -\vartheta_0$ et $\vartheta \ge \vartheta_0$, en un seul élément de $\mathcal{C}_0(\alpha)$. Nous n'avons aucune raison de privilégier la précision sur $[-\infty,-\vartheta_0]$ ou sur $[\vartheta_0,+\infty]$. On ne va donc considérer que des règles de décision symétriques, c'est-à-dire vérifiant $\delta(-t) = -\delta(t)$, avec la convention $-[\vartheta_1,\vartheta_2] = [-\vartheta_2,-\vartheta_1]$; leur ensemble est noté $\Delta(\alpha)$. Ceci est à rapprocher de la restriction aux tests sans biais pour tester $H_0 : \vartheta \in]-\vartheta_0,\vartheta_0[$ contre $H_1 : \vartheta \notin]-\vartheta_0,\vartheta_0[$ (cf. [2]).

Il n'existe généralement pas dans $\Delta(\alpha)$ d'élément uniformément plus précis. En effet, on peut favoriser les fonctions de précision sur $]-\vartheta_0,\vartheta_0[$ où celles sur $[-\infty,-\vartheta_0] \cup [\vartheta_0,+\infty]$; il existe des éléments de $\Delta(\alpha)$ qui décident $d_0 =]-\vartheta_0,\vartheta_0[$ pour t dans $[-t_0,t_0]$ (voir fig.1) ; lorsque t_0 est différent de 0, il est évident qu'on obtient de meilleures P.I.C. pour $\vartheta \le -\vartheta_0$ et $\vartheta \ge \vartheta_0$ en décidant $[-\infty,\vartheta_0[$ sur $[-t_0,0[$ et $]-\vartheta_0,+\infty]$ sur $]0,t_0]$; le cas $t_0 = 0$ n'est pas très important car nous verrons qu'il ne donne pas une bonne P.I.C., il correspond au plus petit ϑ_0 rendant $\mathcal{C}_0(\alpha)$ non vide.

d. *Sélection d'une règle de décision.*

Choisir de considérer en priorité les fonctions de précision sur $[-\infty,-\vartheta_0] \cup [\vartheta_0,+\infty]$ ou sur $]-\vartheta_0,\vartheta_0[$, c'est choisir d'améliorer le test de $H_0 : \vartheta \in]-\vartheta_0,\vartheta_0[$ contre $H_1 : \vartheta \notin]-\vartheta_0,\vartheta_0[$ principalement dans la zone de rejet de H_0 ou dans celle d'acceptation de H_0. Dans le premier cas, on cherche d'abord à donner une limite inférieure ou supérieure intéressante suivant la partie de la région de rejet concernée. Dans le deuxième cas, on essaye de préciser le non rejet de H_0 en décidant pour certaines observations l'intervalle $]-\vartheta_0,\vartheta_0[$ avec la fiabilité du niveau de confiance utilisé.

CAS 1. On choisit de minimiser en priorité les fonctions de précision paramétrées par ϑ appartenant à $[-\infty,-\vartheta_0]$ ou $[\vartheta_0,+\infty]$. Ceci correspond au problème envisagé en 1-b : savoir que ϑ appartient à $[-\infty,-\vartheta_0]$ (resp. $[\vartheta_0,+\infty]$) est insuffisant pour l'interprétation.

PROPOSITION. Soit α appartenant à $]0,1]$ tel que $F_{\vartheta_0}(0) \le \alpha$; $\Delta(\alpha)$ est alors non vide. t_2 et t_3 sont définis par $F_{\vartheta_0}(t_2) - F_{\vartheta_0}(-t_2) = 1-\alpha$ et $F_{\vartheta_0}(t_3) - F_{\vartheta_0}(0) = 1-\alpha$; on note $\vartheta(.)$ l'application croissante et continue de $[t_3,+\infty]$ dans $[\vartheta_0,+\infty]$ qui vérifie : $F_{\vartheta(t)}(t) - F_{\vartheta(t)}(0) = 1-\alpha$ pour $t \ne +\infty$, $\vartheta(+\infty) = +\infty$.

Soit δ la procédure d'intervalle de confiance symétrique définie par :

$$\delta(t) = \begin{cases}]-\vartheta_0, \vartheta_0[& \text{si} \quad t = 0 \\ ]-\vartheta_0, +\infty] & \text{si} \quad 0 < t < t_2 \\ [\vartheta_0, +\infty] & \text{si} \quad t_2 \le t < t_3 \\ [\vartheta(t), +\infty] & \text{si} \quad t_3 \le t \le +\infty. \end{cases}$$

Alors, sur $[-\infty,-\vartheta_0] \cup [\vartheta_0,+\infty]$, δ est plus précise que toutes les autres P.I.C. dans $\Delta(\alpha)$. Si de plus $F_{\theta_0}(0) < \alpha$, δ est, pour tout θ, P_θ presque sûrement égale à toute P.I.C. de plus grande précision, sur $[-\infty,-\theta_0] \cup [\theta_0,+\infty]$ dans $\Delta(\alpha)$.

DEMONSTRATION. (La figure 1 peut aider). Il est facile de vérifier que δ appartient à $\Delta(\alpha)$. Soit δ' un autre élément de $\Delta(\alpha)$; pour $\theta \le -\theta_0$ et $\theta \ge \theta_0$, on doit obtenir : $\epsilon^{\delta}_{\theta} \le \epsilon^{\delta'}_{\theta}$.

δ' étant symétrique on a $\delta'(t) \ge d_0 =]-\theta_0,\theta_0[$ si $t \ge 0$; on ne peut pas avoir $\delta'(t) \ge [\theta_0,+\infty]$ lorsque $t < t_2$, puisque δ' est de niveau $1-\alpha$ sur $]-\theta_0,\theta_0[$; lorsque t appartient à $[t_2,t_3[$ on a $\delta'(t) \le \delta(t)$ puisque δ' est de niveau $1-\alpha$ en θ_0 ; par définition de $\theta(.)$ on a aussi $\delta'(t) \le \delta(t)$ pour $t \ge t_3$ (remarquons qu'on a $\theta(t_3) > \theta_0$ lorsque $F_{\theta_0}(0) > \alpha/2$) ; ce qui précède implique $\epsilon^{\delta}_{\theta} \le \epsilon^{\delta'}_{\theta}$ pour $\theta \ge \theta_0$. Par symétrie on obtient aussi $\epsilon^{\delta}_{\theta} \le \epsilon^{\delta'}_{\theta}$ pour $\theta \le -\theta_0$.

Il reste à étudier l'unicité de δ à une P_θ équivalence près, pour tout θ. δ' est supposée être, comme δ, plus précise, sur $[-\infty,-\theta_0] \cup [\theta_0,+\infty]$, que toutes les autres P.I.C. dans $\Delta(\alpha)$. En se servant de ce qui précède, on montre facilement que pour avoir $\epsilon^{\delta'}_{\theta} = \epsilon^{\delta}_{\theta}$, pour $\theta \ge \theta_0$, il faut $\delta'(t) = \delta(t)$ sur $]t_2,+\infty]$, sauf en t_3 si $\alpha/2 < F_{\theta_0}(0) < \alpha$. Alors pour t dans $]0,t_2[$ on ne peut pas avoir $\delta'(t) >]-\theta_0,+\infty]$ sinon δ' ne serait pas de niveau $1-\alpha$ pour θ suffisamment proche de $-\theta_0$, avec $\theta > -\theta_0$. De plus, pour t dans $]t_3, +\infty[$ on a $P_{\theta(t)}([0,t]) = 1-\alpha$; si $t_3 < +\infty$, δ est donc exactement de niveau $1-\alpha$ pour des $\theta < +\infty$ aussi grands que l'on veut ; lorsque t appartient à $]0, t_2[$ et $t_3 < +\infty$ on ne peut donc pas avoir $\delta'(t) <]-\theta_0,+\infty]$, il ne reste plus que la possibilité $\delta'(t) = \delta(t)$. La condition $t_3 < +\infty$, c'est-à-dire $F_{\theta_0}(0) < \alpha$ entraîne donc que δ' et δ sont P_θ presque sûrement égales, pour tout θ. •

La P.I.C. définie dans la proposition précédente ne fournit, P_θ presque sûrement pour tout θ, que des demi-droites de confiance ; nous appellerons *procédure de demi-droite de confiance autour de* $]-\rho_0,\rho_0[$ au niveau $1-\alpha$, la règle de décision δ_0 obtenue en paramétrant à nouveau par ρ. δ_0 améliore le test, au seuil α, entre $H_0 : \rho \in]-\rho_0,\rho_0[$ et $H_1 : \rho \notin]-\rho_0,\rho_0[$. Dans la zone de rejet de ce test, c'est-à-dire lorsque l'estimation r de ρ conduit à $t = (\sqrt{n-3/2}).\mathrm{Log}((1+r)/(1-r))$ tel que $t \le -t_2$ ou $t \ge t_2$, on obtient au niveau choisi une borne supérieure de confiance $\rho_t \le -\rho_0$ ou une borne inférieure de confiance $\rho_t \ge \rho_0$. Dans la zone d'acceptation de H_0, la P.D.D.C. δ_0 décide $[-1,\rho_0[$ ou $]-\rho_0,+1]$, ce qui s'interprète, comme pour le test, par le fait de ne pas pouvoir exclure, au seuil choisi, que ρ est négligeable. Mais avec δ_0 on a une information supplémentaire, on peut exclure $\rho \ge \rho_0$ ou $\rho \le -\rho_0$ avec la fiabilité du seuil choisi.

Remarquons que si on accepte de perdre l'amélioration qu'apporte δ_0 par rapport au test, dans le cas de l'acceptation, on peut obtenir, dans la zone de rejet, une meilleure limite supérieure ou inférieure de confiance. Pour cela il faut prendre pour espace des décisions D l'ensemble des demi-droites. Entre $-t_2$ et t_2 on ne décide plus $[-1,\rho_0[$, $]-\rho_0,\rho_0[$ ou $]-\rho_0,+1]$ mais $[-1,+1]$. Ceci permet d'améliorer un peu les limites supérieures ou inférieures de confiance données par δ_0 lorsque $t < -t_2$ ou $t > t_2$.

CAS 2. On choisit de minimiser en priorité les fonctions de précision sur $]-\theta_0,\theta_0[$. Par opposition au premier cas, c'est intéressant lorsque le fait de décider que θ appartient à $[-1,-\theta_0]$ ou $[\theta_0,+1]$ est suffisant pour l'interprétation. En dessous de $-\theta_0$ ou au dessus de θ_0 l'amplitude de θ n'a plus d'importance. Ce cas correspond à la première situation envisagée en 1-c, il est traité dans le paragraphe suivant.

5. PROCEDURES DE DECISION POUR UNE PARTITION DE [-1, +1].

Considérons une partition de $[-1,+1]$ en k intervalles, $\{I_i ; 1 \le i \le k\}$. Chaque intervalle I_i est supposé être constitué par des valeurs de ρ qui conduisent à une même interprétation. Dans ce cas chercher un intervalle de décision strictement inclus dans I_i est inutile. Nous avons rencontré ce type de problème de décision au paragraphe 1-c avec $k = 3$ et $k = 5$.

a. *Règles de décision minimax.*
L'obtention d'une procédure pour laquelle la probabilité de se tromper est majorée uniformément par le seuil α n'est possible que si l'ensemble des décisions D n'est pas restreint aux k intervalles de la partition. Nous y ajouterons les (k-1) intervalles unions de deux éléments consécutifs de la partition. On ne peut pas ajouter des intervalles plus gros car D doit être totalement ordonné par la relation "être avant". Les intervalles doubles sont des décisions qui ne conduisent pas à une interprétation unique, elles n'apportent pas toute l'information désirée. Lorsque ρ est la vraie valeur du coefficient de corrélation, il y a une décision qui est vraiment meilleure que toutes les autres, c'est l'intervalle de la partition contenant ρ. On cherche alors à maximiser la probabilité de décider cet intervalle. Ce critère simple ne nécessite pas le passage par les fonctions de précision.

Comme il est indiqué au paragraphe 2, on va travailler sur le problème de décision obtenu en utilisant la transformation de Fisher. La partition de $[-1,+1]$ se transforme en une partition $\{d_i ; 1 \leq i \leq k\}$ de $\overline{\mathbb{R}}$. Pour tout $\vartheta = (\sqrt{n-3/2}).\mathrm{Log}((1+\rho)/(1-\rho))$ notons $d_{i(\vartheta)}$ l'intervalle de la partition qui contient ϑ (bien sûr $I_{i(\vartheta)}$ contient ρ). D'après ce qui précède, une "bonne" P.I.C. δ de $\mathcal{C}_0(\alpha)$ aura tendance à maximiser $E_\vartheta(1_{\{d_{i(\vartheta)}\}}(\delta(.)))$ pour tout ϑ (E_ϑ désigne l'opérateur espérance relatif à la loi normale $N(\vartheta,1)$). Ceci n'a un sens que si l'ensemble $\mathcal{C}_0(\alpha)$ des P.I.C. déterministes et monotones de niveau $(1-\alpha)$ n'est pas vide. Il n'existe alors généralement pas d'élément δ de $\mathcal{C}_0(\alpha)$ maximisant $E_\vartheta(1_{\{d_{i(\vartheta)}\}}(\delta))$ pour tout ϑ de $\overline{\mathbb{R}}$. On peut favoriser certains intervalles de la partition. Nous allons imposer un traitement aussi équitable que possible entre ces k intervalles. Posons $m_i(\delta) = \inf_{\vartheta \in d_i} E_\vartheta 1_{\{d_i\}}(\delta)$, c'est la probabilité minimum de décider d_i quand la vraie valeur du paramètre appartient à d_i. Pour tout élément δ de $\mathcal{C}_0(\alpha)$, on obtient le vecteur $(m_1(\delta), ..., m_k(\delta))$, notons $(m^1(\delta), ..., m^k(\delta))$ les coordonnées précédentes réordonnées par ordre croissant.

DEFINITION. Une règle de décision δ est dite minimax au seuil α si δ appartient à $\mathcal{C}_0(\alpha)$ et si pour tout i dans $\{1, ..., k\}$ elle vérifie :

$$m^i(\delta) = \sup\{m^i(\delta') ; \delta' \in \mathcal{C}_0(\alpha), \forall j < i \ \ m^j(\delta') = m^j(\delta)\}.$$

Si δ est minimax elle maximise sur $\mathcal{C}_0(\alpha)$ le minimum $m^1(\delta)$ des $m_i(\delta)$; ensuite parmi les éléments de $\mathcal{C}_0(\alpha)$ qui réalisent ceci elle maximise $m^2(\delta)$; etc...

b. *Calcul et prolongement.*
Le cas particulier du modèle traité ici remplit les conditions qui permettent de démontrer *l'existence et l'unicité* à une équivalence près d'une règle de décision minimax δ lorsque $\alpha < 1/2$ et bien sûr $\mathcal{C}_0(\alpha)$ non vide (cf. [3] ou [4], le fait d'avoir des masses de Dirac en $-\infty$ et $+\infty$ pour $\vartheta = -\infty$ et $\vartheta = +\infty$ ne change rien). Dans les travaux cités nous démontrons que $m_i(\delta)$ ne dépend que de la parité de i. De plus il est facile de construire un algorithme de calcul pour cette procédure de décision. Dans le deuxième cas du paragraphe précédent, qui correspond à $k = 3$ avec $I_1 = [-1,-\rho_0]$, $I_2 =]-\rho_0,\rho_0[$ et $I_3 = [\rho_0,+1]$, le calcul de la règle de décision minimax est très simple ; posons : $t = (\sqrt{n-3/2}).\mathrm{Log}((1+r)/(1-r))$; avec les notations de la figure 1 on obtient :

$\delta(t) = [-1,-\rho_0]$ si $t \leq -t_2$,
$\delta(t) = [-1,+\rho_0[$ si $-t_2 < t < -t_1$,
$\delta(t) =]-\rho_0,\rho_0[$ si $-t_1 \leq t \leq t_1$,
$\delta(t) =]-\rho_0,+1]$ si $t_1 < t < t_2$,
$\delta(t) = [+\rho_0,+1]$ si $t_2 \leq t$;

on peut bien entendu modifier les décisions en $-t_2$, $-t_1$, t_1 et t_2. Cette règle existe si $\mathcal{C}_0(\alpha)$ n'est pas vide, c'est-à-dire $F_{\theta_0}(0) \leq \alpha$. Elle précise bien le test de $H_0 : \rho \in]-\rho_0,\rho_0[$ contre $H_1 : \rho \notin]-\rho_0,\rho_0[$ dans la région de non rejet de H_0, $]-t_2,t_2[$. Dans la zone de rejet on a en plus le signe de ρ.

Il est possible d'obtenir une procédure d'intervalle de confiance de niveau $(1-\alpha)$ qui améliore la règle minimax en remplaçant certaines décisions doubles $I_i \cup I_{i+1}$ par un intervalle plus petit contenant I_i ou I_{i+1} (le nouvel ensemble de décisions est ainsi totalement ordonné par la relation "être avant"). Dans l'utilisation potentielle qui nous a amené à définir les règles minimax, cette amélioration présente peu d'intérêt. Elle ne supprime pas l'ambiguïté des décisions doubles, il y a toujours deux interprétations possibles. Nous renvoyons donc à [3] pour une discussion sur ce prolongement des règles minimax.

6. EXEMPLES D'APPLICATION.

Considérons une expérience consistant à réaliser un échantillon de taille 52 d'un couple (X,Y) de variables quantitatives. Le calcul du coefficient de corrélation linéaire entre ces 52 couples de valeurs donne une estimation r du coefficient de corrélation ρ entre X et Y. Pour l'interprétation de ces résultats, donc pour choisir la conclusion qu'il énoncera sur ρ, l'expérimentateur a plusieurs stratégies possibles.

a. *Procédure de demi-droite de confiance.*

L'expérimentateur désire connaître le résultat du test entre $H_0 : \rho = 0$ et $H_1 : \rho \neq 0$ au seuil .05. Lorsque l'estimation r est inférieure à -.273 ou supérieure à .273 c'est le rejet de H_0 qui est décidé. En utilisant la procédure de demi-droite de confiance au niveau .95 (voir §3), on obtient pour r supérieure à .273 une borne positive qui dans 95 cas sur 100 est inférieure à ρ. Au seuil .05 choisi, l'expérimentateur peut donc décider que ρ est supérieur à cette borne. Ainsi pour r = .55 cette borne inférieure de confiance au niveau .95 est égale à .366. Cette information n'est pas donnée par le test. Dans l'autre partie de la région de rejet on obtient une borne supérieure de confiance au niveau .95. Par symétrie elle vaut -.366 lorsque r = -.55. Pour r entre -.273 et .273 le test accepte H_0 ; disons plutôt qu'il ne permet pas de rejeter H_0, en effet le seuil choisi ne majore que le risque de première espèce. Avec la P.D.D.C. au niveau .95 on décide alors l'intervalle [-1,+1] ce qui donne une interprétation semblable à celle du test : la valeur $\rho = 0$ ne peut pas être exclue au seuil .05. La conclusion [-1,+1] évite la tentation de conclure trop rapidement $\rho = 0$.

b. *Procédure d'intervalle de confiance autour de* $]-\rho_0,+\rho_0[$.

L'expérimentateur désire connaître le résultat du test entre $H_0 : \rho \in]-\rho_0,+\rho_0[$ et $H_1 : \rho \notin]-\rho_0,+\rho_0[$ au seuil .05. Dans ce cas l'expérimentateur a traduit l'hypothèse d'une "absence" de lien linéaire entre X et Y, non pas par une corrélation parfaitement nulle mais par une corrélation "faible" comprise entre $-\rho_0$ et ρ_0. La plupart des hypothèses expérimentales portant sur "l'absence" de lien linéaire entre deux variables sont mieux traduites ainsi mais la valeur ρ_0, qui dépend du contexte de recherche, n'est pas facile à choisir. Comme nous ne faisons pas référence à une expérience précise nous allons considérer l'exemple où $\rho_0 = .3$. Le test usuel rejette $H_0 : \rho \in]-.3,.3[$ lorsque l'estimation r est inférieure à -.496 ou supérieure à .496. En utilisant la procédure de demi-droite de confiance autour de]-.3,.3[au niveau .95 (voir §4), on obtient pour r supérieure à .496 un borne supérieure ou égale à .3, qui dans 95 cas sur 100 est inférieure à ρ. Au seuil .05 l'expérimentateur peut décider que ρ est supérieur à cette borne et ne pas simplement dire que ρ n'appartient pas à]-.3,.3[. Ainsi pour r = .55 cette limite inférieure de confiance au niveau .95 est égale à .361. Par symétrie la discussion est semblable pour r inférieure à -.496. On obtient alors une borne supérieure de confiance au niveau .95, lorsque r = -.55 on décide que ρ appartient à [-1,-.361]. Pour r entre -.496 et .496 le test ne permet pas de rejeter $H_0 : \rho \in]-.3,.3[$ mais on ne peut pas vraiment affirmer H_0 avec une fiabilité donnée. La P.D.D.C. autour de]-.3,.3[au niveau .95 donne comme intervalle de confiance : $[-1,+.3[$ pour r entre $-.496$ et 0, $]-.3,+1]$ pour r entre 0 et .496. Au seuil .05 l'expérimentateur obtient alors comme conclusion, soit $\rho < +.3$, soit $\rho > -.3$. Comme pour le test, il ne peut pas exclure que ρ soit "faible", mais il connaît son signe s'il ne l'est pas.

c) *Procédure de décision minimax.*

On traite ici le cas où l'expérimentateur veut choisir entre k conclusions différentes et où il peut associer à chacune d'elles un intervalle de $[-1,+1]$, ces intervalles formant une partition de $[-1,+1]$. Par exemple, il considère que le coefficient de corrélation ρ est : négatif et notable dans $[-1,-.7]$, négatif mais ni notable ni négligeable dans $]-.7,-.3]$, négligeable dans $]-.3,+.3[$, positif mais ni négligeable ni notable dans $[.3,.7[$ et enfin positif et notable dans $[.7,+1]$. Ce type de problème de décision nous a conduit à sélectionner la règle de décision minimax (voir §5). Au seuil .05 elle fournit des intervalles de décision qui contiennent ρ dans 95 cas sur 100. Il y a neuf conclusions possibles, les cinq intervalles de départ et les intervalles doubles $[-1,-.3]$, $]-.7,+.3[$, $]-.3,+.7[$ et $[+.3,+1]$. La règle de décision minimax au seuil .05 donne la décision :

$[-1,-.7]$	si	$-1 \le r \le -.803$,
$[-1,-.3]$	si	$-.803 < r < -.560$,
$]-.7,-.3]$	si	$-.560 \le r \le -.496$,
$]-.7,+.3[$	si	$-.496 < r < -.074$,
$]-.3,+.3[$	si	$-.074 \le r \le +.074$,
$]-.3,+.7[$	si	$.074 < r < .496$,
$[.3,.7[$	si	$.496 \le r \le .560$,
$[.3,+1]$	si	$.560 < r < .803$,
$[.7,+1]$	si	$.803 \le r \le +1$.

Ainsi lorsque l'estimation r est égale à .60 on obtient l'intervalle double $[.3,+1]$. L'utilisation d'un prolongement de la règle minimax (voir §5) donne $[.30,.73]$ comme intervalle de confiance au niveau .95. Cet intervalle plus petit ne change pas l'interprétation, il y a toujours deux conclusions possibles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HOTELLING H., "New light on the correlation coefficient and its tranforms", *J. Roy Stat. Soc.*, serie B, 15 (1953), 193-225.

[2] LEHMANN E.L., *Testing statistical hypotheses*, New York, Wiley, 1959.

[3] MOREL G., *Procédures statistiques pour espace de décisions totalement ordonné et famille de lois à vraisemblance monotone*, Université de Rouen, Thèse, 1987.

[4] MOREL G., "Décisions liées aux intervalles d'une partition : le problème du choix dans la pratique de la recherche", *Pub. I.S.U.P.*, 32 (1987).

[5] NEYMAN J. and PEARSON E.S., "The testing of statistical hypotheses in relation to probability a priori", *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 29 (1933).

[6] REUCHLIN M., "Epreuves d'hypothèses nulles et inférence fiduciaire en psychologie", *J. de Psychologie*, 3 (1977), 277-292.

[7] ROUANET H., LEPINE D., PELNARD-CONSIDERE J., "Bayes-fiducial procedures as practical substitutes for misplaced significance testing : an application to educational data", in D.N.M. De Gruijter and L.J.Th. Van der Kamp (eds), *Advances in Psychological and Educational Measurement*, New York, Wiley, 1975, 33-50.

[8] PRATT J.W., "Lenght of confidence intervals", *J. Amer. Statist. Assoc.*, 56 (1961), 549-567.