MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

H. BRENY

Seuils d'accession et seuils de refus dans les systèmes usuels de représentation proportionnelle

Mathématiques et sciences humaines, tome 102 (1988), p. 17-30

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1988__102__17_0>

Math. Inf. Sci. hum. (26e année, n°102, *1988*, p. 17-30).

SEUILS D'ACCESSION ET SEUILS DE REFUS DANS LES SYSTEMES USUELS DE REPRESENTATION PROPORTIONNELLE

H. BRENY[1]

INTRODUCTION

0.1. Il est tout naturel de se poser, à propos d'un système de représentation proportionnelle, les questions que voici :

Quel est le pourcentage des votes (plus exactement : du quotient électoral) en dessous duquel une liste ne peut, en aucun cas, obtenir un siège (seuil d'accession) ?

Quel est le pourcentage des votes au dessus duquel une liste est sûre, quoi qu'il arrive, d'obtenir au moins un siège (seuil de refus) ? Posées par Rokkan dès 1968 (voir [5]), ces questions ont reçu un début de réponse de la part de Rae et al. en 1971 [4] ; ces auteurs les ont d'ailleurs posées non plus pour le premier siège, mais pour un siège de rang k, quelconque.

En 1977, Lijphart & Gibberd [3] ont fait remarquer que les formules de Rae et al. ne sont pas toutes correctes, et ils en ont proposé des corrections explicites. Il convient de remarquer que, bien que justifiées par la seule considération de situations exemplatives, les formules de Lijphart & Gibberd sont en tout point correctes. Mais, comme le montre l'exemple de Rae, en ces matières (délicates), il ne suffit pas d'être un incontestable expert ès systèmes électoraux pour être à l'abri de l'erreur; la vérité des formules de Lijphart & Gibberd ne peut être entièrement assurée que si elles reçoivent une démonstration en bonne et due forme. C'est l'objet du présent travail.

Situation

0.21. On suppose que L listes sont en concours pour l'attribution de S sièges; leurs chiffres électoraux respectifs sont

$v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_L \quad$ (total : T)

le quotient électoral est Q (= T/S), et l'on pose, comme à l'accoutumée, $v_i = r_i.Q + x_i$, r_i entier $\geq r_0$, $0 \leq x_i < Q$

0.22. Les sièges sont attribués soit par la méthode des plus grands restes (parag. 1 ci-après), soit par le système sériel dont les diviseurs (normés, strictement croissants) sont

$$d(1) = 1,\ d(2),\ \dots\ , d(n), \dots$$

(parag. 2 ci-après). La i-ème liste reçoit s_i sièges.

Définitions

0.3. Le "seuil d'accession au k-ème siège", noté SA_k, est défini (conventionnellement, pour la 1ère liste) comme suit :

[1] Institut de mathématique, Université de Liège (Belgique).

$$SA_k = \sup \{ v_1/Q \mid \forall\ v_2, \ \ldots, \ v_L \,;\, s_1 < k \}$$

ou ce qui revient au même, par

$$SA_k = \inf \{ v_1/Q \mid \exists\ v_2, \ \ldots, \ v_L : s_1 \geq k \}$$

Le "seuil de refus du k-ème siège" est défini, de même, par

$$SR_k = \inf \{ v_1/Q \mid \forall\ v_2, \ \ldots, \ v_L \,;\, s_1 \geq k \}$$
$$= \sup \{ v_1/Q \mid \exists\ v_2, \ \ldots, \ v_L : s_1 < k \} .$$

Il est bien évident que $SA_k \leq SR_k$. Une représentation proportionnelle absolument parfaite aurait pour conséquence

$$\forall\ k;\ SA_k = SR_k = k .$$

La proposition $\forall\ k \,;\ SR_k \leq k$ signifie que le système envisagé respecte les dus proportionnels.

PLUS GRANDS RESTES

Accession

1.1. Il est a priori évident que, pour la méthode des plus grands restes, on a :

$$\forall\ k;\ k\text{-}1 \leq SA_k \leq SR_k \leq k.$$

C'est le seul système connu où la marge entre seuils est aussi étroite.

Comme l'ont montré Lijphart & Gibberd, l'analyse intuitive de la situation conduit à conjecturer que

$$SA_k = (k\text{-}1) + (1/L) .$$

Démonstration : nécessité.

1.21. La première partie de la démonstration a pour thèse

si $v_1 = (k\text{-}1).Q + x$ et $0 \leq x < Q/L$,

alors $s_1 = k\text{-}1$, quels que soient $x_2, \ \ldots, \ x_L$.

Soit en effet $(k\text{-}1) + r_2 + \ldots + r_L = S\text{-}K$

et donc $x + x_2 + \ldots + x_L = K.Q.$

avec, bien entendu, $1 \leq K \leq L\text{-}1$.

Alors, $(K - 1/L).Q < K.Q - x = x_2 + \ldots + x_L$;

appelons u.Q le K-ème plus grand des nombres $x_2 , \ \ldots , \ x_L$; ainsi,

K-1 de ces nombres valent au plus Q

L-K d'entre eux valent au plus u.Q

et donc

$(K - 1/L).Q < x_2 + \ldots + x_L \leq (K\text{-}1).Q + (L\text{-}K)u.Q,$

$u > (1/L).(L\text{-}1)/(L\text{-}K) \geq 1/L$.

Cela signifie que le K-ème plus grand reste est supérieur à x, ce qui entraîne $s_1 = k\text{-}1$, c.q.f.d.

Démonstration : possibilité

1.22. Il reste à montrer que

si $v_1 > (k\text{-}1).Q + Q/L$,

alors $v_2 , \ \ldots v_L$ peuvent être pris tels que $s_1 = k$.

L'une des nombreuses possibilités est celle-ci:

h étant un nombre positif très petit ,

$v_1/Q = (k\text{-}1) + 1/L + h$, $v_2/Q = (S\text{-}k) + 1/L - h/(L\text{-}1)$

$v_3/Q = \ldots = v_L/Q = 1/L - h/(L\text{-}1).$

Refus

1.3. On est juste en deçà du seuil de refus lorsque la 1ère liste reçoit k-1 sièges en ayant $r_1 = k-1$ et en outre une valeur aussi grande que possible de x_1 ; on est ainsi conduit à donner à Σx_i sa valeur maximum, donc à prendre $K = L-1$; alors, x_1 est aussi grand que possible mais non-utile si les autres x_i sont tout juste plus grands que x_1; cela conduit à conjecturer que

$$SR_k = (k-1) + (L-1)/L . \qquad (1)$$

Mais, dans ce cas, on a

$$(k-1) + r_2 + ... + r_L = S-L+1 ,$$

ce qui est impossible si $S < L+k-2$; s'il en est ainsi, le nombre maximum de sièges restants n'est plus L-1 mais S-k+1 ; c'est pourquoi la conjecture (1) ci-avant doit être remplacée par

$$SR_k = (k-1) + m \quad \text{avec}$$
$$m = (L-1)/L \qquad \text{lorsque } S \geq L-k+2$$
$$= (S-k+1)/(S-k+2) \text{ lorsque } S \leq L-k+2.$$

Démonstration : nécessité

1.41. Il faut prouver que si $v_1 > (k-1+m).Q$
alors $s_1 = k$.

Notons K le nombre des sièges "restants" ($K = S - \Sigma r_i$), et u.Q le K-ème plus grand des x_i ($i > 1$). Alors

$$K.Q = x_1 + x_2 + ... + x_L > m.Q + K.u.Q ;$$

donc $u < 1 - m/K$;
mais, si $S \geq L+k-2$ alors $K \leq L-1$
et $u < 1 - (L-1)/L(L-1) = 1 - 1/L = m$,
tandis que si $S < L+k-2$
alors $K \leq S-k+1$

et $$u < 1 - \frac{S-k+1}{(S-k+2)(S-k+1)} = 1 - \frac{1}{S-k+2} = m ;$$

dans les deux cas, le K-ème plus grand des nombres $x_2, ...x_L$ est plus petit que m, donc x_1 est parmi les K plus grands restes, et $s_1 = k$, c.q.f.d.

Démonstration : possibilité

1.42. Il reste à prouver que
si $(k-1).Q \leq v_1 < (k-1+m).Q$
alors $s_1 = k-1$ est possible ($s_1 \geq k-1$ est évident).

1.421. Cas a. : $S \geq L+k-2$.
On choisit les entiers positifs $r_2, ... r_L$ tels que

$$(k-1) + r_2 + ... + r_L = S-L+1$$
$$\text{et } v_1 = [\, k-1 - h + (L-1)/L \,].Q$$
$$v_i = [\, r_i + g_i + (L-1)/L \,].Q$$
$$h = g_2 + ... + g_L \text{ (tous nombres positifs très petits);}$$

il y a L-1 sièges restants, x est le plus petit des L restes, et donc

$$s_1 = k-1.$$

1.422. Cas b. : $S < L+k-2$.
Soit

$$m = (S-k+1)/(S-k+2)$$
$$v_1 = (k+1+m-h).Q$$
$$v_i = (m+g_i).Q \qquad i = 2, ..., S-k+2$$
$$v_j = g_J.Q \qquad j = S-k+3, ... , L$$
$$h = g_2 + ... + g_L \text{ (tous nombres positifs très petits).}$$

Il y a alors S-k+1 sièges restants, et S-k+1 des restes sont supérieurs à x_1 ; donc $s_1 = k-1$.

En résumé,
pour la méthode des plus grands restes, le seuil d'accession au k-ème siège est :

$SA_k = (k-1) + 1/L$

le seuil de refus du k-ème siège est :

$SR_k = (k-1) + (L'-1)/L'$
avec $L' = \min(L,S-k+2)$.

SYSTEMES SERIELS
Accession

Conjecture
2.1. Pour le système sériel (voir [2]) basé sur la suite de diviseurs d(n) [normés : d(1) = 1], on est tout juste au-delà du seuil d'accession du k-ème siège pour la 1ère liste lorsque celle-ci a son k-ème quotient utile, mais à peine plus grand que le plus grand des quotients non-utiles de toute autre liste. Les valeurs critiques des v_i satisfont donc à la condition

$$\frac{v_1}{d(k)} = \frac{v_2}{d(s_2+1)} = \dots = \frac{v_L}{d(s_L+1)}$$

moyennant

$k + s_2 + \dots + s_L = S.$

Si donc on pose

$D(k , s) = d(k) + d(s_2+1) + \dots + d(s_L+1)$,

la valeur critique de v_1 est donnée par

$v_1/Q = d(k).S / D(k , s).$

Cette valeur est aussi petite que possible quand D(k , s) est aussi grand que possible; on pose donc

$AD(k,S) = \max\{d(k) + d(u_2+1) + \dots +d(u_L+1) \mid u_2 \geq 0, \dots ,u_L \geq 0, k+u_2 + \dots + u_L = S\}$

(maximum dont l'existence n'est pas en question puisqu'il porte sur un ensemble fini) et on conjecture que

$SA_k = d(k).S / AD(k , S)$. (2)

Démonstration : possibilité
2.2. La preuve que si $v_1 > SA_k$
alors $s_1 > k$ est possible
n'est rien de plus que l'explicitation de la situation que l'on vient de décrire. Soient les entiers $s_2, \dots, s_L$ tels que

$D(k , s) = AD(k , S)$ (donc $s_2 + \dots + s_L = S-k$);

on prend (h étant positif et très petit),

$$v_1 = \frac{d(k).T}{AD(k,S)} + h , \quad v_i = \frac{d(s_i+1).T}{AD(k,S)} - \frac{h}{L-1}$$

Alors $v_1/d(k) > v_i/d(s_i+1)$ $(i = 2,\dots,L)$;
si donc $v_1/d(k)$ était non-utile, il en serait de même des quotients $v_i/d(s_i+1)$, et le nombre des quotients utiles serait inférieur à S, ce qui ne se peut.

Démonstration : nécessité
2.3. Thèse : si $v_1 < d(k).T/AD(k , S)$ (3)
alors $s_1 \leq k-1$.

Supposons en effet que, la condition (3) étant satisfaite, le quotient $v_1/d(k)$ soit néanmoins utile. Appelons s_i le nombre des quotients utiles de la i-ème liste (i>1);ainsi , le quotient

$v_i/d(s_i+1)$ est non-utile, et on a :

$$v_i/d(s_i+1) \ < \ v_1/d(k) .$$

Soient h_1 , h_2 , ... , h_L les nombres positifs tels que

$$\frac{v_1}{d(k) - h_1} = \frac{T}{AD(k,S)} = \frac{v_i}{d(s_i+1) - h_i} ;$$

et H leur somme; alors

$$\frac{v_1}{d(k) - h_1} = \frac{v_2}{d(s_2+1) - h_2} = \dots = \frac{T}{AD(k,S) - H}$$

et donc

$$D(k , s) = H + AD(k , S)$$

$$D(k , s) > \max \{ D(k , u) \mid k + u_2 + \dots + u_L = S \} ;$$

cela implique que k et les s_i ne satisfont pas à la condition

$$k + s_2 + \dots + s_L = S$$

ni, a fortiori [car AD(k , S) croît avec S] à la condition

$$k + s_2 + \dots + s_L < S;$$

donc si $v_1 < d(k).T/AD(k , S)$

le k-ème quotient de la 1ère liste ne peut être utile que si le nombre de sièges à allouer excède S, c.q.f.d.

Calculs

2 .4. Reste le problème de calculer le nombre AD(k , S).

2.41. La solution est simple pour les systèmes sériels où les diviseurs normés satisfont à la relation

$$d(n) = a.n + b \quad (b = 1\text{-}a) ;$$

dans ce cas, en effet, on a

$$D(k\ u) = (a.k+b) + (a.u_2+a+b) + \dots + (a.u_L+a+b)$$
$$= a.(S-1) + L$$

(quelles que soient les valeurs individuelles des u_i) ; donc

$$AD(k,S) = a.(S-1) + L$$

et

$$SA_k = \frac{(a.k + 1 - a).S}{a.(S-1) + L} .$$

Explicitement, pour les principaux systèmes de ce type, on a :

système	a =	SA_k =
Dhondt	1	k.S/(S + L - 1)
Impériali[2]	1/2	(k+1).S/(S + 2L - 1)
Sainte-Laguë	2	(2k-1).S/(2S + L - 2)
Danois	3	(3k-2).S/(3S + L - 3)

2.42. La solution est plus compliquée pour les systèmes de Sainte-Laguë modifiés, pour lesquels[3]

$$d(n) = (2.n - 1)/u \quad (n > 1 ; 1 < u < 3)$$

$$d(1) = 1 = (2.1 - 1)/u + (1 - 1/u).$$

---

[2] Le système Impériali est un système sériel mais n'est pas un "système à diviseurs" au sens de [1].

[3] Ces systèmes sériels ne sont pas des "curiosités mathématiques", puisqu'ils sont bel et bien utilisés dans les pays scandinaves (avec u = 1, 5 ou u = 1, 4).

Parmi les nombres k, u_2+1, ..., u_L+1 il y en a, disons, m qui valent 1; alors

$$D(k, u) = (2/u).(S-1) + L/u + m.(1 - 1/u)$$

et $AD(k, S)$ est obtenu lorsque m est aussi grand que possible ;

a) lorsque $k = 1$ et $S > 1$, la plus grande valeur possible de m est $L-1$, et on a

$$SA_1 = \frac{u.S}{2S + u.L - (1+u)}$$

b) lorsque $k = S > 1$, la plus grande valeur possible de m est encore $L-1$, et on a

$$SA_S = \frac{(2S - 1).S.u}{2S + u.L - (1+u)}$$

c) lorsque $1 < k < S$, le maximum de m est $L-2$, et on a

$$SA_k = \frac{(2k-1).S.u}{2S + u.L - 2u}$$

d) enfin, lorsque $S = k = 1$, alors $m = L$ et on a

$$SA_1 = 1/L .$$

Refus

Conjecture

2.5. La liste 1 est tout juste en-deçà du seuil de refus pour le k-ème siège quand son k-ème quotient est non-utile mais tout juste plus petit que le dernier quotient utile de chacun de ses opposants :

$$v_1/d(k) = A - h , \quad v_i/d(s_i) = A + g_i \quad (i = 2 , ... , L)$$

$$k + s_2 + ... + s_L = S+1$$

(non pas $= S$, car la liste 1 n'a, par hypothèse, que $k-1$ sièges).

Toutefois, $d(n)$ n'est pas défini pour $n=0$; or, la situation de la 1ère liste est aussi défavorable que possible quand les listes pour lesquelles $s_i = 0$ ont aussi $v_i = 0$ (car cela augmente les chiffres électoraux des autres listes). Donc, soit

$$v_i > 0 \text{ si } i \le j \qquad v_i = 0 \text{ si } i > j$$

(sans exclure $j=L$). Les valeurs critiques relatives à cette situation sont alors définies par

$$\frac{v_1}{d(k)} = \frac{v_2}{d(s_2)} = ... \frac{v_j}{d(s_j)} \quad \left(= \frac{T}{D'(k , s)} \right)$$

avec $D'(k , s) = d(k) + d(s_2) + ... + d(s_j)$

et $k + s_2 + ... + s_j = S+1$, $s_2 > 0$, ... , $s_j > 0$

$$v_1/Q = d(k).S/D'(k , s) .$$

Ceci conduit à la conjecture

$$SR_k = d(k).S/DD(k , S)$$

moyennant

$$DD(k,S) = \min \{D'(k,t) \mid 1 \le j \le L, t_2>0 , ..., t_j>0 , k+t_2 + ... + t_j = S+1 \} \qquad (4)$$

(ici non plus l'existence du minimum n'est en question).

Démonstration : possibilité

2.6. Supposons $(v_1/Q) < SR_k$; notons M le minimum de D'(k , t) et supposons-le réalisé par les nombres j et s_2, ...s_j. Supposant h positif et très petit, soit :

$v_1 = [T.d(k)/M] - (j-1).h$

$v_i = [T.d(s_i)/M] + h \quad , \; i = 2, \; ..., j$

$v_i = 0, i > j$ (pour autant que $j < L$).

Alors, les S éléments de la table de quotients

$v_1/d(1), ..., \; v_1/d(k-1)$ (ligne vide si k=1)

$v_i/d(1), ..., \; v_i/d(s_i) \quad i = 2, \; ..., \; j$

sont tous plus grands que $v_1/d(k)$, c.q.f.d.

Démonstration : nécessité

2.7. Thèse : si $(v_1/Q) > SR_k$, alors $s_1 \geq k$.

Qu'il soit en effet supposé que

a) $v_1 > T.d(k)/DD(k , S)$

b) les listes qui ont des sièges ont les numéros 2, ... , j (et 1 si $k \geq 1$)

c) le dernier quotient utile de la liste i est $v_i/d(s_i)$ $(s_i>0)$

d) $v_1/d(k)$ n'est pas utile (donc , $k+s_2+...+s_j \geq S+1$)

e) $v_{j+1} + ... + v_L = A \; (\geq 0)$.

Alors, bien entendu,

$$\frac{T}{DD(k , S)} < \frac{v_1}{d(k)} < \frac{v_i}{d(s_i)} \quad (i = 2, ..., \; j)$$

$$v_1 + v_2 + ... + v_j = T - A \leq T .$$

Soient h_1, h_2, ...h_j tels que

$$\frac{v_1}{d(k) + h_1} = \frac{T}{DD(k,S)} = \frac{v_i}{d(s_i) + h_i} \quad (i = 2, \; ...j);$$

alors $0 < h_1 < h_i$ $(i = 2, \; ..., \; j)$, et (par addition)

$$\frac{v_1}{d(k) + h_1} = ... = \frac{v_j}{d(s_j) + h_j} = \frac{T - A}{(h_1+...+h_j)+d(k)+...+d(s_j)}$$

donc

$$DD(k,S) \geq (h_1+...+h_j) + d(k) + ... + d(s_j)$$
$$> d(k) + d(s_2) + ... + d(s_j)$$

ce qui contredit la définition même de DD(k , S). L'hypothèse a) ci-dessus est donc intenable, c.q.f.d.

Calculs

2.8. Reste à calculer le nombre DD(k , S).

2.81. Si on a, pour tout n (y compris 1), $d(n) = a.n + (1-a)$,
alors, évidemment, $D'(k , t) = a.(S-1) + j.(1-a)$.

a) Pour la méthode de Dhondt, a=1 et D'(k , t) = S+1; donc
(Dhondt) $SR_k = k.S/(S+1)$.

b) Pour la méthode Impériali, a = 1/2, donc 1-a est positif et le minimum est atteint quand j est aussi petit que possible , ce qui arrive quand j=2 : $DD(k , S) = (S+3)/2$, et

(Impériali) $SR_k = (k+1).S/(S+3)$.

c) Lorsque $a > 1$ (notamment pour les systèmes de Sainte-Laguë et Danois), le minimum est atteint quand j est aussi grand que possible; mais, d'une part, $j \leq L$ et, d'autre part,

$$j-1 \leq s_2 + ... + s_j = S-k+1 ;$$

donc, le maximum de j est $L' = \min(L , S-k+2)$; donc

$$DD(k , S) = a.(S+1) - (a-1).L'$$

$$\text{et } SR_k = \frac{(a.k + 1-a).S}{a.(S+1) - (a-1).L'} ;$$

2.82. Les systèmes de Sainte-Laguë modifiés, où d(1) échappe à la formule générale pour d(n), sont beaucoup plus pervers. On se souvient que $d(n) = (2n - 1 + I_n)$ avec

$I_n = 0$ si $n>1$

$I_1 = u-1.$ [4]

donc $D'(k, ,t) = (1/u) [2S + 2 - j + m(u-1)]$,

m étant le nombre des "1" dans $\{k , t_2 , ... , t_j\}$.

Idéalement, le minimum est obtenu quand j est aussi grand, et m est aussi petit, que possible. Toutefois, pour avoir j grand, on doit avoir beaucoup de "1" parmi les t_i, ce qui tend à augmenter m; mais l'échange d'une valeur de t_i plus grande que 1 pour plusieurs égales à 1 tend à faire décroître D' , on le voit sans peine ;

donc si <u>$L \geq S-k+2$</u> $(S \leq L+k-2)$

le minimum de D' est atteint par la configuration

(listes)	1	2	...	S-k+2	S-k+3	L
(sièges)	k	1		1	0	0

pour laquelle $DD(k , S) = (1/u)[u.(S-k+1) + 2k-1]$

$DD(1 , S) = S+1$

et, par conséquent,

$$SR_k = \frac{(2k - 1).S}{(2k-1) + u.(S-k+1)} \quad \text{si } k > 1$$

$$SR_1 = S/(S+1).$$

Mais si <u>$L < S-k+2$</u> $(S > L+k-2)$

il est toujours possible de prendre $j = L$, et il faut minimer m. Quand k=1, m est en tout état de cause >1; quand k>1, alors m>0 ; ces valeurs mimimums de m peuvent être atteintes si

$s_2 \geq 2$, ... , $s_L \geq 2$ est une possibilité

c.à d. si $S-k+1 \geq 2(L-1)$ $(S \geq 2L + k - 3)$;

alors, $j = L$ $m = 0$ (k>1) ou $m = 1$ (k=1)

$DD(1 , S) = (1/u).(2S - L + 1 - u)$

$DD(k , S) = (1/u).(2S - L + 2)$ $(k > 1)$

$$\text{et } SR_1 = \frac{u.S}{2S - L + 1 + u} \qquad SR_k = \frac{(2k - 1).S}{2S - L + 2}$$

Reste alors le cas où <u>$L+k-2 < S < 2L+k-3$</u>

(inexistant si L=2); alors j=L, et m est minimum quand aucun des s_i n'excède 2 :

---

[4] Il faut supposer ici que $1 < u < 2$.

S - (L+k-2) d'entre eux valent 2
2L + k - 3 - S valent 1;
ce qui, tous calculs faits, conduit à :

$$SR_1 = \frac{u.S}{(3\text{-}u).S - (53\text{-}2u).L + 3\text{-}u}$$

$$SR_k = \frac{(2k - 1).S}{(3\text{-}u).S - (3\text{-}2u).L + k.(u\text{-}1) + 5\text{-}3u} \; .$$

Exemples

Les tables ci-après montrent un échantillon de seuils (d'accession ou de refus) pour les systèmes des plus grands restes, Dhondt, Impériali, et Sainte-Laguë, soit pour le premier siège (k = 1) soit pour la majorité absolue [k = (S+1)/2].

Quelques remarques se dégagent clairement de ces tables.

a) Ici encore, la méthode des plus grands restes est nettement à part des autres.

b) La plus ou moins forte "densité" (voir [2]) de ces trois systèmes est clairement visible; p.ex, pour k = 1 on a toujours

$SA_1(S.L.) \leq SA_1(Dhondt) \leq SA_1(Imp.)$

mais la relation est exactement inverse au seuil d'accession à la majorité absolue. La même remarque vaut pour SR_1.

c) Par contre, pour le seuil de refus à la majorité absolue, les systèmes Dhondt et Impériali ont le même seuil, inférieur à celui de Sainte-Laguë, sauf si L=2. On note dans cet ordre d'idées que si le nombre des listes excède 2, avec le système S.L. obtenir la majorité absolue des sièges avec v = T/2 n'est nullement certain.

d) Il est très facile de voir que

$SA_k(Dhondt) < SA_k(Imp.)$ si et seulement si $k < 1 + (S\text{-}1)/L$
$SA_k(Dhondt) < SA_k(S.L.)$ si et seulement si $k > 1 + (S\text{-}1)/L$
$SR_k(Dhondt) < SR_k(Imp.)$ si et seulement si $k < (S+1)/2$
$SR_k(Dhondt) < SR_k(S.L.)$ si et seulement si $(S+1)/(2S\text{-}L) < k < S\text{-}L+2$.

De plus, si q = (S+1)/2 (seuil de majorité absolue),

$$SA_q\,(Dhondt) = \frac{S}{2}\ \frac{S+1}{S+L-1} \qquad \left(< \frac{S}{2} \right)$$

$$SA_q\,(Imp.) = \frac{S}{2}\ \frac{S+3}{S+2L-1} \qquad (< SA_q\,(Dh) \text{ sauf si } L=2)$$

$$SA_q\,(S.L.) = \frac{S}{2}\ \frac{S}{S-1+L/2} \qquad (> SA_q\,(Dh) \text{ sauf si } L=2)$$

$$SR_q\,(Dhondt) = SR_q\,(Imp.) = S/2$$

$$SR_q\,(S.L.) = \frac{S}{2}\ \frac{4S}{2S+1} \ \left(> \frac{S}{2} \right) \quad \text{si } S < 2L - 3$$

$$= \frac{S}{2}\ \frac{2S}{2S - L - 2} \ \left(> \frac{S}{2} \right) \text{ si } S > 2L - 3.$$

(on note que dans ces six seuils de majorité absolue, le facteur prépondérant est chaque fois S/2, comme il convient).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Balinski, M. & Young, P. *Fair representation*, New Haven, Yale University Press, 1982.
[2] Breny, H., "Quelques propriétés générales des systèmes sériels de représentation proportionnelle.", *Math. Sci. hum.*, 94,1986,33-44.
[3] Lijphart, A. & Gibberd, R. , "Thresholds and payoffs in list systems of proportional representation.", *Eur. J. Polit. Res.*,5 (1977) 219-244.
[4] Rae, D. et al., "Thresholds of representation and thresholds of exclusion : an analytical note on electoral systems.", *Compar. Polit. Studies*, 3 (1971),479-488.
[5] Rokkan, S.,"Elections, electoral systems" dans [6].
[6] Sills, D. (ed.), *International Encyclopedia of the Social Sciences*, New York, Mc Millan, 1968.

TABLES

Dans chaque cellule des tables ci-après, les seuils sont systématiquement inscrits dans l'ordre
plus grands restes
Dhondt
Impériali
Sainte-Laguë.

Seuils d'accession au premier siège : SA_1

L =	2	3	5	8
S=3	0,50	0,33	0,20	0,13
	0,75	0,60	0,43	0,30
	1,00	0,75	0,50	0,33
	0,50	0,43	0,33	0,25
S=5	0,50	0,33	0,20	0,13
	0,83	0,71	0,46	0,42
	1,25	1,00	0,71	0,50
	0,50	0,45	0,38	0,31
S=7	0,50	0,33	0,20	0,13
	0,88	0,78	0,64	0,50
	O,40	1,17	0,88	0,64
	0,50	0,47	0,41	0,35
S=13	0,50	0,33	0,20	0,13
	0,93	0,87	0,76	0,65
	1,63	1,44	1,18	0,93
	0,50	0,48	0,45	0,41
S=19	0,50	0,33	0,20	0,13
	0,95	0,90	0,83	0,73
	1,73	1,58	1,36	1,12
	0,50	0,49	0,46	0,43
S=39	0,50	0,33	0,20	0,13
	0,97	0,95	0,91	0,87
	1,86	1,77	1,63	1,44
	0,50	0,49	0,48	0,46
S=99	0,50	0,33	0,20	0,13
	0,99	0,98	0,96	0,93
	1,94	1,90	1,83	1,74
	0,50	0,50	0,49	0,49

Seuils d'accession à la majorité absolue : SA_q

	L = 2	3	5	8
S=3	1,50	1,33	1,20	1,13
	1,50	1,20	0,86	0,60
	1,50	1,13	0,75	0,50
	1,50	1,29	1,00	0,75
S=5	2,50	2,33	2,20	2,13
	2,50	2,14	1,67	1,25
	2,50	2,00	1,43	1,00
	2,50	2,27	1,92	1,56
S=7	3,50	3,33	3,20	3,13
	3,50	3,11	2,55	2,00
	3,50	2,92	2,19	1,59
	3,50	3,27	2,88	2,45
S=13	6,50	6,33	6,20	6,13
	5,50	6,07	5,35	4,55
	6,50	5,78	4,73	3,71
	6,50	6,26	5,83	5,28
S=19	9,50	9,33	9,20	9,13
	9,50	9,05	8,26	7,31
	9,50	8,71	7,46	6,15
	9,50	9,26	8,80	8,20
S=39	19,50	19,33	19,20	19,13
	19,50	19,02	18,14	16,96
	19,50	18,61	17,06	15,17
	19,50	19,25	18,78	18,11
S=99	49,50	49,33	49,20	49,13
	49,50	49,01	48,06	46,70
	49,50	48,55	46,76	44,29
	49,50	49,25	48,7	48,04

Seuils de refus du 1er siège : SR_1

	L = 2	3	5	8
S=3	0,50	0,67	0,75	0,75
	0,75	0,75	0,75	0,75
	1,00	1,00	1,00	1,00
	0,50	0,60	0,75	0,75
S=5	0,50	0,67	0,80	0,83
	0,83	0,83	0,83	0,83
	1,25	1,25	1,25	1,25
	0,50	0,56	0,71	0,83
S=7	0,50	0,67	0,80	0,88
	0,88	0,88	0,88	0,88
	1,40	1,40	1,40	1,40
	0,50	0,54	0,64	0,88
S=3	0,50	0,67	0,80	0,88
	0,93	0,93	0,93	0,93
	1,63	1,63	1,63	1,63
	0,50	0,52	0,57	0,65
S=19	0,50	0,67	0,80	0,88
	0,95	0,95	0,95	0,95
	1,73	1,73	1,73	1,73
	0,50	0,51	0,54	0,59
S=39	0,50	0,67	0,80	0,88
	0,97	0,97	0,97	0,97
	1,86	1,86	1,86	1,86
	0,50	0,51	0,52	0,54
S=99	0,50	0,67	0,80	0,88
	0,99	0,99	0,99	0,99
	1,94	1,94	1,94	1,94
	0,50	0,50	0,51	0,52

Seuils de refus de la majorité absolue : SRq

	L= 2	3	5	8
S=3	1,50	1,67	1,67	1,67
	1,50	1,50	1,50	1,50
	1,50	1,50	1,50	1,50
	1,50	1,80	1,80	1,80
S=5	2,50	2,67	2,67	2,75
	2,50	2,50	2,50	2,50
	2,50	2,50	2,50	2,50
	2,50	2,78	3,13	3,13
S=7	3,50	3,67	3,80	3,80
	3,50	3,50	3,50	3,50
	3,50	3,50	3,50	3,50
	3,50	3,77	4,45	4,45
S=13	6,50	6,67	6,80	6,88
	6,50	6,50	6,50	6,50
	6,50	6,50	6,50	6,50
	6,50	6,76	7,35	8,45
S=19	9,50	9,67	9,80	9,88
	9,50	9,50	9,50	9,50
	9,50	9,50	9,50	9,50
	9,50	9,76	10,31	11,28
S=39	19,50	19,67	19,80	19,88
	19,50	19,50	19,50	19,50
	19,50	19,50	19,50	19,50
	19,50	19,75	20,28	21,13
S=99	49,50	49,67	49,80	49,88
	49,50	49,50	49,50	49,50
	49,50	49,50	49,50	49,50
	49,50	49,75	50,26	51,05