MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

J.-CL. FALMAGNE

Propos sur la théorie du mesurage

Mathématiques et sciences humaines, tome 101 (1988), p. 7-34
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1988__101__7_0>

Math. Inf. Sci. hum. (26^{e} année, n°101, *1988*, p.7-34)

PROPOS SUR LA THEORIE DU MESURAGE*

J.-Cl. FALMAGNE**

Cette matinée consacrée à la théorie du mesurage se déroulera selon un programme destiné à la fois à vous présenter les concepts fondamentaux et à vous donner une idée assez précise de certains résultats récents.

Cet exposé débutera par un rappel historique, qui conduira progressivement à mettre en place certains concepts de base. Je brosserai assez rapidement un tableau de la théorie du mesurage jusque vers 1975. Je discuterai ensuite surtout de la question des erreurs, de leur formalisation, et des questions statistiques qui surgissent. Vous verrez qu'on ne possède encore que peu de résultats, que je vous présenterai. A cet égard, je vous proposerai surtout un cadre de recherche, dans lequel il apparaîtra que les questions statistiques que l'on rencontre s'apparentent souvent à l'analyse convexe, où elles posent de façon typique des problèmes assez difficiles.

Au cours d'un deuxième exposé, Duncan Luce discutera de la structure algébrique des échelles de mesurage. Il se trouve que, pour des raisons qui sont loin d'être évidentes, les sciences n'utilisent qu'un très petit nombre d'échelles de mesurage. Aux isomorphismes près, on ne rencontre dans la pratique

* Cet article est basé sur un exposé présenté à la rencontre *Mathématiques et Sciences humaines*, qui s'est déroulée au Centre International de Rencontres Mathématiques de Marseille-Luminy du 22 au 26 juin 1987. La rédaction a été complétée lors d'un séjour de l'auteur au "Center for Advanced Studies in the Behavorial Sciences", avec le support financier de la bourse NSF BNS-8700864 et de la Alfred Sloan Foundation. Le travail de l'auteur dans ce domaine bénéficie de la bourse NSF IST84-18860 (New York University). Nous remercions Duncan Luce pour ses réactions à une version précédente de l'article.
Les références données dans le cours du texte sont quelquefois incomplètes. Une notice bibliographique peut être trouvée à la fin de l'article.

** New York University, 23 juin 1987.

que les échelles ordinales, les échelles d'intervalles et les échelles de rapports. Il s'agit là d'une situation assez mystérieuse, sur laquelle des résultats récents obtenus par Narens, Luce et Alper notamment, dont Luce vous parlera, ont commencé à jeter une certaine lumière. Il faut remarquer que ces résultats sont conceptuellement très proches, quoique apparemment indépendants, d'un théorème de Tits sur les groupes de permutation transitifs.

L'exposé de Louis Narens sera centré sur la question de la "signifiance" empirique des énoncés mathématiques. Le terme "signifiance" est une traduction de l'anglais "meaningfulness". Il recouvre l'idée que tout énoncé quantitatif n'est pas forcément admissible en tant que description d'un phénomène ou d'une situation empirique. Ceci s'applique même si la description est précise, et exacte. A première vue, ceci peut sembler bizarre. En fait, l'examen des lois importantes retenues par la science est révélateur à cet égard. Seuls ont été retenus les énoncés quantitatifs dont la vérification empirique est possible sans que l'on doive préciser les unités des échelles de mesurage apparaissant dans les formules. Ceci se marque d'emblée. Dans le Deuxième Jour des "Dialogues concernant deux Sciences nouvelles" de Galilée, Salviati déclare, à propos de la balance à bras inégaux :

"*From this, we may derive the general conclusion that any two heavy bodies are in equilibrium at distances* (from the fulcrum) *which are inversely proportional to their weights*" [1].

De même, dans ses "Commentaires", Kepler écrit :

"*If two stones were placed in any part of the world, near each other, yet beyond the sphere of influence* (orbem virtutis) *of a third related body, the two stones, like two magnetic bodies, would come together at some intermediate place, each approaching the other through a distance in proportion to the mass of the other* " [2].

Cette pratique est quasiment universelle dans la science contemporaine. La loi de Coulomb, par exemple, dans l'*American Institute of Physics Handbook (1957)* est énoncée comme suit :

"*The force in a homogeneous isotropic medium of infinite extent between two*

---

[1] Galileo Galilei, *Dialogues Concerning Two New Sciences*, translated by Henry Crew and Alfonso de Salvio, Dover 1954, p.112, first edition, Macmillan, 1914.

[2] Johannes Kepler, *Astronomia nova aitiologetos seu physica coelestis, tradita commentarii de motibus Stellae Marti (1609)*, p. 151, texte cité par Max Jammer, *Concepts of Mass in classical and modern physics*, Harper, 1961, p. 54.

point charges is proportional to the product of their magnitude, divided by the square of the distance between them." [3] .

On peut se demander évidemment si ce purisme dans les énoncés quantitatifs est bien justifié. Que se passerait-il de grave si l'on admettait des énoncés de lois dont le sens ne serait parfaitement clair que si les unités des échelles de mesurage étaient mentionnées explicitement ? Il y a, bien sûr, la nécessité des communications entre chercheurs. Si la forme même des modèles et des lois dépendait des unités utilisées, les échanges scientifiques seraient très difficiles. Mais ce n'est pas seulement pour éviter la création d'une Tour de Babel scientifique que l'on favorise systématiquement les énoncés signifiants. Il semble bien qu'il y ait des raisons plus profondes. Je vais avancer ici une idée encore mal digérée, certainement non formalisée, mais que je crois importante. Il se pourrait que les théoriciens de la science donnent implicitement la priorité aux modèles et aux lois qui sont, au moins en principe, susceptibles de réalisation physique. Evidemment, de telles réalisations sont nécessairement indépendantes des échelles de mesurage utilisées pour tracer les plans.

Le fait de ne considérer que des énoncés quantitatifs signifiants a des applications pratiques importantes. Il permet, dans certains cas, de deviner la forme générale d'une loi a priori, sans avoir fait l'expérience, simplement sur la base des échelles de mesurage entrant dans l'expression de la loi. Un exemple au moins de ce type d'application vous est connu : il s'agit de l'analyse dimensionnelle de la physique, qui apparaît donc comme une application du concept de signifiance. Ce dernier est toutefois de caractère beaucoup plus général.

Comme vous pouvez le constater, le concept de signifiance pose des questions délicates, qui ne sont pas toutes résolues. L'exposé de Narens vous mettra au fait de l'état actuel des travaux. Notons que le concept de signifiance est fortement lié à celui de type d'échelle de mesurage. En effet, selon une des définitions de ce concept, une loi est dite signifiante si sa forme ne dépend pas du choix des éléments dans les groupes d'échelles impliqués dans l'écriture de la loi. Les exposés de Luce et de Narens sont donc étroitement complémentaires.

Finalement, dans le dernier exposé de la matinée, Jean-Pierre Olivier fera l'examen critique de ces travaux. Il discutera aussi de certains aspects négligés, pour des raisons de temps, dans les exposés précédents.

[3] GRAY, D.E. (Ed.) *American Institute of Physics Handbook*, New York, MacGraw-Hill, 1957.

CONCEPTS DE BASE

Tout mesurage dit *fondamental*, c'est-à-dire ne dépendant pas d'un mesurage préalable, peut être regardé comme une représentation, ou plongement homomorphique, d'une structure empirique dans une structure numérique. Le plus souvent, la structure numérique est la structure conventionnelle de $\mathbb{R}$ (en tant que groupe ou corps ordonné archimédien), qui apparaît soit explicitement, soit implicitement. Je reviendrai sur cette distinction importante dans un moment. Pour préciser et illustrer cette notion, considérons l'exemple du mesurage des poids au moyen de la balance à deux plateaux (et à bras égaux, voir Fig. 1).

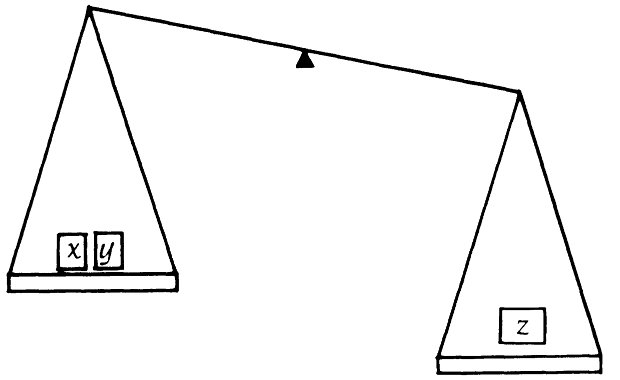

Figure 1 : Mesurage fondamental des poids par la balance à deux plateaux. La situation de la figure est notée $x * y \precsim z$

Idéalisant cette situation, on se donnera un ensemble X d'objets, muni d'une relation binaire $\precsim$ formalisant la position relative des plateaux de la balance, et une opération de concatenation $*$ formalisant la combinaison de deux ou plusieurs objets sur le même plateau. On considère alors naturel de rechercher une représentation de $(X,*,\precsim)$ dans la partie positive d'un sous-groupe des réels. Par représentation, on entend ici une application m de X dans les réels positifs, satisfaisant les deux conditions de monotonicité et d'additivité

$$(1) \qquad x \precsim y \Leftrightarrow m(x) \leq m(y)$$

et

$$(2) \qquad m(x*y) = m(x) + m(y) \ .$$

Il découle de cette représentation que $\precsim$ est nécessairement un préordre total sur X, et que $*$ doit satisfaire à certaines des propriétés d'un groupe. Ce type de mesurage est appelé *mesurage extensif*. On considère souvent, implicitement, que l'image de m est un ensemble convexe de ce sous-groupe, ou même un intervalle réel. Dans ce dernier cas, le quasi ordre $\precsim$ satisfait à une condition de Dedekind.

Cette idée était déjà venue à Helmholtz, vers 1887. La première formalisation complète est due à Hölder (1901), qui énonce et démontre le résultat classique :

THEOREME (Hölder, 1901). Tout groupe ordonné archimédien est isomorphe à un sous-groupe additif des nombres réels, et est donc commutatif. De plus, si m et m' sont deux isomorphismes vers les réels, alors on a nécessairement $m = k\, m'$ pour un certain $k > 0$.

Les conditions définissant un groupe ordonné n'impliquent pas la commutativité, laquelle découle, via la représentation dans les réels, de la condition d'Archimède. Ce théorème s'applique à la théorie du mesurage en ne considérant que les parties positives des groupes en question. Dans la démonstration la plus connue de ce théorème, on construit l'isomorphisme explicitement. On possède donc une procédure de construction pratique d'une échelle de mesurage extensif fondamental. La condition d'unicité est souvent énoncée en disant qu'on a une échelle *de rapports*.

Essentiellement le même procédé peut être utilisé pour d'autres grandeurs physiques fondamentales, notamment pour le mesurage de la longueur et le mesurage du temps. Il s'agit là du premier résultat fondamental de la théorie du mesurage, le second étant le théorème de Cantor-Birkhoff concernant les conditions garantissant le plongement d'un ordre total dans l'ordre des réels.

Diverses généralisations du théorème de Hölder ont été proposées, qui consistent le plus souvent en des améliorations sur le plan du réalisme. On peut critiquer dans la formalisation de Hölder, le fait que l'opération de concaténation $*$ soit fermée. Il n'est certainement pas réaliste de supposer que pour toute paire d'objets x, y on pourra toujours former l'objet $x * y$. Cela suppose automatiquement que la capacité de l'appareillage n'est pas bornée. On peut aussi regretter l'hypothèse implicite de l'existence d'objets arbitrairement petits. Parmi d'autres généralisations, mentionnons une caractérisation de tous les sous-ensembles convexes, positifs des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$, dans laquelle la condition de commutativité apparaît comme un axiome indépendant [4]. Dans le cadre de la Théorie du Mesurage, ceci doit être regardé comme un progrès, en particulier parce que la commutativité est typiquement facile à vérifier empiriquement.

Après le résultat de Hölder, la théorie de mesurage s'est peu développée jusqu'après la seconde guerre mondiale. Ceci se comprend sans peine. L'essor

[4] FALMAGNE, J.-Cl., A set of independent axioms for positive Hölder systems, *Philosophy of Sciences*, 1975, 42, 137-151.

extraordinaire de la physique pendant cette période n'était certainement pas propice à des réflexions anxieuses sur les fondements. Quant aux sciences humaines, elles étaient encore fort peu mathématisées. D'ailleurs, une opinion assez largement acceptée était que la construction d'une échelle de mesurage fondamental devait nécessairement suivre le schéma ébauché ci-dessus pour le mesurage du poids (voir par exemple Campbell [5], Guild [6] et Reese [7]). C'est-à-dire que cette construction devait nécessairement reposer sur une concaténation empirique explicite, que l'on représentait par l'addition des nombres réels. Comme, d'une part, la structure de groupe archimédien ordonné est essentielle pour définir les réels, et que d'autre part, on ne rencontre pratiquement pas d'opération de concatenation dans les sciences humaines, on en concluait que ces sciences n'auraient jamais d'échelles de mesurage fondamental au sens entendu en physique, c'est-à-dire, des échelles de rapports ou des échelles d'intervalles. On aurait certainement des échelles d'ordre, mais pas davantage. Evidemment, ce que l'on aurait dû voir tout de suite, c'est que la structure de groupe ordonné pouvait fort bien apparaître sous des dehors inhabituels, l'opération de concatenation étant implicite. Je donnerai des exemples de telles situations, qui montrent que des échelles de rapports ou d'intervalles peuvent fort bien exister dans les sciences humaines.

De façon parallèle, des mathématiciens peu soucieux de philosophie des sciences continuaient, bien entendu, à se pencher sur les structures numériques, et à obtenir des concepts et des résultats utiles. Comme Monsieur Jourdain de la prose, ces mathématiciens faisaient alors de la théorie du mesurage sans le savoir.

Vers les années cinquante, on a fini par adopter un cadre général pour la théorie du mesurage. On se donne au départ une certaine structure empirique, formalisée par un système relationnel

$$\mathcal{R} = (X, R_1, R_2, \ldots, R_n)$$

dans lequel X est un ensemble d'objets, et $R_1, R_2, \ldots, R_n$ sont des relations sur X décrivant des observations ou des résultats d'expérience. On spécifie l'*ordre* de ces relations. La relation R_i est dite d'*ordre* k si $R_i \subseteq X^k$. On choisit alors un certain système relationnel numérique

$$\mathcal{F} = (\mathbb{R}, S_1, S_2, \ldots, S_n)$$

---

[5] CAMPBELL, N.R., *Physics : The Elements*, Cambridge, Cambridge University Press, 1920, Reprinted as *Foundations of Science*, New York, Dover, 1957.

[6] GUILD, J., Part III of "Quantitative estimation of sensory events"(Interim Report), *Rep. British Assoc. Advanc. Sc.*, 1938, 296-328.

[7] REESE, T.W., "The application of the theory of physical measurement to the measurement of psychological magnitudes, with three experimental examples", *Psychol. Monogr.*, 1943, 55 (whole n0. 251), 1-89.

dans lequel chaque relation S_i est de même ordre que R_i , et l'on recherche des conditions sur $\mathcal{R}$ qui garantissent l'existence d'une représentation f de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{F}$. Ceci signifie que f est une application de X dans $\mathbb{R}$, telle que, pour tout $i = 1,\dots,n$, on a, si R_i est d'ordre $k(i)$,

(1) $$R_i(x_1,\dots,x_{k(i)}) \Leftrightarrow S_i[f(x_1),\dots,f(x_{k(i)})] .$$

Bien entendu, les relations S_i ne sont pas choisies arbitrairement, mais sont définies dans des termes impliquant d'une manière ou d'une autre la structure de corps ordonné additif de $\mathbb{R}$. Ces relations S_i constituent donc en quelque sorte un modèle mathématique des données formalisées par les relations R_i [8]. Ce formalisme peut être attribué à Scott et Suppes. Il se généralise encore en supposant que l'ensemble X est un produit cartésien, $X = X_1 \times \dots \times X_m$ (les objets sont désignés par plusieurs attributs). Dans ce cas, la représentation f est une application de X dans $\mathbb{R}^m$. Dans le cas du mesurage extensif, le théorème de Hölder et ses généralisations garantissent l'existence d'une représentation m du système relationnel empirique $(X,*,\precsim)$ dans le groupe ordonné $(\mathbb{R},+,\leq)$. Donnons quelques autres exemples.

LE MESURAGE DES DIFFERENCES

Dans une situation classique de psychologie expérimentale, on demande à un sujet de comparer ses préférences dans des paires d'objets $(x,y),(z,w),\dots$, prélevées dans un ensemble $X \times X$. Il s'agit donc d'évaluer subjectivement la préférence de x sur y , ainsi que celle de z sur w , et de comparer ces évaluations. On convient d'écrire

$$xy \precsim zw$$

si la préférence de x sur y n'excède pas la préférence de z sur w . On se demande alors si les évaluations de préférences peuvent être représentées par des différences numériques. En d'autres termes, existe-t-il une fonction u , à valeurs réelles, satisfaisant, pour tout x,y,z,w dans X , l'équivalence

(2) $$xy \precsim zw \Leftrightarrow u(x) - u(y) \leq u(z) - u(w) \quad ?$$

---

[8] Notons en passant que, si l'ensemble X est fini ou dénombrable, il existera toujours une représentation numérique de $\mathcal{R}$, quelles que soient les relations R_i . Il suffit en effet d'attribuer arbitrairement des numéros $f(x)$ aux éléments x de X , et de définir les relations numériques S_i par l'équivalence (1). Il est clair qu'une telle représentation ne présentera en général aucun intérêt.

La relation $\lesssim$ est donc nécessairement un préordre total sur $X \times X$. On vérifie facilement que cette relation doit satisfaire aux deux conditions

[BC] $(xy \lesssim x'y' \ \& \ yz \lesssim y'z') \Rightarrow xz < x'z'$ [Bicancellation]

[Q] $xy \lesssim zw \Leftrightarrow xz \lesssim yw$. [Quadruple Condition]

Sous des conditions assez générales, et en particulier une condition d'Archimède formulée de façon appropriée, chacune de ces deux conditions garantit la représentation (2). (Ces conditions sont connues respectivement sous les noms de *Bicancellation* et *Quadruple Condition* dans la littérature de langue anglaise sur le mesurage.)

Ce qui est beaucoup plus intéressant, c'est de voir que le système relationnel $(X \times X, \lesssim)$, dans lequel n'apparaît pas d'opération de concaténation, peut en fait, sous des conditions convenables, dissimuler un groupe ordonné archimédien. Si bien que le théorème de plongement garantissant la représentation (2) devient en fait une application contournée du Théorème de Hölder ou de l'une de ses variantes. La construction est fort simple.

Soit $\sim$ la relation d'équivalence associée au préordre total $\lesssim$. Pour tout x,y dans X , on note $[xy]$ la classe d'équivalence contenant le couple xy , c'est-à-dire

$$[xy] = \{zw \mid zw \sim xy\} .$$

On définit alors une opération $*$ sur la partition $X_{|\sim}$ engendrée par la relation d'équivalence $\sim$, par la formule

$$[xy] * [zw] = [st] \Leftrightarrow (\exists\ a,b,c, \in X : ab \sim xy \ , \ bc \sim yz \ , \ ac \sim st) .$$

Par suite de la condition [BC], l'opération $*$ est non seulement bien définie, mais aussi associative. En fait, notant $\leq$ l'ordre linéaire associé au préordre $\lesssim$, on montre sans difficulté (sous des conditions de régularité assez évidentes) que $(X_{|\sim},*,\leq)$ est un groupe ordonné. Si l'on impose aussi la condition [Q], le groupe est commutatif. Sans supposer cette condition satisfaite, une application du Théorème de Hölder est obtenue en imposant au système relationnel $(X \times X \ , \lesssim)$ une condition de type archimédien, consistant en une simple traduction de la condition d'Archimède sur $(X_{|\sim},*,\leq)$. Il en découle qu'il existe un plongement f de $(X_{|\sim},*,\leq)$ dans $(\mathbb{R}+,\leq)$ tel que, pour tout x , y , z et w , on ait :

$$f[xy] \leq f[zw] \Leftrightarrow [xy] \lesssim [zw]$$

et

$$f[xz] = f\{[xy] * [yz]\} = f[xy] + f[yz] .$$

Notons en particulier que, pour tout $x \in X$:

$$f[xx] = f[xx] + f[xx] = 0 ,$$

ce qui implique immédiatement, pour tout $x,y \in X$,

$$f[xy] = -f[yx] .$$

Fixant un certain x_0 dans X , on définit alors une fonction à valeurs réelles u sur X par la formule :

$$u(x) = f[xx_0] .$$

Ceci donne, pour tout x , y , z et w , successivement :

$$\begin{aligned} xy \leq zw &\Leftrightarrow [xy] \leq [zw] \\ &\Leftrightarrow f[xy] \leq f[zw] \\ &\Leftrightarrow f\{[xx_0] * [x_0y]\} \leq f\{[zx_0] * [x_0w]\} \\ &\Leftrightarrow f[xx_0] + f[x_0y] \leq f[zx_0] + f[x_0w] \\ &\Leftrightarrow f[xx_0] - f[yx_0] \leq f[zx_0] - f[wx_0] \\ &\Leftrightarrow u(x) - u(y) \leq u(z) - u(w) . \end{aligned}$$

Remarquons que le choix de x_0 entraîne $u(x_0) = f[x_0x_0] = 0$.

On obtient ici une échelle d'intervalles. Ceci est encore une conséquence du Théorème de Hölder. En effet, si f et f' sont deux isomorphismes réels de $(X_{|\sim},*,\leq)$, on a nécessairement $f' = kf$, pour un certain $k > 0$. Etant donné deux représentations u et u' de $(X \times X,\lesssim)$, un argument simple entraîne la relation $u' = ku + c$, dans laquelle k dépend des fonctions f et f' , et c dépend des choix des éléments x_0 et x'_0 tels que $u(x_0) = u'(x'_0) = 0$.

Il était sans doute bon de décrire dans un certain détail au moins une des applications de la Théorie du Mesurage aux Sciences humaines. Cette application apparaît en tant que modèle notamment en économie mathématique, pour le mesurage de l'utilité, et dans la psychophysique de Fechner. Mais il nous faut maintenant changer d'allure. Diverses autres représentations ont été analysées. Je me bornerai à citer ici quelques exemples marquants.

MESURAGE ADDITIF CONJOINT

L'ensemble empirique est un produit cartésien $A \times X$, sur lequel on se donne un préordre total $\lesssim$. Comme ci-dessus, on note $\sim$ l'équivalence associée à $\lesssim$. On recherche deux fonctions $f : A \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$, telles que

$$ax \lesssim by \Leftrightarrow f(a) + g(x) \leq f(b) + g(y) .$$

On vérifie facilement la nécessité des conditions suivantes :

[I1] $ax \lesssim bx \Leftrightarrow ay \lesssim by$, [Indépendance]

[I2] $ax \lesssim ay \Leftrightarrow bx \lesssim by$. [Indépendance]

[DC] $ax \precsim by$ & $cy \precsim az \Rightarrow cx \precsim bz$. [Double Cancellation]

Lorsqu'on remplace, dans la formule de la Double Cancellation, le préordre $\precsim$ par la relation d'équivalence associée $\sim$, on obtient la Condition dite de Thomsen. Sous des conditions de régularité convenables (comprenant une condition archimédienne), la Condition [DC] est suffisante. Dans ce cadre, les échelles obtenues pour les fonctions f et g sont des échelles d'intervalles partiellement associées : si (f,g) et $(f'g')$ sont deux représentations, on aura

$$f' = kf + c , \qquad g' = kg + c' .$$

LES BIORDRES OU RELATIONS DE FERRERS

On se donne une relation binaire R entre deux ensembles A et X , c'est-à-dire $R \subseteq A \times X$. Un exemple empirique fréquemment rencontré est celui où $a \in A$ représente une question d'un test, et $x \in X$ représente un sujet; on note alors aRx la résolution correcte du problème a par le sujet x . On cherche une représentation unidimensionnelle, incarnée par deux fonctions $f : A \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$, telles que

(3) $$aRx \Leftrightarrow f(a) < g(x) .$$

Intuitivement, le sujet résoud la question si sa compétence (ou son habilité) domine la difficulté de la question. Une condition nécessaire est que pour tout $a,b \in A$ et $x,y \in X$, on ait

[BO] $$aRx \ \& \ -(aRy) \ \& \ bRy \Rightarrow bRx .$$

Toute relation $R \subseteq A \times X$ satisfaisant à cette condition est appelée un *biordre* (ou *relation de Ferrers) de* A *vers* X . Si A et X sont des ensembles finis, cette condition est suffisante. En d'autres termes, tout biordre fini R est représentable dans les réels dans le sens de la formule (3). Un ensemble de conditions nécessaires et suffisantes est obtenu en ajoutant à [BO] une condition de densité dans l'ordre permettant l'utilisation du théorème de Cantor-Birkhoff mentionné plus haut. Ce modèle est apparu dans les sciences humaines sous le nom d'*échelle de Guttman*.

LES SEMIORDRES

Une relation S sur un ensemble X est appelée *semiordre* si elle satisfait aux trois conditions suivantes :

(i) S est un biordre de A vers A ;
(ii) S est irréflexive sur A ;

(iii) Si xSy et ySz, alors xSw or wSz, pour tout $x,y,z,w \in X$.

Dans le cas où l'ensemble X est fini, ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, telle que

$$\text{(4)} \qquad xSy \Leftrightarrow f(x) + 1 < f(y) .$$

Une démonstration de ce fait sera ébauchée dans un moment, basée sur une technique de Scott. Cette représentation formalise le concept de *seuil*. Supposons par exemple que la préférence de y sur x soit notée xSy. Selon l'équivalence (4), y est préféré à x si et seulement si sa valeur subjective dépasse celle de x de plus de la valeur du seuil, lequel est fixé arbitrairement à l'unité. Le concept de semiordre est dû à Luce [9], et a été élaboré ensuite par plusieurs chercheurs.

REPRESENTATION MULTIDIMENSIONNELLE

On a aussi analysé des représentations à caractère multidimensionnel. Je décrirai très sommairement deux exemples.

1. <u>Représentation dans un espace métrique</u>

On demande à un sujet de juger les proximités (ou similarités) des objets dans un ensemble X. On note

$$xy \precsim zw$$

si le sujet déclare que z ne semble pas plus proche de w que x de y. On se donne un espace métrique (E,d) de classe donnée C. (Par exemple (E,d) est un espace euclidien de dimension 3). On cherche alors à construire une fonction $f : X \rightarrow E$, telle que, pour tout x,y,z,w dans X,

$$\text{(5)} \qquad xy \precsim zw \Leftrightarrow d[f(x),f(y)] \leq d[f(z),f(w)] .$$

Dans le cas de l'espace euclidien de dimension 3, on cherche donc à associer à tout $x \in X$ un point $f(x) = [f_1(x),f_2(x),f_3(x)]$ dans $\mathbb{R}^3$ de telle manière que, pour tout $x,y,z,w \in X$, on ait

$$xy \precsim zw \Leftrightarrow \{\Sigma_{1\leq i\leq 3}[f_i(x) - f_i(y)]^2\}^{1/2} \leq \{\Sigma_{1\leq i\leq 3}[f_i(z) - f_i(w)]^2\}^{1/2} .$$

Ce type de représentation a été beaucoup utilisé dans les sciences hu-

---

[9] LUCE, R.D., "Semiorders and a theory of utility discrimination", *Econometrika*, 1956, 24, 178-191.
Pour une présentation de résultats récents, on consultera le livre : FISHBURN, P.C., *Interval orders and Interval sets : A study of partially ordered sets*, Wiley Interscience Series in Discrete Mathematics, Wiley Interscience, 1985.

maines. Notons qu'une représentation est toujours possible dans un espace euclidien, si la dimension de cet espace n'est pas fixée au départ. Divers programmes ont été développés, qui permettent de représenter l'ordre empirique $\lesssim$ dans un espace de dimension minimale.

2. Espaces "Combinatoires"

Il s'agit là de travaux assez récents, dans lesquels on cherche à plonger une structure empirique dans un espace non métrique. Dans ce cas, la structure dimensionnelle peut être basée simplement sur des relations d'ordre. Un bon exemple de telles représentations est offert par une généralisation de la notion de biordre, fondée très directement sur le concept de dimension d'un ordre partiel, au sens de Dushnik et Miller. Comme dans le cas d'une représentation basée sur un biordre, on se donne au départ une relation empirique R de A vers X, et l'on note aRx le fait que la question a été résolue par le sujet x. On admet la possibilité que plusieurs dimensions de compétence puissent intervenir dans la résolution des questions. Ainsi, dans le cas où l'ensemble X contient des problèmes de mathématique, il faut que le sujet soit capable de comprendre l'énoncé d'un problème donné, ce qui nécessite une certaine connaissance de la langue, il faut qu'il soit à même de formaliser le problème de manière appropriée, ce qui demande de la maturité mathématique, et finalement qu'il dispose des techniques de résolutions adéquates. En supposant que n dimensions de compétence soient nécessaires pour la résolution des problèmes, on recherche $2n$ fonctions à valeurs réelles

$$f_i : A \to \mathbb{R}, \quad g_i : X \to \mathbb{R}, \quad i = 1,\ldots,n,$$

telles que pour tout $a \in A$ et $x \in X$,

$$(7) \qquad aRx \Leftrightarrow f_i(a) < g_i(x), \quad i = 1,\ldots,n.$$

Généralisant le concept de dimension d'un ordre partiel, cette représentation conduit naturellement à définir la *bidimension* d'une relation R comme le plus petit nombre n de biordres B_i, $i = 1,\ldots,n$ de A vers X tels que

$$(8) \qquad R = \cap_{1\leq i\leq n} B_i .$$

Comme dans le cas de la dimension d'un ordre partiel, le problème de la détermination de la bidimension d'une relation est NP-complet. On possède néanmoins des résultats récents dus à Chubb [10], et surtout Koppen [11],

[10] CHUBB, C., "Collapsing binary data for algebraic multidimensional representation, *Journal of Mathematical Psychology*, 1986, 30, 161-187.
[11] KOPPEN, M., On finding the bidimension of a relation, *Journal of Mathematical Psychology*, 1987, 31, 155-178.

qui permettent d'alléger considérablement les calculs dans la pratique. Ces résultats sont basés sur le fait que l'évaluation de la bidimension revient à calculer le nombre chromatique d'un certain hypergraphe associé à la relation.

Le temps me force à terminer ici cette liste d'exemples d'application de la Théorie du Mesurage aux Sciences humaines. Ces exemples me conduisent à faire une série de remarques.

REMARQUES

1) Comme on l'a vu dans les cas du mesurage des différences et dans celui du mesurage additif conjoint, l'absence d'une opération de concaténation empirique n'empêche nullement d'obtenir une échelle de mesurage forte, c'est-à-dire une échelle de rapports ou d'intervalles. Dans de tels cas, la structure de groupe ordonné archimédien reste centrale au traitement mathématique, mais doit être obtenue à partir d'une construction qui peut ne pas être tout à fait immédiate.

2) Sauf dans les cas purement ordinaux, comme celui des semiordres ou ou celui des biordres, la technique de démonstration est le plus souvent basée sur une application du Théorème de Hölder (ou l'une de ses généralisations). Ce théorème restera l'outil central de la Théorie du Mesurage. Remarquons toutefois que l'application de ce théorème prendra quelquefois des formes contournées. Ainsi, dans l'étude de la structure algébrique des échelles, dont va discuter Duncan Luce dans quelques instants, on va appliquer ce théorème non pas directement au système relationnel empirique, mais au groupe des automorphismes de ce système.

3) On remarquera l'absence de représentations "géométriques" [12], c'est-à-dire dans lesquelles les primitives issues directement des données ont des interprétations naturelles et plus ou moins immédiates dans les termes propres à la géométrie - droites, plans, sous-espaces - conduisant aux constructions habituelles de direction, parallélisme, dimension, indépendance, etc. Il est vrai que de telles constructions peuvent être obtenues dans les représentations multidimensionnelles, par exemple euclidiennes. Mais alors la structure géométrique est fort éloignée des données, et n'apparaît

---

[12] Voir toutefois : BEALS, R. & KRANTZ, D.H. "Metrics and Geodesics induced by order relations", *Mathematische Zeitschrift*, 1967, 101, 285-298. Notons cependant que ce modèle est basé sur des axiomes existentiels très forts, qui en rendent difficile l'application aux données. De plus, l'ordre sur les proximités reste central.

qu'au prix d'un plongement dans un espace à structure très forte. La géométrie est-elle un langage réservé aux sciences de la nature, ou peut-on espérer développer des géométries fondées sur les relations empiriques que l'on rencontre dans les sciences de l'homme ?

4) Il est évidemment exceptionnel qu'un modèle tiré de la Théorie du Mesurage s'applique parfaitement aux données expérimentales. Etant donné le caractère central de la relation d'ordre sur le plan empirique, il est assez naturel d'interpréter les écarts au modèle en concédant un caractère aléatoire aux réponses à des questions telles que :

$$x \precsim y \ ? \quad x \sim y \ ? \quad x \precsim y \ \& \ z \precsim w \ ?$$

Ces formules désigneront donc des événements aléatoires dans un espace de probabilité approprié. La discussion d'une telle théorie probabiliste occupera la dernière partie de cet exposé. Avant d'en arriver là, je consacrerai quelques minutes à la technique de démonstration de Scott. Cette technique a de remarquable qu'elle permet, dans certains cas finis, de découvrir presque automatiquement les conditions nécessaires et suffisantes à une représentation numérique choisie.

LA TECHNIQUE DE SCOTT [13]

On appliquera cette technique à la démonstration du résultat suivant, déjà cité :

THEOREME. Soit X un ensemble fini, et S une relation binaire sur X. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une fonction $f : X \to \mathbb{R}$, telle que

(9) $$xSy \Leftrightarrow f(x) + 1 < f(y) .$$

2. S est un semiordre sur X, c'est-à-dire, S satisfait aux trois propriétés :

(i) S est un biordre de A vers A ;

(ii) S est irréflexive sur A ;

(iii) Si xSy et ySz, alors xSw or wSz, pour tout $x,y,z,x \in X$.

IDEE DE DEMONSTRATION. La nécessité des conditions (i)-(iii) se vérifie facilement. On remarque ensuite que, si la représentation (9) est satisfaite, toute condition nécessaire peut être traduite par un système d'inégalités

---

[13] SCOTT, D., "Measurement models and linear inequalities, *Journal of Mathematical Psychology*, 1964, 1, 233-247. On n'hésitera pas à omettre cette section de l'article en première lecture.

sans solution. A titre d'exemple, considérons la condition

(10) $$-[xSy \;\&\; -(zSy) \;\&\; zSw \;\&\; -(xSw)] \;.$$

Cette condition est bien nécessaire, puisque sa négation entrainerait le système d'inégalités suivant :

$$\begin{aligned} f(x) + 1 &< f(y) \\ f(y) &\leq f(z) + 1 \\ f(z) + 1 &< f(w) \\ f(w) &\leq f(x) + 1 \;. \end{aligned}$$

que nous préférons écrire sous la forme plus suggestive

(11) $$0 < f(y) - [f(x) + 1]$$

(12) $$0 \leq [f(z) + 1] - f(y)$$

(13) $$0 < f(w) - [f(z) + 1]$$

(14) $$0 \leq [f(x) + 1] - f(w) \;.$$

On voit en effet que l'addition de ces inégalités membre à membre entraînerait $0 < 0$. Pour des raisons qui apparaîtront dans un moment, retenons que les membres de droite dans ces inégalités ont une somme nulle. Notons que la Condition (10) est satisfaite si S est un biordre (ce qui est l'une des condition d'un semiordre), car on a alors, par définition,

(15) $$xSy \;\&\; -(zSy) \;\&\; zSw \quad xSw \;.$$

Ceci implique (10), puisque, sous la Condition (15), la négation de (10) implique $xSw \;\&\; -(xSw)$. En général, chaque système d'inégalités insoluble correspond à une condition nécessaire pour la représentation. On peut donc se demander quel ensemble d'axiomes sur la relation S permet d'éliminer tous les systèmes insolubles. On a alors l'idée de plonger la structure empirique (X,S) dans un espace vectoriel, en vue d'une application du théorème dit *de l'Alternative* [14] sous la forme du lemme suivant :

LEMME. Soit V un espace vectoriel réel à dimension finie et soit W un sous-ensemble fini de V , symétrique et rationnel. Soit encore une partition $\{Q,N\}$ de W , telle que $-N = Q$. Les deux conditions suivantes sont alors équivalentes.

1. Il existe une application linéaire g de V dans $\mathbb{R}$ satisfaisant à l'équivalence

$$v \in Q \Leftrightarrow g(v) > 0 \;.$$

---

[14] KUHN, H.W. & TUCKER, A.W., Linear inequalities and related systems, *Annals of Mathematical Studies*, 1956, 38.

2. Pour tout entier positif n, il n'existe pas de suite finie de vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n \in Q$ telle que

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0 .$$

Intuitivement, la condition 2 de ce lemme fournira les axiomes requis (axiomes qui garantiront l'absence dans Q de suites de valeurs v_i à somme inutile), et la condition 1 établira l'existence de la fonction f, laquelle sera liée à l'application linéaire g par une relation fort simple.

Pour appliquer ce lemme, on considère l'espace vectoriel V de toutes les fonctions à valeurs réelles sur l'ensemble $Y = X \cup \{e\}$, dans lequel e est un élément fictif n'appartenant pas à X. Pour simplifier l'écriture, on identifie tout élément y de Y à sa fonction indicatrice $\mathbf{1}_{\{y\}} \in V$,

$$\mathbf{1}_{\{y\}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y . \end{cases}$$

Ceci veut dire qu'on écrira simplement y pour signifier $\mathbf{1}_{\{y\}}$. Par cet abus de notation, on admettra donc que l'ensemble Y est une base linéaire de l'espace vectoriel V. On considère ensuite les sous-ensembles de vecteurs.

$$\begin{aligned} M &= \{y - (x+e) \mid xSy\} \\ M' &= \{(x + e) - y \mid \neg(xSy)\} \\ Q &= M \cup M' \\ N &= -Q \\ W &= Q \cup N . \end{aligned}$$

Il est clair que W est un ensemble fini, *rationnel* (tous les vecteurs dans W sont à coordonnées rationnelles) et *symétrique* ($W = -W$). De plus, $\{Q,N\}$ est une partition de W, et ce dernier contient tous les vecteurs de la forme

$$y - (x + e) , \quad (x + e) - y \quad \text{pour tout } x,y \in X .$$

On remarque que la négation de la condition nécessaire (10) reviendrait à affirmer que Q contient quatre vecteurs à somme nulle. En effet, on a bien

$$\begin{aligned} xSy &\Leftrightarrow y - (x + e) \in M \\ \neg(zSy) &\Leftrightarrow (z + e) - y \in M' \\ zSw &\Leftrightarrow w - (z + e) \in M \\ \neg(zSw) &\Leftrightarrow (x + e) - w \in M' \end{aligned}$$

Cette remarque a une portée générale. Si l'on parvient à démontrer que Q ne contient aucune suite finie de vecteurs à somme nulle, on pourra alors invoquer le lemme pour établir l'existence de l'application linéaire g satisfaisant à la condition

$$g(v) > 0 \Leftrightarrow v \in Q$$

En particulier, xSy implique $[y - (x + e)] \in M$, ce qui donne

(16) $$g[y - (x + e)] > 0 ,$$

ou de façon équivalente

(17) $$g(y) > g(x) + g(e) .$$

Inversement, si (16) ou (17) sont vérifiés, on a nécessairement $y - (x + e) \in Q$, et l'on ne peut avoir

$$y - (x + e) = [(z + e) - w] \in M'$$

puisque x , y , z , w , e sont linéairement indépendants. Donc

$$y - (x + e) \in M ,$$

et nous obtenons xSy . Dans le cas ou $g(e) > 0$, on définit la fonction f sur X par $f(x) = g(x)/g(e)$, ce qui donne

(18) $$xRy \Leftrightarrow f(x) + 1 < f(y) .$$

Notons qu'il est impossible que $g(e) < 0$, car on aurait alors

$$g(x) + g(e) < g(x) ,$$

ce qui entraînerait xSx , contrairement au fait que S est irréflexive. Il est toutefois possible que $g(e) = 0$. Dans ce cas, posant

$$\partial = (1/2[\min\{g(y) - g(x) \mid xSy\}] > 0$$

on a bien

$$g(x) + \partial > g(y) \Leftrightarrow xSy$$

et définissant $f = g/\partial$, on obtient à nouveau (18).

La démonstration se poursuit en montrant que les trois axiomes définissant un semiordre garantissent l'absence de toute collection de vecteurs à somme nulle dans l'ensemble Q . Comme le nombre de vecteurs dans une telle collection est arbitrairement grand, l'argument, dans les détails duquel je n'entrerai pas ici, est nécessairement récursif.

LE TRAITEMENT DES ERREURS DANS LA THEORIE DU MESURAGE

La formalisation de la théorie du mesurage qui vient d'être ébauchée semble bien convenir aux sciences de la nature, et particulièrement à la physique. Dans le cas des sciences humaines au contraire, l'utilisation de cette théorie rencontre de sérieuses difficultés, qui sont dues principalement au caractère beaucoup moins fidèle des données, relativement aux grandeurs mesurées.

A titre d'illustration, supposons que des objets bidimensionnels (a,x), (b,y), etc. soient présentés à un sujet dans une expérience de comparaisons par paires. Si l'on veut être concret, on peut imaginer que le sujet est un consommateur en passe de choisir entre des produits de prix équivalents, caractérisés par deux aspects, tels que la garantie et la présentation. Comme précédemment, on note $ax \precsim by$ le fait que l'objet (a,x) n'est pas choisi dans l'ensemble $\{(a,x),(b,y)\}$.

On a vu que, pour qu'une représentation additive du type

$$ax \precsim by \Leftrightarrow f(a) + g(x) \leq f(b) + g(y),$$

puisse être construite, la relation binaire $\precsim$ devait être un préordre satisfaisant à certaines conditions, parmi lesquelles la condition [DC] :

$$ax \precsim by \;\&\; cy \precsim az \Leftrightarrow cx \precsim bz .$$

Lorsqu'on observe qu'une condition telle que la transitivité où la condition [DC] n'est pas satisfaite empiriquement, on doit se demander si ces "erreurs" révèlent une inadéquation fondamentale du modèle additif, ou si au contraire elles peuvent être attribuées à un caractère aléatoire des réponses du sujet. Pour analyser convenablement ce genre de questions, on doit avoir une traduction du modèle déterministe dans un langage probabiliste approprié. Il est bien clair qu'il y a plus d'une traduction possible. Celle dont je vous parlerai aujourd'hui, qui est peut-être la plus naturelle, associe à toute formule $ax \precsim by$ une probabilité $P_{ax,by}$, qui peut être interprétée comme la probabilité que le sujet réponde "Non" à la question : "Préférez-vous l'objet (a,x) à l'objet (b,y) ?" Poursuivant notre exemple du consommateur, posons $A = \{a,b\}$, $B = \{x,y\}$. Pour $s,t \in \{ax,bx,ay,by\}$, notons $r_{s,t}$ la proportion de sujets dans un échantillon de quarante, ayant choisi s dans l'ensemble $\{s,t\}$, et soit $P_{s,t}$ la probabilité de choix correspondante. Supposons que les données suivantes aient été recueillies :

$$r_{ax,ay} = 0{,}70 = r_{ax,bx}, \quad r_{ax,by} = 0{,}40,$$
$$r_{ay,by} = 0{,}55 = r_{bx,by}, \quad r_{ay,bx} = 0{,}30 .$$

(Nous supposons ici que $r_{s,t} + r_{t,s} = 1$). Une traduction probabiliste standard du concept de transitivité, appelée *transitivité stochastique faible*, est définie par la formule

[TSF] Si $P_{s,t} \leq 1/2$ et $P_{t,u} \leq 1/2$, alors $P_{s,u} \leq 1/2$.

Notons que la condition [TSF] est équivalente à la transitivité de la relation binaire R :

$$sRt \Leftrightarrow P_{s,t} \leq 1/2 .$$

On vérifie sans difficulté que la transitivité stochastique faible n'est pas satisfaite dans les données, puisqu'on a

$$r_{ay,ax} = 0{,}3 \leq 1/2 \quad , \quad r_{ax,by} = 0{,}4 \leq 1/2 \quad , \quad r_{ay,by} = 0{,}55 > 1/2 \ .$$

Mais les écarts au modèle sont-ils significatifs ? En supposant qu'ils ne le soient pas, l'ordre le plus vraisemblable est-il

$$ax \geq bx \geq ay \geq by \ , \text{ ou plutôt } \ by \geq ax \geq bx \geq ay \ ?$$

Cet exemple illustre une vaste classe de problèmes dans lesquels un axiome impose une contrainte de caractère ordinal à une collection finie de probabilités, cette contrainte prenant la forme d'un polynome logique. Dans ce cas, nous verrons qu'il existe une correspondance entre la structure logique du polynome, et une partie spécifique de l'hypercube $[0,1]^N$, dans lequel N est le nombre de probabilités considérées.

THEORIE DU MESURAGE PROBABILISTE [15]

Nous inspirant de cet exemple, sur lequel je reviendrai, on prendra comme point de départ que, dans le cas d'ensembles finis, toute théorie algébrique du mesurage est définie par un ensemble de polynomes logiques quantifiés basés sur une relation de préordre $\precsim$. On a rencontré par exemple la transitivité :

$$(\forall s)(\forall t)(\forall u)(s \precsim t \ \& \ t \precsim u \Leftrightarrow s \precsim u) \ ,$$

les conditions d'indépendance

[I1] $(\forall a)(\forall b)(\forall x)(\forall y)(ax \precsim bx \Leftrightarrow ay \precsim by)$,

[I2] $(\forall a)(\forall b)(\forall x)(\forall y)\ (ax \precsim ay \Leftrightarrow bx \precsim by)$,

La condition de Double Cancellation

[DC] $(\forall a)(\forall b)(\forall c)(\forall x)(\forall y)(\forall z)(ax \precsim by \ \& \ cy \precsim az \Leftrightarrow cx \precsim bz)$,

etc. Pour probabiliser de telles structures, on considérera toute expression

$$s \precsim t$$

comme représentant un événement aléatoire dans un espace de probabilité, l'événement complémentaire étant noté

$$t < s \ .$$

---

[15] Cette partie du texte est directement inspirée de l'article : IVERSON, G., & FALMAGNE, J.-Cl., "Statistical issues in measurement", *Mathematical Social Sciences*, 10, N° 2, 1985, 131-153.

L'objet fondamental de la théorie sera alors une mesure $\mathbb{P}$ spécifiant les probabilités de la forme

(19) $\mathbb{P}[(s_1 \lesssim t_1) \cap (s_2 \lesssim t_2) \cap \ldots \cap (s_m \lesssim t_m]$,

(20) $\mathbb{P}[(t_1 < s_1) \cap (s_2 \lesssim t_2) \cap \ldots \cap (s_m \lesssim t_m)]$, etc.

pour toutes les suites finies d'événements. Pour des raisons essentiellement pratiques, on admettra l'indépendance des événements fondamentaux de type $(s \lesssim t)$ ou $(t < s)$, dans le sens que

$$\mathbb{P}[(s_1 \lesssim t_1) \cap \ldots \cap (s_m \lesssim t_m)] = \mathbb{P}[s_1 \lesssim t_1 \ldots P\ s_m \lesssim t_m] ,$$

$$\mathbb{P}[(t_1 < s_1) \cap \ldots \cap (s_m \lesssim t_m)] = \mathbb{P}[t_1 \lesssim s_1 \ldots P\ s_m \lesssim t_m] , \text{ etc.}$$

Même si l'ensemble de base contient peu d'éléments, les données nécessaires à l'estimation des probabilités conjointes telles que (19), (20), etc. sont en effet tellement lourdes qu'une hypothèse d'indépendance est pratiquement inévitable. On en arrive donc à une Théorie du Mesurage Probabiliste basée essentiellement sur un ensemble de probabilités binaires de la forme

$$P_{s,t} = \mathbb{P}[s_1 \lesssim t_1] .$$

La démarche suivante consiste alors à choisir une représentation appropriée pour les probabilités $P_{s,t}$. On peut s'inspirer évidemment des représentations utilisées dans le cas de la théorie algébrique. Ainsi, la représentation numérique du préordre

(21) $$s \lesssim t \Leftrightarrow f(s) \leq f(t)$$

conduira naturellement à la représentation

(22) $$P_{s,t} \leq 1/2 \Leftrightarrow f(s) \leq f(t) .$$

Il est bien connu que, dans le cas d'un ensemble fini, la transitivité stochastique faible est une condition nécessaire et suffisante à cette représentation (si l'on suppose, comme on le fait ici, que $P_{s,t} + P_{s,t} = 1)$. Remarquons que, sur le plan formel, nous n'avons que changé de notation, dans la mesure où nous avons simplement remplacé toute formule du type $s \lesssim t$ par la formule correspondante $P_{s,t} \leq 1/2$. Sur le plan de l'analyse des données, la différence est évidemment essentielle, et nous verrons qu'elle conduira à des tests statistiques.

De même, dans le cas de la mesure conjointe additive, on pourra adopter la représentation

(23) $$P_{ax,by} \leq 1/2 \Leftrightarrow f(a) + g(x) \leq f(b) + g(y)$$

Ces exemples illustrent une méthode générale pour obtenir automatiquement des représentations probabilistes de modèles de mesurage algébriques. Notons toutefois que des objections peuvent être émises à ce type de représentation. Supposons que, sur 50 présentations de l'ensemble $\{ax,by\}$, l'objet ax soit choisi 49 fois. Le bon sens indique que ax est "fortement préféré" à by . Mais ce bon sens n'a pas de place dans la représentation (23), qui néglige les valeurs des probabilités, pour ne garder que l'information spécifiant le signe de $P-1/2$. En fait, sitôt que l'on a des probabilités de choix, des modèles multiples peuvent être considérés. Toujours dans le cas du mesurage conjoint additif, on a, par exemple, F étant une fonction strictement croissante dans la première variable, et strictement décroissante dans la seconde variable,

(24) $$P_{ax,by} = F[f(a) + g(x) \quad , \quad f(b) + g(y)] \ .$$

Ou encore, si l'on veut considérer des modèles plus forts

(25) $$P_{ax,by} = G[f(a)g(x) - f(b)g(y)] \ ,$$

(26) $$P_{ax,by} = G\{[f(a) + g(x)] / [f(b) + g(y)]\} \ ,$$

dans lesquells G est une fonction strictements croissante. Bien entendu, (25) et (26) représentent des modèles essentiellement différents, qui tous deux impliquent (24). Je ne peux que mentionner en passant de tels modèles, qui ont été analysés sur le plan axiomatique, et utilisés notamment en psychophysique.

Dans le temps qui me reste, je vais essayer d'évoquer toutes les étapes de cette approche probabiliste et statistique de la théorie du mesurage, en généralisant à partir d'un seul exemple : celui de transitivité stochastique faible, laquelle constitue une condition nécessaire et suffisante, dans le cas fini, pour la représentation

$$P_{s,t} \leq 1/2 \Leftrightarrow f(s) \leq f(t) \ .$$

<u>Premier point</u>. Dans le cas d'ensembles finis (voir la méthode de Scot[illegible] , toute théorie du mesurage est axiomatisable par un ensemble de poly[illegible]s logiques quantifiés universellement, dont les termes sont des inégal[illegible] ou des équations portant sur des probabilités binaires du type

$$P_{s,t} = \mathbb{P}[s \precsim t] \ .$$

<u>Exemple</u> : La transitivité stochastique faible :

[TSF] $$(\forall s)(\forall t)(\forall u) \ (P_{s,t} \leq 1/2 \ \& \ P_{t,u} \leq 1/2 \Rightarrow P_{s,u} \leq 1/2 \ .$$

Deuxième point. Tout polynôme logique peut se mettre sous une forme normale, c'est-à-dire sous la forme de disjonctions de conjonctions.

Exemple : Supposant que l'ensemble empirique soit $X = \{s,t,u\}$, [TSF] est équivalent à

$$
\begin{aligned}
& (P_{s,t} \leq 1/2 \ \& \ P_{t,u} \leq 1/2 \ \& \ P_{s,u} \leq 1/2) \\
\vee \ & (P_{s,t} \leq 1/2 \ \& \ P_{t,u} > 1/2 \ \& \ P_{s,u} \leq 1/2) \\
\vee \ & (P_{s,t} > 1/2 \ \& \ P_{t,u} \leq 1/2 \ \& \ P_{s,u} \leq 1/2) \\
\vee \ & (P_{s,t} \leq 1/2 \ \& \ P_{t,u} > 1/2 \ \& \ P_{s,u} > 1/2) \\
\vee \ & (P_{s,t} > 1/2 \ \& \ P_{t,u} \leq 1/2 \ \& \ P_{s,u} > 1/2) \\
\vee \ & (P_{s,t} > 1/2 \ \& \ P_{t,u} > 1/2 \ \& \ P_{s,u} > 1/2) \ .
\end{aligned}
$$

Troisième point. Il en résulte que la partie de l'espace des paramètres correspondant aux contraintes du modèle est nécessairement une union de polyèdres convexes. Dans le cas de notre exemple, on a la figure :

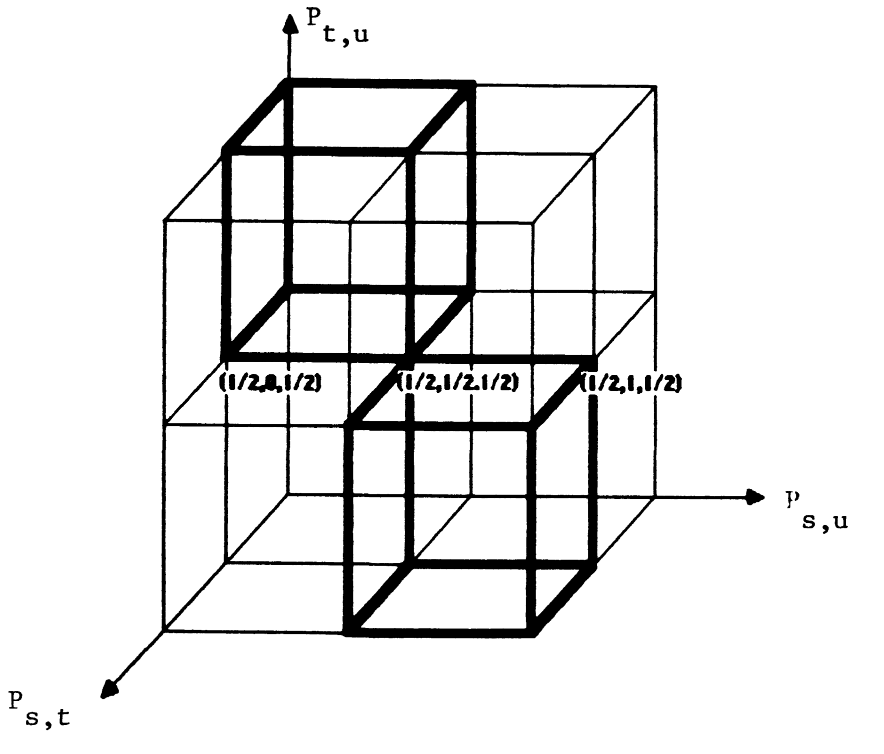

Figure 2 : Géométrie de l'espace des paramètres pour le test statistique de la transitivité faible, dans le cas de trois objets.
Les deux demis cubes délinéés en gras représentent le complément de l'hypothèse nulle.

Notons que dans le cas de trois objets, le modèle n'est pas fort contraignant, puisque la proportion de l'espace des paramètres correspondant au modèle est égale à 6/8. En général, cette proportion vaut $m!/2^{m(m-1)/2}$, ce qui croît rapidement avec m. Pour $m = 10$, cette proportion vaut approximativement 10^{-7}.

Quatrième point. Pour tester la transitivité stochastique faible dans une perspective statistique, on supposera que le vecteur $P = (P_{s,t}, P_{s,u}, P_{t,u})$ des probabilités vraies est situé sur l'adhérence de la région $\omega \subseteq \Omega = [0,1]^3$ de l'espace des paramètres correspondant au modèle (one-tail test). On estimera ces probabilités en maximisant la vraisemblance des données $r = (r_{s,t}, r_{s,u}, t_{t,u})$. Trois cas de localisation possible de P sur l'adhérence de ω doivent être considérés. (Ces trois cas sont illustrés par la Figure 3).

a) P se trouve sur une face de dimension 2 de ω, par exemple $P = (P_{s,t}, 1/2, P_{t,u})$, avec $P_{s,t}, P_{t,u} < 0$. Dans ce cas, la distribution de r aura asymptotiquement la moitié de sa masse dans ω, et l'autre moitié dans le complément $\omega - \Omega$. Notant λ_n la statistique usuelle du rapport de vraisemblance, dans lequel n désigne le nombre d'observations (que nous supposons être le même pour les trois fréquences), on montre facilement que pour $\ell > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\lambda_n > \ell\} = (1/2)\mathbb{P}\{\chi^2_{(1)} > \ell\} .$$

b) P se trouve sur l'intersection de deux faces correspondant au cas a. Donc, P se trouve sur une face de dimension 1. Comme l'indique la figure, une telle face est nécessairement commune à trois demi-cubes transitifs; par exemple, $P = (P_{s,t}, 1/2, 1/2)$, avec $P_{s,t} < 0$. On a alors

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\lambda_n < \ell\} = (1/4)[\mathbb{P}\{\chi^2_{(1)} > \ell\}]^2$$

c) $P = (0,0,0)$. Ceci donne

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\lambda_n > \ell\} = (1/4)\ [\mathbb{P}\{\chi^2_{(1)} > \ell\}]^3$$

On constate que, asymptotiquement, la distribution de la statistique λ_n dans le cas a est la moins favorable à l'hypothèse nulle. En conséquence, un test "conservateur" de la transitivité stochastique faible peut être construit à partir de ce cas. De façon précise, il s'agira d'un test de niveau asymptotique β : rejet de [TSF] si $\lambda > \ell$, dans lequel ℓ est un nombre satisfaisant à la condition

$$\mathbb{P}\{\chi^2_{(1)} > \ell\} = 2\beta \quad .$$

Par test *de niveau asymptotique* β , on veut dire ici

$$\lim_{n\to\infty} \sup_P \mathbb{P}\{\lambda_n > \ell\} = \beta \ ,$$

où le supremum est pris sur l'adhérence de ω . Le test est conservateur dans le sens que l'on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\lambda_n > \ell\} < \beta \ ,$$

pour tous les vecteurs P correspondants aux cas b et c.

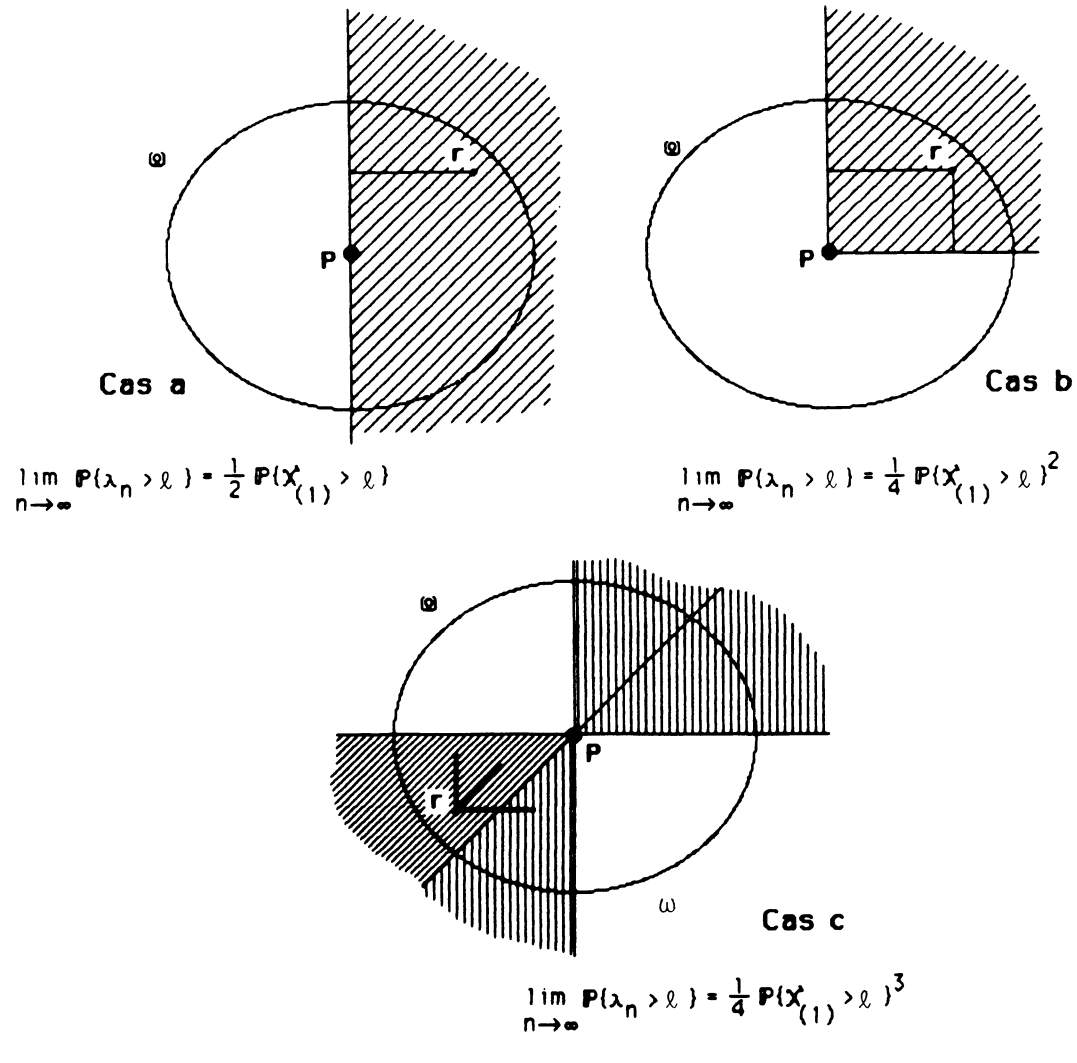

Figure 3 : Les trois cas possibles sous l'hypothèse que le vecteur P des probabiltés vraies se trouve sur l'adhérence de ω (la partie de l'espace des paramètres représentant TSF).

Cinquième point. Cet exemple très simple se généralise : il est toujours possible de trouver un état de la nature qui se trouve être le moins favorable de tous. Sous l'hypothèse de cet état, on peut alors déduire la distribution asymptotique de λ_n , et construire un test conservateur de [TSF]. En particulier, on peut alors démontrer le théorème suivant :

THEOREME. Soit m le nombre d'objets de l'ensemble empirique X . Supposons que le vecteur P des probabilités vraies se trouve sur l'adhérence de la partie ω de l'espace des paramètres représentant [TSF]. Alors, notant $k = (m-1)(m-2)/2$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\lambda_n > \ell\} \leq \sum_{j=0}^{k} 2^{-k} \binom{k}{j} \mathbb{P}\{\chi^2_{(j)} > \ell\} ,$$

dans lequel $\chi_{(0)}$ désigne une variable aléatoire dont la masse est concentrée au point zéro.

Selon ce résultat, la statistique du rapport de vraisemblance est dominée par une mixture de variables aléatoires chi-carrés de degrés de liberté variant entre 0 et $(m-1)(m-2)/2$.

Cet exemple d'un test statistique de la condition de transitivité stochastique faible semble bien illustrer une situation générale pour la théorie du mesurage probabiliste. Pour nous résumer : dans la perspective de cet exposé, un modèle de mesurage probabiliste est spécifié, en général, par un ensemble de polynômes logiques dont les termes sont des inégalités sur des probabilités. On retiendra la correspondance entre de tels axiomes et une union particulière de polyèdres convexes, définissant un certain sous-ensemble ω dans l'espace des paramètres. On retiendra encore l'existence, au moins dans certains cas, d'un ensemble de points les moins favorisés sur l'adhérence de cet ensemble ω , qui conduirait alors à un test statistique "conservateur".

On voit que je me suis borné à mettre le pain sur la planche, et qu'il reste à le découper, tâche qui pourrait s'avérer fort ardue dans certains cas.

NOTES BIBLIOGRAPHIQUES SUPPLEMENTAIRES

Parmi les ouvrages généraux sur la Théorie du Mesurage, nous citerons surtout .

ELLIS, B., *Basic Concepts of Measurement*, London, Cambridge University Press, 1968.

KRANTZ, D.H., LUCE, R.D., SUPPES, P. & TVERSKY, A., *Foundations of Measurement*, Vol. 1 : Additive and Polynomial Representations, New York, Academic Press, 1971.

SUPPES, P., KRANTZ, D.H., LUCE, R.D. & TVERSKY, A., *Foundations of Measurement*, Vol. 2, New York, Academic Press (in press).

LUCE, R.D., KRANTZ, D.H., SUPPES, P. & TVERSKY, A., *Foundations of Measurement*, Vol. 3, New York, Academic Press (in press).

ROBERTS, F.S., *Measurement Theory*, Reading, MA, Addison-Wesley, 1979.

NARENS, L., *Abstract Measurement Theory*, Cambridge, MA, MIT Press, 1985.

Les trois volumes de *Foundations of Measurement* donnent une présentation très complète de la théorie. On se reportera sans hésiter à ces ouvrages pour toute partie du présent article pour laquelle des références spécifiques ne sont pas mentionnées. Ceci s'applique en particulier au mesurage des différences, et au mesurage additif conjoint. Le livre de Roberts, moins complet mais d'abord beaucoup plus facile, est destiné principalement aux chercheurs en sciences humaines. L'ouvrage de Ellis aborde la Théorie du Mesurage sous l'angle de la philosophie des sciences. Le livre de Narens suppose de la part du lecteur une certaine maturité mathématique. On y trouvera notamment une discussion de la Théorie du Mesurage à partir de plongements de structures empiriques dans les réels non standards. Des résumés des idées essentielles de la Théorie du Mesurage peuvent être trouvés dans les trois articles suivants :

KRANTZ, D.H., "A survey of measurement theory", in G.B. DANTZIG & A.F. VEINOTT Jr. (Eds), *Mathematics of the decision sciences : Part 2. Lectures in applied mathematics*, Providence, R.I., American Mathematical Society, 1968.

NARENS, L. & LUCE, R.D., "Measurement : The Theory of Numerical Assignments", *Psychological Bulletin*, 1986, 99, 2, 166-180.

LUCE, R.D. & NARENS, L.,"Measurement Scales on the Continuum", *Science*, 1987, 236, 1527-1532.

Les références standards sur les échelles de Guttman sont les chapitres contribués par Guttman dans l'ouvrage :

STOUFFER et al. *Measurement and Prediction*, Princeton, Princeton University Press, 1950.

Le contenu mathématique de ce concept, qui a reçu depuis le nom de biordre, a été analysé dans l'article :

DUCAMP, A. & FALMAGNE, J.-Cl., "Composite Measurement", *Journal of Mathematical Psychology*, 1969, 6, N° 3, 359-390.

Une version multidimensionnelle a été considérée par :

COOMBS, C.H. & KAO, R.C., "Non metric factor analysis", *Engineering Research Bulletin*, 1955, N° 38, University of Michigan, Ann Arbor ; Michigan Press.

Pour une étude mathématique de ce modèle multidimensionnel on se rapportera à l'article :

DOIGNON, J.-P., DUCAMP, A. & FALMAGNE, J.-Cl., "On realizable biorders and the biorder dimension of a relation", *Journal of Mathematical Psychology*, 1984, 28, N° 1, 73-109.

Une élaboration multidimensionnelle récente du concept d'échelle de Guttman, dans une perspective d'application à la psychologie du développement, peut être trouvée dans :

MONJARDET, B., & NETCHINE-GRYNBERG, G., "Plural developmental models : An ordinal generalization of Guttman scale", accepté par le *Journal of Mathematical Psychology*.

Nous mentionnerons deux ouvrages de base sur les échelles multidimensionnelles :

KRUSKAL, J.B. & WISH, M., *Multidimensional Scaling*, Newbury Park, CA, Sage, 1978.

ARABIE, P., CAROLL, J.D. & DESARBO, W.S., *Three Way Scaling and Clustering*, Newbury Park, CA, Sage, 1987.

Pour une courte introduction à ce domaine, on se rapportera à :

CAROLL, J.D. & ARABIE, P., "Multidimensional scaling" in M.R. ROZENZWEIG & L.M. PORTER (Eds), *Annual Review of Psychology*, 1980, 31, 607-649.

L'application de la méthode de Scott discutée ici est inspirée de :

DUCAMP, A., "A note on an alternative proof of the representation theorem for bi-semiorders", *Journal of Mathematical Psychology*, 1978, 18, N° 1, 100-104.

Les modèles de mesurage conjoint additif spécifiés par les équations (24), (25) et (26) ont été analysés sur le plan axiomatique dans l'article :

FALMAGNE, J.-Cl., "On a class of probabilistic conjoint measurement models : some diagnostic properties", *Journal of Mathematical Psychology*, 1979, 19, 73-88.

On trouvera des applications de ces modèles à la psychophysique dans l'ouvrage :

FALMAGNE, J.-Cl., *Elements of Psychophysical Theory*, New York, Oxford University Press, 1985.

Notons enfin que certains domaines d'application importants de la Théorie du Mesurage ont été omis dans cette revue, en particulier : les fondements de la probabilité subjective et de l'utilité subjective, et les décisions dans les situations impliquant un risque. Encore une fois, le lecteur consultera les chapitres correspondants de *Foundations of Measurement* ou du livre de ROBERTS pour un premier contact avec ces sujets.