MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

J.-P. DOIGNON

Sur les représentations minimales des semiordres et des ordres d'intervalles

Mathématiques et sciences humaines, tome 101 (1988), p. 49-59

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1988__101__49_0>

Math. Inf. Sci. hum. (26e année, n°101, *1988*, p.49-59)

SUR LES REPRESENTATIONS MINIMALES DES SEMIORDRES ET DES ORDRES D'INTERVALLES

J.-P. DOIGNON*

1. INTRODUCTION

Les semiordres et les ordres d'intervalles constituent deux modèles apparentés souvent utilisés en modélisation des préférences. Ils reposent sur l'idée qu'une alternative n'est préférée à une autre que si l'utilité de la première dépasse d'au moins un certain seuil l'utilité de la seconde. Désignons par X un ensemble fini d'alternatives ainsi que par P et I deux relations sur X , dites respectivement de préférence et d'indifférence. La structure (X,P,I) est un *ordre d'intervalles* lorsqu'il existe deux applications f de X vers $\mathbb{R}$ et t de X vers $\mathbb{R}^+$ telles que

$$xPy \Leftrightarrow f(x) > f(y)+t(y) \ , \tag{1}$$

$$xIy \Leftrightarrow -t(x) \leq f(x)-f(y) \leq t(y) \ , \tag{2}$$

pour tous $x,y \in X$. La valeur $f(x)$ représente l'utilité (évaluée numériquement) de x , tandis que $t(x)$ est le seuil associé à x ("threshold" en anglais). Au cas où ce seuil est constant, c'est-à-dire indépendant de x , nous le notons plutôt r et appelons encore *semiordres* les structures ainsi obtenues. De nombreuses caractérisations, propriétés et applications des ordres d'intervalles et des semiordres, aussi appelés quasiordres, sont répertoriées dans la littérature (voir par exemple Fishburn, 1985, Monjardet, 1978, Roberts, 1979, et Roubens et Vincke, 1985). Celle-ci s'est abondamment développée depuis les articles originaux de Luce (1956), Scott et Suppes (1958) et Fishburn (1970).

Ainsi, Roy (1980), suivi de Roubens et Vincke (1984), a introduit des structures partielles. Un *ordre partiel d'intervalles* sera ici une structure

---

* Université Libre de Bruxelles, c.p. 216, Bd du Triomphe, 1050 Bruxelles, Belgique. Ce travail a bénéficié du soutien logistique du NSF Grant IST84-18860 attribué à Jean-Claude Falmagne, New York University.

(X,P,I) pour laquelle existent deux applications f de X vers $\mathbb{R}$ et t de X vers $\mathbb{R}^+$ telles que si $x,y \in X$

$$xPy \Rightarrow f(x) > f(y) + t(y) \ , \qquad (3)$$

$$xIy \Rightarrow f(x) - f(y) \leq t(y) \ . \qquad (4)$$

Si $t(x)=r$ est une constante, la structure est aussi un *semiordre partiel*.

Il est aisé de vérifier qu'un ordre partiel d'intervalles (resp. un semiordre partiel) est un ordre d'intervalles (resp. un semiordre) exactement lorsque la relation I est symétrique, réflexive, et la relation $P \cup I$ complète (dans le sens que pour tous x,y de X a lieu $x(P\cup I)y$ ou $y(P\cup I)x$). En fait, dans ce cas, les implications dans les formules (3) et (4) sont nécessairement des équivalences, et ces formules sont identiques à (1) et (2). Pour ces raisons, nous nous intéresserons dans la suite au cas général des structures partielles, en ne nous restreignant aux structures complètes que contraints et forcés.

Récemment, en vue d'élaborer une méthode d'agrégation de semiordres, Marc Pirlot s'est intéressé à une notion de représentation minimale d'une structure. Pour définir ce concept, il nous faut une légère variante des conditions (3) et (4), où n'intervienne pas de signe d'inégalité strict. Notons que l'usage de cette variante ne modifie pas les structures spécifiées.

Une *représentation à seuil variable* d'une structure (X,P,I) est un triple (f,t,ε) , formé de deux applications f de X vers $\mathbb{R}$ et t de X vers $\mathbb{R}^+$, ainsi que d'un nombre réel strictement positif ε , triple tel que

$$xPy \Rightarrow f(x) \geq f(y) + t(y) + \varepsilon \ , \qquad (5)$$

$$xIy \Rightarrow f(x) - f(y) \leq t(y) \ , \qquad (6)$$

pour tous x,y de X . Nous parlerons de *représentation à seuil constant* lorsque t prend une valeur constante r , utilisant alors plutôt la notation (f,r,ε) et les formules

$$xPy \Rightarrow f(x) \geq f(y) + r + \varepsilon \ , \qquad (7)$$

$$xIy \Rightarrow f(x) - f(y) \leq r \ . \qquad (8)$$

En fait, Marc Pirlot n'a considéré que ce dernier cas et uniquement pour des structures complètes (d'ailleurs encodées par la seule relation de préférence). Sa notion de représentation se généralise toutefois directement.

Quitte à composer avec une translation de $\mathbb{R}$, nous pouvons toujours nous arranger pour que la plus petite valeur prise par f soit 0 . Dorénavant, nous supposerons que cette condition est satisfaite par toutes les représentations que nous considérerons.

Etant donné $\varepsilon > 0$, une représentation à seuil constant $(f°,r°,\varepsilon)$ est *minimale* si pour toute représentation à seuil constant (f,r,ε) utilisant le même ε , il vient quel que soit x dans X

$$f°(x) \leq f(x) .$$

Pirlot (1987) établit pour un semiordre l'existence d'une telle représentation minimale (l'unicité est évidente). A cette fin, il utilise les notions de noeud et de creux. Intéressantes en soi, ces notions n'apparaissent cependant que dans l'article cité. Il nous a paru indiqué de fournir des preuves qui n'y recourent pas.

Dans la section 2, nous reformulons les résultats de Pirlot (1987) en les étendant si possible aux semiordres partiels. La section 3 énonce des résultats analogues pour les ordres (partiels) d'intervalles, en réponse à un problème énoncé par Pirlot. Les sections 5 et 6 développent les preuves à partir d'un résultat sur les graphes multiples pondérés rappelé dans la section 4. Cette technique a été utilisée précédemment pour établir l'existence de représentations, voir par exemple Doignon (1987a,b) et leurs références. Enfin, la dernière section formule des questions pour le cas le plus général des relations de préférence à seuils multiples.

2. REPRESENTATIONS MINIMALES DE SEMIORDRES.

Un *chemin* d'une relation R est une suite de couples

$$x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_px_{p+1} \;, \quad p \geq 0$$

tous pris dans R . Le cas $p=0$ donne le chemin vide. Lorsque $p > 0$ et $x_1=x_{p+1}$, ce chemin est un *circuit* de R .

Considérons à nouveau une structure (X,P,I) , avec P et I relations sur l'ensemble fini X . Nous supposerons I réflexive et symétrique, afin de simplifier l'exposé. La première assertion qui suit est bien connue (par exemple, Doignon, 1987b). Le reste de la proposition 1 est une variante d'un résultat de Pirlot (1987), tandis que les propostions 2 et 3 en sont reprises.

PROPOSITION 1. *La structure* (X,P,I) *admet une représentation à seuil constant (c'est-à-dire : est un semiordre partiel) ssi chaque circuit* C *de* $P \cup I$ *satisfait*

$$|P \cap C| < |I \cap C| . \tag{9}$$

Dans ce cas, la plus petite valeur de r/ε *pour laquelle existe une représentation* (f,r,ε) *est*

$$\alpha \equiv \max_{C \text{ circuit}} \frac{|P \cap C|}{|I \cap C| - |P \cap C|} . \tag{10}$$

REMARQUES. 1. Si la structure ne donne lieu à aucun circuit, il faut convenir $\alpha = 0$.

2. Parmi les structures complètes, les préordres sont caractérisés par $\alpha = 0$ (P est alors irréflexive et transitive).

PROPOSITION 2. *Si* (X,P,I) *est un semiordre, alors pour chaque* $\varepsilon > 0$ *donné, il existe une unique représentation minimale* $(f°,r°,\varepsilon)$. *Toutes les valeurs prises par* $f°$ *sont des multiples entiers de* ε , *et* $r°$ *vaut* $\alpha\varepsilon$, *où* α *est défini par* (10) .

PROPOSITION 3. *Pour un semiordre, la valeur* α *mentionnée dans la proposition 1 est entière.*

REMARQUE. L'exemple suivant de semiordre partiel donne une valeur non entière de α , à savoir $1/2$:

$$X = \{a,b,c,d\} \ , \quad P = \{ab\} \ ,$$

$$I = \{aa,bb,cc,dd,bc,cb,cd,dc,da,ad\} \ .$$

On peut aussi vérifier, pour ε fixé, qu'il n'existe pas de représentation minimale.

3. REPRESENTATIONS MINIMALES D'ORDRES D'INTERVALLES.

Soit (X,P,I) une structure comme ci-dessus, avec I réflexive et symétrique. On note PI la relation produit des relations P et I . Une relation est *acyclique* si elle ne possède aucun circuit, en particulier aucune boucle.

Une représentation à seuil variable $(f°,t°,\varepsilon)$ est *minimale* lorsque pour toute représentation à seuil variable (f,t,ε) a lieu pour chaque x de X

$$f°(x) \leq f(x) \quad \text{et} \quad f°(x) + t°(x) \leq f(x) + t(x) \ .$$

La première affirmation ci-dessous se trouve par exemple dans Doignon (1987b).

PROPOSITION 4. *Il existe une représentation à seuil variable de la structure* (X,P,I) *ssi la relation* PI *est acyclique. Dans ce cas, et pour chaque* $\varepsilon > 0$, *il existe aussi une unique représentation minimale* $(f°,g°,\varepsilon)$. *Chaque valeur prise par* $f°$ *ou* $g°$ *est un multiple entier de* ε .

4. RAPPEL D'UN RESULTAT EN THEORIE DES GRAPHES.

Le terme *graphe* désigne ici un ensemble fini de *sommets* muni d'un nombre impair de collections d'*arcs*, chaque arc étant un couple de sommets muni d'un *poids* qui est un nombre réel. Nous le noterons $G = (S, A_0, A_1, A'_1, \ldots, A_n, A'_n, \pi)$ avec

$$\pi : A \equiv A_0 \cup A_1 \cup A'_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A'_n \to \mathbb{R} .$$

Une *représentation (par potentiels)* de ce graphe est formée d'applications $f, g_1, g_2, \ldots, g_n$ de S vers $\mathbb{R}^+$ telles que pour $x, y \in S$ et $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$xy \in A_0 \Rightarrow f(x) \geq f(y) + \pi(xy) ,$$
$$xy \in A_i \Rightarrow f(x) \geq g_i(y) + \pi(xy) ,$$
$$xy \in A'_i \Rightarrow g_i(x) \geq f(y) + \pi(xy) .$$

Une représentation $f^\circ, g_1^\circ, g_2^\circ, \ldots, g_n^\circ$ est dite *minimale* lorsque pour toute représentation $f, g_1, g_2, \ldots, g_n$ de ce même graphe les inégalités

$$f^\circ(x) \leq f(x) \quad \text{et} \quad g_i^\circ(x) \leq g_i(x)$$

sont valides pour tout x et tout i .

La proposition suivante reprend en le complétant un énoncé de Doignon (1987b); la preuve reste identique.

PROPOSITION 5. *Le graphe* G *possède une représentation (et d'ailleurs une représentation minimale) ssi pour tout circuit*

$$x_1x_2 , x_2x_3, \ldots, x_qx_1 \in A$$

avec $x_\ell x_{\ell+1}$ *pris dans* A_j *ssi* $x_{\ell+1}x_{\ell+2}$ *pris dans* A'_j *(les indices étant calculés modulo* q *) :*

$$\sum_{\ell=1}^{q} \pi(x_\ell x_{\ell+1}) \leq 0 .$$

La représentation minimale s'obtient de la manière suivante. Pour la valeur $f(x)$, on considère tous les chemins

$$x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_px_{p+1} \in A$$

avec x_1x_2 dans aucun A'_j , et $x_kx_{k+1} \in A_j$ ssi $x_{k+1}x_{k+2} \in A'_j$ (pour $k=1,2,\ldots,p-1$ et $j=1,2,\ldots,n$) et on prend comme valeur le maximum de leur poids

$$\sum_{k=1}^{p} \pi(x_kx_{k+1}) .$$

De même, $g_i(x)$ s'obtient à partir des chemins satisfaisant $x_1x_2 \in A'_i$ et $x_kx_{k+1} \in A_j$ ssi $x_{k+1}x_{k+2} \in A'_j$.

5. PREUVES RELATIVES AUX SEMIORDRES.

Soit (X,P,I) une structure donnée, avec I réflexive et symétrique. Nous pouvons supposer $P \cap I = \emptyset$, car cette égalité résulte de l'existence d'une représentation à seuil constant, tout comme de la condition (9).

Formons un graphe en posant $S = X$ et $A = A_0 = P \cup I$, puis donnant à π la valeur $r+\varepsilon$ sur chaque arc de P et $-r$ sur chaque arc de I . La première affirmation de la proposition 1 résulte de la section 4, car le poids d'un circuit C de (S,A,π) est exactement

$$|P \cap C|\ (r+\varepsilon) + |I \cap C|\ (-r)$$

et sera donc non positif lorsque soit $r=0$ et ce circuit C ne contient aucun arc de P , soit $r > 0$ et

$$|P \cap C|\ \frac{r+\varepsilon}{r} \leq |I \cap C| \ .$$

Quand $|P \cap C| < |I \cap C|$ pour tout circuit C , les valeurs admissibles de r/ε sont celles satisfaisant les inégalités

$$r/\varepsilon \geq \frac{|P \cap C|}{|I \cap C| - |P \cap C|} \ .$$

Nous avons ainsi établi la proposition 1. De plus, pour des valeurs données $r \geq 0$ et $\varepsilon > 0$, satisfaisant $r/\varepsilon \geq \alpha$, il existe une application $f(r,\varepsilon;\ )$ minimale caractérisée par

$$f(r,\varepsilon;x) = \max\{(|P \cap H| - |I \cap H|)r + |P \cap H|\varepsilon\} \qquad (11)$$

où le maximum est pris sur tous les chemins de $P \cup I$ issus de x .

Supposons à présent que (X,P,I) est un semiordre complet. Nous allons montrer que pour $\varepsilon > 0$ donné, la représentation $(f(\alpha\varepsilon,\varepsilon;\ ),\alpha\varepsilon,\varepsilon)$ est la représentation $(f°,r°,\varepsilon)$ minimale de la proposition 2 , en nous basant sur deux lemmes. La preuve du premier constitue un exercice aisé de combinatoire.

LEMME 1. *Soit une séquence formée de* d *symboles* P *et de* d *symboles* I , *telle qu'au-delà de chaque position le nombre de* I *n'excède pas le nombre de* P . *Alors, pour tout entier* e *tel que* $0 < e < d$, *il existe une sous-séquence de symboles consécutifs, formée de* e *symboles* P *et de* e *symboles* I .

Dans l'énoncé suivant, le terme "poids" se rapporte au graphe introduit ci-dessus.

LEMME 2. *Soit* (X,P,I) *un semiordre complet, et soit* $r \geq 0$ *et* $\varepsilon > 0$ *avec* $r/\varepsilon \geq \alpha$. *Parmi tous les chemins de* $P \cup I$ *issus de* x , *de poids maximum, il en existe un, soit* Γ , *pour lequel*

$$|P \cap \Gamma| \geq |I \cap \Gamma| \ .$$

PREUVE. Prenons un chemin Ω de poids maximum issu de x . S'il ne peut jouer le rôle de Γ , c'est que

$$|P \cap \Omega| < |I \cap \Omega| \ .$$

Travaillons sous cette hypothèse, avec Ω égal à

$$x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_px_{p+1} \ .$$

L'arc x_px_{p+1} est nécessairement dans P , sinon sa suppression augmenterait le poids du chemin. Soit k le plus grand indice tel que

$$|P \cap \{x_kx_{k+1}, \ldots, x_px_{p+1}\}| < |I \cap \{x_kx_{k+1}, \ldots, x_px_{p+1}\}| \ .$$

On a donc $k < p-1$ et $x_kx_{k+1} \in I$, et encore

$$|P \cap \{x_{k+1}x_{k+2}, \ldots, x_px_{p+1}\}| = |I \cap \{x_{k+1}x_{k+2}, \ldots, x_px_{p+1}\}| \ .$$

Appelons d ce dernier nombre. Notons que $\{x_kx_{k+1}, \ldots, x_px_{p+1}\}$ est un chemin ψ de poids maximum parmi les chemins issus de x_k . En fait, pour établir la thèse, il nous suffit de prouver l'existence d'un chemin (H) de poids maximum issu de x_k tel que

$$|P \cap (H)| \geq |I \cap (H)|$$

(car une récurrence sur k décroissant permet alors de conclure).

Supposons au contraire qu'un tel chemin (H) n'existe pas, et dérivons une contradiction. Le poids du chemin ψ actuel vaut

$$-r + d(r+\varepsilon) + d(-r) = -r + d\,\varepsilon \ .$$

Comme le chemin vide issu de x_k ne peut être pris pour (H) , il faut $-r + d\varepsilon > 0$, c'est-à-dire $d > r/\varepsilon$. Ainsi $d > \alpha$. Par le lemme combinatoire appliqué à la suite des P et des I rencontrés à partir de x_{k+1} , nous pouvons trouver un segment du chemin ψ , soit

$x_ix_{i+1}, x_{i+1}x_{i+2}, \ldots, x_jx_{j+1}$, avec $k+1 \leq i < j \leq p+1$, pour lequel

$$|P \cap \{x_ix_{i+1}, \ldots, x_jx_{j+1}\}| = |I \cap \{x_ix_{i+1}, \ldots, x_jx_{j+1}\}| = \bar{\alpha}+1 \ , \text{ avec } \bar{\alpha} = \lfloor \alpha \rfloor .$$

Si nous avions $x_ix_{j+1} \in P^{-1} \cup I$, le circuit de $P \cup I$

$$x_ix_{i+1}, \ldots, x_jx_{j+1} \ , \ x_{j+1}x_i$$

contredirait le fait d'avoir un semiordre ou la définition de α . La structure étant complète, nous avons donc $x_ix_{j+1} \in P$. Le poids du segment vaut $(\bar{\alpha}+1)(r+\varepsilon)+(\bar{\alpha}+1)(-r) = (\bar{\alpha}+1)\varepsilon$, tandis que le poids de l'arc x_ix_{j+1} de P vaut $r+\varepsilon$. Comme $\alpha \leq r/\varepsilon$, on a $(\bar{\alpha}+1)\varepsilon \leq r+\varepsilon$. Ainsi le remplacement du segment par l'arc de P fournit un chemin issu de x_k , de poids au moins égal, et ayant autant d'arcs dans P que dans I . Ceci termine la preuve du lemme.

Revenons à la preuve de la proposition 2, en recourant aux notations introduites avant les lemmes. Il nous suffit de montrer étant donné $\varepsilon > 0$ que pour toute représentation (f,r,ε) et tout x de X

$$f(\alpha\varepsilon, \varepsilon; x) \leq f(x) \ .$$

Nous savons $f(r,\varepsilon;x) \leq f(x)$. D'autre part, grâce au deuxième lemme, il existe un chemin H issu de x avec

$$f(\alpha\varepsilon,\varepsilon;x) = (|P \cap H| - |I \cap H|)\alpha\varepsilon + |P \cap H|\varepsilon \quad \text{et} \quad |P \cap H| \geq |I \cap H| .$$

On en déduit, comme $\alpha\varepsilon \leq r$,

$$\begin{aligned} f(\alpha\varepsilon,\varepsilon;x) &\leq (|P \cap H| - |I \cap H|)r + |P \cap H|\varepsilon \\ &\leq \max \{(|P \cap H'| - |I \cap H'|)r + (P \cap H')r\} \\ &= f(r,\varepsilon;x) , \end{aligned}$$

où le maximum est pris sur les chemins H' de $P \cup I$ issus de x . Ainsi, $f(\alpha\varepsilon,\varepsilon;x) \leq f(x)$, ce qui établit l'existence d'une représentation minimale pour ε donné, par ailleurs de seuil constant $r° = \alpha\varepsilon$. La formule donnant $f(\alpha\varepsilon,\varepsilon;x)$ montre que cette valeur est multiple entier de ε , au moins lorsque α est entier.

Nous allons à présent établir la proposition 3, qui affirme justement que α est entier.

Par la proposition 1, la valeur de α est le rapport

$$\alpha = \frac{|P \cap C|}{|I \cap C| - |P \cap C|}$$

pour un certain circuit C . Travaillons avec une représentation $(f,\alpha\varepsilon,\varepsilon)$. En considérant à nouveau le graphe sur X avec les arcs de P recevant le poids $\alpha\varepsilon+\varepsilon$ et les arcs de I le poids $-\alpha\varepsilon$, le circuit C est de poids 0 . Soit Y l'ensemble des sommets de C , et (Y,P_Y,I_Y) le semiordre induit sur Y . La restriction f_Y de f à Y donne une représentation $(f_Y,\alpha\varepsilon,\varepsilon)$ du semiordre induit. Les inégalités sur les valeurs de f aux extrémités des arcs de C doivent être des égalités (sinon, en les sommant, on trouverait que le poids de C est négatif). Supposons que f_Y prenne sa plus petite valeur au sommet x_o , et soit x_1 le sommet suivant dans C . Alors $x_ox_1 \in I$, sinon $f_Y(x_o) = f_Y(x_1)+\alpha\varepsilon+\varepsilon$. Donc $f_Y(x_1) = \alpha\varepsilon$. La partie du circuit de x_1 à x_o est alors un chemin de poids $\alpha\varepsilon$. Considérons un chemin H dans Y , issu de x_1 et de poids maximum. Grâce au lemme 2 appliqué au semiordre induit, nous pouvons supposer

$$|P \cap H| \geq |I \cap H| . \tag{12}$$

Le poids de H vaut au moins $\alpha\varepsilon$; d'autre part, s'il valait plus que $\alpha\varepsilon$, on aurait $f_Y(x_1) > \alpha\varepsilon$. Donc

$$|P \cap H|(\alpha\varepsilon+\varepsilon) + |I \cap H|(-\alpha\varepsilon) = \alpha\varepsilon$$

$$\text{et} \quad \alpha = \frac{|P \cap H|}{|I \cap H| + 1 - |P \cap H|} \tag{13}$$

Si y est le dernier sommet de H , il vient $f_Y(y) = 0$. Ainsi $yx_1 \in I$ et $H \cup \{yx_1\}$ est un circuit B de $P \cup I$. Par la proposition 1,

$$|P \cap B| \leq |I \cap B| - 1 ,$$

et par (12)

$$|P \cap B| \geq |I \cap B| - 1 .$$

Ainsi, grâce à (13), $\alpha = |P \cap B|$ est entier.

6. PREUVES RELATIVES AUX ORDRES D'INTERVALLES

Considérons à nouveau une structure (X,P,I) , avec I réflexive et symétrique. Définissons le graphe (S,A,π) par $S = X$ et $A = A_1 \cup A_1'$, avec

$$A_1 = \{xy \mid xPy\} , \quad A_1' = \{xy \mid xIy\} ,$$

chaque arc de A_1 étant pris de poids ε et chaque arc de A_1' de poids 0 . Si la structure (X,P,I) admet une représentation à seuil variable (f,t,ε) on pose pour $x \in X$

$$g(x) = f(x)+t(x) .$$

Alors les applications f et g constituent une représentation du graphe. Réciproquement, une représentation f,g du graphe conduit à une représentation $(f,g-f,\varepsilon)$ de la structure (avec $g(x)-f(x) \geq 0$ car xIx) . La proposition 4 se déduit ainsi de la proposition 5.

REMARQUE. Pour un ordre d'intervalles (X,P,I) , la valeur $f(x)$ vaut ε fois le plus grand nombre d'arcs dans un chemin de PI issu de x , et est donc liée au rang de x pour la trace droite (pour cette dernière notion, voir par exemple Doignon, Monjardet, Roubens et Vincke, 1986).

7. STRUCTURES MULTIPLES

En vue d'applications diverses, des auteurs ont étudié des structures de préférence à deux seuils encodés par des semiordres ; voir Cozzens et Roberts (1982), ainsi que Roy et Vincke (1987). De manière la plus générale, on peut s'intéresser comme dans Doignon (1987a,b) à une famille $(P_1,I_1,P_2,I_2,\dots,P_m,I_m,Q_1,J_1,Q_2,J_2,\dots,Q_n,J_n)$ de relations sur le même ensemble fini X . On en définit une représentation par la donnée de ε strictement positif, de $r_1,r_2,\dots,r_m$ positifs ou nuls, et de $1+n$ applications $f,t_1,t_2,\dots,t_n$ de X vers $\mathbb{R}^+$ tels que

$$xP_iy \Rightarrow f(x) \geq f(y) + r_i + \varepsilon ,$$

$$xI_iy \Rightarrow f(x) - f(y) \leq r_i ,$$

$$xQ_jy \Rightarrow f(x) \geq f(y) + t_j(y) + \varepsilon ,$$

$$xJ_jy \Rightarrow f(x) - f(y) \leq t_j(y) ,$$

pour tous $x,y \in X$, $i \in \{1,2,\dots,m\}$ et $j \in \{1,2,\dots,n\}$. On définit de manière naturelle une représentation minimale : chacune des valeurs $f(x)$, $f(x) + t_j(x)$ est minimum.

Les mêmes notions et arguments que ceux de Doignon (1987b) permettent de caractériser les familles admettant une représentation. Nous ignorons si ces familles possèdent nécessairement une représentation minimale; ce problème est donc laissé pendant. Il est aisé par contre de prouver, pour des $\varepsilon, r_1, r_2, \dots, r_m$ admissibles, qu'il existe des fonctions $f, t_1, t_2, \dots, t_n$ qui minimisent toutes les valeurs $f(x)$ et $f(x) + t_j(x)$ (cela découle d'une application de la proposition 1). Un problème lié au précédent s'énonce : pour ε fixé, peut-on trouver un m-uple $(r_1, r_2, \dots, r_m)$ qui minimise, dans l'ensemble polyédrique des m-uples admissibles, chacun des r_i ?

BIBLIOGRAPHIE

COZZENS M.B., ROBERTS F.S., "Double semiorders and double indifference graphs", *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 3 (1982), 566-582.

DOIGNON J.-P., "Threshold representations of multiple semiorders", *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 8 (1987a), 77-84.

DOIGNON J.-P., "Partial structures of preference", in *Non conventional Preference Relations in Decision Making*, J. Kacprzyk et M. Roubens, eds, Berlin, Springer-Verlag, sous presse (1987b)

DOIGNON J.-P., MONJARDET B., ROUBENS M., VINCKE Ph., "Biorder families, valued relations and preference modelling", *Journal of Mathematical Psychology*, 30 (1986), 435-480.

FISHBURN P.C., "Intransitive indifference with unequal indifference intervals", *Journal of Mathematical Psychology*, 7 (1970), 144-149.

FISHBURN P.C., *Interval Orders and Interval Graphs*, New York, Wiley, 1985.

LUCE R.D., "Semiorders and a theory of utility discrimination", *Econometrica*, 24 (1956), 178-191.

MONJARDET B., "Axiomatiques et propriétés des quasi-ordres", *Mathématiques et Sciences humaines*, 63 (1978), 51-82.

PIRLOT M., "Minimal representation of a semiorder", soumis.

ROBERTS F.S., *Measurement Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 7, Reading, MA, Addison-Wesley, 1979.

ROUBENS M., VINCKE Ph., "A definition of partial interval orders", in *Trends* *in Mathematical Psychology*, E. Degreef et J. Van Buggenhaut, eds, Amsterdam, North Holland, 1984 (pp. 309-315)

ROUBENS M., VINCKE Ph., *Preference Modelling*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 250, Berlin, Springer-Verlag, 1985.

ROY B., "Préférence, indifférence, incomparabilité", *Documents du LAMSADE* n°9, Université de Paris Dauphine, 1980.

ROY B., VINCKE, Ph., "Pseudo-orders : definition, properties and numerical representation", *Mathematical Social Sciences*, 14 (1987), sous presse.

SCOTT D., SUPPES P., "Foundational aspects of theories of measurement", *Journal of Symbolic Logic*, 23 (1958), 113-128.