MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

A. LENTIN

Cauty, A. L'énoncé mathématique et les numérations parlées. Thèse de l'université de Nantes, septembre 1987

Mathématiques et sciences humaines, tome 99 (1987), p. 27-45

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1987__99__27_0>

Math. Sci. hum.(*25*^{e} année, n°99, *1987*, p.27-45)

CAUTY, A. L'ENONCE MATHEMATIQUE ET LES NUMERATIONS PARLEES. THESE DE L'UNIVERSITE DE NANTES, SEPTEMBRE 1987 (502 pages 21×30, dont 112 de documents annexes)

A. LENTIN

André CAUTY a soutenu en septembre 1987 une Thèse d'Etat dont le jury a vivement souhaité la publication. Cette Thèse mérite, croyons-nous, l'attention des lecteurs de *Mathématiques et Sciences humaines*, aussi leur en proposons-nous un compte rendu analytique détaillé.

Cette Thèse est intitulée L'ENONCE MATHEMATIQUE & LES NUMERATIONS PARLEES et sous-titrée *Contribution pluridisciplinaire à l'étude de la Mise en signes des conceptualisations mathématiques (au niveau du secondaire et du premier cycle universitaire) et Etudes des Numérations parlées en vue de l'Education contre l'ethnocide.*

Un peu long sans doute, le sous-titre a du moins l'avantage d'indiquer d'emblée l'une des raisons, la plus "motivante" peut-être, qui ont poussé l'auteur -mathématicien mais aussi américaniste et linguiste de terrain - à entreprendre cet important travail.

S'agissant d'une communauté à tradition orale (amérindienne ou autre), comment concevoir un enseignement qui l'aide à se préserver et lui ménage une ouverture sur le monde actuel sans la couper pourtant de ses racines culturelles ? Comment concevoir en particulier un enseignement mathématique de base ? Tel est le problème que pose pour commencer André Cauty (le "problème initial" dirons-nous par la suite)- et il se fixe comme but celui de dégager, sur le plan théorique, certains des principes et concepts fondamentaux propres à guider l'action dans la diversité des cas concrets. Mais, eu égard à l'extrême complexité du "problème initial", André Cauty décide de limiter sa recherche aux seuls aspects *cognitifs* (donc de ne prendre en charge ni les aspects relationnels ou institutionnels, ni les aspects affectifs).

On sait que les processus cognitifs mettent en jeu diverses *représen-*

tations. A une époque donnée, le "langage mathématique" - tel qu'on peut par exemple le saisir en synchronie à partir d'un corpus - peut être considéré comme un *système de représentations*, et il est loisible d'en étudier la *"structure immanente"*, pour parler à la TOGEBY. Ceci dit, lorsqu'un élève tente de résoudre un problème, il utilise plus ou moins habilement ce système de représentations afin de construire son propre *système représentatif*, voire une suite de tels systèmes évoluant au cours de la résolution de la tâche, systèmes que l'on peut espérer atteindre à partir d'observables appropriés. Notons en passant que l'opposition terminologique systèmes de représentations / système représentatif, dont nous venons de nous servir, est indiquée par l'auteur lui-même dans son Introduction, sans qu'il l'exploite par la suite de manière suivie.

Mais le tout premier des systèmes de représentations qui s'offre à un apprenant est celui que constitue sa *langue maternelle*. Dans le cadre du "problème initial", ce sera donc le panare, le sikuani, ou toute autre langue qui va obliger le chercheur occidental à lutter contre la tentation d'européocentrisme. En dépit du caractère naturel et particulièrement prégnant de ce système de représentations, la question se pose tout comme pour les systèmes savants d'apprécier la façon dont le *native speaker* le met en oeuvre quand il élabore ses systèmes représentatifs.

On discerne dès lors les thèmes majeurs qu'André Cauty entend développer : "langage mathématique" et langues naturelles considérés comme systèmes de représentations, articulation de ces systèmes, possibilité de combinaisons diverses engendrant des systèmes mixtes, organisation en sous-systèmes etc. Et, d'autre part, étude des observables, spontanés ou provoqués, qui permettent de remonter aux systèmes représentatifs, internes chez les apprenants.

Un traitement complet de ces thèmes conduirait, dans le champ cognitif, à écrire les *Prolégomènes à toute Didactique future* dont rêve peut-être l'auteur mais qui dépasseraient certes le cadre d'une Thèse. Le propos va donc être resserré.

1. Le "langage mathématique" sera limité à "celui qui apparaît dans la pratique actuelle, au niveau de l'enseignement secondaire et du premier cycle universitaire".

Relativement au "problème initial", ce choix prend en compte les connaissances que les futurs maîtres de communautés à tradition orale devront avoir assimilées s'ils veulent dominer les questions que pose par exemple la création dans leur langue d'un lexique mathématique.

2. L'étude de l'articulation système naturel / système mathématique savant sera spécialement approfondie autour de la notion de NOMBRE ENTIER.

Relativement au "problème initial", le choix de cette notion (notion de base, s'il en est !) permettra de faire intervenir effectivement dans le débat les langues de certaines communautés à tradition orale, et ce, par la collecte et par l'étude de leurs NUMERATIONS PARLEES.

Les développements des deux points précédents constituent les deux parties de la Thèse.

PARTIE I

Consacrée à l'étude différentielle de la langue naturelle (LN) et du "langage mathématique" (LM), la première partie développe cette thèse générale que "un continuum relie la langue naturelle et le langage mathématique mais qu' une irréductible différence les oppose dans leurs formes achevées".

"Langage mathématique" ? Le moment est venu de préciser ce que l'auteur désigne par cette locution, compte tenu de la sévère limitation mentionnée ci-dessus. Le rapporteur estime qu'en fait l'objet ainsi désigné se scinde à l'analyse et que l'on gagne en clarté à le présenter de la façon suivante.

a) Un premier "langage mathématique" (LM1) correspond au langage des traités actuels, plus ou moins récents. Il est appréhendé à partir d'un corpus représentatif, en français et en anglais, qu'a réuni l'auteur et dont il tire une première famille d'observables. C'est donc un langage *écrit* et même *typographiquement* écrit. Il correspond à une "norme", à un "niveau élevé de langue", bref à un "BON USAGE". Sans doute s'approche-t-il souvent de cette "forme achevée" dont procèderait l'irréductible différence à LN .

b) Un second "langage mathématique" (LM2) est défini expérimentalement à partir d'un ensemble de productions - seconde famille d'observables - le plus souvent écrites, de sujets confrontés à quelque tâche de résolution de problème. Ces productions ont été recueillies soit par André Cauty lui-même, soit par d'autres chercheurs et praticiens. En saine méthode, il convient de joindre à telles de ces productions l'énoncé même du problème qui les a déclenchées. On voit donc que LM2 restera en certains cas très proche de LN , à ceci près qu'il lui arrivera de contenir alors des "pierres d'attente" (expression employée par André Cauty) vers LM1 , c'est-à-dire des formations de nature ambiguë au sein desquelles la langue naturelle cesse d'être "naturelle".

La limitation à l'écrit peut surprendre comme surprend cet aphorisme de l'auteur à savoir que "le locuteur parle, le mathématicien écrit". Le mathématicien ne parle-t-il donc jamais ? Avec ou devant ses pairs ? Avec ou devant ses élèves ? Et peut-on faire l'économie de l'oral lorsque l'on a en vue les numérations *parlées* ? La question mérite d'être discutée. Quoiqu'il en soit, continuons à suivre l'auteur en lui accordant, très volontiers, que les mathématiques - en tant que science qui accumule un savoir et le réinterprète à mesure qu'elle progresse - ont de l'écrit un besoin vital.

Il est clair que l'étude de LM1, langage de "référence", doit être conduite préalablement à celle de LM2. Quant à la méthode d'investigation, en l'un et l'autre cas, elle demande nécessairement, IMPERATIVEMENT, la pluridisciplinarité. Elle en appelle pour le moins à la linguistique et aux mathématiques mais la psychologie cognitive et la didactique doivent être convoquées à leur tour, sans parler de l'épistémologie. En ce qui concerne la démarche d'André Cauty, on peut la caractériser grosso modo, et au prix d'une inévitable réduction, comme une double analyse assortie d'une interprétation.

(i) En phase de *recherche* d'une interprétation, les observables de LM sont d'abord soumis à une analyse de type linguistique. Celle-ci permet souvent de commencer à en expliquer de façon partielle la structure et le fonctionnement (similitude LN / LM). Le résidu inexpliqué, à verser au dossier de l'irréductibilité, est soumis à une seconde analyse qui prend en considération certaines propriétés spécifiques aux entités mathématiques. Vient ensuite une interprétation des résultats obtenus, dans le cadre de la psychologie cognitive, de la didactique, voire de l'épistémologie.

(ii) En phase de *vérification*, le processus est "inversé" : on vérifie qu'il existe effectivement les traces linguistiques correspondant à l'interprétation que l'on tient pour judicieuse.

L'étude différentielle ainsi entreprise du couple (LN / LM) s'organise en deux grands chapitres autour de la polarité énoncé mathématique / énonciation mathématique.

Les traitements linguistiques s'inspirent des travaux de B. Pottier d'une part et, d'autre part, de ceux qu'ont conduits A. Culioli et J.-P. Desclés dans la voie ouverte par E. Benveniste.

La "norme" du "langage mathématique" va donc être fournie par l'étude de LM1 . Toute analyse linguistique se fonde, on vient d'y faire allusion, sur la présence de *traces*, de *marques formelles* dans la chaîne écrite (resp. parlée). Pour LM1 , eu égard à la nature particulière des textes mathématiques (richesses en symboles et en marqueurs de diverses sortes, présence d' "icônes" etc.), les méthodes classiques doivent être complétées par celles de l'*analyse typographique* dont D. Lacombe (qui emploie cette locution) a jeté les fondements.

La tâche primordiale consiste à définir les *signes* et à les classer hiérarchiquement. Le terme "signe" est pris ici au sens saussurien tel que l'a enrichi et précisé B. Pottier. (Nous aurons l'occasion de revenir sur ce sujet.) La classification que propose André Cauty est la suivante :

1. *Signe minimal* (morphème, symbole, marqueur, élément graphique).
2. *Enoncé*.
3. *Genre* (définition, théorème, démonstration, commentaire, ...).
4. Texte.
5. Théorie (correspondant à certains enchaînements de textes). L'unité fondamentale d'observation étant l'énoncé.

Au terme de cette étude, on a acquis un corps de connaissances sur la façon dont divers systèmes sémiologiques fonctionnent concurremment et en intrication au sein des textes mathématiques propres à renseigner sur le "bon usage". Et l'on dispose, pour les unités - l'énoncé en particulier - de définitions opératoires : il reste à prendre en compte le sujet énonciateur.

Née d'une réflexion critique sur l'opposition saussurienne langue / parole, la théorie classique de l'énonciation s'intéresse, d'un point de vue strictement linguistique, à la façon dont un sujet met en action le système de la langue afin d'exprimer quelque chose. Le sujet énonciateur peut être quelque peu désincarné tel celui qui s'exprime au long du code civil. Il se fait déjà moins fantômatique dans les traités et manuels mathématiques soumis aux analyses précédentes, lesquelles, notons-le, fournissent des renseignements utiles sur ce que la théorie CLASSIQUE de l'énonciation peut dire de LM1 .

Mais c'est une *théorie de l'énonciation spécifique au "langage mathématique"* que l'on a en vue. S'agissant des productions de l'espèce LM2 , qui intéressent l'auteur, le sujet énonciateur est de chair et de sang; de plus, on attend de lui qu'il produise des observables appropriés au but visé. Cela nécessite que le sujet en question soit mis en SITUATION D'ENONCIATION CONFLICTUELLE, estime l'auteur, et il consacre la fin de son premier chapitre à la présentation de cette notion qui relève au premier chef de la didactique des mathématiques : le sujet doit être confronté à la tâche de saisir des entités ou des relations *non directement accessibles*.

Dans cette intention, André Cauty utilise en particulier un corpus de réponses à un problème de dénombrement de rectangles. Conduit à l'aide de méthodes qui peuvent faire appel à la psychologie, voire à l'introspection, le dépouillement invite à distinguer des opérations de *conceptualisation*, de *mise en signes de conceptualisations* et enfin de *réflexion finalisée*. Cette étude confirme l'auteur dans son opinion "qu'un continuum relie LN à LM" et il va consacrer à ce thème les conclusions de son chapitre.

A propos de l'écriture mathématique et de la langue naturelle, il s'exprime en ces termes : "La thèse d'un continuum de l'une à l'autre entraîne qu'il ne peut exister de critère décidant, de manière définitive et sur la seule base de son analyse, d'un énoncé qu'il relève ou non des mathématiques".

Qu'est-ce à dire ? Il est loisible de penser que cette affirmation ne fait que préciser, définir conceptuellement, ce que l'auteur mettait sous sa *métaphore* d'un continuum, à savoir : j'entends par là qu'il n'existe pas de critère propre à répartir les énoncés en deux classes disjointes etc. Soit, mais cela ne fait-il pas que déplacer le problème ? Car enfin, que signifie exactement la locution "relever des mathématiques" ? Et quelle est sa relation avec "relever d'un certain "langage mathématique" attesté à telle époque" ? Avec les notions d'énoncés pré ou épi-mathématiques introduits par la suite ? Et pourquoi ce parti pris de vouloir trancher par des OUI - NON dans un domaine où l'on pourrait définir des degrés, voire, plus faiblement encore, un ordre partiel ?

Pour intéressants qu'ils soient, les commentaires d'ordre épistémologique de l'auteur sur ce qu'il appelle la "mathématicité d'un énoncé" ne jettent pas toute la clarté souhaitable sur ces questions qu'il a eu le courage (ou la témérité) de soulever.

En fait, s'il les a soulevées, c'est qu'il a déjà en vue la seconde partie de sa Thèse. Là en linguiste-ethnologue, il adjoindra à LM2 les "réponses numériques" de tel autochtone placé en situation conflictuelle. Là, en historien des numérations, il adjoindra à LM2 des données provenant de civilisations anciennes. En l'un et l'autre cas, il sera amené à regretter que des chercheurs, quelque peu outrecuidants et confinés dans leur européocentrisme, n'aient pas toujours su discerner dans certaines "productions" ce que nous appellerons prudemment une "activité authentiquement mathématisante". Et disons tout de suite que les analyse concrètes et fines qu'il fait alors paraîtront sans doute plus convaincantes que toute spéculation conduite in

Dans le chapitre suivant, consacré, on l'a dit, à l'énonciation mathématique et, plus spécialement, à la *mise en signes des conceptualisations* (l'expression est de B. Pottier) *mathématiques*, la matière est attaquée à l'aide d'outils, de concepts, empruntés à la didactique des mathématiques et à la psychologie cognitive, mais la linguistique ne peut pas ne pas intervenir, au moins *in fine*, puisque l'on entend traiter de mise en *signes*. A cet égard, il est essentiel de rappeler qu'André Cauty utilise, s'agissant du "signe", la définition qu'en donne B. Pottier, lequel analyse le signifié en deux composantes : sa *substance* et sa *forme*.

signe
signifié •   • Sa (signifiant)
Sa •   • Sy
substance   forme

La substance (spécifique) est constituée par des traits sémantiques (dénotatifs ou connotatifs); la forme (générique) est caractérisée par des traits classificatoires. Cette définition, conçue pour l'étude des langues naturelles, va être étendue au "langage mathématique". Elle y trouvera mainte occasion de s'appliquer.

Dans une première phase, que l'on peut voir comme "analytique", André Cauty distingue et sépare dans la pratique mathématique quatre "fonctions langagières" (est-ce bien là la meilleure épithète ?) qui y jouent des rôles importants; il les qualifie de fonctions *symbolique*, *syntaxique*, *réflexive* (ou *métasituationnelle)* et *polymorphique*.

A. *La fonction symbolique* permet la traduction en langage mathématique des problèmes posés en termes quelconques, elle permet aussi divers autres transferts. Pour bien suivre l'auteur, le lecteur doit donc chasser de son propre esprit toute autre acception des mots "symbole", "symbolique". Il prendra garde aussi au fait que l'auteur exclut du paradis mathématique et rejette dans les limbes toutes sortes d'énoncés pré- ou épimathématiques. L'étude de la fonction symbolique fait apparaître, entre autres, la polysémie comme propriété essentielle du signe et du symbole mathématiques : à l'un comme à l'autre sont en effet attachés des faisceaux de signifiés et cette organisation en faisceaux aurait un rôle profond dans le raisonnement.

B. "*La fonction syntaxique*, qui s'est cristallisée en théorie de l'égalité et de l'équivalence, est la forme raisonnable de la fonction symbolique, la face qui manifeste davantage le poids et l'efficacité des normes que la subtilité intuitive de l'individu" écrit l'auteur, qui ajoute "elle apparaît comme outil de la démonstration". Et il l'associe à l'activité qui modifie les formes Sy des signifiés par des substitutions synonymiques.

C. "*La fonction réflexive* permet le contrôle métamathématique des productions, estime leur consistance, évalue leur degré de généralité et de productivité et fonde la différence entre les écritures "axiomatique" et "algorithmique" " écrit encore l'auteur. Puis, étendant une conception classique en linguistique, il considère que l'espace de l'activité mathématique doit être rapporté à trois axes, respectivement paradigmatique, syntagmatique et réflexif - auxquels il associe les fonctions précédemment considérées.

D. *Le polymorphisme* s'oppose en quelque sorte à la polysémie : il apparaît chaque fois qu'à un signifié unique sont associés plusieurs signifiants. "La *fonction polymorphique* permet au mathématicien de gérer la multitude des systèmes sémiologiques qui s'offrent à lui". L'auteur rattache le polymorphisme non point aux faits (sémantiques) de traduction mais aux faits de changement de chiffre ou de code (qui restent au niveau du signifiant).

Vient alors une phase "synthétique" où André Cauty étudie le jeu des interactions entre les quatre fonctions qu'il vient de définir séparément. Au sein de ce "produit d'interaction" qui aboutit à la mise en signes des conceptualisations mathématiques, il définit des sortes de "produits partiels" qu'il appelle *mathématisation*, *dialectisation*, *motivation*.

Pour conclure, André Cauty s'attache à donner une définition différentielle du signe et du symbole, relativement au "langage mathématique". La décomposition Se / Sy du signifié joue dans cette tentative un rôle crucial. Sans trop entrer dans la technique, il suffira de noter ici que, selon André Cauty "la valeur mathématique du symbole est portée par la forme du signifié, ce qui revient à dire qu'elle est essentiellement de nature syntaxique."

Les conclusions auxquelles aboutit l'auteur seront peut-être discutées mais, même en ce cas, on accordera à sa tentative le mérite de donner une base solide à la discussion d'un point délicat et rarement abordé.

PARTIE II

La seconde partie s'organise en un corps de sept chapitres (numérotés de 1 à 7) qu'encadrent un chapitre préliminaire et un chapitre final.

La chapitre préliminaire présente un caractère méthodologique. Dans un paragraphe intitulé *La subjectivité objective*, André Cauty développe des considérations sur la conduite à tenir, en Sciences humaines, lorsque la présence inévitable du chercheur-observateur induit chez l'observé des modifications du comportement, ce qui empêche la parfaite reproductibilité des expériences.

André Cauty propose d'admettre que les dites modifications, et même la subjectivité du chercheur, sont encore des données objectives, à traiter comme telles mais avec une méthodologie appropriée dont il esquisse la description (méthodes de simulation, des "expériences hypothétiques" etc.)

Semblables précautions s'imposent s'agissant des diverses données à exploiter en vue de l'étude des numérations parlées. Les données ont été recueillies

- • soit par André Cauty lui-même:
- •• soit par des chercheurs qui ont consacré une partie de leur temps à des enquêtes dans le cadre de l'Action thématique programmée (CNRS) qu'avait obtenue André Cauty;
- ••• soit par d'autres chercheurs et ce, à diverses époques (chercheurs qui, éventuellement, poursuivaient des fins étrangères à celle de l'étude ici examinée).

Les données les plus nombreuses et les plus utiles sont des corpus d'expressions numériques segmentées, recueillies et analysées par des linguistes : ce sont elles que l'on soumettra aux analyses. Mais on leur adjoint d'utiles données auxiliaires : gloses épilinguistiques spontanément fournies par l'informateur, paraphrases métalinguistiques formulées par l'observateur dans un cadre théorique explicite, etc.

S'agissant de définir plus précisément ses observables, l'auteur entend utiliser les résultats de la première partie. "Les observables fondamentaux sont évidemment les expressions du nombre, telles que les délivrent la récitation de la comptine et la grammaire des formulations descriptives (B. Pottier)" écrit l'auteur qui estime être conduit "à considérer ces expressions comme des énoncés produits en situation d'énonciation conflictuelle, c'est-à-dire comme des signes à l'état naissant".

Il convient à ce propos de redire que le "sujet énonciateur", le *native speaker* qui utilise les ressources de sa langue, peut n'avoir de celle-ci qu'une connaissance toute spontanée, hors du contrôle de quelque théorie. Ainsi le "français moyen" analyse spontanément dix-sept ou quatre-vingts mais non point treize ni trente (à moins d'avoir une certaine connaissance du latin et de l'ancien français). Cela conduit l'auteur à se permettre un abus de langage et à employer respectivement les termes de "morphologie" et de "syntaxe" afin de séparer les deux cas : quatre-vingts relèvera donc de la syntaxe. Plus tard, cette convention sera un peu étendue.

Le chapitre I est intitulé *Le concept de nombre et le problème de la numération.*

A. André Cauty passe d'abord en revue les définitions que donnent divers auteurs de la *capacité de concevoir le nombre.* Après discussion, rappelant que son propos "vise la connaissance des représentations internes du nombre, et leurs transformations en représentations externes", il prend une décision opérationnelle en posant ce critère : "Pour affirmer d'un sujet observé qu'il possède le concept de nombre, nous demandons qu'il soit capable de manifester a) qu'il sait distinguer et nommer **un**, **deux** ou distinguer et nommer un **premier** et un **deuxième**; b) qu'il a conscience d'un au-delà de deux ou de deuxième". On notera que ce critère est ouvert au point de vue ordinal comme au point de vue cardinal. Toutefois, le point b) appelle des éclaircissements : à supposer même qu'elle existe, cette conscience peut-elle se *manifester* ? L'auteur, à ce propos, argue de la présence dans les langues naturelles de catégories qui impliquent la prise en charge de cet "au-delà". Au surplus, les langues naturelles possèdent une *numération observée (recueillie)*, c'est-à-dire au moins une liste non vide de signes numériques et souvent une "sous-grammaire" qui permet d'énoncer la suite des entiers, jusqu'à une limite qui varie considérablement d'une langue à l'autre.

Etant donné une numération observée, on peut la décrire :

(i) soit par rapport au système de la langue;

(ii) soit par rapport à l'activité de mise en signes du sujet.

Dans le premier cas, la description sera donnée par un système sémiologique, appelé *numération construite*, système caractérisé par un vocabulaire terminal V_T et par un ensemble G de règles.

B. Le *problème de la numération* semblerait relever du (ii) précédent puisque l'auteur le définit comme "la tâche qui consiste à mettre en signes un nombre (préalablement conceptualisé) dépassant la limite du système disponible par le sujet". En fait, ce sujet - qui, plus tard sera éventuellement désigné par JE - semble avoir licence de rester quelque peu idéal (ou collectif ?) puisque l'auteur ajoute presque aussitôt : "La diversité des numérations parlées montre qu'il y a plusieurs façons de résoudre le problème de la numération".

Plus techniquement, le problème en question se précise comme la mise en signes d'un nombre conceptualisé x, tel que $A < x < B$, connaissant le nom du nombre A ainsi que ceux de tous les nombres qui le précèdent et, éventuellement, celui de B. La taille de x est évidemment un paramètre important.

A titre d'exemple, pour le "petit nombre" $x = 18$, dans le cadre $A = 10$, $B = 20$, le français *dix-huit* et le latin *duodeviginti* révèlent des stratégies différentes. Dans dix-huit il y a du point de vue mathématique une opération d'addition et du point de vue linguistique, concaténation dans un certain ordre. Le latin est moins transparent. Il pourrait être glosé "deux en descendant de vingt" si l'on voulait bien prendre en compte le sens fondamental de la préposition *de*. Du point de vue mathématique l'opération serait alors une marche à rebours d'amplitude deux dans l'échelle ordinale et du point de vue linguistique, comme dit, l'emploi d'une préposition.

Se fondant sur de tels exemples, on comprend que l'étude d'une solution nécessite la recherche et l'identification des opérations mathématiques mises en oeuvre et, en intrication avec cette recherche, l'analyse et l'interprétation des procédés linguistiques qui "traduisent" ces opérations.

La fin du chapitre donne un premier aperçu des stratégies mathématiques et des moyens linguistiques qu'attestent diverses numérations tant européennes qu' "exotiques". Notons par exemple que pour x grand, un procédé répandu consiste à employer de "grandes unités", c'est-à-dire à compter par paquets de P (point de vue cardinal) ou à se déplacer de P en P (point de vue ordinal).

CARDINAL / ORDINAL, car le nombre est par essence un *Janus bifrons*, chose qui devrait se refléter dans les numérations.

Or, remarque André Cauty en ouvrant le chapitre II, "les numérations parlées ne sont "*jamais*" décrites ordinalement, mais en référence aux quatre opérations de l'arithmétique élémentaire et/ou en les comparant au modèle positionnel". Le "jamais" appelle en effet une légère modulation car le point de vue ordinal peut être évoqué de façon sporadique (Cf. duodeviginti) ou alors lié à un vague parfum d'exotisme. Intitulé précisément *De la nécessité du type ordinal*, le chapitre II se propose de montrer " 1) que les numérations ordinales sont attestées, non seulement par de rares systèmes "exotiques" plus ou moins "primitifs" mais encore par de Grandes Numérations Parlées dont la structure ordinale attendait d'être découverte ; 2) que des difficultés spécifiques réelles se présentent au cours de l'analyse des composés ordinaux".

André Cauty étudie d'abord la numération andoké (Colombie) d'après une documentation récemment rassemblée par Jon Landaburu. Au terme d'une analyse linguistique particulièrement fine et serrée, il montre que le vocabulaire terminal de cette numération comporte une partie dont les éléments s'opposent mutuellement de manière croisée, de façon à former un système de repérants, points de départ et d'orientation de chemins ordinaux. Il existe d'autre part une règle de composition syntaxique qui met en oeuvre un principe ordinal. La numération andoké - dont la capacité générative théorique est de 400 - appartient incontestablement à la classe des numérations *ordinales*.

Ce résultat conduit André Cauty à relire et à réinterpréter les descriptions que certains auteurs (parmi lesquels lui-même, autrefois ...) ont donné des langues tatuyo (Colombie), galibi (Surinam), panare (Vénézuéla) et à montrer que des faits de nature ordinale avaient été, pour le moins, sous-estimés par ces descriptions.

Mais le résultat le plus important de ce chapitre spécialement riche concerne les numérations mayas.

La famille linguistique maya comprend actuellement une trentaine de langues dont les spécialistes tentent d'élucider l'histoire et d'établir la classification en groupes (par exemple groupe Chol et/ou Yucatèque etc.). Quant à la civilisation maya, attestée depuis le IVème siècle au moins, elle avait créé entre autres, des numérations. S'agissant des numérations précolombiennes, à la suite des destructions que l'on sait, la documentation se réduit 1) à la numération écrite de trois manuscrits (les "codex"); 2) à la numération figurative des inscriptions hiéroglyphiques, assez nombreuses, sur pierre; 3) au témoignage de l'évêque Diego de Landa (XVIème siècle). Encore faut-il ajouter que l'on ne peut pas encore affirmer avec certitude quelle(s) langue(s) maya(s) a ou ont été transcrite(s) dans les codex ou par les hiéroglyphes.

La numération *écrite* des codex est généralement perçue comme une numération vicésimale de position avec zéro : c'est cet avis que l'on trouve dans les ouvrages de vulgarisation, voire dans de plus savantes compilations. Le poids de cette opinion généralement reçue incline les chercheurs en histoire des mathématiques à penser que la numération *parlée* est, pour le moins, un hybride bien organisé. Quoi qu'il en soit il existe des résidus, rebelles aux tentatives les plus ingénieuses d'explication, le fait par exemple qu'en yucatèque l'analyse de l'expression du nombre 35 fournit deux constituants numériques, à savoir 15 et 40, à partir desquels aucune opération arithmétique "simple" ne permet de retrouver la valeur numérique attestée.

Devant ce genre d'échec, estime André Cauty, on aurait tort de croire qu'il s'agit simplement d'enlever les derniers bastions rebelles dans une contrée annexée pour l'essentiel. En fait, on manque d'une explication générale et il faut reprendre une campagne d'ensemble. A cette fin, on partira sans idée préconçue de l'analyse de toutes les numérations *parlées* en domaine maya et ce, en vue de remonter des traces linguistiques aux opérations mathématiques mises en oeuvre.

L'application de ce programme est trop technique pour se prêter au résumé. Indiquons toutefois que la première étape a consisté à classer les langues de la famille maya "selon le degré de systématicité syntaxique des composés qui désignent les nombres inférieurs à quatre cents et compris entre les multiples de vingt". On obtient ainsi deux classes de numérations dont les composés sont formés selon des modèles désignés par A et B et une troisième, notée AB , caractérisée par une proportion importante de *variantes* construites selon les deux modèles.

L'analyse linguistico-mathématique, longue et minutieuse de ce tableau, d'une part, et d'autre part des considérations diverses, notamment sur la possibilité et la fréquence des contractions dans les langues de la famille maya, permettent de conclure que les numérations de type A sont additives et que les numérations du modèle B , y compris la numération yucatèque précolombienne, sont de type ORDINAL (et, plus précisément, du sous-type "en vision d'antériorité réflexive"). La fin du chapitre est consacrée à montrer comment ces interprétations permettent de rendre compte de faits qui avaient jusque là embarrassé ou étonné les chercheurs.

Le chapitre III est consacré à la taxinomie des numérations. Evoquant d'abord l'oeuvre monumentale de Geneviève Guitel intitulée *Histoire comparée des numérations écrites* (1975), André Cauty rend hommage aux qualités de ce travail mais en critique aussi certaines insuffisances. G. Guitel a donné des numérations *écrites* une classification hiérarchisée, c'est-à-dire, en l'espèce, arborescente mais modulée par des critères seconds. Cette classification présente à coup sûr un grand intérêt en ce qu'elle organise un nombre considérable de faits et qu'elle peut être réenvisagée à partir de plusieurs points de vue. Ayant reconnu ces mérites, André Cauty relève d'abord certains manques dans le cadre même que s'était fixé l'auteur mais les critiques essentielles tiennent au fait que G. Guitel s'est limitée aux numérations "nobles" et, surtout, qu'elle n'a vu et recherché le *parlé* qu'à travers l'*écrit*. Or l'analyse des nombres écrits révèle fort peu de traces des conceptualisations numériques du scripteur. C'est à partir de l'expression parlée - on a déjà eu l'occasion de le dire - que l'on peut espérer atteindre celles-ci. C'est par l'analyse du vocabulaire terminal et par l'analyse des règles de formation des expressions composées que l'on dégagera les "invariants profonds" sur la base desquels on pourra sainement comparer les numérations.

André Cauty revient alors au "problème de la numération", c'est-à-dire, rappelons-le, "nommer le nombre conceptualisé x tel que $A < x < B$ etc." Une solution immédiate consiste à créer un signe nouveau pour exprimer x : c'est ce qu'André Cauty appelle la solution *iconique*. Seront alors qualifiées d'*iconiques* les numérations qui n'emploient que ce seul procédé. Des critères supplémentaires permettent de distinguer des sous-types. On donne des exemples.

Et maintenant, comment classer les autres numérations, les non-iconiques ? S'exprimant après une analyse approfondie de son dossier, André Cauty pense que les deux grands types d'invariants cognitifs qui s'opposent et permettent une bipartition fondamentale de ces numérations sont 1) la mise en oeuvre d'une opération ou d'une suite d'opérations arithmétiques élémentaires 2) la mise à profit de la structure d'ordre total des entiers.

L'utilisation de critères secondaires, homogènes avec les critères fondamentaux, conduit à la classification suivante :

	TYPE ORDINAL	TYPE ARITHMETIQUE	
sous-types	en vision de postériorité	additif	sous-types
	en vision d'antériorité directe	multiplicatif	
	en vision d'antériorité réflexive	parenthésé	
		puissance	
		de position	

tableau que l'auteur illustre d'exemples.

Strictement typologique, cette classification ne prend pas en compte certains paramètres propres à être croisés avec les précédents. Le plus important d'entre eux est la *puissance générative*, il interviendra par la suite mais non de façon immédiate. Pour le moment, l'auteur entreprend la description des numérations ainsi classifiées : c'est l'objet du chapitre IV.

On se rappellera que, relativement aux mots - même composés - intervenant dans une numération, l'auteur a pris le parti de tracer d'une manière non-orthodoxe la frontière entre syntaxe et morphologie. Cette frontière va de plus être considérée comme déplaçable selon les but visés. Un tel point de vue implique que les analyses "syntaxiques" soient *modulables*.

Pour commencer, André Cauty remarque que "il est rare de trouver une description réellement détaillée et complète de la grammaire des numérations parlées; en particulier pour les langues de grande diffusion". C'est ainsi qu'un vide se creuse devant nous autres, Français ! Pour le combler, André Cauty commence par présenter à l'aide d'un organigramme le principe d'un automate transducteur (modulable) qui, étant donné un nombre écrit en base dix, en fournit l'expression française dans le système dit de l' "échelle longue". Cette étude permet de dégager des *catégories linguistiques* (de cette linguistique-là) qui seront dites : nombrant; appui additif (resp. multiplicatif, parabasique).

L'auteur déduit de ces premiers résultats une grammaire descriptive de la numération française fonctionnant en production, puis une autre fonctionnant en reconnaissance. Plutôt que "grammaire" il faudrait dire "famille modulée de grammaires".

En contraste avec la numération française, André Cauty décrit, "dans la foulée" et avec les mêmes outils, la numération amérindienne otomi - qui est elle aussi additivo-multiplicative-parenthésée - avant de passer aux conséquences méthodologiques de ces premiers essais.

Il érige alors en définitions générales plusieurs des notions qu'il a précédemment dégagées. Il revient également sur la problématique que pose l'articulation des analyses autour de l'opposition composé transparent / composé non-transparent, problématique qui se rapporte directement à sa recherche de "connaissances sur l'intrication et les spécificités de la langue naturelle et du jargon mathématique".

Le chapitre se termine par une "expérience hypothétique" où l'on teste les concepts et outils, qui viennent d'être mis au point, sur un problème de diachronie : la mise en perspective historique de la numération chol actuelle. Le chol est une langue de la famille maya dont on pense qu'avec le yucatèque (sous leurs formes anciennes) elle est très probablement sous-jacente aux écritures hiéroglyphiques. D'autre part la numération chol admet de multiples variantes.

André Cauty pose l'hypothèse que "Le chol, originellement du modèle B (ordinal), serait actuellement du type mixte AB pour avoir subi le modèle A , lequel se serait lui-même imposé, d'une part pour être du même type que celui de la numération du colonisateur espagnol et, d'autre part, pour des raisons d'économie systémique".

La preuve est fort subtile, notamment en ce qui concerne l'utilisation des variantes en tant que traces de conflits.

L'objet du chapitre suivant, le V, est "**le projet de comprendre la dynamique** des diverses numérations, *en vue de la maîtrise éventuelle des applications pratiques* à l'enseignement traditionnel et à l'enseignement dans les langues à tradition orale". C'est dire qu'il va s'agir de DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES *stricto sensu*. L'auteur entend d'ailleurs se garder contre toute accusation d'outrecuidance : il désire simplement apporter sa contribution de linguiste-mathématicien à une entreprise commune. Elle se révèlera utile, pense-t-il, dans le cas où seront plus particulièrement à prendre en compte les représentations "que l'enfant s'est construites à partir de son expérience, antérieurement et/ou indépendamment de l'école". Tel sera par exemple le cas des écoliers qui, en France même, proviennent souvent de divers milieux d'émmigrés. Tel sera, plus dramatiquement, celui d'une communauté à tradition orale menacée d'ethnocide.

Ce chapitre met en oeuvre diverses "variables systémiques", telles que le *coût d'apprentissage lexical, le coût d'apprentissage grammatical* etc. Le présent rapporteur ne hasardera aucun commentaire, faute de la compétence nécessaire.

Avec les chapitres VI et VII, tous deux consacrés aux "grandes numérations" et à leurs extensions, l'auteur revient à des préoccupations d'ordre historique. Ayant qualifié de *bien organisée* (expression empruntée à G.Guitel) toute numération qui utilise conjointement des compositions à valeur additive et des déterminations à valeur multiplicative, il écrit : "Dans certaines civilisations, disposant d'une numération parlée bien organisée, s'est posé le problème d'étendre la capacité de cette numération en vue de mettre en signes de très grands nombres. C'est ce que nous appelons le *problème de l'extension des grandes numérations* (à des nombres sans commune mesure avec les besoins de la vie ordinaire)".

Ce problème, on le sait, se pose le plus souvent à propos d'astronomie, de cosmologie, voire de spéculations eschatologiques.

Des précisions sont ici nécessaires en matière de terminologie. André Cauty appelle *grandes numérations* celles des civilisations où sont apparues des numérations décrites comme étant de position (babylonienne, chinoise, indienne et maya). Il les caractérise par divers traits : capacité générative importante, autonomie technique par rapport à la langue naturelle, existence de grandes unités et de "chiffres" (leurs coefficients) parmi lesquels, éventuellement, "un" et "zéro". Pour les *grandes numérations parlées*, il précise que leur vocabulaire terminal doit contenir, b étant la base, les $b-1$ chiffres, les puissances de b et les trois relateurs (addition, multiplication, exponentiation). De plus, tout nombre est saisi et mis en signes sous la forme d'un polynôme en b. Ainsi une numération pourra encore être dite "de position", mais alors AU SENS LARGE, alors que l'expression du nombre comporte l'indication, *redondante*, des puissances de la base.

Abordant les numérations indiennes, André Cauty examine d'abord la numération des *nombres-mots*, une numération parlée, de position au sens strict, de base dix. Mais sa contribution la plus importante se rapporte à la numération d'Āryabhata, dont il renouvelle l'interprétation. Il affirme qu'elle "est une grande numération parlée, positionnelle au sens large et de base cent", contrairement à l'opinion de G. Guitel qui ne voit en elle qu'une numération alphabétique, pleine de lourdeurs et de naïvetés, beaucoup moins rationnelle que la numération grecque.

Rappelons rapidement qu'Āryabhata utilise d'abord les caractères consonantiques de l'alphabet-syllabaire sanscrit dans l'ordre phonétique adopté par les grammairiens et ce, soit sous la forme simple (avec a), soit indifféremment avec addition du signe de ā . Il note avec ces caractères les "unités" de 1 à 25 et les dizaines, de 30 à 100 inclus. Les mêmes consonnes avec les voyelles i ou ī ont leur valeur multipliée par cent. Avec u ou ū la valeur est multipliée par dix mille et ainsi de suite avec les autres paires (brève/longue) de voyelles et de diphtongues.

Chaque syllabe (CV) représente un monôme, chaque chaîne de syllabes représente une somme de monômes. Il est à remarquer que l'ordre indien normal (selon les puissances croissantes) peut être sérieusement perturbé. Grâce à cette technique, l'astronome Āryabhata peut transcrire en vers mnémoniques les très grands nombres dont il a besoin pour sa science. C'est là un mérite que G. Guitel ne conteste pas mais ravale au rang d'un bricolage de comptable.

Au premier abord, il semble que le système fonctionne de façon embarrassée entre un et cent pour se déployer au delà. Qu'en est-il ?

G. Guitel estime que cette numération est fondamentalement décimale et artificiellement de base cent, et qu'elle n'est pas positionnelle. A. Cauty réplique qu'elle est fondamentalement de base cent et que, si elle n'est pas positionnelle au *sens strict*, elle l'est au *sens large*.

Les bizarreries apparentes entre un et cent s'expliquent selon A. Cauty, par le polymorphisme des chiffres en base cent, polymorphisme indispensable eu égard aux besoins de la versification. Ces mêmes besoins expliquent également les perturbations possibles dans l'ordre des puissances, perturbations qui ne sont pas incompatibles avec la propriété d'être *positionnelle au sens large*.

La fin du chapitre s'attache à laver définitivement Āryabhata de l'accusation de bricolage. A. Cauty discute longuement et minutieusement le fonctionnement du système d'après le dossier des charges rassemblé par G. Guitel. Sous les "bizarreries", il s'attache à trouver des règles et, à cette fin, il en appelle à la phonologie, à la prosodie et à la métrique. Ce faisant, il ouvre incontestablement une voie à la recherche. Pour progresser plus avant, il conviendrait de recourir directement aux sources et de s'assurer la collaboration d'indianistes.

Dans le chapitre VII, A. Cauty examine d'abord certaines numérations de la Chine et, ensuite, l'arénaire d'Archimède.

Pour la Chine, il applique ses grilles de description, ses classifications et ses méthodes d'analyse à une documentation rassemblée et déjà mise en ordre par divers auteurs, dont Needham et Wang Ling, Brainerd et Peng, J. Dhombres et, naturellement, G. Guitel. L'étude porte sur quatre numérations parlées. Elle invite à prendre en compte des solutions fort originales au problème de la mise en signes de grands et très grands nombres, par exemple l'emploi de composés multiplicatifs complexes qui comportent plus de deux facteurs. Des faits de ce genre consuisent A. Cauty à proposer, pour les extensions des numérations, une classification dont la dichotomie première oppose le *maintien* à l'*abandon* du système positionnel. Ce dernier choix est commun à une certaine numération chinoise et ... à l'arénaire.

Arénaire dont, se fondant sur l'édition des oeuvres d'Archimède par Ver Ecke et sur le manuel de Heath, A. Cauty donne une analyse fouillée dans le cadre théorique maintenant bien mis en place.

***

Le mémoire proprement dit s'achève par un chapitre de récapitulation et de conclusions mais, manifestement désireux de revenir *in fine* à son problème initial, et voulant l'évoquer dans toute son humaine complexité, A. Cauty propose une Postface.

C'est en l'espèce une très belle prosopopée par laquelle Francisco Queixalos fait parler la néonumération, réussie, qu'ont élaborée au prix de mille peines des instituteurs sikuanis. C'est un témoignage exemplaire.

***

Trop minutieuse peut-être, l'analyse qui précède aura du moins mis en évidence non seulement le caractère authentiquement pluri et transdisciplinaire du travail d'André Cauty mais aussi la difficulté de porter sur un travail de cette nature un jugement d'ensemble équilibré et synthétique.

Renonçant ici à parler des aspects didactiques, nous envisageons uniquement ce qui relève des mathématiques et de la linguistique.

Du point de vue ainsi précisé, la première partie, consacrée au *Langage mathématique* est riche en réflexions et résultats de bon aloi et elle ouvre des voies prometteuses.

Quant à la seconde partie, consacrée aux *Numérations parlées*, par l'étendue de son information, par l'organisation méthodique du champ, par la souple rigueur et l'ingéniosité de ses analyses mathématico-linguistiques, par l'introduction du point de vue ordinal et par le renouvellement qu'elle apporte à l'histoire des numérations, elle suscite l'intérêt le plus vif - et fera date.