MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

A. BIGARD

Analyse de l'inégalité multicritère

Mathématiques et sciences humaines, tome 97 (1987), p. 47-55
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1987__97__47_0>

Math. Sci. hum. (*25^e* année, n°97, *1987*, p.47-55)

ANALYSE DE L'INEGALITE MULTICRITERE

A. BIGARD*

On étudie l'inégalité dans la répartition de n biens parmi une population de N individus. On étudie également l'inégalité entre les classes d'une stratification.

Dans le cas des revenus (ou d'un seul bien), la théorie classique considère une allocation $(y_1,\dots,y_N)$ comme plus égalitaire que $(x_1,\dots,x_N)$ si, pour toute fonction U concave et symétrique,

$$U(x_1,\dots,x_N) \leq U(y_1,\dots,y_N) .$$

Ainsi, on ne compare une société qu'avec elle-même. Nous nous proposons de généraliser cette théorie, en tenant compte des poids des individus, ce qui permettra de lever cette limitation.

Dans un jeu de marché où chaque coalition considère comme réalisables les allocations qui sont au moins aussi égalitaires que celle des patrimoines, on montre que le coeur est non vide.

Soit $\mathcal{P}$ une population d'individus numérotés de 1 à N . Chaque individu k est muni d'un poids $\alpha_k > 0$, avec $\Sigma_k \alpha_k = 1$.

DEFINITION 1. On appellera stratification en P classes la donnée d'une matrice de Markov $(P \times N)$: $M = [m_{jk}]$.

On suppose donc $\Sigma_j m_{jk} = 1$ et $m_{jk} \geq 0$.

Ces stratifications se rencontrent souvent en économétrie : un ménage dont le revenu est à 40% agricole et à 60% en salaires ouvriers peut être classé à la fois dans la catégorie agriculteurs et dans la catégorie ouvriers, avec cette pondération .

---

* GERESUM, Université du Maine. (Manuscrit reçu en juin 1986).

Une stratification sera dite propre si, pour tout j , il existe un k avec $m_{jk} > 0$. On dira que la stratification est une partition si, pour tout k , il existe un j (forcément unique) avec $m_{jk} = 1$.

On démontre aisément :

PROPOSITION 1. Les stratifications forment un ensemble convexe compact $\mathbb{R}^{P\times N}$.

Munissons chaque classe j du poids $\beta_j = \Sigma_k m_{jk} \alpha_k$. On note que la stratification est propre si et seulement si, pour tout j , $\beta_j > 0$. De plus, $\Sigma_j \beta_j = \Sigma_j \Sigma_k m_{jk} \alpha_k = \Sigma_k \alpha_k (\Sigma_j m_{jk}) = \Sigma_k \alpha_k = 1$.

Soit $\mathbb{R}^n$ l'espace des biens. On suppose chaque individu k muni d'un panier de biens $x_k \in \mathbb{R}^n$.

Les x_k , munis des poids α_k , constituent un nuage dont le barycentre est $g = \Sigma_k \alpha_k x_k$.

Etant donné une stratification propre, on peut définir le barycentre de chaque classe : $g_j = \Sigma_k m_{jk} \alpha_k x_k / \beta_j$.

PROPOSITION 2. On a $g = \Sigma_j \beta_j g_j$.

En effet, il vient :

$\Sigma_j \beta_j g_j = \Sigma_j \Sigma_k m_{jk} \alpha_k x_k = \Sigma_k \alpha_k x_k (\Sigma_j m_{jk}) = \Sigma_k \alpha_k x_k = g$.

COMPARAISON DE DEUX ALLOCATIONS.

Nous appellerons H le cône convexe de $\mathbb{R}^{n+1}$ constitué des vecteurs $f = (f_0,\dots,f_n)$ tels que $f = 0$ ou $f_0 > 0$. Pour une population d'effectif N , nous allons considérer des fonctions de bien-être $V : H^N \to \mathbb{R}$. Ces fonctions prennent en compte non seulement les paniers de biens, mais aussi les poids des individus.

DEFINITION 2. Une fonction $U : H^P \to \mathbb{R}$ est dite compatible avec V si quel que soit $(e_1,\dots,e_N) \in H^N$, et quelle que soit la partition S en P classes : $V(e_1,\dots,e_N) \leqslant Y(S(e_1,\dots,e_N)^t)$.

Le principal résultat que nous avons en vue est le suivant :

THEOREME 1. Soient $x_1,\dots,x_N \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha_1,\dots,\alpha_N > 0$ $(\Sigma_k \alpha_k = 1)$ et $y_1,\dots,y_p \in \mathbb{R}^n$ et $\beta_1,\dots,\beta_p > 0$ $(\Sigma_j \beta_j = 1)$.

On pose $e_k = (\alpha_k, \alpha_k x_k) \in H$ et $f_j = (\beta_j, \beta_j y_j) \in H$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) Il existe des matrices de partition $S_1,\dots,S_r$ et des scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_r \geq 0$ avec $\Sigma_u \lambda_u = 1$ tels que $(f_1,\dots,f_p) = \Sigma_u \lambda_u S_u(e_1,\dots,e_N)^t$.

2) Il existe une stratification M telle que $(f_1,\dots,f_p) = M(e_1,\dots,e_N)^t$.

3) Si $V : H^N \to \mathbb{R}$ et $U : H^P \to \mathbb{R}$ sont concaves et compatibles, $V(e_1,\dots,e_N) \leq U(f_1,\dots,f_p)$.

4) Pour toute fonction concave $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on a : $\Sigma_k \alpha_k \varphi(x_k) \leq \Sigma_j \beta_j \varphi(y_j)$.

1) $\Rightarrow$ 2) Il suffit de poser $M = \Sigma_u \lambda_u S_u$.

2) $\Rightarrow$ 4) Soit $M = [m_{jk}]$. On suppose donc que $f_j = \Sigma_k m_{jk} e_k$, ce qui donne à la fois $\beta_j = \Sigma_k m_{jk} \alpha_k$ et $\beta_j y_j = \Sigma_k m_{jk} \alpha_k x_k$. Remarquons que $y_j = \Sigma_k m_{jk} \alpha_k x_k / \beta_j$ est une combinaison convexe. Comme φ est concave, $\Sigma_j \beta_j \varphi(y_j) \geq \Sigma_j \beta_j \Sigma_k m_{jk} \alpha_k \varphi(x_k) / \beta_j = \Sigma_k \alpha_k \varphi(x_k)(\Sigma_j m_{jk}) = \Sigma_k \alpha_k \varphi(x_k)$.

1) $\Rightarrow$ 3) En effet, on a :

$$U(f_1,\dots,f_p) = U(\Sigma_u \lambda_u S_u(e_1,\dots,e_N)^t) \geq \Sigma_u \lambda_u U(S_u(e_1,\dots,e_N)^t)$$

$$\geq \Sigma_u \lambda_u V(e_1,\dots,e_N) = V(e_1,\dots,e_N) .$$

3) $\Rightarrow$ 4) Soit φ concave. A tout $t = (t_0,\dots,t_n) \in H$, nous associons le scalaire $t^* = t_0$ et le vecteur $\bar{t} \in \mathbb{R}^n$ défini par $\bar{t}_i = t_i / t^*$ si $t^* \neq 0$, et $\bar{t}_i = 0$ sinon. Par définition de H , on a $t = (t^*, t^*\bar{t})$. Posons :

$$U(t_1,\dots,t_p) = \Sigma_j t_j^* \varphi(\bar{t}_j) \quad \text{et} \quad V(s_1,\dots,s_N) = \Sigma_k s_k^* \varphi(\bar{s}_k) .$$

On voit facilement que U et V sont concaves. Leur compatibilité résulte du raisonnement qui a été fait dans 2) $\Rightarrow$ 4) . Il suffit maintenant de remarquer que :

$\Sigma_k \alpha_k \varphi(x_k) = V(e_1,\dots,e_N)$ et que $\Sigma_j \beta_j \varphi(y_j) = U(f_1,\dots,f_p)$.

4) $\Rightarrow$ 1) Les e_k sont les lignes d'une matrice $E(N \times (n+1))$, et les f_j sont les lignes d'une matrice $F(P \times (n+1))$.

Nous allons montrer tout d'abord le lemme suivant :

(i) Pour toute matrice $C((n+1) \times P)$, il existe une partition S telle que

$$\text{Trace (CSE)} \leq \text{Trace (CF)} .$$

Posons $\varphi(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \min_j (c_{0j} + \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, \lambda_i)$. C'est une fonction concave. Définissons la matrice S par $s_{jk} = 1$ si j est le plus petit tel que $\varphi(x_k) = c_{0j} + \Sigma_i\, c_{ij}\, x_{ki}$ et $s_{jk} = 0$ dans tout autre cas. Alors :

$$\begin{aligned}
\text{Trace (CSE)} &= \Sigma_{ijk}\, c_{ij}\, s_{jk}\, e_{ki} \\
&= \Sigma_k\, \alpha_k\, \Sigma_j\, s_{jk}\, \Sigma_i\, c_{ij}\, e_{ki} / \alpha_k \\
&= \Sigma_k\, \alpha_k\, \Sigma_j\, s_{jk}\, (c_{0j} + \sum_{i>0} c_{ij}\, x_{ki}) \\
&= \Sigma_k\, \alpha_k\, \varphi(x_k) \quad \text{(par définition des } s_{jk}) \\
&\leq \Sigma_j\, \beta_j\, \varphi(y_j) .
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\text{Trace (CSE)} \leq \Sigma_j\, \beta_j\, (c_{0j} + \sum_{i>0} c_{ij}\, y_{ji}) = \Sigma_{ij}\, c_{ij}\, f_{ij} = \text{Trace (CF)} .$$

Soit maintenant $\mathcal{S}$ l'enveloppe convexe des matrices de partition et soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des matrices $C((n+1) \times P)$ telles que pour tout (i,ℓ) , $0 \leq c_{i\ell} \leq 1$. Ce sont des convexes compacts.

Définissons $\tau : \mathcal{C} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ par $\tau(C,M) = \text{Trace (CME)} - \text{Trace (CF)}$. Cette application est bilinéaire. D'après le Théorème Minimax, il existe un point-selle (C_0,M_0) , c'est-à-dire qu'on a pour tous $C \in \mathcal{C}$ et $M \in \mathcal{S}$:

$$\tau(C,M_0) \leq \tau(C_0,M_0) \leq \tau(C_0,M) .$$

D'après le lemme, il existe S , matrice de partition, avec Trace $(C_0SE) \leq$ Trace (C_0F) , ce qui s'écrit aussi $\tau(C_0,S) \leqslant 0$. On a donc, pour tout C , $\tau(C,M_0) \leq 0$.

Posons $M_0 = [m_{jk}]$, $M_0E - F = A = [a_{ji}]$. Si l'on prend $c_{ij} = 1$ et $c_{st} = 0$ si $(s,t) \neq (i,j)$; il vient :

$a_{ji} = \text{Trace (CA)} = \text{Trace } (CM_0E) - \text{Trace (CF)} = \tau(C,M_0) \leq 0$, quels que soient i et j .

Par ailleurs, en prenant $\varphi(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \pm\, \lambda_i$, la condition 4 donne pour chaque $i > 0$:

$$\Sigma_k \alpha_k x_{ki} = \Sigma_j \beta_j y_{ji} .$$

Comme $\Sigma_k \alpha_k = \Sigma_j \beta_j$, on a pour tout $i \geq 0$: $\Sigma_k e_{ki} = \Sigma_j f_{ji}$.

Il en résulte :

$$\Sigma_j a_{ji} = \Sigma_j \Sigma_k m_{jk} e_{ki} - \Sigma_j f_{ji} = \Sigma_k e_{ki} (\Sigma_j m_{jk}) - \Sigma_j f_{ji} = \Sigma_k e_{ki} - \Sigma_j f_{ji} = 0.$$

Ainsi , $A = 0$, c'est-à-dire $F = M_0 E$.

Ce théorème nous conduit à poser la définition suivante :

DEFINITION 3. Une allocation (β_j, y_j) sera dite aussi ou plus égalitaire que (α_k, x_k) lorsque les conditions du théorème 1 sont satisfaites.

Dans le cas où $N = P$ et où tous les poids sont égaux, on retrouve la définition classique [3]. La matrice M est alors bistochastique car $\Sigma_k m_{jk} = \Sigma_k m_{jk} \alpha_k N = \Sigma_j \beta_j N = 1$. Si U est concave et symétrique : $U(x_1, \ldots, x_N) \leq U(y_1, \ldots, y_N)$.

L'axiome de symétrie est en fait très fort. Il peut être assoupli de la manière suivante : soit G un sous-groupe du groupe des permutations de $[1,N]$.

DEFINITION 4. Nous dirons que $U : (\mathbb{R}^n)^N \to \mathbb{R}$ est G-symétrique si, pour tout $\sigma \in G$, $U(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(N)}) = U(x_1, \ldots, x_N)$.

Par exemple, considérons une partition $A_1, \ldots, A_p$ de $[1,N]$ et soit G l'ensemble des σ tels que $\sigma(A_j) = A_j$ pour tout j . Une fonction de bien-être est G-symétrique si elle reste invariante lorsqu'on permute les allocations de deux individus appartenant à la même classe.

THEOREME 2. Considérons deux allocations $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^n$ et $y_1, \ldots, y_N \in \mathbb{R}^n$. les conditions suivantes sont équivalentes.

1) $(y_1, \ldots, y_N)$ est dans l'enveloppe convexe des $(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(N)})$ lorsque σ parcourt G .

2) Pour toute fonction $U : (\mathbb{R}^n)^N \to \mathbb{R}$ concave et G-symétrique : $U(x_1, \ldots, x_N) \leq U(y_1, \ldots, y_N)$.

1) $\Rightarrow$ 2) Supposons $(y_1, \ldots, y_N) = \Sigma_\sigma \alpha_\sigma (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(N)})$, avec $\Sigma_\sigma \alpha_\sigma = 1$. alors :

$$U(x_1, \ldots, x_N) = \Sigma_\sigma \alpha_\sigma U(x_1, \ldots, x_N) = \Sigma_\sigma \alpha_\sigma U(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(N)}) \leq U(y_1, \ldots, y_N) .$$

2) $\Rightarrow$ 1) Soit $\mathcal{C}$ l'enveloppe convexe des $(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(N)})$ lorsque σ parcourt G . Raisonnons par l'absurde.

Si $(y_1,\ldots,y_N) \notin \mathcal{C}$, d'après le Théorème de séparation stricte, il existe une forme linéaire f telle que :

$$\inf_{\sigma\in G} f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(N)}) > f(y_1,\ldots,y_N) \ . \qquad \text{(i)}$$

Posons $f_\sigma(t_1,\ldots,t_N) = f(t_{\sigma(1)},\ldots,t_{\sigma(N)})$. Il est clair que f_σ est une forme linéaire. Donc $U(t_1,\ldots,t_N) = \inf\limits_{\sigma} f_\sigma(t_1,\ldots,t_N)$ est concave. Pour montrer qu'elle est G-symétrique, prenons $\pi \in G$. On a :

$$\begin{aligned} U(t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(N)}) &= \inf_\sigma f_\sigma\ (t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(N)}) \\ &= \inf_\sigma f_{\sigma\pi}\ (t_1,\ldots,t_N) \\ &= U(t_1,\ldots,t_N)\ , \end{aligned}$$

car, lorsque σ parcourt G , $\sigma\pi$ parcourt G également. L'égalité (i) donne $U(x_1,\ldots,x_N) > f(y_1,\ldots,y_N) \geqslant U(y_1,\ldots,y_N)$, d'où une contradiction.

En résumé, l'introduction des poids et l'introduction des sous-groupes constituent deux voies possibles, évidemment fort différentes, pour affaiblir l'axiome de symétrie. Il est probable qu'il en existe d'autres.

COMPARAISON DE DEUX STRATIFICATIONS

L'inégalité est rarement appréhendée d'une façon exhaustive. En général, on ne connait pas réellement l'allccation $(x_1,\ldots,x_N)$, mais seulement les allocations entre les classes de différentes stratifications (par C.S.P., par âge, etc.). Il peut être utile de comparer deux stratifications du point de vue de l'information qu'elles apportent sur l'allocation inconnue. Nous nous placerons dans le cadre de la théorie de l'information de Marschak et Miyasawa [2].

Considérons une stratification M , dont les classes ont pour poids β_j et pour barycentres g_j . Marschak et Miyasawa définissent la valeur de l'information apportée par M , pour un espace de décision K qui est une partie convexe compacte de $\mathbb{R}^n$, par :

$$I(M,K) = \Sigma_j\ \beta_j \sup_{a\in K} \langle a,g_j\rangle$$

($\langle a,g_j\rangle$ est le produit scalaire). Etant donnée une autre stratification M' , qui donne (β'_h,g'_h) , nous avons :

PROPOSITION 3. Les conditions suivantes sont équivalentes pour M et M' :

1) Il existe une stratification T telle que $M' = TM$.

2) Pour tout convexe compact K , $I(M',K) \leq I(M,K)$.

Cette proposition, démontrée dans [2], peut être déduite du Théorème 1 de la façon suivante : posons $\varphi_K(x) = -\sup_{a \in K} \langle a,x \rangle$. C'est une fonction concave. La condition 2 s'exprime sous la forme :

$$\Sigma_j \beta_j \varphi_K (g_j) \leq \Sigma_h \beta'_h \varphi_K (g'_h) \text{ , pour tout } K .$$

Ceci est un cas particulier de la condition 4 du théorème 1. Or, dans la démonstration de ce Théorème $(4 \Rightarrow 1)$, on n'utilise en fait que des fonctions concaves de cette forme.

MESURE DE L'INEGALITE

Soit $(\alpha_k, x_k)_k$ une allocation. Le Théorème 1 suggère de prendre comme mesure de l'inégalité l'expression :

$$I = \varphi(\Sigma_k \alpha_k x_k) - \Sigma_k \alpha_k \varphi(x_k) = \varphi(g) - \Sigma_k \alpha_k \varphi(x_k) \text{ ,}$$

où φ est une fonction strictement concave. On a alors $I \geq 0$. I diminue si l'on passe à une allocation plus égalitaire et $I = 0$ si et seulement si tous les x_k sont égaux.

Par exemple, si $\mathbb{R}^n$ est muni d'une norme euclidienne, on peut prendre $\varphi(x) = -\|x\|^2$. L'indice obtenu n'est autre que le moment d'inertie du nuage (α_k, x_k) .

Supposons donnée une stratification propre $M = [m_{jk}]$. Nous allons montrer qu'elle induit une décomposition de l'indice. On pose $\beta_j = \Sigma_k m_{jk} \alpha_k$ et $g_j = \Sigma_k m_{jk} \alpha_k x_k / \beta_j$.

L'inégalité à l'intérieur de la classe j est mesurée par :

$$I_j = \varphi(g_j) - \Sigma_k m_{jk} \alpha_k \varphi(x_k) / \beta_j \text{ .}$$

L'inégalité intra-classe peut être définie par :

$$I^1 = \Sigma_j \beta_j I_j \text{ .}$$

L'inégalité inter-classe sera définie naturellement par :

$$I^2 = \varphi(g) - \Sigma_j \beta_j \varphi(g_j) \text{ .}$$

THEOREME 3. L'inégalité totale est la somme de l'inégalité intra-classe et de l'inégalité inter-classe.

On a : $I^1 = \Sigma_j \beta_j \varphi(g_j) - \Sigma_j \beta_j (\Sigma_k m_{jk} \alpha_k \varphi(x_k) / \beta_j)$

$= \Sigma_j \beta_j \varphi(g_j) - \Sigma_k \alpha_k \varphi(x_k) \Sigma_j m_{jk}$

$= \Sigma_j \beta_j \varphi(g_j) - \Sigma_k \alpha_k \varphi(x_k)$.

En ajoutant, il vient :

$$I^1 + I^2 = \varphi(g) - \Sigma_k \alpha_k \varphi(x_k) = I .$$

COEUR EGALITAIRE D'UN JEU DE MARCHE

On considère toujours la population $\mathcal{P} = [1,N]$ et l'espace des biens $\mathbb{R}^n$. Chaque individu k est muni d'un poids $\alpha_k > 0$, avec $\Sigma_k \alpha_k = 1$. Il possède une fonction d'utilité $u_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue et quasi-concave. Il dispose d'un patrimoine $p_k \in \mathbb{R}^n$.

On appelle "coalition" toute partie $C \subset \mathcal{P}$(1). Chaque coalition considère comme réalisable toute allocation $(x_k)_{k \in C}$ qui est aussi ou plus égalitaire que celle des patrimoines $(p_k)_{k \in C}$. La coalition peut bloquer toute allocation $(y_1,\ldots,y_N)$ telle qu'il existe $(x_k)_{k \in C}$ réalisable, avec, pour tout $k \in C$, $u_k(y_k) < u_k(x_k)$.

DEFINITION 5. On appelle coeur égalitaire l'ensemble des allocations réalisables par $\mathcal{P}$ qui ne sont bloquées par aucune coalition.

THEOREME 4. Le coeur égalitaire est non vide.

Soit $R(C)$ l'ensemble des allocations réalisables par C . D'après le Théorème 1, $R(C)$ est l'ensemble des $M(p_k)^t_{k \in C}$ où M parcours l'ensemble des matrices carrées Card $C \times$ Card C qui sont de Markov. C'est donc un convexe compact. L'ensemble $U(C) = \{(u_k(x_k))_{k \in C} \mid (x_k)_{k \in C} \in R(C)\}$ est compact car les u_k sont continues. Par conséquent, l'ensemble $V(C)$ des $(v_k)_{k \in C}$ tels qu'il existe $(x_k)_{k \in C}$, réalisable par C , avec :

(1) Chaque $k \in C$ étant muni du poids $\alpha_k / \sum_{h \in C} \alpha_h$.

$$u_k(p_k) \leq v_k \leq u_k(x_k)$$

est fermé et borné.

Considérons le jeu coopératif défini par les $V(C)$. Nous allons nous ramener au Théorème de Scarf [1]. Il reste à montrer que ce jeu est équilibré.

Prenons une famille E de parties C , avec des scalaires $(\gamma_C)_{C \in E}$, vérifiant, pour tout k , $\sum_{C \ni k} \gamma_C = 1$.

Soit q_C la projection canonique de $\mathbb{R}^N$ sur $\mathbb{R}^C$. Nous devons démontrer que :

$$\bigcap_{C \in E} q_C^{-1}(V(C)) \subset V(\mathcal{P}) .$$

Soit $(v_1, \ldots, v_N) \in \cap\, q_C^{-1}(V(C))$. Pour tout $C \in E$, il existe $(x_k^C)_{k \in C}$, réalisable par C , telle que pour tout $k \in C$:

$$u_k(p_k) \leq v_k \leq u_k(x_k^C) .$$

Posons $x_k = \sum_{C \ni k} \gamma_C\, x_k^C$. Comme u_k est quasi-concave, $v_k \leq u_k(x_k)$.

Il reste à montrer que $(x_1, \ldots, x_N) \in R(\mathcal{P})$. Pour cela, nous utiliserons le point 4 du Théorème 1.

Prenons $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, concave. Il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{P}} \alpha_k\, \varphi(x_k) &\geq \sum_{k \in \mathcal{P}} \alpha_k \sum_{C \ni k} \gamma_C \quad (x_k^C) \\ &= \sum_{C \in E} \gamma_C \sum_{k \in C} \alpha_k\, \varphi(x_k^C) \\ &\geq \sum_{C \in E} \gamma_C \sum_{k \in C} \alpha_k\, \varphi(p_k) \qquad (\text{car } (x_k^C) \in R(C)) \\ &= \sum_{k \in \mathcal{P}} \alpha_k\, \varphi(p_k) \Big(\sum_{C \ni k} \gamma_C \Big) = \Sigma_k\, \alpha_k\, \varphi(p_k) , \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

1. AUBIN J.P., *L'analyse non linéaire et ses motivations économiques*, Paris, Masson, 1984.

2. MARSCHAK J. et MIYASAWA K., "Economic comparability of information systems", *International Economic Review*, 9 (1968), 137-170.

3. SEN A.K., *On economic inequality*, Oxford, Clarendon Press, 1973.