R. GUITART

Introduction à l'analyse algébrique. II. Algèbres figuratives et esquisses

Mathématiques et sciences humaines, tome 97 (1987), p. 19-45
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1987__97__19_0>

Math. Sci. hum.(25^e année, n°97, *1987*, p.19-45)

INTRODUCTION A L'ANALYSE ALGEBRIQUE. II. ALGEBRES FIGURATIVES ET ESQUISSES*

R. GUITART**

0. AVERTISSEMENT

Bien sûr on sait que la théorie des catégories fournit des méthodes générales destinées à trouver les "bons" concepts, et si ces méthodes peuvent être utiles à des publics variés par elles-mêmes, cela ne peut être décidé a priori; en particulier de l'excellence de ces méthodes pour les développements catégoriques eux-mêmes, on ne peut déduire leur pertinence ailleurs. Plus que l'habillage systématique des problèmes en termes de structures monoïdales, catégories enrichies ou topos, théorie des relations, des carrés exacts et des univers algébriques (sur ces derniers points je renvoie le lecteur intéressé à mon article "Qu'est-ce que la logique dans une catégorie?", *Cahiers Top. Géo. Diff.* 1982), je crois que *la mise en oeuvre intensive de la combinatoire de base des catégories* (à savoir la méthode diagrammatique) *peut apporter plus* dans un premier temps aux autres algébristes. Ainsi sur la base de l'étude à la main de problèmes réels, une collaboration entre catégoriciens, informaticiens et linguistes serait très souhaitable. C'est dans cette perspective que j'ai trouvé plus adapté d'aborder dans ces journées cette question des esquisses et des algèbres figuratives, et que j'ai choisi de le faire très élémentairement.

1. BUT

On sait les avantages respectifs pour notre compréhension de l'espace de la

---

* Conférence aux Journées ATALA AFCET "Arbres en linguistique : un modèle informatique", 26 et 27 novembre 1981, Paris. Cette conférence a aussi été donnée à Hagen et à Bremen, les 30 novembre et 1er décembre 1981, et au Séminaire de Catégories à Paris 7, en novembre 1981.

** Université de Paris 7.
(Manuscrit reçu en juin 1986).

géométrie synthétique (où l'on raisonne géométriquement) et de la géométrie analytique (où l'on calcule systématiquement). A ce sujet Leibniz écrivait à Huygens en septembre 1679 (cité par J.C. Pont dans : La Topologie algébrique des origines à Poincaré) : "Mais après tous les progrès que j'ai faits en ces matières, je ne suis pas encore content de l'algèbre, en ce qu'elle ne donne ni les plus courtes voies, ni les plus belles constructions de géométrie; c'est pourquoi, lorsqu'il s'agit de cela, je crois qu'il nous faut encore une autre analyse proprement géométrique ou linéaire, qui nous exprime directement situm, comme l'algèbre exprime magnitudinem. Et je crois d'en voir le moyen, et qu'on pourrait représenter des figures et mêmes des machines et mouvements en caractères, comme l'algèbre représente les nombres ou grandeurs : et je vous envoie un essai qui me paraît considérable".

Plusieurs auteurs, dont Gauss et Lebesgue, ont discuté du sens de cette lettre, et Grassmann y prit le point de départ de son algèbre des sous-espaces.

Je voudrais retenir de ce texte les deux idées suivantes :

1°) *Le projet d'un calcul général des positions, des contacts, des relations d'incidences et des mouvements.*

2°) *La conception "platonicienne" de tenter de travailler directement sur les idées ou figures, avant toute réduction quantitative.*

De manière semblable à ce que Leibniz suggérait pour la géométrie seule, il semble aujourd'hui possible de développer pour la théorie générale des modèles à la fois une méthode analytique vraiment systématique et une méthode synthétique vraiment naturelle. Je vais proposer dans cette conférence aux auditeurs d'examiner d'une part les *esquisses* qui sont une méthode analytique probablement fondamentale, et d'autre part les *algèbres figuratives* qui constituent une approche synthétique apte à saisir naturellement les situations concrètes les plus variées. Le résultat de base est alors que *les deux points de vue des esquisses et des algèbres figuratives sont équivalents*. Il en résulte que dans l'étude d'un problème concret, on pourra mettre en place les idées et les intuitions premières par la méthode des algèbres figuratives, et ensuite le calcul d'un esquisse associée fournira un outil de contrôle du modèle inventé et de ce que l'on peut espérer y démontrer.

La conférence sera donc divisée en deux parties :

dans la première partie j'exposerai ce qu'est une *figuration* et en donnerai de nombreux exemples, "à la main", par de petits dessins,

et dans la seconde partie je montrerai que l'*analyse d'une figuration en terme de propriétés universelles* - analyse qui apparaît naturellement dès que l'on veut qualifier la géométrie (i.e. les contacts et les déformations) de la figuration -, permet, par les résultats généraux de la théorie des esquisses en particulier, d'obtenir effectivement des informations sur la théorie figurée; le résultat typique ici est le théorème d'existence de petits diagrammes localement libres de Guitart-Lair, dont je donne en conclusion l'énoncé et le principe de démonstration.

2. ALGEBRES FIGURATIVES

Dans la pratique (et en particulier ci-après dans les exemples), les figurations seront toujours décrites par des parties "génératrices" ou "grammaires", et de même les esquisses seront toujours décrites par des systèmes générateurs. En fait le point de départ de tout théorème fin sera toujours la possibilité de construire une grammaire ou un générateur d'esquisse d'une forme bien spéciale. Cela étant souligné une fois pour toutes, on gagnera ici du temps en définissant directement ce qu'une grammaire engendre, à savoir une figuration.

DEFINITION 1. Une *figuration* est constituée d'une catégorie $\underline{S}$ (de supports), d'une catégorie $\underline{F}$ (de figures), d'un foncteur $\underline{D} : \underline{F}^{op} \times \underline{S} \longrightarrow \underline{ENS}$ (dessins), d'une catégorie $\underline{C}$ et d'un foncteur injectif et bijectif sur les objets $\underline{L} : \underline{F} \longrightarrow \underline{C}$ (compositions), d'une catégorie $\underline{O}$ et d'un foncteur injectif et bijectif sur les objets $\underline{M} : \underline{S} \longrightarrow \underline{O}$ (orientations).

Si $(\underline{S}, \underline{F}, \underline{D}, \underline{C}, \underline{L}, \underline{O}, \underline{M}) = T$ est une figuration, une T-<u>algèbre</u> est un $(S, \mathbb{A})$ où S est un objet de $\underline{S}$ et où $\mathbb{A} : \underline{C}^{op} \longrightarrow \underline{ENS}$ est un foncteur tel que

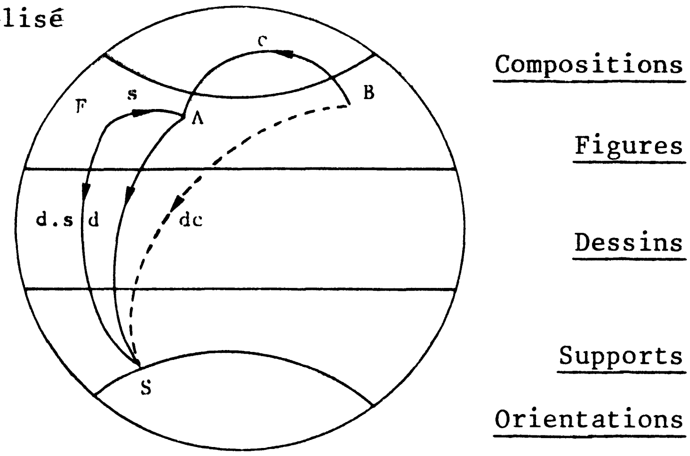
$$\begin{tikzcd} \underline{F}^{op} \arrow[r, "\underline{L}^{op}"] \arrow[dr, "\underline{D}(-,S)"'] & \underline{C}^{op} \arrow[d, "\mathbb{A}"] \\ & \underline{ENS} \arrow[ul, phantom, "="] \end{tikzcd}$$

La T-algèbre $(S, \mathbb{A})$ est donc déterminée par la donnée pour chaque composition $c : B \longrightarrow A$ (morphisme dans $\underline{C}$ de la figure B vers la figure A) de l'action de c sur les dessins :

$$\mathbb{A}(c)_S : \underline{D}(A,S) \longrightarrow \underline{D}(B,S)$$
$$d \longmapsto dc$$

En échangeant les rôles de $\underline{F}$ et $\underline{S}$ (et de $\underline{C}$ et $\underline{O}$) on définirait de même les T-co-algèbres.

- un dessin d D(F,S) est symbolisé par une flèche $d : F \longrightarrow S$
- les <u>dessins</u> sont composés de figures tracées sur des supports



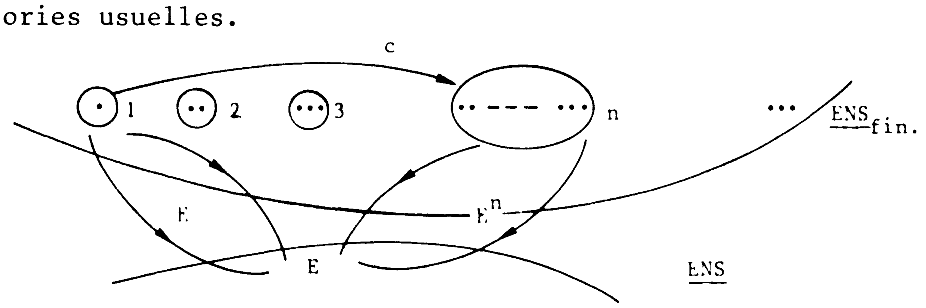
Les morphismes de $\underline{F}$ sont considérés comme des *substitutions* permises, et les morphismes de $\underline{C}$ qui ne sont pas dans $\underline{L}(\underline{F})$ sont considérés comme les compositions ou *opérations effectives* de la théorie, dont l'action sur les dessins n'est pas automatiquement donnée; les morphismes de $\underline{S}$ sont considérés comme des *déformations* permises, et les morphismes de $\underline{O}$ qui ne sont pas dans $\underline{M}(\underline{S})$ sont considérés comme les orientations ou *co-opérations effectives* de la théorie, dont l'action sur les dessins n'est pas automatiquement donnée. Une figuration est donc en quelque sorte un *dialogue matérialisé par des dessins entre des espaces-figures et des espaces-supports*. Ce dialogue engendre une dualité entre les T-algèbres et les T-co-algèbres, que je n'étudierai pas dans cette conférence, mais qui est cruciale. Pour cette fois je laisserai de côté ce point de vue "symétrique", et, oubliant les orientations et les co-algèbres, je me placerai du point de vue où les supports sont considérés comme donnée primitive, avec $\underline{S} = \underline{O}$. Toutefois, le travail simultané avec $\underline{C}$ et $\underline{O}$ (compositions et orientations) est effectivement significatif, par exemple si l'on veut développer la théorie des puzzles en termes de figurations (comme je le suggère au §4).

Les figurations englobent en un seul point de vue l'approche par les monades (et les co-monades) et l'approche par les théories. De plus la liberté laissée pour D permet de dépasser les théories algébriques, et d'exprimer toutes les théories usuelles.

3. EXEMPLES

<u>Exemple 1.</u>

$D(n,E) = E^n$



$\dashrightarrow$ théories algébriques dans $\underline{ENS}$

Exemple 2. Comme l'exemple 1, excepté que ENS est remplacée par Ab (catégorie des groupes abéliens) et que l'on choisit $D(n,G) = G^{\otimes n}$.
-------> théoriesdes algèbres (au sens de ce mot en algèbre commutative).
Les exemples 1 et 2 se généralisent aisément pour obtenir d'une part les théories algébriques dans une catégorie à produits, et d'autre part les théories algébriques dans une catégorie monoïdale.

Exemple 3. On modifie l'exemple 1 en remplaçant les $D(n,E)$ par :

$D'(n,E) = E^n + 1$ -------> théories alg. partielles.

$D''(n,E) = 2^{(E^n)}$ -------> théories alg. relationnelles.

$D'''(n,E) = [0,1]^{(E^n)}$ -------> théories alg. floues.

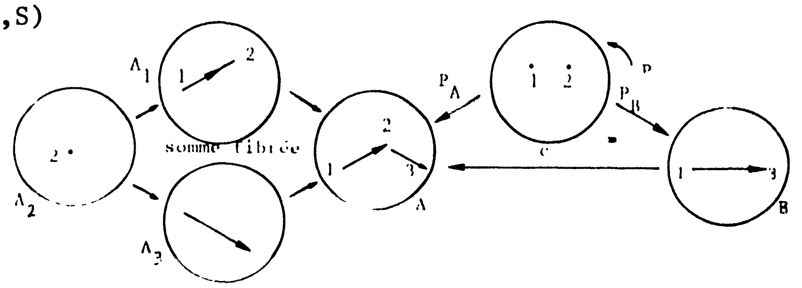
En général, partant d'une figuration arbitraire, on en obtient de nouvelles en modifiant D grâce à un foncteur $M : \underline{ENS} \longrightarrow \underline{ENS}$ en prenant

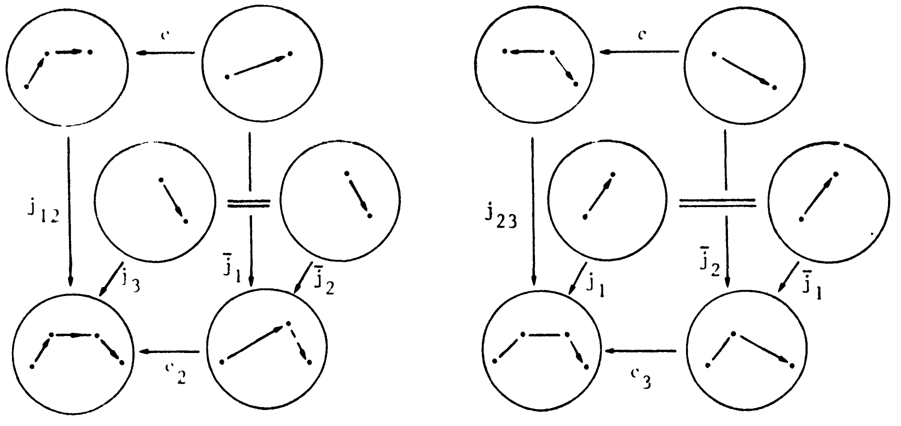
$$D'(F,S) = M(D(F,S)) .$$

On peut aussi modifier D grâce à un foncteur $A : \underline{F} \longrightarrow \underline{F}$ ou grâce à un foncteur $B : \underline{S} \longrightarrow \underline{S}$ en rpenant

$$D'(F,S) = D(A(F),S) \quad \text{ou} \quad D''(F,S) = D(F,B(S)) .$$

Exemple 4. On prend $\underline{S}$ = GRAPHES, on prend pour $\underline{F}$ la sous-catégorie de $\underline{S}$ engendrée par les graphes et morphismes utilisés ci-après, et on prend $D(F,S) = \mathrm{Hom}_{\underline{S}}(F,S)$





On retient les équations : $c.P_B = P_A$, $c_2.\bar{j}_1 = j_{12}.c$, $c_2.\bar{j}_2 = j_3$, $c_3.\bar{j}_2 = j_{23}.c$, $c_3.\bar{j}_1 = j_1$, $c_3.c = c_2.c$.
-------> catégories, comme algèbres sur les graphes.

Exemple 5. On peut de même obtenir :

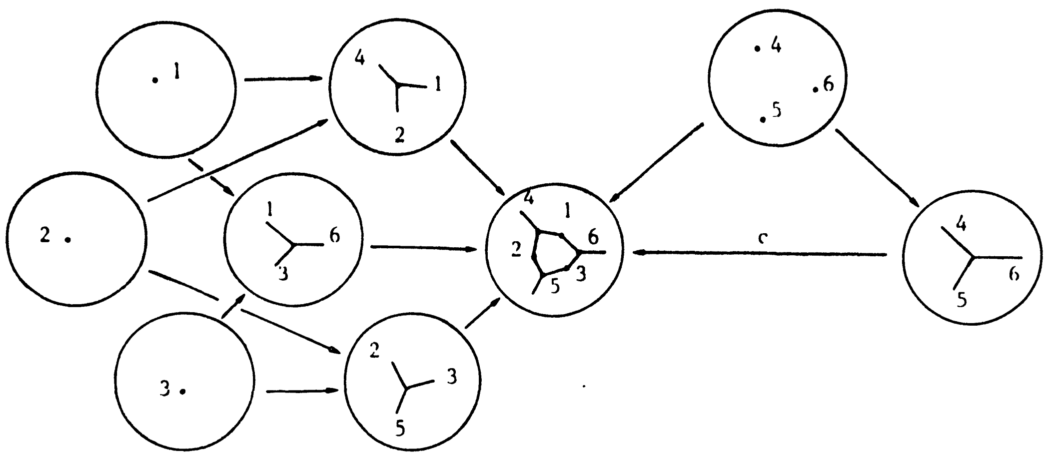
------► les multicatégories, comme algèbres sur les arbres.

------► les 2-catégories, comme algèbres sur les digraphes.

------► les catégories doubles, comme algèbres sur les graphes doubles.

------► les catégories 3-aires, comme algèbres sur les graphes 3-aires.

Voici par exemple la figuration de la composition ternaire d'une catégorie 3-aire, "dessinée" dans la catégorie des graphes 3-aires (prise donc comme catégorie de supports $\underline{S}$, et avec $D = \mathrm{Hom}_{\underline{S}}$) :

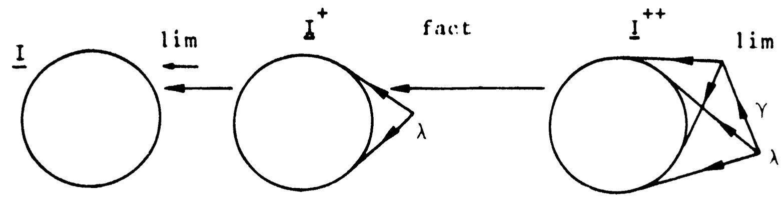


Remarque : tous ces exemples peuvent être traités d'un coup en prenant comme catégorie de supports la catégorie des ensembles simpliciaux $\underline{\mathrm{ENS}}^{\Delta}$ ou aussi la catégories des complexes cubiques $\underline{\mathrm{ENS}}^{\square}$. En fait dans les algèbres figuratives, un fait que l'on retrouve systématiquement est que *les figures et les supports "sont" des "espaces"*. En particulier $\underline{S}$ pourra être $\underline{\mathrm{ENS}}^{\Delta}$, $\underline{\mathrm{ENS}}^{\square}$, mais aussi $\underline{\mathrm{TOP}}$, $\underline{\mathrm{Métriques}}$, $\underline{\mathrm{Affines}}$, $\underline{\mathrm{Variétés}}$, etc. Il est même possible, ultimement, de considérer $\underline{F}$ et $\underline{S}$ comme sous-catégories de la catégorie $\underline{\mathrm{ESQ}}$ des esquisses (voir la définition des esquisses plus loin), mais cette façon de faire ne sera pas exposée ici.

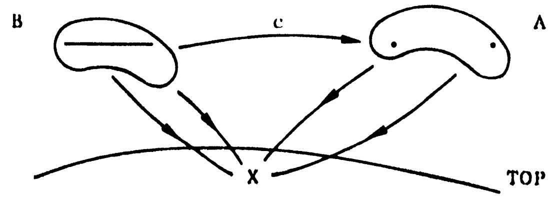
Exemple 6. On prend $\underline{S} = \underline{\mathrm{CAT}}$ et on obtient comme algèbres les diverses structures supplémentaires sur les catégories e.g.

------► catégories monoïdales, catégories à limites, topos, catégories abéliennes, etc.

Voici par exemple la figuration des catégories à $\underline{I}$-limites projectives : $\underline{F}$ est une sous-catégorie de $\underline{\mathrm{CAT}}$, $\underline{S} = \underline{\mathrm{CAT}}$, $D = \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{CAT}}}$.



Exemple 7.

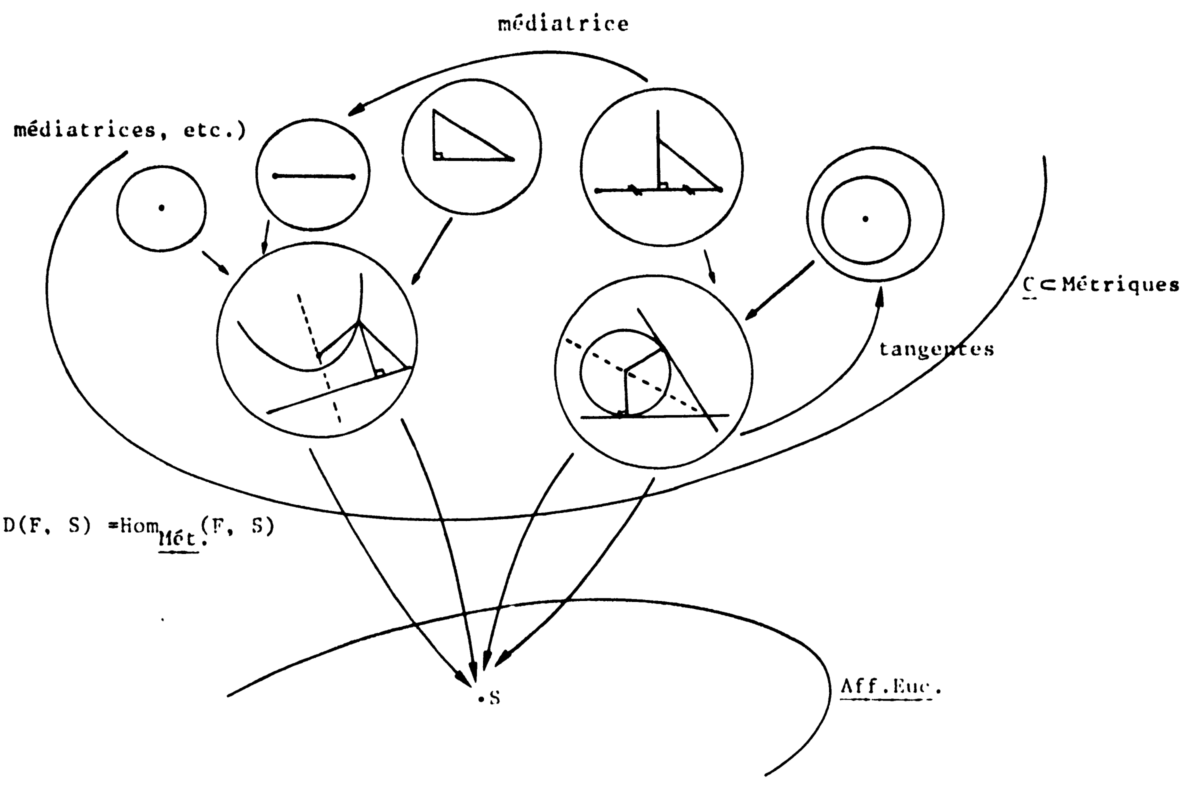


D(A,X) = Hotop (A,X)

D(B,X) = Hotop (B,X)

-------► Espaces 1-connexes, comme algèbres sur les espaces topologiques.

Exemple 8. On prend pour catégorie des supports la catégorie des espaces affines euclidiens, S = Aff.Euc. , on prend pour C une sous-catégorie de la catégorie Métriques ayant pour objets les figures géométriques de la géométrie élémentaire (i.e. les points, les cercles, les triangles rectangles, les paraboles, etc.) et ayant pour morphismes les constructions géométriques usuelles (e.g. constructions de tangentes, de médiatrices, etc.)



-------► Géométrie euclidienne.

On sait depuis Klein que l'activité géométrique doit être vue dans le cadre des actions et représentations de groupes. Une géométrie élémentaire est constituée de :

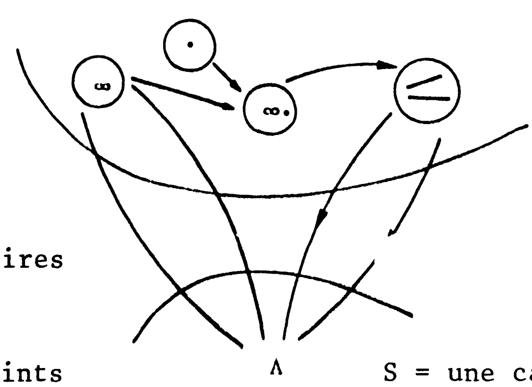
- une catégorie "ambiante" K (par exemple : $\underline{ENS}$, R-mod , Gr)
- un objet E de $\underline{K}$ (ce E est "l'espace")
- un groupe G (constitué des "transformations")
- une action de G sur E , c'est-à-dire un homomorphisme
  $a : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_K E$.

On étend à une géométrie élémentaire $g = (K,E,G,a)$ ce qui est montré ci-dessus dans le cas de la géométrie affine euclidienne. Voici comment :

J'appellerai *type de figure* un foncteur arbitraire $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{ENS}$, et une figure de type F dans g sera un élément de F(E) . Puisque F est un foncteur, il induit un homomorphisme $\mathrm{Aut}_K E \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\underline{ENS}}(F(E))$, qui composé avec a détermine une action de G sur F(E) , notée a_F ; la géométrie élémentaire $g_F = (\underline{ENS},F(E),G,a_F)$ est un *prolongement* de g à F . L'étude géométrique de g consiste alors en la recherche des applications G-covariantes entre les divers prolongements de g (puis entre les restrictions, les prolongements des restrictions, etc.). Le principe de la recherche des covariants conduit à découvrir toutes les notions géométriques pertinentes pour g ; les covariants "sont" les constructions géométriques (comme ci-dessus les constructions des médiatrices ou des tangentes). Si l'on considère ainsi les géométries linéaire, spéciale-linéaire, affine, projective, on voit apparaître par exemple les notions de droite, orientation, milieu, centre de gravité, rapport, birapport, etc..

La figuration envisagée est donc constituée des figures et des covariants entre ces figures - ceci pour $\underline{C}$, de $\underline{S} = \underline{K}$, et de D défini par D(F),S) = F(S) .

<u>Exemple 9.</u>



D((∞),A) = ensemble des directions de A

D((/),A) = ensemble des paires de droites de A

D((•),A) = ensemble des points de A

$\underline{S}$ = une catégorie d'applications affines entre des plans affines.

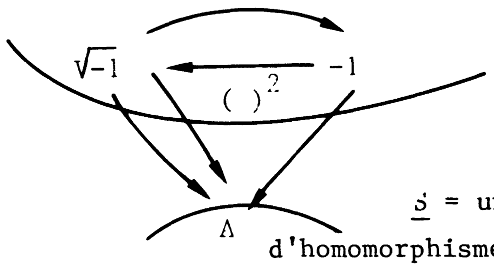
------▸ calcul des points à l'infini.

Exemple 10.

$D(\sqrt{-1}\ , A)$ = ensemble des racines de -1 dans A

$D(-1\ , A) = \{-1\}$

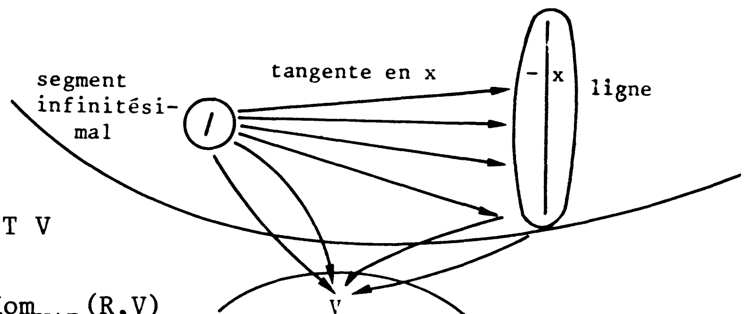
-------→ calcul des imaginaires.



$\underline{S}$ = une catégorie d'homomorphismes entre des anneaux

Plus généralement on obtiendrait ainsi la théorie des équations, la théorie des corps algébriquement clos, etc..

Exemple 11.



$D(\ /\ , V) = T\ V$

$D(\ |\ , V) = \mathrm{Hom}_{\underline{VAR}}(R,V)$

-------→ calcul infinitésimal à la Elie Cartan

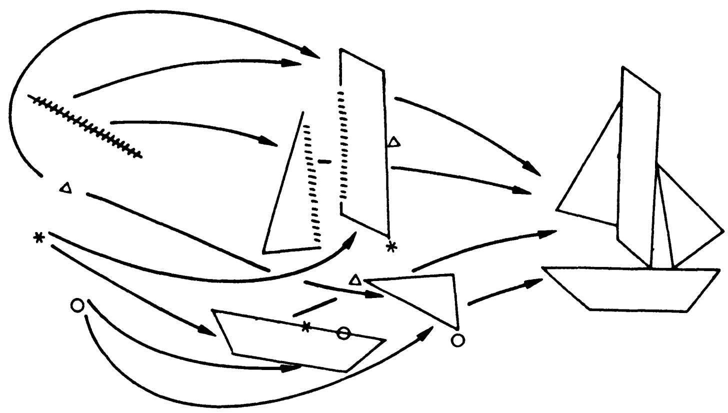
$\underline{S}$ = une catégorie de variétés différentiables.

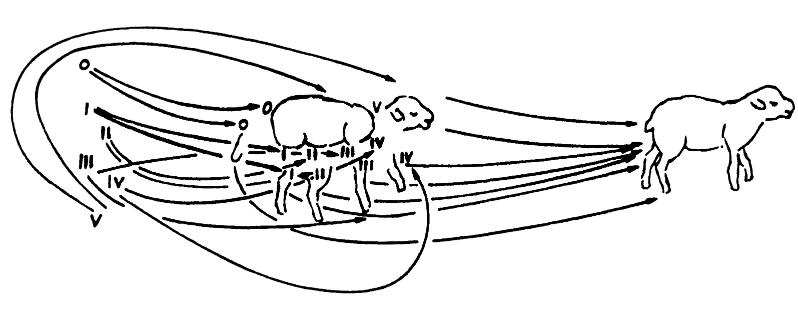
Si on lit Cartan à la lettre on peut observer qu'il développe tout son calcul d'une façon axiomatique, sans jamais utiliser de l'idée d'infinitésimal autre chose que les deux axiomes suivants : 1. Les infinitésimaux dans V sont les "contacts". 2. toute ligne dans V s'obtient en mettant bout à bout ses morceaux infinitésimaux.

Autrement dit : 1. $D(\ /\ ,V) = T\ V$ 2. $D(\ \big|\ ,V) \subset \varprojlim_{x\in R} D(/,V)$

Exemple 12.

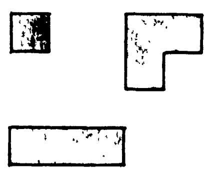
On considère pour terminer un exemple plus concret : on prend pour $\underline{F}$ l'ensemble des "idées de dessins" ci-contre, pour $\underline{S}$ la catégorie des divers supports plans où l'on peut dessiner, et on prend pour dessins précisément les réalisations de ces idées sur ces supports.



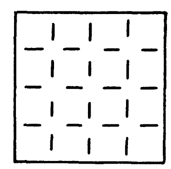


4. PUZZLES

Il a été évoqué hier le problème de la formalisation dans les langages formels du phénomène, évident dans les langues naturelles, suivant lequel les phrases sont limitées en longueur, de façon imprécisée. Une possibilité de traitement de cet aspect est de considérer qu'il y a des figures du discours, formelles, et que les phrases réelles sont des réalisations ou dessins de ces figures sur des supports limités en étendue (ces supports jouant le rôle de récepteurs du discours). Autrement dit, je propose d'utiliser les algèbres figuratives pour cette question; il s'agit alors pour déterminer les phrases valides d'un problème de puzzle. Voici un exemple pour fixer les idées, que j'emprunte à Joni et Rota(Coalgebras and Bialgebras in Combinatorics, Studies in App. Math., 1979).

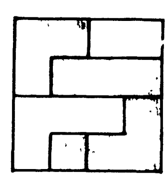


figures



support

Le problème est de placer sur le support un ou plusieurs exemplaires des trois figures constituant l'alphabet, afin de constituer un "mot" 2-dimensionnel, comme par exemple :

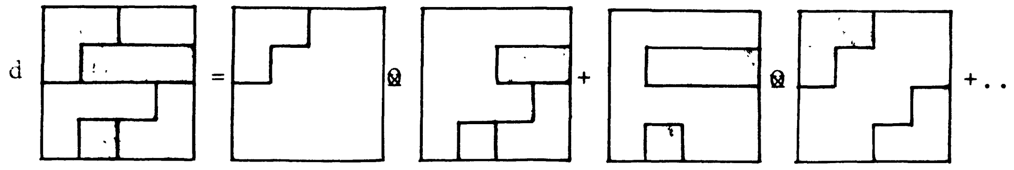


Alors, comme on fait en topologie combinatoire avec les complexes cellulaires, on introduit le A-module libre engendré par l'ensemble de tous les mots (A étant un anneau de coefficients choisi), que l'on note M . Au niveau de M , les relations d'incidences entre les constituants d'un mot sont contenues dans une loi de co-algèbre

$$d : M \longrightarrow M \otimes M$$

associant à tout m la quantité $d\,m = x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 + \ldots + x_n \otimes y_n$,

où $(x_i, y_i)_{i=1,\ldots,n}$ est la liste de tous les couples de mots (x_i, y_i) tels que x_i et y_i soient disjoints et d'union m . Par exemple on a



En réalité ce type d'approche peut se développer pour des algèbres figuratives absolument quelconques, une fois compris comment les contacts entre figures s'expriment en général.

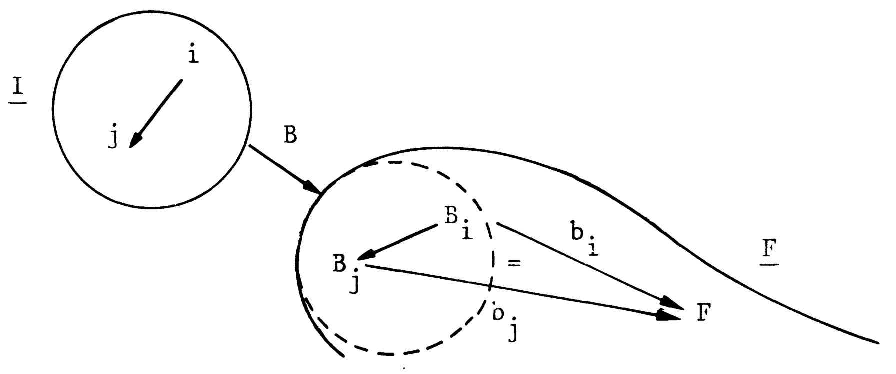
5. CONTACTS ET COMPLEXITE DES FIGURES

En fait dans une figuration donnée, une composition $c : B \longrightarrow A$ sera interprétée comme un COLLAGE ou comme un DECOUPAGE de figures, suivant que A ou B est présentée comme une concaténation de figures réputées plus élémentaires.

DEFINITION 2. On appelle *diagramme de figures* un foncteur $B : \underline{I} \longrightarrow \underline{F}$ d'une catégorie $\underline{I}$ dans la catégorie $\underline{F}$ (des figures et substitutions), et une figure F est dite *concaténée* d'un diagramme B suivant b si $b = (b_i : B_i \longrightarrow F)_{i \in \underline{I}_o}$ est un cône inductif tel que, pour tout S, on ait

$$(C) : \qquad D(F,S) = \varprojlim_{i \in \underline{I}} D(B_i,S) .$$

On écrit alors F comme un mot : $F = (B_i)_{i \in \underline{I}}$, constitué des bouts B_i, arrangés suivant la catégorie d'incidence I.



La condition de concaténation exprime que pour dessiner F sur un support S il faut en dessiner les divers bouts et bien les disposer entre eux. Dans les exemples de figurations donnés au §3, on peut observer ainsi des figures complexes analysées par recollement de leurs bouts. En fait on peut toujours concevoir le diagramme d'incidence suivant une disposition du type suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & B_1 \arrow[dddr] & \\
B_{12} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & B_2 \arrow[dr] & \\
B_{23} \arrow[ur] \arrow[dr] & & F \\
 & B_3 \arrow[ur] & \\
B_{34} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & B_4 \arrow[uuur] &
\end{tikzcd}$$

composantes de contacts	composantes premières	figure composée

Autrement dit, la condition (C) est une "condition de faisceau" : si X est un espace topologique, soit $\mathrm{Ouv}\ X$ la catégorie ayant pour objets les ouverts de X et ayant pour morphismes les inclusions entre ces ouverts (cette catégorie est donc en fait la catégorie associée canoniquement à un ordre); un faisceau sur X est un foncteur

$$H : (\mathrm{Ouv}\ X)^{op} \longrightarrow \underline{\mathrm{ENS}}$$

tel que, pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts, on ait

$$\begin{tikzcd}
 & U_i \arrow[ddr] & \\
U_i \cap U_j \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & U_j \arrow[r] & \bigcup_{i \in I} U_i \\
U_j \cap U_k \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & U_k \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

la condition "de continuité"

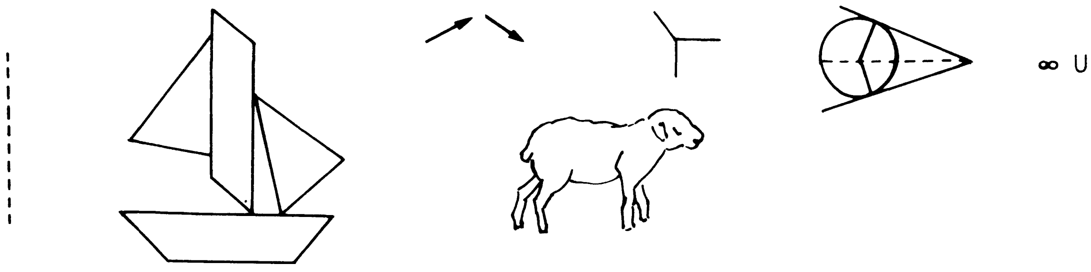
$$H(\bigcup_{i\in I} U_i) = \varprojlim_{(i,j)\in I\times I} H(W_{i,j})$$

avec $W_{i,j} = U_i \cap U_j$.

La condition (C) exprime que tous les foncteurs $D(-,S) : \underline{F}^{op} \longrightarrow \underline{\mathrm{ENS}}$ sont des faisceaux.

Usuellement, on pense à un faisceau comme à un concept, et alors *la condition de faisceau exprime que ce concept est local* (ainsi le faisceau des fonctions continues à valeurs dans R , $\mathscr{C}(-,R)$, est effectivement un faisceau parce que la continuité est une propriété locale).

Ici, on pense donc la condition de faisceau d'une façon un peu différente, à savoir comme l'expression de *la réalisation de contacts* dans la construction d'une figure. Autrement dit, on écrira une condition de faisceau chaque fois que dans une figure on discernera ses composantes et leurs contacts, comme par exemple dans les figures utilisées au §3 :



Bien entendu la dissection de la figure sera en pratique guidée par le rôle que la figure doit remplir; par exemple on pourra voir un cercle comme concaténation de segments et de points de diverses façons :

Il ne faut pas perdre de vue qu'ici les dessins et donc aussi les supports jouent un rôle clé : ainsi, suivant que les supports sont des plans ou des espaces à trois dimensions, la concaténation des triangles décrit les polygones ou les polyèdres.

Supposons maintenant fixée une classe $\underline{F}_{\text{élem}}$ de figures "élémentaires", et une classe $\underline{\text{INC}}$ de "catégories d'incidences". Quelles sont les figures que l'on peut obtenir par concaténations de diagrammes $B : \underline{I} \longrightarrow \underline{F}_{\text{élem}}$ avec $\underline{I} \in \underline{\text{INC}}$? L'analyse des figures de ce point de vue est l'analyse de la *complexité des figures.*

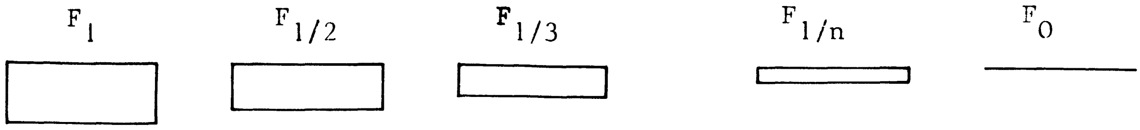
6. APPROXIMATION DES FIGURES

Dans la pratique, une figure F n'est jamais réalisée idéalement quand on la dessine, et tout essai pour dessiner cette figure produit en fait idéalement une autre figure F_i , voisine de F . Ce fait peut s'exprimer, d'après la définition même des limites inductives d'ensembles, par la *loi de déformation.*

(D) $$D(F,S) = \varinjlim_{i \in I} d(F_i,S) .$$

Sans introduire de quantités externes (comme des nombres mesurant le flou d'un dessin ou sa distance à un modèle idéal) - ce qui serait une autre voie que je ne veux pas développer aujourd'hui, voilà comment, avec cette approche des déformations, on peut décrire un calcul d'approximations.

Considérons la séquence suivante



Une ligne (= réalisation de F_0) a toujours une épaisseur, i.e. est en fait réalisation d'un ruban $F_{1/n}$, et on connait la ligne idéal si on réalise une suite de rubans de plus en plus fins réalisant une suite extraite infinie de la suite des $F_{1/n}$. Une telle *loi d'approximation* s'écrira en général ainsi :

$$D(F_0,S) = \underset{\substack{\underline{J}\subset\underline{I} \\ \underline{J} \text{ final dans } \underline{I}}}{\underrightarrow{\lim}}\ \underset{j\in J}{\underleftarrow{\lim}}\ D(F_j,S).$$

D'une façon systématique les conditions d'approximation seront exprimées par des limites mixtes ou *ultralimites* (par exemple par des ultraproduits) :

$$\text{(A)} \qquad D(F,S) = \underset{k\in\underline{K}}{\underrightarrow{\lim}}\ \underset{j\in\underline{J}_K}{\underleftarrow{\lim}}\ D(F_j,S)\ .$$

7. INTUITIONS VOISINES

Le point le plus original des théories figurées est que *les figures sont sorties de la catégorie des supports, ce qui donne une plus grande souplesse pour modéliser les problèmes concrets*, car on peut jouer sur la dualité ou dialectique (entre les supports et les figures) établie par les dessins. Les dessins sont les faits expérimentaux bruts, et il nous est possible de faire glisser dans la catégorie des supports ou au contraire dans la catégorie des figures les structures que l'on peut observer sur ces faits. Je me propose de développer systématiquement dans un prochain exposé l'étude de ces *dialectiques* étroitement liées aux carrés exacts, mais pour le moment je continuerai à voir les choses de façon dissymétrique, en me plaçant a priori du point de vue des supports comme données premières, de sorte que la théorie est une théorie figurative *sur* les supports.

J'ai présenté les algèbres figuratives avec un vocabulaire "géométrique", mais il est souhaitable, pour soutenir l'intuition philosophique, de signaler d'autres imageries mentales en lesquelles l'imagerie géométrique peut se métamorphoser. En voici trois :

a) $\underline{F}$ est constituée de "formes, $\underline{S}$ est constituée de "substrats", et les dessins sont les "phénomènes" ou singularités créées dans les substrats par les formes.

b) Les morphismes de $\underline{F}$ sont les lois d'une théorie scientifique, les dessins sont les états sur lesquels ces lois agissent.

c) Les dessins sont des symboles, des indices ou des icônes (bref des signes au sens de Peirce) liés à des idées, de sorte que $\underline{F}$ est le monde des *idées*, $\underline{S}$ est le monde des *objets réels*, et les dessins sont les ombres ou représentations déformées des idées dans la réalité (= *le mythe de la caverne de Platon*).

8. LES FIGURES PARADOXALES

Aux paragraphes 6 et 7, j'ai montré comment les contacts et les approximations (ou "mouvements") des figures sont susceptibles d'être calculés en termes de limites projectives et de limites inductives. Nous allons maintenant voir le rôle des limites inductives d'un autre point de vue, en ne travaillant plus seulement dans le monde des idées $\underline{F}$, et en tentant d'élucider l'impact des idées dans la réalité. L'idée de paradoxe vise le rapport entre une idée et sa réalité (et l'idée de monstre vise le rapport entre un objet réel et sa conception). Via l'imagerie de Platon on peut donner une définition précise, dans une figuration.

DEFINITION 3. Une figure F est dite *paradoxale* si on ne peut pas la représenter par un objet réel (i.e. un support) c'est-à-dire si le foncteur $D(F, -) : \underline{S} \longrightarrow \underline{ENS}$ n'est pas représentable, c'est-à-dire s'il n'est pas possible de trouver un objet rep F de $\underline{S}$ tel que pour tous les S de $\underline{S}$ on ait naturellement $D(F,S) = HOM_{\underline{S}}(\text{rep } F,S)$. (Un objet réel est un *monstre* s'il est inconcevable c'est-à-dire si le foncteur $D(-,S) : \underline{F}^{op} \longrightarrow \underline{ENS}$ n'est pas représentable, c'est-à-dire s'il n'est pas possible de trouver une idée id S élément de $\underline{F}$ telle que, pour tous les F de $\underline{F}$ on ait naturellement $D(F,S) = HOM_{\underline{F}}(F,\text{id}S)$).

Dans les exemples du §3 on repère aisément les figures paradoxales : ex.1 : pas de paradoxe ; ex.2 & 3 : toutes les figures sont des paradoxes ; ex.4, 5 & 6 : pas de paradoxe ; ex.7 : toutes les figures sont des paradoxes ; ex.8 : toutes les figures "non-affines" sont des paradoxes; ex.9 : ∞ et $\infty 0$ sont des paradoxes; ex.10 = $\sqrt{-1}$ est une figure paradoxale; ex.11 : le segment infinitésimal / est une figure paradoxale.

Une figuration est dite algébrique sur $\underline{S}$ si elle ne comporte pas de paradoxe . Cette notion d'algébricité est bien la notion usuelle (i.e. dit que la catégorie des T-algèbres est algébrique sur $\underline{S}$); néanmoins une figuration quelconque décrit des actions sur des dessins et des équations entre ces actions, et peut donc être considérée comme algébrique généralisée i.e. *opératoire*. Mais sous cette forme opératoire on obtient beaucoup plus que les théories algébriques sur $\underline{S}$, par exemple les théories du 1er ordre. Si dans une catégorie quelconque $\underline{S}$ on convient d'appeler *élément* d'un objet X d'arité Z un morphisme $x : Z \longrightarrow X$ de $\underline{S}$, alors les figurations algébriques sur $\underline{S}$ sont les figurations dont les algèbres sont décrites par des actions sur les éléments ou points du support, et des équations entre ces actions.

Si une figuration n'est pas algébrique, c'est parce que la "réalité" $\underline{S}$ est trop petite pour que les dessins de la théorie puissent être décrits comme des points, et *les limites de cette réalité sont désignées par les paradoxes* i.e. par les figures qui ne peuvent être analysées du point de vue de $\underline{S}$ que comme des systèmes quantifiés de points (e.g. par une formule du 1er ordre). La dissolution des paradoxes, autrement dit le lissage de la réalité, c'est-à-dire l'*élimination des quantifications*, consiste à élargir $\underline{S}$ en une catégorie $\hat{\underline{S}}$ où toutes les figures deviennent représentables. Cela est toujours possible, en prenant le plongement de Yoneda Yon : $\underline{S} \longrightarrow (\underline{ENS}^{\underline{S}})^{op} = \hat{\underline{S}}$, puisqu'alors, dans $\hat{\underline{S}}$, une figure F est représentée par l'objet D(F, -).

Mais sur $\hat{\underline{S}}$ la théorie n'est pas nécessairement monadique, car à ce niveau il n'y a pas nécessairement d'existence de structures libres. Pour obtenir cela il faut pousser un cran plus loin le principe de "passage aux préfaisceaux sur la réalité" :

Soit T une théorie figurée sur $\underline{S}$; alors les T-algèbres sont la sous-catégorie pleine de la catégorie des algèbres d'une monade Π sur $\underline{ENS}^{\hat{\underline{S}}}$ déterminée par les Π-algèbres (X,Θ) de support X "très petit" i.e. tel qu'il existe S objet de $\underline{S}$ avec

$$X = \mathrm{HOM}_{\underline{ENS}^{\underline{S}}}(- , \mathrm{Hom}_{\underline{S}}(. , S)) .$$

L'étude des figurations sous cet angle se décompose en deux points :

1. *Théorie des monades fibrées* ou monades sur FIB(X) (= catégorie des catégories fibrées sur $\underline{X}$).

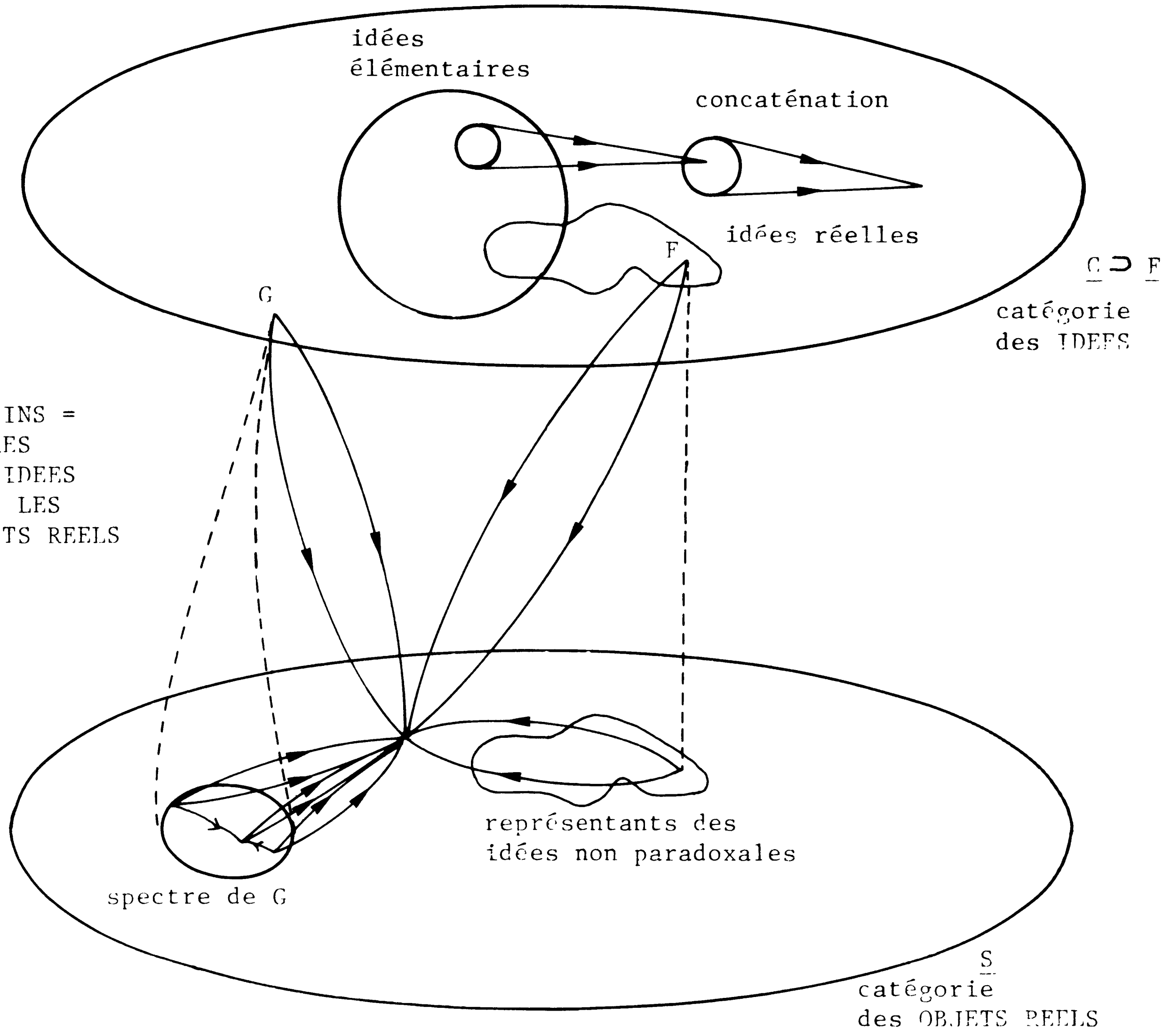
2. *Théorie de la taille des objets* dans une catégorie FIB(X) .

Il est bien connu que la taille d'un objet se détecte catégoriquement par la classe des limites inductives que préserve HOM(X, -) .

Pour l'auditeur que les passages successifs à des catégories de faisceaux sur les situations embarrassantes perturbent, on peut dire exactement la même chose sans quitter terre i.e. en restant dans $\underline{S}$: si F est une figure paradoxale i.e. non représentable, alors le lemme de Yoneda disant que tout foncteur $H : \underline{S} \longrightarrow \underline{ENS}$ est limite inductive de foncteurs représentables s'applique à $D(F, -)$ et nous assure de l'existence d'un diagramme (en général gros) $D : \underline{J} \longrightarrow \underline{S}$ tel que, naturellement en S on ait

$$(P) : \qquad D(F,S) = \varinjlim_{\underline{J}} \mathrm{Hom}_{\underline{S}} (D_j, S) .$$

Un tel diagramme D est un *spectre* de F . En fait dans la pratique il est crucial de connaître la taille de D . Je reviendrai sur cette question de spectre à la fin de l'exposé.



L'analyse pour les figures ou les supports des positions ou contacts, des déformations ou approximations ou mouvements ou libertés, la présentation des figures paradoxales et des supports monstrueux, toutes ces choses peuvent être réalisées, nous l'avons vu, en terme de limites projectives et de limites inductives. Ces limites sont des cônes sur la catégorie "union" de $\underline{C}$ de $\underline{S}$ et des dessins, c'est-à-dire sur la catégorie dessinée ci-dessus ou encore dessinée dans la définition 1 du §2. On arrive ainsi à l'idée d'esquisse, que je vais préciser dans un moment.

On admettra qu'inversement à une esquisse on peut associer une figuration, en remplaçant chaque cône inductif $(A_i \xrightarrow{y_i} A)_{i \in \underline{I}}$ par une *opération*

$$\omega : P^+ \,\mathrm{Hom}_{\underline{ENS}^{\underline{B}}} (\mathrm{Yon}\ A, R) \longrightarrow \underrightarrow{\lim}\ P^+ \,\mathrm{Hom}_{\underline{ENS}^{\underline{B}}} (\mathrm{Yon}\ A_i, R) \ ,$$

où, pour tout ensemble E , P^+E désigne l'ensemble des parties non-vides de E .

9. ESQUISSES

La définition suivante a été introduite par Ehresmann (Introduction to the theory of structured categories, Tech. Report 10, U. of Kansas, 1966).

DEFINITION 4. Une ESQUISSE est constituée d'une catégorie $\underline{B}$, d'une famille $\mathbb{P}$ de cônes *projectifs* distingués sur $\underline{B}$, d'une famille Π de cônes *inductifs* distingués sur $\underline{B}$.

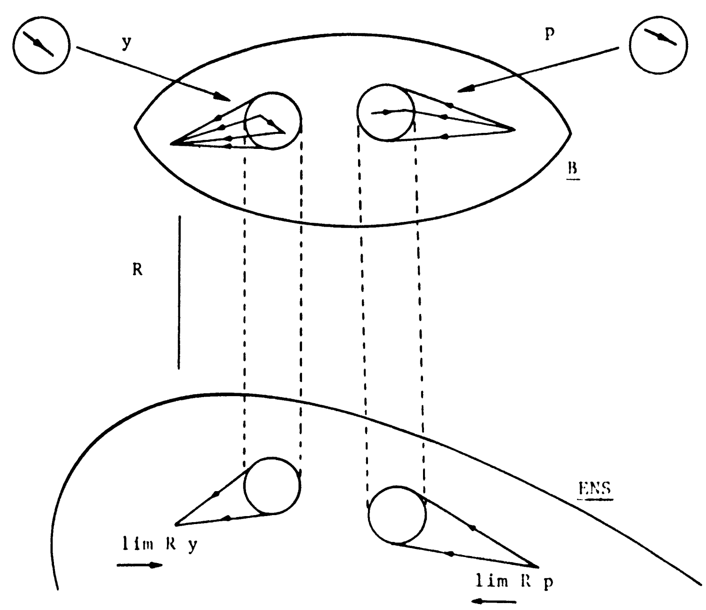
Si $(\underline{B}\ , \mathbb{P}\ , \Pi\ ) = //\underline{B}//$ est une esquisse, une réalisation de $//\underline{B}//$ est un foncteur $R : \underline{B} \longrightarrow \underline{ENS}$ tel que :

1° Pour tout $p \in \mathbb{P}$, le cône $R\,p$ dans $\underline{ENS}$ est un cône limite projective.

2° Pour tout $y \in \Pi$, le cône $R\,y$ dans $\underline{ENS}$ est un cône limite inductive.

N.B. On ne demande pas aux cônes de $\mathbb{P}$ et Π d'être déjà dans $\underline{B}$ des cônes limites.

Dans un modèle on doit réaliser des agencements où des *contacts* sont établis et où des éléments sont laissés *libres*.



Une esquisse est donc un "plan" où des contacts et des libertés sont bien spécifiés, et une réalisation ou modèle de cette esquisse est une "mécanique" construite suivant ce plan et ces spécifications.

10. EXEMPLES

Tout d'abord on se reportera au §3 où sont donnés des exemples de figurations; en procédant comme montré dans les paragraphes 5 à 8, on obtiendra les esquisses correspondantes. Voici maintenant des exemples que l'on peut obtenir directement.

Exemple 13.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "1"] & M \arrow[r, bend right, "M\times 1"'] \arrow[r, bend right=50, "1\times M"'] & M\times M \arrow[l, shift right, "p_1"'] \arrow[l, shift left, "p_2"] \arrow[l, bend right=60, "k"'] & M\times M\times M \arrow[l, shift right] \arrow[l] \arrow[l, shift left, "{p_1, p_2, p_3,}"] \arrow[l, bend right, "k''"'] \arrow[l, bend right=60, "k'"'] \end{tikzcd}$$

On prend pour $\underline{b}$ la catégorie engendrée par le graphe ci-dessus et les équations $k.(M\times 1) = k.(1\times M) = Id_M$, $k.k' = k.k''$, $k' = M\times k$ et $k'' = k\times M$, et munie de cônes projectifs définissant $M\times M$ comme objet à réaliser comme produit de la réalisation de M avec elle-même (avec les projections p_1 et p_2), et de même pour $M\times M\times M$.

$\longrightarrow$ esquisse de la structure de monoïde.

Exemple 14.

1ère possibilité : l'esquisse
$$\begin{tikzcd} E & E\times E \arrow[l, shift right, "p_1"'] \arrow[l, shift left, "p_2"] & R \arrow[l, tail, "\text{mono}"'] \end{tikzcd}$$

2ème possibilité : l'esquisse
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "r"] & PE & E^I \arrow[l] \\ & & E^J \arrow[ul] \arrow[u, "E^b"'] \end{tikzcd}$$

où I , J sont variables dans les cardinaux, et b une bijection variable quelconque de J à I . On distingue alors le cône inductif de base les E^I et sommet PE . Par conséquent, dans une réalisation de l'esquisse, PE devra être réalisé en l'ensemble des parties de la réalisation de E . De là résulte que 1° et 2° esquissent la même chose :

$\longrightarrow$ esquisse d'un ensemble muni d'une relation binaire.

Exemple 15. On prend l'esquisse du n° 13, et on lui ajoute une deuxième loi $c : M\times M \longrightarrow M$, un cône inductif de base discrète

$$\begin{tikzcd} \Pi \arrow[r, "0"] & M \\ M^x \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

et une loi $(-)^{-1} : M^x \longrightarrow M^x$;

on écrit évidemment les axiomes de distributivité, etc., la commutativité.

------→ esquisse de la structure de corps commutatif.

Exemple 16. Dans l'esquisse suivante, les équations d'unitarité et d'associativité sont claires, et on distingue comme cônes projectifs des produits

$$\begin{tikzcd} x_{C_0} \arrow[r] & x_C \arrow[l, bend right, "cod"'] \arrow[l, bend left, "dom"] & x_{C*C} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[l, bend right, "k"'] & x_{C*C*C} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[l, bend right, "k'"'] \arrow[l, bend right=20, "k''"] \end{tikzcd}$$

fibrés ceux décrivant $C * C$ comme ensemble des paires composables (produit fibré de dom et doc), et $C * C * C$ comme ensemble des triplets composables.

------→ esquisse de catégorie.

Exemple 17.

$$\begin{tikzcd} & {} \arrow[d, "k_1^1"] & {} \arrow[d, "k_2^1"'] & {} \arrow[dl, "k_2^2"] & & {} \arrow[d] & {} \arrow[dl] & {} \arrow[d] & \cdots & {} \arrow[dl, "k_n^n"] \\ x_{C_0} & x_{C_1} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] & x_{C_2} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] & \cdots\cdots & & x_{C_{n-1}} & & x_{C_n} \arrow[ll, shift left] \arrow[ll, shift right] \end{tikzcd}$$

------→ esquisse de n-catégorie.

Exemple 18. On peut esquisser un arbre en indiquant pour tout n l'ensemble des noeuds à une distance n de la racine, et, pour chaque noeud x son prédécesseur $p(x)$.

$$\begin{tikzcd} x_1 & x_{N_1} \arrow[l, "p_1"'] & x_{N_2} \arrow[l, "p_2"'] & x_{N_3} \arrow[l, "p_3"'] & \cdots\cdots & x_{N_{u-1}} & x_{N_u} \arrow[l, "p_u"'] & \cdots\cdots \arrow[r, phantom] & {} & x_{N_h} \arrow[l, "p_h"'] \end{tikzcd}$$

------→ esquisse d'arbre de hauteur $\leqslant h$.

11. ESQUISSES CONCRETES

Pendant pratiquement une douzaine d'années, surtout les *esquisses projectives* (i.e. sans cônes inductifs) ont été utilisées (travaux de A. et C. Ehresmann, de Foltz et Lair, de Gabriel et Ulmer, de Benabou, par exemple), sous un nom ou un autre. Par contre les études (Ehresmann, Lair, Ulmer) avec les cônes inductifs semblaient à beaucoup de mathématiciens trop générales, et ils ont préféré travailler avec l'idée plus particulière de *modèle d'un site* (voir le Springer L.N. n° 611, par Nakkaï et Reyes, où les auteurs exposent leurs propres résultats et les résultats d'autres spécialistes), la théorie culminant dans la construction des spectres et des topos classifiants. Y. Diers de son côté a introduit l'idée de *catégorie localisable*, et construit dans ce cadre la théorie du spectre. Le point de vue de Diers est aussi en fait inclus dans celui des esquisses : il coïncide exactement avec les esquisses où les cônes inductifs distingués sont en fait à bases discrètes i.e. sont des sommes. Cela est démontré dans le texte de Guitart et Lair "Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes" (Diagrammes, Vol. 4, Paris, déc. 1980). Dans ce texte, la théorie des esquisses (avec donc cônes projectifs *et* cônes inductifs) est systématiquement développée jusqu'à l'obtention de la construction du spectre dans ce cadre général. J'énoncerai tout à l'heure notre version actuelle de ce résultat (théorème d'existence de diagrammes localement libres).

Mais auparavant, je voudrais indiquer une variante de la notion d'esquisse qu'il nous a paru utile d'introduire, et dont je me servirai pour énoncer le théorème. De plus cette variante m'a été indispensable à la fin du §8 pour passer des esquisses aux théories figurées ou figurations. Il s'agit de l'idée d'esquisse concrète.

DEFINITION 5. Une ESQUISSE CONCRETE est constituée d'une catégorie $\underline{B}$ et d'une famille $\mathbb{F}$ de cônes projectifs distingués sur $\underline{\mathrm{ENS}}^{\underline{B}}$; les éléments de $\mathbb{F}$ sont appelés les *formules internes*.

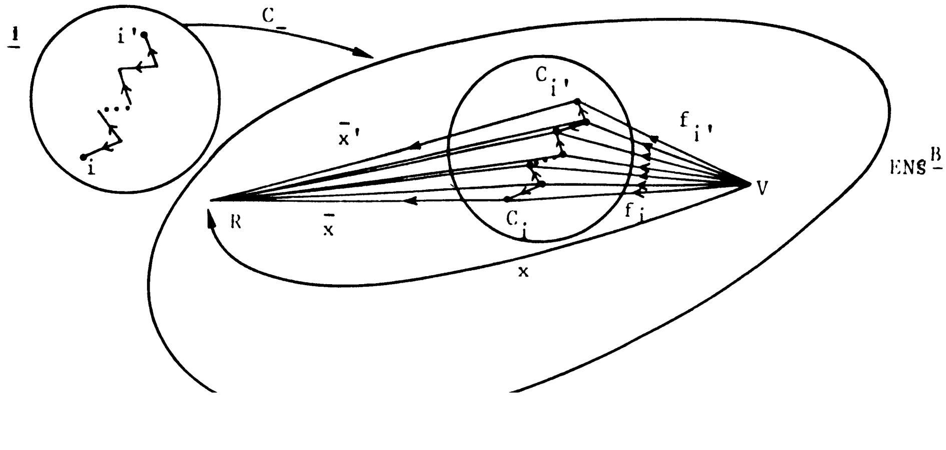
Si $(\underline{b}, \mathbb{F}) = \mathbb{B}$ est une esquisse concrète, une réalisation de $\mathbb{B}$ est un foncteur $R : \underline{b} \longrightarrow \underline{\mathrm{ENS}}$ tel que pour tout $f = (f_i : V \longrightarrow C_i)_{i\in I}$ de F , on ait :

$$\varinjlim_{I} \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{ENS}}^{\underline{B}}}(C_i, R) = \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{ENS}}^{\underline{B}}}(V, R) .$$

Cette condition signifie que :

i) pour tout $x : V \longrightarrow R$, il existe un $i \in \underline{I}_0$ et un $\bar{x} : C_i \longrightarrow R$ tels que $x = \bar{x}.f_i$

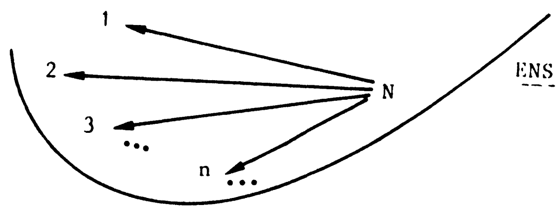
ii) si $(i, \bar{x})$ et $(i', \bar{x}')$ sont tels que $\bar{x}.f_i = \bar{x}'.f_{i'}$, alors il existe dans la catégorie $\underline{I}$ un zig-zag de i à i' dont l'image par $\underline{C}$ se complète dans $\underline{\mathrm{ENS}}^{\underline{B}}$ en une lanterne suspendue de V à R comme sur la figure ci-après :



12. EXEMPLES

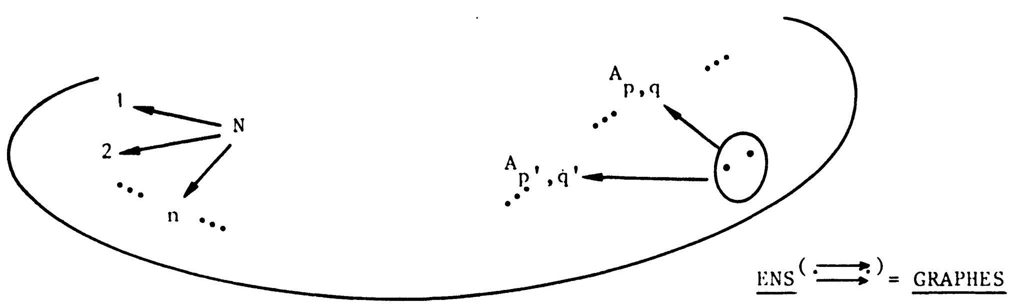
Partant d'une esquisse au sens du §10, on passe facilement à une esquisse concrète en munissant $\underline{ENS}^{\underline{B}}$ des cônes projectifs images par $\text{Yon}^{op} : B^{op} \longrightarrow \underline{ENS}^{\underline{B}}$ des cônes inductifs donnés dans $\underline{B}$, et en remplaçant chaque cône projectif donné dans $\underline{B}$ par la flèche de comparaison avec la limite dans $\underline{ENS}^{\underline{B}}$. Par suite les exemples de théories figurées du §3 et les exemples d'esquisses du §10 donnent autant d'exemples d'esquisses concrètes. Voici aussi des exemples que l'on obtient naturellement directement.

<u>Exemple 19.</u>

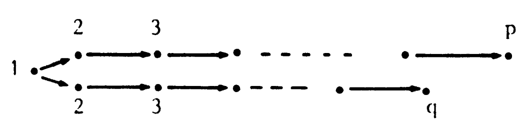


------> esquisse concrète d'ensemble fini.

<u>Exemple 20.</u>

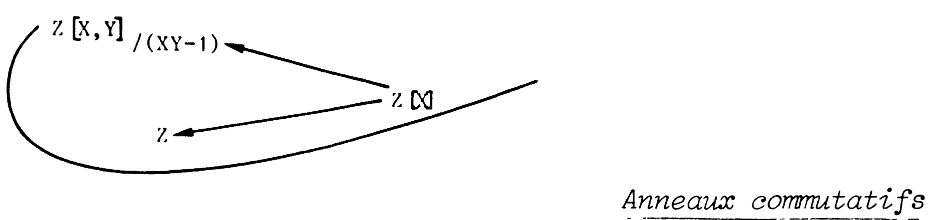


avec $A_{p,q}$ l'arbre



------> esquisse concrète d'arbre fini.

<u>Exemple 21.</u>



------> esquisse concrète de corps commutatif.

13. AUTRES VARIANTES : AXIOMATISATIONS ET ALGEBRES INITIALES

DEFINITION 6. Une AXIOMATISATION est constituée d'une catégorie $\underline{B}$ et d'une famille A de cônes projectifs à bases discrètes distingués sur $\underline{ENS}^{\underline{B}}$; les éléments de A sont appelés les *axiomes*.

Si $(\underline{B},A) = \mathbb{A}$ est une axiomatisation, un modèle de $\mathbb{A}$ est un foncteur $R : \underline{B} \longrightarrow \underline{ENS}$ tel que pour tout $a = (a_i : V \longrightarrow C_i)_{i \in I}$ de A , on ait

$$\coprod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\underline{ENS}^{\underline{B}}}(C_i, R) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{ENS}^{\underline{B}}}(V,R) .$$

Cette condition signifie que pour tout $x : V \longrightarrow R$ il existe un $i \in I$ et un $\bar{x} : C_i \text{——} R$ tels que $x = \bar{x}.a_i$.

Cette définition a été introduite par Andréka-Néméti-Sain dans "Formulas and ultra-products in categories" (Beit. zur Alg. und Geo., 8, 1979). Elle généralise l'idée de modèle d'un site (qui correspond au cas où V et les C_i sont représentables).

DEFINITION 7. Une THEORIE INITIALISEE est constituée d'une catégorie $\underline{B}$ et d'une famille $\mathbb{L}$ de paires de sous-catégories emboîtées de $\underline{B}$, notée $(D_j \subset \underline{C}_j \subset \underline{B})_{j \in J}$; un élément $(\underline{D}_j \subset \underline{C}_j \subset \underline{B})$ de cette famille est appelé une *contrainte de liberté*. Si $(\underline{B},L) = \mathbb{L}$ est une théorie initialisée, une *algèbre initiale* de $\mathbb{L}$ est un foncteur $R : \underline{B} \longrightarrow \underline{ENS}$ tel que, pour toute contrainte $(\underline{L} \subset \underline{C} \subset \underline{B})$ élément de L on ait

$$R_{/\underline{C}} = \mathrm{LIBRE}\ (R_{/\underline{D}}) ,$$

en désignant par $\mathrm{LIBRE} : \underline{ENS}^{\underline{D}} \longrightarrow \underline{ENS}^{\underline{C}}$ l'adjoint à gauche à la restriction, et en notant $R_{/\underline{X}}$ la restriction de R à $\underline{X}$.

Cette définition est évidemment équivalente à celle donnée par les gens du groupe ADJ, par exemple dans la forme modifiée due à Hupbach-Kaphengst-Reichel ("Initiale algebraische Spezifikation von Datentypen, parameterisierten Datentypen und Algorithmen", VEB Robotron, Centrum für Forschung und Technik, Dresden, W13n 1)80). Les gens du groupe ADJ ont publié leur papier en 1975 : "Abstract Data Types as Initial Algebras and the Correctness of Data Representations", Proc. Conf. on Computer Graphics, Pattern Recognition, and Data Structure (Beverley Hills), pp. 89-93).

14. COMPARAISON

On peut démontrer que : les THEORIES INITIALISEES, les AXIOMATISATIONS, les ESQUISSES CONCRETES, les ESQUISSES, permettent de décrire exactement les mêmes catégories (comme, respectivement, des catégories d'algèbres initiales, de modèles, ou de réalisations), et en ce sens ce sont des outils analytiques équivalents, produisant donc des analyses en termes de problèmes universels divers. Toute figuration peut être décrite de cette façon, et inversement toute théorie mise en forme universelle (e.g. esquissée, ou initialisée, etc.) "est" une figuration.

On peut démontrer aussi (article à paraître de Guitart-Lair) qu'une théorie du 1er ordre arbitraire peut être esquissée.

Dans l'état actuel des choses, on peut retenir la *ligne de conduite* suivante : pour modéliser mathématiquement un problème concret, tenter de produire clairement la liste des phénomènes à envisager : cela constituera les dessins d'une figuration à bâtir autour (en dégageant pas à pas, dialectiquement, les supports que l'on veut considérer comme réels, et les idées ou concepts que l'on veut faire opérer). Les problèmes de choix pratiques ou philosophiques sont évidemment concentrés ici, et ce que je dis n'apporte rien pour les résoudre, sinon la libération de l'esprit de la contrainte de produire a priori du "mathématique" calculable. En particulier, on ne cherche en aucune façon à introduire dans le système les outils mathématiques traditionnels dont on connaît le fonctionnement (et avec lesquels on pourrait donc miraculeusement calculer - mais quoi ?). Par contre, quand on pensera avoir obtenu une description suffisamment riche et honnête du problème, on s'arrêtera sur une *figuration*, et alors on essaiera de la présenter analytiquement de manière calculable (ce qui conduira à la modifier, dans un deuxième mouvement dialectique), en utilisant les esquisses, esquisses concrètes, axiomatisations, théories initialisées, etc., ou toute façon *universelle* d'analyser, comme je l'ai indiqué aux paragraphes 5 à 8, les positions et mouvements des figures et supports, les paradoxes et les monstres. Dans cette façon de faire la logique usuelle du 1er ordre est tout-à-fait court-circuitée, et remplacée par les calculs de limites et de problèmes universels. Par exemple, concernant les limites de modèles, l'obstruction principale est concentrée dans le problème des commutations de limites dans $\underline{\mathrm{ENS}}$. Je ne dis pas que l'analyse universelle soit la seule convenable; en particulier, la recherche dans une théorie figurative des typifications et des quantifications (en des sens généralisés que je ne préciserai pas ici) est une voie à explorer. Ce que je dis c'est que par la seule vertu d'analyses "universelles" on se place dans un cadre où l'on peut répondre de manière précise à plusieurs questions de base, la première étant le problème général de la construction des structures libres. Dans le cas d'une théorie algébrique (= figuration sans paradoxes, i.e., au niveau de l'esquisse associée, sans cônes inductifs) on sait construire les structures libres : c'est le théorème du faisceau associé (sur des sites quelconques, et non pas sur des espaces topologiques seulement). Ce qui valide cette analyse universelle des figurations, c'est qu'il est possible d'étendre ce théorème à une classe très générale d'esquisse, comme je vais l'énoncer.

15. EXISTENCE DE DIAGRAMMES LOCALEMENT LIBRES (Guitart-Lair, 1980)

Dans l'article de Diagrammes 4, déc. 1980 déjà cité, nous obtenons :

THEOREME. Soit c un cardinal. Une esquisse c-*injective* est une esquisse $(\underline{B}, \mathbb{P}, \Pi) = //\underline{B}//$ telle que, pour tout $y \in \Pi$, $y = (y_j : B_j \longrightarrow W)_{i\in J}$, pour toute réalisation r de $//\underline{B}//$ dans $\underline{ENS}$, et pour tout $x \in R(W)$, on ait

$$\underline{\mathrm{Card}}\ (R(y_j)^{-1}(x)) \leq c \ .$$

Si $//\underline{B}//$ est c-injective, alors chaque foncteur $R : \underline{B} \longrightarrow \underline{ENS}$ admet un *petit* diagramme localement libre (D,d) dans les réalisations de $//B//$, soit un diagramme $: \underline{1} \longrightarrow \text{Réal}\ (//\underline{B}//,\underline{ENS}) \subset \underline{ENS}^{\underline{B}}$ et un cône projectif $d = (d_i : R \longrightarrow D_i)_{i\in \underline{I}}$ telles que

$$\varinjlim_{i\in\underline{I}} \mathrm{Hom}_{\text{Réal}\ (//\underline{B}//,\underline{ENS})} (D_i,M) = \mathrm{Hom}_{\underline{ENS}^{\underline{B}}} (R,M)$$

pour toute réalisation M de $//\underline{B}//$.

N.B. Cette condition se détaille comme dans la définition 5, §11 en i) et ii).

De ce théorème nous avons donné en 1980 une preuve syntaxique où l'on travaillait en "saturant des catégories fibrées". En 1981 nous avons ajouté une preuve sémantique, plus générale dans ses applications. Voici une idée du démarrage de la preuve en question.

On donsidère donc $f = (f_i : V \longrightarrow C_i)_{i\in\underline{I}}$ une formule interne, où, pour simplifier ici, tous les f_i sont des épimorphismes de $\underline{ENS}^{\underline{B}}$ (le travail avec les c-épimorphismes-correspondants concrets des c-injections- obligerait simplement à quelques contorsions assez naturelles). Soit R un objet de $\underline{ENS}^{\underline{B}}$. Pour tout $f : V \longrightarrow R$ on considère

$$\mathrm{FAC}(f) = \{i \in \underline{I}_0 \ ;\ \exists\, g \ ,\ g.f_i = f\} \ .$$

FAC(f) est supposable connexe. On <u>CHOISIT</u> $I_1(f)$ une sous-catégorie connexe non-vide de $\underline{I}$ contenant FAC(f) , et, un tel choix étant fait pour chaque 1 , on prend

$$R_1 = \varinjlim_{\substack{(f,i)\in \mathrm{Hom}(V,R)\times \underline{I} \\ i \in I_1(f)}} \left(\begin{tikzcd} C_i & \\ & V \arrow[ul, "f_i"'] \arrow[dl, "f"] \\ R & \end{tikzcd} \right)$$

En désignant par r un ordinal régulier majorant la famille des cardinaux des bases des limites projectives appartenant à F (de sorte que tout $b \in \underline{B}_0$ est r-présentable), on définit une suite R_b , $b \leq r$, par $R_b = \varinjlim_{a \in b} R_a$, pour b limite, et, pour $b = c+1$, par construction de R_b à partir de R_c comme ci-avant on a construit R_1 à partir de R , à l'aide d'un choix I_b . On pose alors

$$R'_r = \varinjlim_{b \leq r} R_b .$$

Bien entendu R'_r dépend de la suite transfinie de choix utilisée $(I_b)_{b \in r'}$, et pour d'autres choix, on aboutirait à un autre, disons R''_r . Mais on peut montrer que ces divers points terminaux ont un ensemble petit de classes d'isomorphies, que ce sont effectivement des réalisations de $//\underline{B}//$, et qu'ils constituent le petit diagramme localement libre cherché. Voilà pour le principe.

Les auditeurs trouveront eux-mêmes des exemples dans leur spécialité : ce seront tous des exemples de *théories spectrales* que l'on peut trouver dans la littérature, et je me limiterai à deux choses donnant l'intuition.

D'abord, si partant de Z on cherche le corps libre engendré par Z , on sait que cela n'existe pas. Par contre les "meilleures approximations" d'un tel corps libre sont les corps de la famille $\{Q\} \cup \{Z/pZ$, p premier$\}$; cette famille est précisément *le* diagramme localement libre dans les corps engendré par Z . De même, partant d'un anneau commutatif quelconque on obtient comme diagramme localement libre, le diagramme de tous les localisés de l'anneau en ses idéaux premiers, soit son spectre premier. Considérons un deuxième exemple, Soit l'inclusion de la catégorie des R-espaces vectoriels de dim finie dans la catégorie de tous les R-espaces vectoriels. Ce foncteur d'inclusion n'a pas de co-adjoint, mais néanmoins chaque R-espace vectoriel F admet un diagramme localement co-libre dans les espaces de dim finie, et si $(K^{A_i})_{i \in I}$ est un tel diagramme, avec les A_i finis, alors $B = \bigcup_{i \in I} A_i$ indexe une base de E .

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. DIERS, *Catégories localisables*, thèse d'état, Université Paris-VI et Université de Valenciennes, Paris, 1977.

[2] C. EHRESMANN, "Esquisses et types de structures algébriques", *Bul. Inst. Polit. Iasi*, XIV, 1968.

[3] R. GUITART et C. LAIR, "Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes", *Diagrammes*, Vol.4, Paris, déc. 1980.

[4] R. GUITART et L. VAN DEN BRIL, "Calcul des satellites et présentation des bimodules à l'aide des carrés exacts", I et II, *Cahiers Top. Géo. Diff.*, 1983.

[5] M. MAKKAI ET G. REYES, "First order categorical logic", *Lecture notes in Math.* 611, Berlin, Springer, 1977.

[6] F. ULMER, "Locally presentable and locally generated categories", *Lecture notes in Math.* 195, Berlin, Springer, 1971.