B. MONJARDET
G. NETCHINE-GRYNBERG

# Formalisation ordinale de modèles pluriels du développement psychologique

*Mathématiques et sciences humaines*, tome 96 (1986), p. 65-94
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1986__96__65_0>

*Math. Sci. hum.* (*24*e année, n°96, *1986*, p.65-94)

# FORMALISATION ORDINALE DE MODELES PLURIELS DU DEVELOPPEMENT PSYCHOLOGIQUE

B. MONJARDET*, G. NETCHINE-GRYNBERG**



---

* Université René Descartes et CAMS, 54 bd. Raspail, 75270 Paris Cédex 06.

** Laboratoire de Psychologie du Développement et de l'Education de l'Enfant, Université René Descartes, Paris V; C.N.R.S., JE 018; RCP 802, 46 rue Saint Jacques 75005 Paris.

## AVANT-PROPOS

Ce texte présente la première étape d'une démarche de formalisation de modèles du développement psychologique, à caractère dit "composé" ou "pluriel", destinés à étayer l'étude de la coordination entre plusieurs dimensions du développement. Cette formalisation, effectuée en termes des mathématiques des ensembles ordonnés, se présente comme une généralisation multidimensionnelle de l'échelle de Guttman. Elle vise à assurer la traduction mathématique d'hypothèses préalablement formulées dans le champ du développement psychologique.

L'intérêt pour l'élaboration de modèles mathématiques ordinaux, susceptibles de représenter un développement "pluriel", est né d'un problème particulier rencontré par l'un de nous. Il s'agissait d'une étude de l'individualisation perceptive de formes simples par de jeunes enfants (4 à 7 ans). L'investigation a été conduite à partir d'un matériel expérimental construit de façon à mettre en évidence deux rubriques de propriétés de ces formes, passibles de procédés perceptifs distincts, dont il fallait éprouver la relation au cours du développement.

Ce cas particulier a conduit à envisager la question générale des conditions d'étude de la coordination entre plusieurs dimensions du développement ou de l'apprentissage, conditions qui n'ont guère suscité d'instrumentation mathématique appropriée, si ce n'est sous la forme de moyens d'estimation des interrelations entre ces dimensions (de type corrélation).

La littérature psychologique classique s'adresse en effet principalement à un développement linéaire. Les grandes théories ont essentiellement donné lieu à la construction de systèmes d'investigation à visée générale, à partir desquelles l'évolution de l'enfant est envisagée comme un système unitaire, définissant une trajectoire fixe dans ses étapes, cumulative dans ses effets, linéaire dans son mouvement. La structure mathématique ordinale sous-jacente est donc celle d'ordre total ou de façon quasi équivalente, celle d'échelle de Guttman. Cependant les objets de l'étude psychologique de l'enfance n'ont pas tous - tant s'en faut - les caractéristiques qui justifient une telle organisation. Il existe de nombreuses classes d'activités à caractère composé, peu étudiées, qui peuvent présenter un intérêt théorique considérable. Evoquons par exemple les activités relevant de plusieurs domaines du comportement, l'accomplissement de tâches cognitives requérant plusieurs registres de compétence, ou bien encore l'acquisition d'une connaissance nouvelle faisant intervenir plusieurs champs notionnels, plusieurs matières enseignées notamment s'il s'agit d'une acquisition scolaire.

C'est donc à titre d'alternative aux approches classiques du développement psychologique, qui peuvent être traduites par des modèles ordinaux de type guttmanien, que l'on propose la formation de modèles "pluriels" exprimant des hypothèses relatives à la coordination entre plusieurs dimensions du développement, dont la transcription mathématique implique une généralisation multidimensionnelle d'échelles ordinales linéaires. En permettant de préciser les conditions d'étude d'activités psychologiques à caractère composé, de tels modèles pourront contribuer à élargir le domaine des approches psychologiques de l'enfance.

On trouvera dans les pages suivantes la description de la première phase de la construction du modèle mathématique représentant le modèle psychologique "pluriel". Ce modèle mathématique est défini comme un "produit direct" d'échelles linéaires (ordres totaux). Le nombre des échelles ainsi que le nombre de leurs modalités peuvent être quelconques et jouent le rôle de paramètres adaptables à chaque situation expérimentale considérée. Pour illustrer les procédures de construction du modèle général, on empruntera les paramètres de la première situation expérimentale évoquée plus haut, soit deux échelles, l'une à trois, l'autre à six modalités.

L'étape initiale de la démarche consiste à définir l'ensemble des unités élémentaires d'observation - ou items - ainsi que l'ordre hypothétique entre ces unités; cet ordre sera appellé l'*ordre de base* entre les items, et peut s'interpréter comme un ordre de difficulté entre ceux-ci. Conformément à ce qui a été dit ci-dessus, cet ordre est le produit de deux échelles ordinales, i. e. de deux ordres totaux, l'un à six et l'autre à trois modalités, dans notre exemple. Il en résulte que chaque item peut être considéré comme la combinaison de deux modalités, prises respectivement sur la première et la seconde échelle, et que l'ensemble des dix-huit (6 × 3) items a une structure ordinale et algébrique bien connue, celle de treillis distributif.

La deuxième partie de ce texte est consacrée à l'étude des patrons de réponse "impliqués" par l'ordre de base. Ces patrons sont ceux donnés par un sujet "théorique", i. e. un sujet dont les réponses sont conformes à l'hypothèse théorique exprimée par l'ordre de base. Au départ, on définit la notion de patron (de réponse) quelconque, par l'ensemble des items que le sujet a réussi. Puis on étudie les opérations de *saturation* et de *réduction* d'un patron. Dans l'exemple de référence, à partir des $2^{18}$ patrons possibles (autant que de sous-ensembles de l'ensemble des dix-huit items), l'opération de saturation conduit à la formation de 84 *patrons saturés* qui sont exactement les patrons impliqués par l'ordre de base. Un patron saturé peut être représenté de façon univoque par un *patron "réduit"*, plus simple; mais il est encore plus économique de le coder par un *"vecteur-score"*. L'ordre d'inclusion (ensembliste) entre patrons munit l'ensemble de tous les (84) patrons saturés d'une structure ordinale, qui est de nouveau un treillis distributif. Il en résulte que l'ensemble de tous les (84) patrons saturés peut être construit par des opérations algébriques, soit comme union des *patrons saturés "simples"*, soit comme intersection des *patrons saturés "cosimples"*, soit comme union et intersection des *patrons saturés "doublement simples"*. Une caractéristique importante de ce type de modèle est qu'il y a le même nombre (18) de patrons simples, de patrons cosimples, et que dans chaque cas l'ordre entre ces 18 patrons simples ou cosimples reproduit exactement l'ordre de base entre les 18 items.

Dans la troisième partie on se place au niveau des populations. On considère l'ensemble des réponses différentes données par une population de sujets. Cet ensemble constitue donc une partie de l'ensemble de tous les patrons de réponses possibles (saturés ou non saturés); on dit que c'est un *collectif* (de réponses). Parmi les collectifs, les *collectifs fermés* sont ceux pour lesquels l'union et l'intersection de patrons du collectif appartiennent à ce collectif. Un exemple de tel collectif est celui formé par tous les (84) patrons saturés, correspondant à l'ordre de base. Mais plus généralement à n'importe quel ordre (ou préordre) sur l'ensemble des items correspond un collectif fermé unique. Cette correspondance bijective entre collectifs fermés et préordres sur les items, permet d'associer à tout collectif - et par exemple à un collectif obtenu expérimentalement - un ordre sur les items. On peut alors comparer cet ordre à l'ordre de base. Si ces deux ordres sont égaux, on dit que le collectif est *cohérent complet*. Un des résultats de ce travail est de caractériser les collectifs cohérents complets, par le fait que ce sont les collectifs formés uniquement de patrons saturés et contenant tous les patrons doublement simples. A partir de ce résultat, on peut aussi caractériser trois autres classes de collectifs :

1°) les *collectifs cohérents "incomplets"*, i.e. ceux pour lesquels l'ordre associé contient strictement l'ordre de base (par exemple si un item est moins difficile qu'un autre dans l'ordre de base, il est moins ou également difficile dans l'ordre associé).

2°) les *collectifs non cohérents compatibles*, pour lesquels l'ordre associé est strictement contenu dans l'ordre de base (par exemple si un item est moins difficile qu'un autre dans l'ordre de base il est moins difficile ou incomparable dans l'ordre associé).

3°) les *collectifs non cohérents incompatibles*, qui sont tous ceux ne rentrant pas dans l'une des catégories précédentes.

On a ainsi établi une taxonomie de tous les collectifs possibles, qui peut servir de cadre général pour l'analyse de l'adéquation d'un ensemble de réponses au modèle hypothétique, à condition bien sûr de l'affiner tant au plan algébrique qu'au plan statistique.

Telles sont les étapes premières de la formation du modèle mathématique décrites dans cet article. Leur présentation éclaire certaines des caractéristiques structurales d'un développement "pluriel". Dans un texte ultérieur nous analyserons ce que représente ce type de généralisation de l'échelle de Guttman par rapport à des généralisations classiques bien connues, qui fonctionnent en pratique comme des instruments d'analyse des données plutôt que comme des modèles "stricto sensu"; on y trouvera donc un certain nombre de références omises ici. Nous y aborderons également le problème de la détermination de l'ensemble des chemins individuels du développement, prévisibles à partir d'un ordre de base (hypothétique) donné.

Précisons pour terminer que le style adopté dans cet article est délibérement didactique. Il a été supposé que le lecteur n'a pas de connaissance particulière de la théorie des ensembles ordonnés, ni même de son vocabulaire. Les définitions nécessaires sont donc données soit dans le corps du texte soit dans le glossaire en annexe; dans ce dernier cas le mot concerné est marqué d'un astérisque. Pour toute information ou précision complémentaire on pourra se reporter à Barbut et Monjardet (1970).

## I. COMPOSITION ENTRE PLUSIEURS ORDRES : FORMATION DE L'ORDRE COMME PRODUIT DIRECT D'ECHELLES ORDINALES

*LES ITEMS ET LA STRUCTURE ALGEBRIQUE DE L'ENSEMBLE DES ITEMS*

### I.1. Présentation

La démarche initiale consiste à définir l'ensemble des unités élémentaires d'observation, les items, nécessaires à l'étude de la composition entre plusieurs échelles ordinales. Dans notre exemple de référence, les items,ou unités élémentaires d'observation, correspondent à des tâches d'individualisation perceptive d'une forme, construites en fonction de deux "dimensions" entièrement ordonnées, l'une à trois modalités, la seconde à six modalités. Ainsi, chaque unité d'observation, chaque tâche, peut être considérée comme une combinaison de deux modalités de ces dimensions, et l'on a donc 18 telles unités.

### I.2. Définition, notations, représentations des items

On appelle item, l'une quelconque de ces unités et l'on notera $E$ leur ensemble, l'ensemble des 18 tâches perceptives dans notre exemple.

Formellement, l'ensemble $E$ est défini comme un produit direct* de deux ensembles totalement ordonnés (échelles ordinales). Nous nous donnons donc deux ensembles totalement ordonnés :

$$E_1 = \{x_1 < x_2 < x_3\}$$

("correspondant" à la première dimension), et

$$E_2 = \{y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < y_5 < y_6\}$$

("correspondant"à la seconde dimension).

Nous identifierons l'ensemble $E$ des 18 items au produit direct $E_1 \times E_2$, c'est-à-dire à l'ensemble des 18 couples $(x_i, y_j)$ , $x_i \in E_1$ , $y_j \in E_2$ . Dans la suite un élément de $E$ , c'est-à-dire un item, sera donc noté $(x_i, y_j)$ ; pour alléger, les notations $(x,y)$ ou $(i,j)$ , ou même simplement "e" , seront aussi employées.

Les figures 1 et 2 donnent deux représentations graphiques possibles de l'ensemble E ; nous n'utilisons que celle indiquée par la figure 2, où les items sont représentés par des cases.

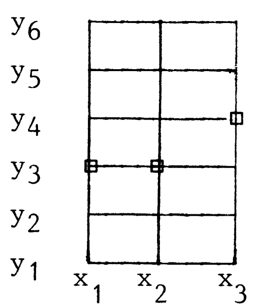



Figure 1.

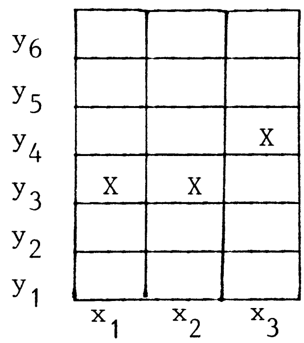



Figure 2.

## I.3. Structure ordinale et algébrique de l'ensemble des items

L'ensemble E ayant été défini comme produit direct de deux ensembles totalement ordonnés, il est bien connu qu'il est lui-même un ensemble partiellement ordonné*, l'ordre entre deux items $(x,y)$ et $(x',y')$ étant défini par :

$$(x,y) \leqq (x',y') \iff \begin{array}{l} x \leqq x' \quad (\text{dans } E_1) \text{ et} \\ y \leqq y' \quad (\text{dans } E_2) . \end{array}$$

Autrement dit, si on interprète cet "ordre produit" comme un ordre de difficulté entre items, l'item $(x,y)$ est "moins difficile" que l'item $(x',y')$ , si et seulement si il est moins difficile sur chacune des deux dimensions (ou également difficile sur l'une des deux et moins difficile sur l'autre). On notera $\underset{E}{\leqq}$ cet ordre, qui se lit facilement sur les figures 1 et 2. Ainsi, on a par exemple :

$$(x_1,y_3) \underset{E}{\leqq} (x_2,y_3) \quad \text{et} \quad (x_2,y_3) \underset{E}{\leqq} (x_3,y_4) .$$

Par contre, les items $(x_1,y_3)$ et $(x_3,y_2)$ , par exemple, ne peuvent être comparés dans l'ordre produit (puisque $x_1 < x_3$ et $y_3 > y_2$); on dit qu'ils sont *incomparables*.

Au lieu de dire que l'item $(x_1,y_3)$ est moins difficile que l'item $(x_2,y_3)$ , on pourrait aussi dire que ce dernier item "implique" le premier (au sens où un sujet réussissant $(x_2,y_3)$ "doit" réussir $(x_1,y_3)$). On notera alors : $(x_2,y_3) \underset{E}{\rightarrow} (x_1,y_3)$ , et de manière générale, on a donc :

$$(x,y) \underset{E}{\leqq} (x',y') \iff (x',y') \underset{E}{\rightarrow} (x,y) .$$

Formellement, l'ordre d'implication $\underset{E}{\rightarrow}$ ainsi défini entre items n'est rien d'autre que l'ordre réciproque* de $\underset{E}{\leq}$ , et il est évidemment équivalent de considérer l'un ou l'autre. Dans la suite, on aura à considérer d'autres ordres (de difficulté ou d'implication) définis sur l'ensemble E des 18 items, qui seront comparés aux deux ordres fondamentaux $\underset{E}{\leq}$ et $\underset{E}{\to}$ précédents.

Pour bien marquer le caractère privilégié de l'ordre de base, ici un "ordre produit", où E s'obtient comme produit direct de $E_1$ et $E_2$ , on dira que $\underset{E}{\leq}$ ( $\underset{E}{\to}$ ) est l'ordre de difficulté (d'implication) de *base*. On peut aussi noter en passant, que dans notre exemple, l'ordre $\underset{E}{\to}$ contient cent huit implications (strictes) "élémentaires" entre items, une telle implication étant, par exemple : $(x_3,y_4)$ implique $(x_1,y_3)$ .

Jusqu'ici, nous n'avons pas considéré les propriétés spécifiques de l'ordre produit $\underset{E}{\leq}$ . En fait celui-ci est loin d'être quelconque, puisqu'il est bien connu que le produit de deux ensembles totalement ordonnés est un treillis distributif*. Ainsi, pour deux items $(x,y)$ et $(x',y')$ , il existe toujours un supremum, c'est-à-dire un item le moins difficile parmi tous les items plus difficiles que ces deux items, et il est donné par la formule :

$$(x,y) \vee (x',y') = [\mathrm{Max}\ (x,x')\ ,\ \mathrm{Max}\ (y,y')]$$

De même, l'infimum de ces deux items - c'est-à-dire l'item le plus difficile parmi tous ceux moins difficiles qu'eux deux - est donné par la formule :

$$(x,y) \wedge (x',y') = [\mathrm{Min}\ (x,x')\ ,\ \mathrm{Min}\ (y,y')]$$

On calcule facilement le supremum et l'infimum de deux items sur les figures 1 et 2. Par exemple,

$$(x_3,y_2) \vee (x_1,y_4) = (x_3,y_4)$$
$$(x_3,y_2) \wedge (x_1,y_4) = (x_1,y_2)\ .$$

## II. LA CARACTERISATION DES SUJETS : CONSTRUCTION DES PATRONS DE REPONSE IMPLIQUES PAR L'ORDRE DE BASE

*LES PATRONS SATURES ET L'ENSEMBLE DES PATRONS SATURES*

### II.1. Présentation

Lorsqu'un sujet répond à tous les items (ou unités élémentaires d'observation) sa réponse est entièrement caractérisée par l'ensemble de ceux qu'il a réussi. En conséquence, nous identifierons la réponse d'un sujet à un sous-ensemble P quelconque de l'ensemble E de tous les items des 18 items dans notre exemple. Nous appellerons *patron (de réponse)* un tel ensemble. Le nombre de patrons quelconques possibles est considérable, $2^{18}$ dans notre exemple.

Pour construire les patrons "impliqués" par l'ordre de base, nous nous donnerons deux opérations, *la saturation et la réduction* de patrons quelconques. L'intérêt de ces opérations pour la construction du modèle est de permettre d'effectuer le passage de la structure d'ordre définie au niveau des items à celle des patrons de réponse des sujets. L'opération de réduction associe à tout patron un patron "réduit" formé soit d'un item unique soit de deux ou trois items incomparables (les patrons réduits sont les "parties libres"* de l'ensemble ordonné E ). De manière analogue, l'opération de saturation associe à tout patron un patron "saturé", qui lui peut comporter de zéro à dix-huit items (ce sont les "parties commençantes"* de l'ensemble ordonné). L'on obtient ainsi tous les patrons saturés, i. e. les patrons "impliqués" par l'ordre de base.

Dans les paragraphes II.2 à II.6, nous suivrons pas à pas la construction des patrons "saturés" (II.2), en montrant la bijection entre "saturés" et "réduits" (II.3), leur codage en "vecteurs-scores" (II.4), leurs dénombrement et distribution (II.5), leur structure algébrique (II.6). Grâce à la formation de trois systèmes de générateurs, nous indiquerons (en II.7) des démarches générales de construction de l'ensemble des patrons saturés. Nous indiquerons également une procédure de construction économique, à partir des vecteurs-scores. Nous montrerons enfin l'isomorphisme entre la structure de treillis de l'ordre de base et celle de deux des systèmes de générateurs, caractéristique fondamentale de ce type de construction.

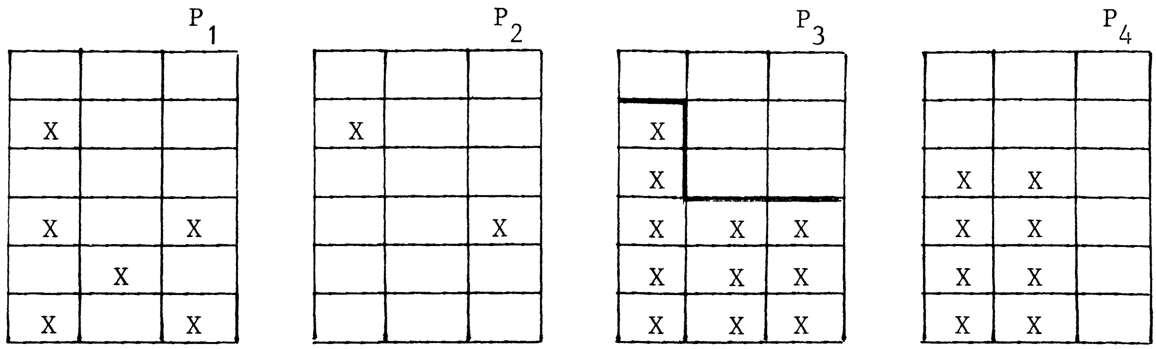
## II.2. Patrons quelconques, opérations de réduction et de saturation

Rappelons que nous identifions la réponse d'un sujet à un sous-ensemble P quelconque de l'ensemble E des 18 items, et que nous appellons *patron (de réponse)* un tel sous-ensemble.

### Représentation et notation des patrons quelconques

On peut figurer un patron quelconque sur la représentation graphique de l'ensemble des dix-huit items, en mettant une croix dans les cases correspondant à la réussite d'un item. La figure 3 donne des exemples de patrons ainsi figurés.

Pour abréger les notations, nous utiliserons désormais la notation (i,j) pour un item ($1 \leq i \leq 3$ , $1 \leq j \leq 6$) . Ainsi le patron $P_1$ de la figure 3a est égal à l'ensemble $\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(3,1),(3,3)\}$ . Dans ce patron, les items les plus difficiles sont (1,5) et (3,3) ; si l'on ne considère que ces deux items, on a le patron $P_2$ de la figure 3b.




3a 3b 3c 3d

Figure 3.

Les opérations de réduction et de saturation

A tout patron, on peut associer le patron formé des items les plus difficiles qu'il contient. Cette opération est appelée réduction.

Formellement, on définit l'application *réduction* $p \to r(P)$, par $r(P) = \{$éléments maximaux* de $P\}$ .

On peut également définir une opération inverse, la saturation. On remarque que dans le patron $P_1$ (ou $P_2$ ) ne figurent pas certains items moins difficiles que les items compris dans ce patron (par exemple, $(1,4)$ , ou $(3,2)$). Par contre, tous ces items "manquants" figurent dans $P_3$ ; on dira que $P_3$ a été obtenu par saturation à partir de $P_1$ .

Formellement, on définit l'application *saturation* $P \to s(P)$ par :

$$s(P) = \{(i',j') \in E \text{ tel qu'il existe } (i,j) \in P \text{ avec } (i',j') \underset{E}{\leqq} (i,j)\}$$

On remarque que, pour tout patron $P$ , on a les propriétés (quasi évidentes sur la figure 3) :

$$s o r(P) = s(P) \quad , \quad \text{et} \quad r o s(P) = r(P)$$

( o étant la composition des applications).

## II.3. Une correspondance bijective entre l'ensemble des patrons saturés et celui des patrons réduits.

Les opérations de saturation et de réduction définies ci-dessus conduisent à individualiser deux catégories de patrons ayant une structure très particulière. Un patron $P$ est *saturé* si pour tout $(i,j) \in P$

$$(i',j') \underset{E}{\leqq} (i,j) \text{ implique } (i',j') \in P \ .$$

Autrement dit, un patron saturé, dès qu'il contient un certain item, contient aussi tous les items moins difficiles que lui dans l'ordre de base.

Si on considère un patron comme la réponse d'un sujet, dire que le patron est saturé revient à dire que cette réponse est parfaitement "cohérente" avec l'ordre de difficulté défini sur tous les items : le sujet n'a "réussi" une tâche que s'il a réussi celles qui sont moins "difficiles". On dit aussi que le patron est "impliqué" par l'ordre de base.

Par définition l'application saturation associe à un patron quelconque un patron saturé. Par exemple $P_4$ (figure 3d) est un patron saturé obtenu à partir de la saturation du patron réduit ne comprenant que l'item (2,4) et $P_3$ est un patron saturé obtenu à partir de $P_1$ (ou de $P_2$ ).

Un patron P est *réduit* si et seulement si il n'existe aucun couple d'items comparables (pour l'ordre $\underset{E}{\leq}$ ) dans P . L'application de réduction associe à un patron quelconque un patron réduit. C'est ainsi qu'on obtient le patron réduit $P_2$ à partir de $P_1$ (ou de $P_3$ ).

On remarque qu'un seul item considéré comme patron, est un patron réduit (par exemple, le patron $\{(2,4)\}$ , qu'on obtient par réduction du patron $P_4$ , figure 3d), et qu'un patron réduit peut contenir au plus trois items (par exemple, $\{(1,5),(2,3),(3,1)\}$ est un tel patron réduit).

On peut définir une correspondance bijective entre patrons réduits et patrons saturés. En effet à tout patron saturé P correspond un patron réduit r(P) , et inversement à tout patron réduit correspond la patron saturé s(P) . On vérifie facilement que cette correspondance est bijective*, c'est-à-dire qu'on a le résultat suivant (cas particulier d'un fait bien connu pour un ensemble ordonné quelconque) :
Soient $\mathcal{S}$ l'ensemble des patrons saturés de E et $\mathcal{R}$ l'ensemble des patrons réduits de E ; les deux applications s (saturation) et r (réduction) sont deux bijections (inverses l'une de l'autre) entre ces deux ensembles :

$$\mathcal{S} \xrightarrow{r} \mathcal{R} \qquad\qquad \mathcal{R} \xrightarrow{s} \mathcal{S}$$

$$P \longrightarrow r(P) \qquad\qquad P \longrightarrow s(P)$$

On a :
si $P \in \mathcal{S}$, $s o r(P) = P$ si $P \in \mathcal{R}$, $r o s(P) = P$

Cette correspondance bijective entre les ensembles de patrons réduits et saturés est une caractéristique du modèle, vraie pour tout ordre de base.

## II.4. Le codage des patrons saturés en vecteurs-scores

Cette correspondance entre les ensembles de patrons réduits et saturés permet

de "coder" un patron saturé par le patron réduit correspondant, d'où une économie appréciable. Par exemple, le patron saturé $P_3$ (figure 3c) =
= {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)}
est codé par son patron réduit : $P_2$ = {(1,5),(3,3)} .

Nous allons utiliser un codage plus économique des patrons saturés, au moyen de "vecteurs-scores". Considérons de nouveau le patron $P_3$ ; étant saturé, on peut lui associer sur le dessin de la figure 3c, une frontière en "escalier" allant du point haut gauche au point bas droit (frontière soulignée sur cette figure). Inversement, si on se donne une telle frontière en escalier, il est clair qu'il lui correspond un patron saturé, composé des items placés sous la frontière. Dans notre exemple, une telle frontière comporte trois lignes horizontales et six lignes verticales, et elle est parfaitement définie, en se donnant, au choix, les niveaux des lignes horizontales ou verticales; soit pour $P_3$ : 533 ou 011333.

On prendra en fait le premier codage, plus commode dans la mesure où il n'utilise que trois chiffres (qu'on peut lire comme un nombre); donc $P_3$ sera codé 533, et $P_4$ (figure 3d) 440. D'autre part, ces trois chiffres ont une interprétation évidente : ainsi pour $P_3$ , le premier chiffre 5 signifie que parmi tous les items (1,j) de $P_3$ , c'est-à-dire les items de niveau 1 dans l'échelle $E_1$ , l'item le plus difficile est de niveau 5 dans l'échelle $E_2$ .

Formellement, à tout patron saturé P on associe son *vecteur-score* $\mathcal{v}(P)$ défini de la manière suivante :

$$\mathcal{v}(P) = (n_1,n_2,n_3) \text{ , avec, pour } i = 1,2,3$$

$$n_i(P) = n_i = \text{Max}\,\{j \in [1,\dots,6] \text{ tel que } (i,j) \in P\}$$

Pratiquement, on écrira le vecteur-score $(n_1,n_2,n_3)$ sous la forme $n_1n_2n_3$ , adoptée ci-dessus dans l'exemple de $P_3$ : 533 au lieu de (5,3,3) .

Ce patron P étant saturé, il est clair (considérer la frontière associée) que les trois nombres $n_1$ , $n_2$ , $n_3$ vérifient la condition (1) suivante :

(1) $$6 \geqq n_1 \geqq n_2 \geqq n_3 \geqq 0$$

Inversement, la donnée de trois entiers vérifiant la condition (1) définit une frontière en escalier (sur la représentations des figures 2 ou 3 de E ) et le patron saturé associé.

Il résulte des considérations précédentes (et d'un résultat général sur les ensembles ordonnés produit direct de deux ensembles totalement ordonnés, cf. par exemple, Aigner (1977)) le fait suivant :

Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des triplets d'entiers $(n_1,n_2,n_3)$ vérifiant la condition (1), l'application qui à tout patron saturé associe son vecteur-score est une bijection entre l'ensemble $\mathcal{S}$ des patrons saturés et l'ensemble $\mathcal{V}$.

II.5. Dénombrement et distribution des patrons saturés

Puisque d'après le paragraphe précédent les ensembles $\mathcal{S}$ (des patrons saturés), $\mathcal{R}$ (des patrons réduits) et $\mathcal{V}$ ( des vecteurs-scores) sont en bijection, on a :

$$|\mathcal{S}| = |\mathcal{R}| = |\mathcal{V}|$$

On peut calculer directement ce nombre en utilisant un résultat général sur un ensemble produit direct de deux ensembles totalement ordonnés (cf. par exemple, Aigner 1979). On obtient, pour notre exemple :

$$|\mathcal{S}| = \frac{(6+3)!}{6!3!} = \frac{9.8.7}{6} = 84$$

On peut aussi calculer le nombre de tous les patrons saturés à l'aide de la notion de "score". Notons $\sigma(P)$ et appelons *score* du patron saturé $P$ , le nombre d'items qu'il contient : si $n_1n_2n_3$ est le vecteur score de $P$ , on vérifie aisément que

$$\sigma(P) = |P| = n_1 + n_2 + n_3$$

Le score $\sigma(P)$ varie de 0 à 18, et on peut se proposer de calculer le nombre de patrons de score $\sigma(P) = k$ , nombre fixé. Là encore, des résultats classiques permettent d'obtenir ces nombres par récurrence (ils apparaissent en effet dans de nombreux problèmes, niveaux du "treillis de Young", distribution de la statistique somme des rangs dans le test de Wilcoxon - Mann - Whitney, nombre de "partages" d'un nombre au plus égal à 18 - en au plus trois nombres au plus égaux à 6). La figure 4 montre la distribution obtenue, c'est-à-dire le nombre de patrons de score fixé.

II.6. La structure algébrique de l'ensemble des patrons saturés : un treillis distributif

Quelle est la structure algébrique de l'ensemble des patrons saturés, des 84 patrons de l'ordre produit de notre exemple ? Dans ce paragraphe "patron" signifiera toujours patron saturé.

Il existe une relation d'ordre entre les patrons saturés, qui est simplement leur inclusion ensembliste :

$P \subseteq P'$ si tout item de $P$ appartient à $P'$ .

Là encore, un résultat général sur les ensembles ordonnés (cf. par exemple

## L'Ensemble des patrons saturés

A. Nomenclature

| | | | | | | | | Score | Effectif |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | 0 | 1 |
| 100 | | | | | | | | 1 | 1 |
| 200 | 110 | | | | | | | 2 | 2 |
| 300 | 210 | 111 | | | | | | 3 | 3 |
| 400 | 310 | 220 | 211 | | | | | 4 | 4 |
| 500 | 410 | 320 | 311 | 221 | | | | 5 | 5 |
| 600 | 510 | 420 | 411 | 330 | 321 | 222 | | 6 | 7 |
| 610 | 520 | 511 | 430 | 421 | 331 | 322 | | 7 | 7 |
| 620 | 611 | 530 | 521 | 440 | 431 | 422 | 332 | 8 | 8 |
| 630 | 621 | 540 | 531 | 522 | 441 | 432 | 333 | 9 | 8 |
| 640 | 631 | 622 | 550 | 541 | 532 | 442 | 433 | 10 | 8 |
| 650 | 641 | 632 | 551 | 542 | 533 | 443 | | 11 | 7 |
| 660 | 551 | 642 | 633 | 552 | 543 | 444 | | 12 | 7 |
| 661 | 652 | 643 | 553 | 544 | | | | 13 | 5 |
| 662 | 653 | 644 | 554 | | | | | 14 | 4 |
| 663 | 654 | 555 | | | | | | 15 | 3 |
| 664 | 655 | | | | | | | 16 | 2 |
| 665 | | | | | | | | 17 | 1 |
| 666 | | | | | | | | 18 | 1 |
| | | | | | | | | | 84 = N |

B. Histogramme des scores

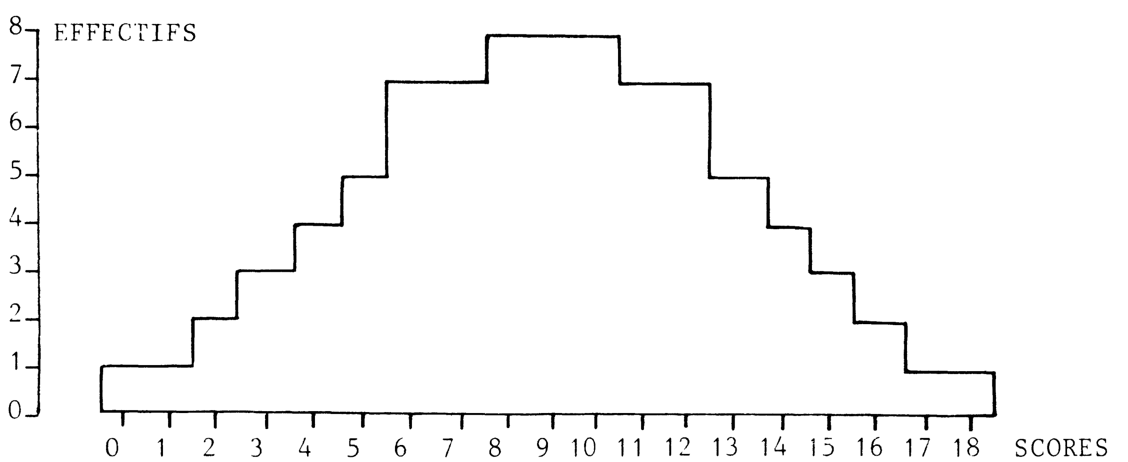



Figure 4.

Barbut et Monjardet, 1970) permet d'énoncer :

L'ensemble $\mathcal{S}$ des patrons saturés muni de l'ordre d'inclusion $\subseteq$ , est un treillis distributif. Dans ce treillis, les opérations supremum et infimum sont données par :

$P \vee P' = P \cup P'$ (items appartenant à P ou P' )

$P \wedge P' = P \cap P'$ (items appartenant à P et P' )

Le plus petit patron de $\mathcal{S}$ est le patron vide (aucun item "réussi") et le plus grand est le patron formé de tous les items, c'est-à-dire E .

Puisque l'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs-scores est en bijection avec $\mathcal{S}$ , $\mathcal{V}$ a la même structure de treillis distributif que $\mathcal{S}$ . L'ordre entre deux vecteurs-scores $n_1n_2n_3$ et $n'_1n'_2n'_3$ est défini par :

$n_1n_2n_3 \leqq n'_1n'_2n'_3$ si $n_1 \leqq n'_1$ , $n_2 \leqq n'_2$ et $n_3 \leqq n'_3$ .

Quant aux opérations du treillis, elles s'obtiennent ainsi :

$(n_1n_2n_3) \vee (n'_1n'_2n'_3) = [\mathrm{Max}\ (n_1,n'_1)\ ,\ \mathrm{Max}(n_2,n'_2)\ ,\ \mathrm{Max}\ (n_3,n'_3)]$

$(n_1n_2n_3) \wedge (n'_1n'_2n'_3) = [\mathrm{Min}\ (n_1,n'_1)\ ,\ \mathrm{Min}(n_2,n'_2)\ ,\ \mathrm{Min}\ (n_3,n'_3)]$

Par exemple, si on considère les patrons $P_3$ et $P_4$ de la figure 3, et leurs vecteurs-scores 533 et 440, on en déduit que le vecteur-score de $P_3 \cup P_4$ , égal à $v(P_3) \vee v(P_4)$, est 543 ; de même, le vecteur-score de $P_3 \cap P_4$ , égal à $v(P_3) \wedge v(P_4)$ , est 430.

La figure 5 représente le treillis des 84 patrons saturés, codés par leurs vecteurs-scores (autrement dit le treillis $\mathcal{V}$). Les patrons de même score $(\sigma(P) = n_1 + n_2 + n_3)$ sont alignés sur un niveau, et les successeurs* de chaque patron dans l'ordre d'inclusion (c'est-à-dire les patrons contenant un item de plus) sont donc figurés sur le niveau immédiatement supérieur; de même les prédécesseurs* d'un patron (qui comportent un item de moins), sont situés sur le niveau immédiatement inférieur. Un patron a au plus trois successeurs et trois prédécesseurs (immédiats), et au moins un tel successeur (sauf pour 666) et un tel prédécesseur (sauf pour 000). Un exemple de patron avec trois successeurs et trois prédécesseurs est 432.

## II.7. Construction de l'ensemble des patrons de réponse impliqués par l'ordre de base. Formation de trois systèmes de générateurs.

Nous allons maintenant définir certaines catégories particulières de patrons saturés, qui ont l'intérêt de constituer des systèmes de générateurs permettant la construction de l'ensemble des patrons impliqués par l'ordre de base.

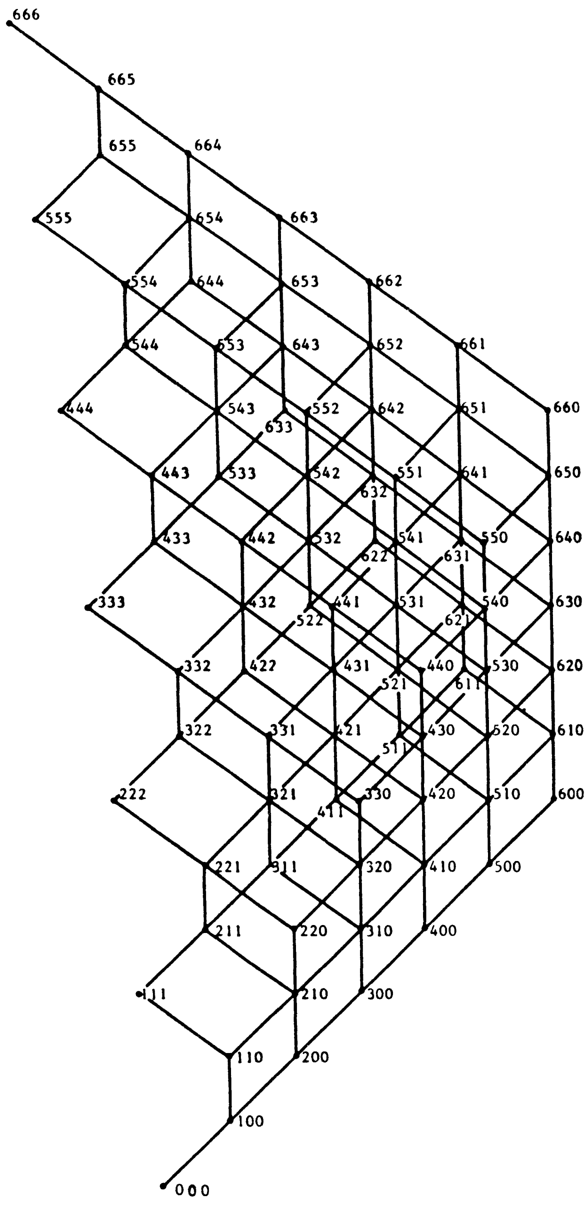



Figure 2a

Figure 2b

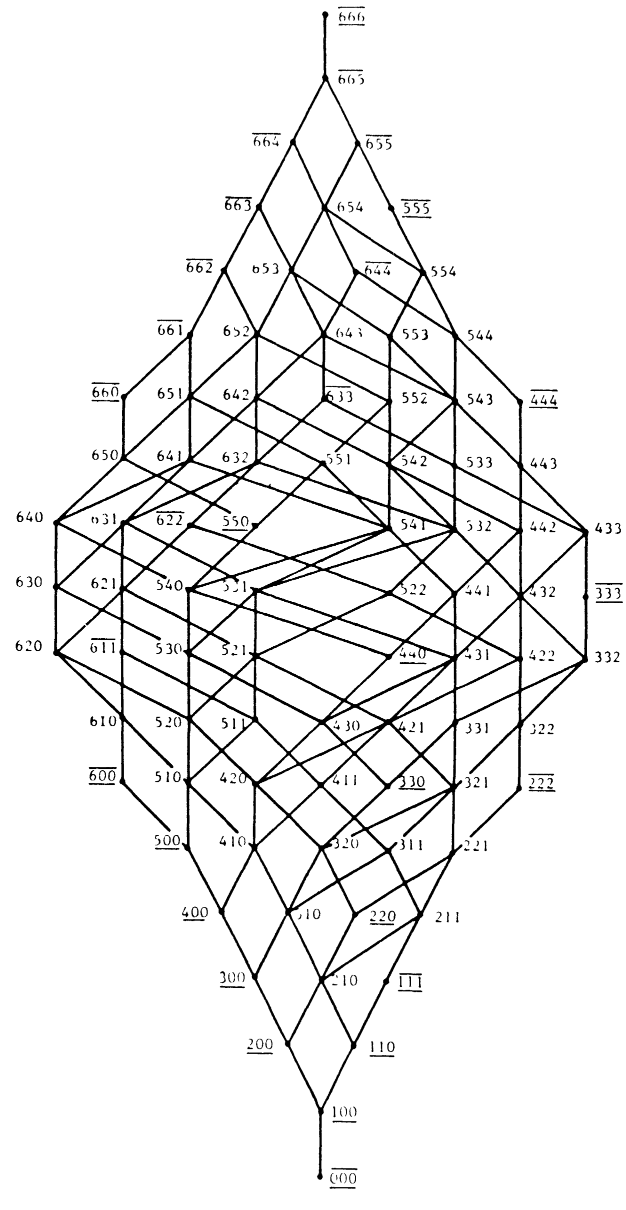



Figure 2. : Le treillis distributif des 84 patrons saturés.
(on a représenté deux des figurations possibles de ce treillis)

Un exemple est celui des patrons formés par saturation de chaque item de l'ordre de base, dont la structure d'ensemble est évidemment isomorphe à celle de l'ensemble des items. Nous les appellerons des "patrons simples". Nous définirons d'autres systèmes de générateurs à partir de patrons "co-simples" ou de patrons "doublement simples".

Nous montrerons comment, à partir de chacun de ces systèmes de générateurs, l'on peut former l'ensemble des patrons saturés par les opérations d'union, ou d'intersection, ou d'union et intersection (selon que l'on considère les ensembles de patrons simples, cosimples, ou doublement simples). L'on définira sur cette base des démarches systématiques de construction de l'ensemble des patrons saturés.

Trois systèmes de générateurs : patrons "simples" ($\cup$-irréductibles), "co-simples" ($\cap$-irréductibles) et "doublement simples" (irréductibles).

Lorsqu'un ensemble ordonné est un treillis (fini), il est naturel de considérer deux sortes d'éléments : les éléments sup-irréductibles qui ne sont pas supremum d'autres éléments, et les éléments inf-irréductibles qui ne sont pas infimum d'autres éléments. Ces éléments sup-irréductibles (inf-irréductibles) permettent d'engendrer tous les autres éléments par l'opération supremum (infimum).

Dans le cas du treillis des patrons saturés, ceci conduit aux définitions suivantes :

Un patron saturé est *union-irréductible*, *(inter-irréductible)* si et seulement si il ne peut être obtenu comme union (intersection) d'autres patrons.

Sur la figure 2b représentant le treillis $\mathcal{S}$ , les patrons $\cup$-irréductibles sont soulignés, et les patrons $\cap$-irréductibles sont surlignés; on les reconnaît aussi à ce qu'ils ont dans le premier cas un unique prédécesseur (ou zéro prédécésseur pour 000) et dans le second un unique successeur (ou 0 pour 666). Par exemple, 550 est $\cup$-irréductible, et 633 est $\cap$-irréductible. On utilise aussi la définition suivante : un patron (saturé) est *irréductible* si et seulement il est $\cup$-irréductible et $\cap$-irréductible.

Nous allons maintenant voir que les patrons saturés union ou inter-irréductibles s'obtiennent très simplement et ont une structure très particulière. Nous avons besoin des définitions suivantes :

Un patron (saturé) $P$ est *simple* si et seulement si il existe $e \in E$ tel que $P = \{e' \in E : e' \leqq_E e\}$ .

Autrement dit, un patron simple est un patron formé par tous les items moins - ou aussi - difficiles qu'un item $e$ donné. Il y a donc 18 patrons simples correspondant aux 18 items. Nous appellerons patron *composé* un patron qui n'est pas simple.

Un patron (saturé) $P$ est *cosimple* si et seulement si il existe $e \in E$ tel que $P = \{e' \in E : e \underset{E}{\leqq} e'\}$ .

Autrement dit, un patron est dit cosimple si et seulement si il est formé de tous les items qui ne sont pas plus - ou également - difficiles qu'un item $e$ donné. Par exemple, 644 est un patron cosimple associé à l'item (2,5). On a donc encore 18 patrons cosimples.

Un patron $P$ est doublement simple si et seulement si $P$ est simple et cosimple.

On a maintenant les faits suivants (cas particuliers, de résultats généraux sur le treillis distributif associé à un ensemble ordonné quelconque; cf. par exemple, Barbut et Monjardet, 1970).
Un patron $P$ est $\cup$-irréductible $\Longleftrightarrow$ $P = 000$ , ou $P$ est un patron simple.
Un patron $P$ est $\cap$-irréductible $\Longleftrightarrow$ $P = 666$ , ou $P$ est un patron cosimple.
D'où on déduit :
Un patron $P$ est irréductible $\Longleftrightarrow$ $P = 000$ ou $666$ , ou $P$ est un patron simple et cosimple.

Finalement, on a neuf patrons doublement simples (irréductibles) : 000, 111, 222, 333, 444, 555, 600, 660 et 666. On peut remarquer que chacun des sept patrons irréductibles différents de 000 et de 666 correspond à une bipartition particulière de l'ensemble des items; par exemple, au patron 444 correspond la bipartition :

$$E = \{(i,j) \underset{E}{\leqq} (3,4)\} \cup \{(i,j) \underset{E}{\geqq} (1,5)\}$$

Les patrons $\cup$-irréductibles ont une interprétation très claire. On a dit que ces patrons, engendraient par union tous les autres patrons saturés. Précisons ce point : notons $P(e)$ le patron simple associé à un item $e$ . Alors, pour un patron $P$ "composé" quelconque, on a

$$P = \bigcup_{e \in P} P(e)$$

Nous aurons ainsi trois modes de construction de l'ensemble des patrons saturés correspondant à l'ordre de base, par union des patrons simples, par intersection des patrons cosimples, ou par union et intersection des patrons doublement simples.

Une procédure économique de construction de l'ensemble des patrons saturés

Pour obtenir P comme union de patrons simples, il suffit de prendre les patrons simples P(e) correspondant aux items les plus difficiles de P , c'est-à-dire aux items du patron réduit r(P) ; donc

$$P = \bigcup_{e \in r(P)} P(e)$$

Comme un patron réduit ne contient qu'au plus trois items, on voit que tout patron saturé s'obtient comme union d'au plus trois patrons simples, ce qui donne une procédure systématique pour engendrer les 83 patrons saturés (différents de 000), à partir des patrons simples. En travaillant sur les vecteurs-scores, cette procédure sera - relativement - rapide; par exemple, $542 = 500 \vee 440 \vee 222$ .

La structure des patrons simples (ou cosimples) reproduit la structure des items

Considérons maintenant les 18 patrons simples. Puisqu'on a

$$e \leq_E e' \iff P(e) \subseteq P(e')$$

l'ordre sur ces 18 patrons reproduit exactement l'ordre de base sur les items, c'est-à-dire le treillis distributif, produit direct des deux échelles.

On pourrait répéter les considérations précédentes dans les cas des 18 patrons cosimples : tout patron saturé est intersection d'au plus trois patrons cosimples; l'ensemble ordonné par inclusion des 18 patrons cosimples est isomorphe au treillis distributif des 18 items.

Nous retrouvons ainsi deux fois la structure de treillis de l'ensemble des items, ce qui est une propriété fondamentale de ce mode de construction : elle est vraie quelque soit l'ordre de base. Noter toutefois que si l'ordre de base est un ordre total, patrons simples, cosimples ou doublement simples sont identiques puisque dans ce cas et dans ce cas seulement un item est moins difficile qu'un autre si et seulement si il n'est pas plus difficile que ce dernier.

Remarquons en conclusion que l'on dispose de trois systèmes de générateurs des patrons saturés, qui ont des caractéristiques distinctes et peuvent donc étayer des hypothèses psychologiques de structure également distincte.

## III. LA CARACTERISATION DES POPULATIONS EXPERIMENTALES EN FONCTION DE L'ORDRE DE BASE

*UNE TAXONOMIE DES COLLECTIFS DE REPONSE A PARTIR DE LA CORRESPONDANCE ENTRE PREORDRES D'IMPLICATION ET ENSEMBLE "FERMES" DE PATRONS. COLLECTIFS COHERENTS ET COLLECTIFS COMPATIBLES*

### III.1. Présentation

Dans cette partie, l'on cherche à définir certaines conditions de la vérification de la réalisation du modèle dans une population expérimentale. Nous nous intéressons donc maintenant à l'analyse d'ensembles quelconques de patrons, tels que peuvent en fournir diverses populations expérimentales susceptibles de "réussir" les items définis à partir de l'ordre de base. Nous appelons ces ensembles des "collectifs". Un *"collectif"* est défini comme toute partie $\mathscr{C}$ de l'ensemble $\mathscr{P}$ des patrons.

La question est de savoir selon quels critères et à partir de quelles démarches on peut comparer un collectif $\mathscr{C}$ quelconque à celui que forme l'ensemble $\mathscr{S}$ des patrons saturés, impliqué par l'ordre de base, que nous appellerons le "collectif de base".

Cette comparaison peut être faite au niveau des patrons, mais aussi à celui des implications entre items, associées à ces collectifs. On montre en effet qu'à un collectif quelconque correspond un système d'implication unique entre les items et que l'on peut dès lors comparer ce préordre d'implication à l'ordre de base, défini dans le modèle.

La partie III.3 a pour but d'expliquer comment on passe d'un collectif quelconque à un préordre d'implication sur les items et de montrer qu'inversement à tout préordre d'implication, ou même à toute relation quelconque sur les items, correspond un collectif "fermé" unique (III.4).

Dans les parties III.5 et III.6, l'on établit une taxonomie de l'ensemble des collectifs possibles. Par rapport à la correspondance entre un préordre d'implication sur les items et les ensembles de patrons doublement "fermés" évoqués ci-dessus, l'on définit quatre classes, chacune pouvant être caractérisée en termes de cohérence, puis de compatibilité avec le préordre d'implication. Une de ces classes permet de retrouver exactement l'ordre de base entre les items. Les trois autres s'en écartent de diverses façons. La taxonomie étant établie de telle sorte que tout collectif appartienne à l'une de ces classes, nous disposons ainsi d'un cadre général d'analyse de l'adéquation au modèle de tout ensemble de réponses, cadre susceptible d'être affiné tant au plan algébrique que statistique.

La première classe, celle des "collectifs cohérents complets", peut être identifiée à celle de populations de référence, à laquelle confronter les résultats expérimentaux. En effet, chacun de ces collectifs permet de restituer le collectif de base, l'ensemble de tous les patrons saturés dans l'ordre de base, dont nous avons montré la construction et donné diverses représentations en II.

Parmi les trois autres classes de "collectifs", une seule peut être considérée comme proprement "incompatible" avec le modèle. Nous terminerons donc par quelques remarques portant sur la caractérisation des collectifs fournis par des populations expérimentales, en fonction de la taxonomie proposée, et les conclusions que l'on peut en tirer dans une perspective de validation du modèle.

## III.2. Collectifs, collectifs fermés

Lorsqu'un groupe de sujets passe les 18 items, les réponses du groupe, considérées au point de vue statistique, constituent une distribution sur l'ensemble $\mathcal{P}$ des patrons : chaque patron a été obtenu un certain nombre (éventuellement nul) de fois. Nous appelons *collectif pondéré* la donnée d'une telle distribution. Formellement, un "collectif pondéré" peut être défini comme une application $\pi$ de l'ensemble $\mathcal{P}$ dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers $\geqq 0$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{N} \\ P & \longrightarrow & n_p \end{array}$$

$n_p$ est le nombre de fois où est apparu le patron $P$ ;

$\Sigma_{p \in \mathcal{P}} n_p$ est appelé l'*effectif* du collectif.

A tout collectif pondéré, on peut associer un collectif non pondéré (dit aussi "booléen" ou dichotomique) et défini par

$$n'_p = 1 \text{ si } n_p > 0 \text{ , et } n'_p = 0 \ ( = n_p) \text{ sinon.}$$

De même qu'on a identifié la réponse d'un sujet à l'ensemble des items "réussis" par ce sujet, on peut identifier un collectif non pondéré à l'ensemble de patrons $P$ pour lesquels $n_p = 1$ , donc à une partie de $\mathcal{P}$ . Inversement, à toute partie de $\mathcal{P}$ est associé de façon évidente un collectif non pondéré.

Dans la suite, nous appellerons donc *collectif* (sous-entendu non pondéré) toute partie de l'ensemble $\mathcal{P}$ des patrons, et nous noterons $\mathcal{C}$ un tel collectif.

Opération de fermeture d'un collectif

Un collectif $\mathcal{C}$ sera dit $\cup$-*fermé* , si

$$\forall\ P,P' \in \mathcal{C}\ ,\quad P \cup P' \in \mathcal{C}$$

Un collectif $\mathcal{C}$ sera dit $\cap$-*fermé* , si

$$\forall\ P,P' \in \mathcal{C}\ ,\quad P \cap P' \in \mathcal{C}$$

Un collectif $\mathcal{C}$ sera dit *(doublement) fermé*, si

$$\forall\ P,P' \in \mathcal{C}\ ,\ P \cup P' \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad P \cap P' \in \mathcal{C}$$

Dans la suite, collectif fermé voudra toujours dire collectif doublement fermé.

Il est clair qu'à un collectif quelconque $\mathcal{C}$ , on peut faire correspondre un plus petit collectif $\cup$-fermé ($\cap$-fermé) le contenant : il suffit de prendre toutes les réunions (intersections) des patrons de $\mathcal{C}$ . Existe-t-il de même un plus petit collectif fermé contenant $\mathcal{C}$ et comment l'obtient-on ?

La réponse à cette question est donnée au paragraphe suivant dans le cadre d'une construction générale associant collectifs et relations entre items.

## III.3. Collectifs quelconques, préordre d'implication et collectifs fermés

Soit $\mathcal{C}$ un collectif quelconque, et e un item quelconque.

Posons

$$\mathcal{C}\,(e) = \{p \in \mathcal{C} : e \in p\}$$

Autrement dit, $\mathcal{C}\,(e)$ est l'ensemble des patrons de $\mathcal{C}$ qui contiennent l'item e .

Soient e et e' deux items quelconques de E et $\mathcal{C}$ un collectif.
Posons :

$$e\ R_{\mathcal{C}}\,e' \iff e' \underset{\mathcal{C}}{\rightarrow} e \iff \mathcal{C}\,(e') \subseteq \mathcal{C}\,(e)$$

$R_{\mathcal{C}}$ est donc une relation binaire définie sur l'ensemble des items, $\underset{\mathcal{C}}{\rightarrow}$ est la relation réciproque de $R_{\mathcal{C}}$ . Du fait de la définition de ces deux relations, par l'inclusion des $\mathcal{C}\,(e)$ , il est clair que ce sont deux préordres (réciproques); les équivalences associées notées $S_{\mathcal{C}}$ sont définies par :

$$e\ S_{\mathcal{C}}\,e' \iff e' \underset{\mathcal{C}}{\iff} e \iff \mathcal{C}\,(e') = \mathcal{C}\,(e)\ .$$

Pratiquement, l'interprétation de ces préordres est claire; si $e\ R_{\mathcal{C}}\,e'$ , un patron de $\mathcal{C}$ ne contient l'item e' que s'il contient l'item e ; on peut dire que - par rapport à $\mathcal{C}$ (ou à tout ensemble de sujets dont le collectif non pondéré de réponses est $\mathcal{C}$ ) - e est "moins difficile" que e' (relation $R_{\mathcal{C}}$) ou que e' "implique" e (relation $\underset{\mathcal{C}}{\Rightarrow}$ ). Si e $S_{\mathcal{C}}$ e' , ou e' $\underset{\mathcal{C}}{\Leftrightarrow}$ e , on dira que e et e' sont "$\mathcal{C}$-équivalents" (on peut dire qu'ils sont de "même difficulté" ou qu'ils "s'impliquent mutuellement").

En pratique, on représente souvent un collectif $\mathcal{C}$ par un tableau où les patrons de $\mathcal{C}$ figurent en lignes, les items en colonnes, et où l'on met un 1 (0) à l'intersection d'une ligne et d'une colonne si le patron correspondant à cette ligne contient (ne contient pas) l'item correspondant à cette colonne. Les préordres définis ci-dessus "se lisent" alors sur ce tableau en comparant les colonnes. Par exemple, e' implique e (ou e $R_{\mathcal{C}}$ e') si et seulement si, à tout 1 dans la colonne e' correspond - sur la même ligne - un 1 dans la colonne e (ou de façon équivalente, à tout 0 dans la colonne e correspond - sur la même ligne - un 0 dans la colonne e' ). La construction précédente associe à tout collectif $\mathcal{C}$ un préordre $R_{\mathcal{C}}$ (ou son réciproque). Pour former sur cette base des collectifs fermés, donnons-nous maintenant une relation binaire R quelconque entre items, qu'on peut interpréter comme une relation de difficulté (non nécessairement transitive) entre items (la réciproque de R étant interprétée comme une relation d'implication).

Nous disons qu'un patron P est *R-saturé* si et seulement si :
[e' $\in$ P et e R e'] implique [e $\in$ P] .

Posons
$\mathcal{C}_R$ = {patrons R-saturés}

$\mathcal{C}_R$ est un collectif, dont on vérifie facilement qu'il est (doublement) fermé et contient le plus petit patron 000 et le plus grand 666.

## III.4. La correspondance entre préordres d'implication et collectifs fermés. Les critères d'une taxonomie des collectifs

Ainsi à tout collectif est associé un préordre sur les items et à toute relation sur les items est associé un collectif fermé. Les propriétés théoriques de cette correspondance sont rappelées dans Monjardet (1970).

Nous ne donnerons ici que les résultats intéressants dans notre contexte :

1°) L'ensemble de tous les collectifs fermés est en bijection avec l'ensemble de tous les préordres définissables sur E .

En d'autres termes, le collectif fermé associé à un préordre d'implication est unique et inversement à tout préordre d'implication sur les items correspond un collectif fermé unique.

2°) Si $\mathcal{C}$ est un collectif quelconque, il existe un plus petit collectif fermé contenant $\mathcal{C}$ ; si on note $\bar{\mathcal{C}}$ ce collectif, on l'obtient par la formule :

$$\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C}_{R_{\mathcal{C}}}$$

Autrement dit, pour construire $\bar{\mathcal{C}}$ , on construit d'abord le préordre $R_{\mathcal{C}}$ associé à $\mathcal{C}$ , puis on prend tous les patrons $R_{\mathcal{C}}$-saturés. On démontre qu'on peut aussi obtenir $\bar{\mathcal{C}}$ par l'une quelconque des procédures suivantes :

a) prendre toutes les unions des patrons de $\mathcal{C}$ , puis toutes les intersections des patrons ainsi obtenus.

b) prendre toutes les intersections des patrons de $\mathcal{C}$ , puis toutes les unions des patrons ainsi obtenus.

3°) Si R est une relation binaire quelconque sur E , il existe un plus petit préordre contenant R ; si on le note $\bar{R}$ on l'obtient par la formule :

$$\bar{R} = R_{\mathcal{C}_R}$$

$\bar{R}$ est le préordre appelé classiquement la fermeture transitive de R : c'est le plus petit préordre contenant R ou égal à R .

En d'autres termes, les constructions que l'on vient d'indiquer permettent d'inscrire soit un collectif quelconque, soit une relation binaire quelconque sur E , dans le cadre de la correspondance générale entre préordres et collectifs fermés, indiquée ci-dessus.

Ces constructions s'appliquent bien évidemment à la formation de l'ensemble de tous les patrons saturés dans l'ordre de base, dont nous avons décrit la construction dans la partie II. Le collectif associé à l'ordre de base $\underset{E}{\leqq}$ défini sur les items est l'ensemble $\mathcal{S}$ des patrons saturés, défini en II.6, et il est bien sûr fermé. Inversement, le préordre R associé à ce collectif $\mathcal{S}$ redonne exactement l'ordre de base $\underset{E}{\leqq}$ .

D'autre part, ces constructions permettent d'associer à un collectif quelconque, par exemple celui que fournit une population expérimentale, un préordre d'implication et un collectif fermé, directement comparables à ceux qui se construisent à partir de l'ordre de base. C'est ainsi au double critère du collectif fermé et du préordre associé que nous allons maintenant distribuer tous les collectifs en quatre classes, deux "cohérentes", puis une simplement "compatible" avec l'ordre de base, et une enfin "incompatible" avec l'ordre de base.

III.5. Deux classes de collectifs cohérents avec l'ordre de base, les collectifs cohérents complets et incomplets

Un collectif $\mathcal{C}$ est *cohérent* si le collectif fermé $\bar{\mathcal{C}}$ qu'il engendre ne contient que des patrons saturés. Formellement,

$$\mathcal{C} \text{ cohérent} \iff \bar{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{S} \iff [\text{pour tout } P, P \in \mathcal{S}, \; P \cup P' \text{ et } P \cap P' \in \mathcal{S}]$$

Il est clair qu'un collectif cohérent n'est formé que de patrons saturés (donc $\mathcal{C}$ est cohérent si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$). Suivant que ces patrons saturés permettent ou non d'engendrer (par union et intersection) les 84 patrons saturés, on distinguera entre collectif cohérent *complet* ou *incomplet*. Formellement on a les définitions suivantes :

$$\mathcal{C} \text{ collectif cohérent complet} \iff \bar{\mathcal{C}} = \mathcal{S}$$

$$\mathcal{C} \text{ collectif cohérent incomplet} \iff \bar{\mathcal{C}} \subset \mathcal{S}$$

Autrement dit, pour un collectif cohérent incomplet, donc formé de patrons saturés, il existe au moins un des 84 patrons saturés qu'on ne peut obtenir par union ou intersection de ces patrons.

Les résultats du paragraphe III.5 permettent de caractériser aussi ces collectifs *par leurs préordres associés*. On a :

$$\mathcal{C} \text{ complet} \iff (R_{\mathcal{C}} = \underset{E}{\leqq}) \iff (\underset{\mathcal{C}}{\rightarrow} = \underset{E}{\rightarrow})$$

$$\mathcal{C} \text{ incomplet} \iff (R_{\mathcal{C}} \supset \underset{E}{\leqq}) \iff (\underset{\mathcal{C}}{\rightarrow} \supset \underset{E}{\rightarrow})$$

Ainsi parmi les collectifs cohérents $\mathcal{C}$, les complets sont ceux dont le préordre d'implication associé $\underset{\mathcal{C}}{\rightarrow}$ est exactement l'ordre d'implication de base entre les items, et les incomplets sont ceux dont le préordre d'implication associé contient (strictement) l'ordre d'implication. Un exemple - extrême - de collectif incomplet est celui formé par un seul patron saturé P ; dans ce cas le préordre d'implication associé, qu'on peut noter $\underset{P}{\rightarrow}$ est à deux classes : l'ensemble P des items, et l'ensemble $\bar{P} = E - P$ des items n'appartenant pas à P ; deux items dans P (ou dans $\bar{P}$) s'impliquent mutuellement; enfin tout item de $\bar{P}$ implique tout item de P ; autrement dit, tout item de P est moins difficile que tout item de $\bar{P}$ .

La caractérisation des collectifs cohérents donnée ci-dessus est "générale" (elle serait valable pour toute structure d'ordre de base définie sur les items). Mais le fait que l'ordre de base défini sur E soit lui-même un treillis distributif, produit direct de deux ensembles totalement ordonnés, va nous permettre une caractérisation plus explicite. On peut en effet montrer (cf. Monjardet, 1987) qu'un collectif cohérent est complet si et seulement si il contient les neuf patrons irréductibles, définis en II.7. Si nous notons $\mathcal{J}$ l'ensemble de ces neuf patrons irréductibles, on a formellement :

$$\mathcal{C} \text{ collectif (cohérent) complet} \Longleftrightarrow \mathcal{J} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{S} \quad .$$

Une conséquence évidente est que

$\mathcal{C}$ collectif cohérent incomplet $\Longleftrightarrow$ Il existe au moins un patron irréductible non contenu dans $\mathcal{C}$ .

Autrement dit, pour obtenir un collectif complet, il suffit de prendre les neuf patrons irréductibles auxquels on adjoint un ensemble quelconque d'autres patrons saturés (il y a donc $2^{75}$ tels collectifs !) et pour obtenir un collectif incomplet, il suffit de prendre un ensemble quelconque de patrons saturés ne contenant pas au moins un patron saturé irréductible.

On peut introduire une autre distinction à l'intérieur des collectifs cohérents complets. Nous disons qu'un collectif $\mathcal{C}$ cohérent est *union complet (inter complet)* si et seulement si tout patron saturé est union (intersection) des patrons de $\mathcal{C}$ . On a la caractérisation suivante de ces collectifs :

Un collectif $\mathcal{C}$ est union complet (inter complet) si $\mathcal{C}$ contient les 18 patrons saturés simples (ou cosimples).

## III.6. Deux classes de collectifs non-cohérents, les collectifs compatibles et incompatibles

Un collectif $\mathcal{C}$ est dit *non-cohérent* si et seulement si il n'est pas cohérent, c'est-à-dire si le collectif fermé $\bar{\mathcal{C}}$ associé à $\mathcal{C}$ n'est pas contenu ou égal à l'ensemble $\mathcal{S}$ des 84 patrons saturés. Nous distinguerons deux classes de tels collectifs, ceux pour lesquels $\bar{\mathcal{C}}$ contient $\mathcal{S}$ et ceux pour lesquels il ne le contient pas.

Un collectif non cohérent $\mathcal{C}$ est dit *compatible* si et seulement si $\bar{\mathcal{C}} \supset \mathcal{S}$ . Autrement dit, un tel collectif engendre par union et intersection de ses patrons, tous les patrons saturés, mais aussi des patrons non saturés. Comme au paragraphe précédent, on peut caractériser ces collectifs par les préordres qui leur sont associés :

$$\mathcal{C} \text{ est un collectif (non cohérent) compatible} \Longleftrightarrow (R_{\mathcal{C}} \subset \leq_E) \Longleftrightarrow (\vec{\mathcal{C}} \subset \vec{E}) \ .$$

Ainsi le préordre d'implication $\underset{\mathcal{C}}{\rightarrow}$ d'un collectif compatible est strictement contenu dans l'ordre d'implication de base entre les items; en ce sens on peut dire que $\underset{\mathcal{C}}{\rightarrow}$ est compatible avec cet ordre de base. On notera que $\underset{\mathcal{C}}{\rightarrow}$ est en fait un ordre, puisqu'il est contenu dans $\underset{E}{\rightarrow}$ , mais qu'il ne contient que certaines des 108 implications élémentaires de cet ordre.

Compte-tenu de la caractérisation des collectifs cohérents complets de III.3, on déduit la caractérisation suivante des collectifs (non cohérents) compatibles :

$\mathcal{C}$ collectif compatible $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ contient l'ensemble $\mathcal{J}$ des patrons irréductibles et au moins un patron non saturé.

Finalement, on définit un *collectif non cohérent incompatible* de la manière suivante :

$\mathcal{C}$ est un collectif incompatible $\Longleftrightarrow$ $\bar{\mathcal{C}} \not\supseteq \mathcal{S}$ et $\bar{\mathcal{C}} \not\subseteq \mathcal{S}$ .

Autrement dit, il existe des patrons saturés qui ne sont pas dans les patrons engendrés par $\mathcal{C}$ , et il existe des patrons de $\mathcal{C}$ non saturés.

La caractérisation de tels collectifs par leur préordre associé est la suivante :

$\mathcal{C}$ incompatible $\Longleftrightarrow$ $(R_{\mathcal{C}} \not\supseteq \underset{E}{\leqq}$ et $R_{\mathcal{C}} \not\subseteq \underset{E}{\leqq}) \Longleftrightarrow (\underset{\mathcal{C}}{\rightarrow} \not\subseteq \underset{E}{\rightarrow})$ et $(\underset{\mathcal{C}}{\rightarrow} \not\supseteq \underset{E}{\rightarrow})$

Autrement dit, il existe des implications de base qui ne sont pas dans le préordre d'implication associé à $\mathcal{C}$, et ce préordre contient des implications qui ne sont pas de base.

## III.7. La taxonomie des collectifs et l'étude du modèle. Validation expérimentale et propriétés générales.

La taxonomie des collectifs que nous proposons ici n'est encore qu'un cadre très général. Ce cadre a l'intérêt de préparer une démarche fine de vérification expérimentale de l'hypothèse exprimée par le modèle et de contenir les éléments d'une analyse des propriétés formelles de celui-ci.

Nous avons appris à ranger des collectifs quelconques - des populations expérimentales - en quatre classes. Que peut-on en dire ?

Avec les populations expérimentales relevant de la classe des "incompatibles", l'hypothèse traduite par l'ordre de base est infirmée au plan algébrique. Il n'en va pas de même lorsqu'ils prennent place dans la classe des "compatibles" ou celle des "cohérents incomplets".

Les collectifs compatibles contiennent outre tous les patrons saturés dans l'ordre de base, des patrons non saturés. C'est un problème classique, bien connu des utilisateurs des analyses hiérarchiques du modèle de Guttman, celui de "l'erreur" au sens que lui donne l'auteur, c'est-à-dire un écart au modèle. Il est d'usage de se fixer un certain taux "acceptable" d'erreurs, au-delà duquel l'on considère que l'hypothèse est infirmée par les résultats expérimentaux. Ici, nous avons l'avantage de savoir que les "erreurs" sont seulement des lacunes, et non des déviations par rapport à l'ordre de base, ce qui peut conduire à une tactique quelque peu différente.

Avec les collectifs cohérents incomplets, le problème est autre. Il renvoie aux caractéristiques relatives des populations et du matériel expérimental. Il peut tenir soit à l'effectif insuffisant de la population expérimentale, compte-tenu des exigences du modèle, ou plus probablement à des phénomènes de "plafond", ou de "plancher", également bien connus, qui résultent de la trop grande "facilité" ou "difficulté" des activités sollicitées par le matériel expérimental pour une population donnée. Dans ces cas, la conclusion concerne la construction du dispositif expérimental, sans que l'on ait appris grand chose sur l'ordre de base.

Cependant, les questions fondamentales pour l'élaboration d'une méthodologie de l'étude de la coordination entre échelles ordinales se rencontrent dans la classe des collectifs cohérents complets, qui permet d'examiner des propriétés du modèle d'un point de vue théorique. Il s'agit d'une classe très riche. Il y a plusieurs façons de construire l'ensemble de tous les patrons saturés de l'ordre de base ainsi que nous l'avons vu dans la partie précédente et chacune d'elles a des caractéristiques propres. C'est dans ce cadre que nous situerons la prochaine étape de notre travail. Elle concerne les modes de liaison entre les ordres initiaux, dont l'ordre de base est le produit ainsi que la détermination de "chemins individuels du développement" respectant le système implicatif correspondant. Ces chemins sont identifiés aux chaînes maximales joignant dans le treillis des patrons saturés la partie vide (000) à la partie E (666) . Ainsi pourra-t-on caractériser l'éventail des chemins de développement qui s'offrent à l'enfant dans le cadre d'un système d'observation déterminé, d'après leur variété, mais aussi directement en termes de patrons de réponses observables.

## BIBLIOGRAPHIE

AIGNER M., *Combinatorial Theory*, Springer Verlag, 1979.

BARBUT M., MONJARDET B., *Ordre et Classification, Algèbre et Combinatoire*, (2 tomes), Paris, Hachette, 1970.

BIRKHOFF G., *Lattice Theory*, Colloquium Publications Vol. 25, Amer. Math. Soc., Providence, 1967 (third edition).

COOMBS C. H., *A Theory of Data*, New York, Wiley, 1964.

FLAMENT Cl., "Analyse d'un questionnaire bidimensionnel", *Bulletin du C.E.R.P.*, 13, 4 (1964), 245-257.

FLAMENT Cl., *L'Analyse booléenne de questionnaire*, Paris, Mouton, 1976.

HENNING H. J., RUDINGER G., "Analysis of qualitative data in developmental psychology, in *Individual Development and social change* (Nesselroad J. R., Von Eye A., eds.), New York, Academic Press, 1985.

MATALON B., *L'Analyse hiérarchique*, Paris, Mouton, 1965.

MONJARDET B., "Tresses, fuseaux, préordres et topologies", *Math. Sci. Hum.* 30 (1970), 11-22.

MONJARDET B., *On the codings of finite posets and distributive lattices into direct product of chains*, Paris, Publications du C.A.M.S., 1987.

NETCHINE-GRYNBERG G., "Vérification expérimentale de relations d'ordre et analyse factorielle", Paris, Rapport au 21ème Congrès International de Psychologie, 1976.

NETCHINE-GRYNBERG G., "Développement modèle et modèles de développement", Psychologie française 29(1) (1984), 22-28.

NETCHINE-GRYNBERG G., NETCHINE S., "Le développement mental et les temporalités de l'enfance, in *Introduction à la psychologie de l'enfant* (Hurtig M., Rondal P., eds), Liège, Mardaga, 1981.

## ANNEXE : GLOSSAIRE DE QUELQUES TERMES DE LA THEORIE DES ENSEMBLES ORDONNES

### Ensemble ordonné

Un ensemble ordonné $E$ est un ensemble muni d'une relation d'ordre, i.e. d'une relation, notée $\leqq$ , qui vérifie les trois propriétés de réflexivité $(x \leqq x)$, antisymétrie $(x \leqq y$ et $y \leqq x \Rightarrow x = y)$ et transitivité $(x \leqq y$ , $y \leqq z \Rightarrow x \leqq z)$. On le note souvent $(E, \leqq)$ .

Au lieu d'ensemble ordonné, on dit aussi ensemble partiellement ordonné. Un ensemble ordonné $(E, \leq)$ est totalement ordonné si sa relation d'ordre est totale $(x \nleqq y \Rightarrow y \leqq x)$ .

### Maximal

Un élément $m$ d'un ensemble ordonné $E$ est maximal s'il n'existe pas

$x \in E$ avec $m < x$ (i.e. $m \leqq x$ et $m \neq x$) .

Partie commençante

Une partie $C$ d'un ensemble ordonné est commençante si pour tout $x \in C$ et pour tout $y \leqq x$ , on a $y \in C$ .

Partie libre

Une partie $L$ d'un ensemble ordonné est libre si pour tous $x,y \in L$ , $x$ et $y$ sont incomparables (i.e. $x \nleqq y$ et $y \nleqq x$). On dit aussi que $L$ est une antichaîne.

Prédécesseur

Soient $(E,\leqq)$ un ensemble ordonné et $x \in E$ ; $y$ est un prédécesseur de $x$ si $y < x$ et s'il n'existe pas $z$ tel que $y < z < x$ . Dans ce cas, on dit aussi que $y$ est couvert par $x$ .

Produit direct

Soient $(E_1,\leqq_1)$ et $(E_2,\leqq_2)$ deux ensembles ordonnés. Leur produit direct est l'ensemble $E_1 \times E_2 = \{(x_1,x_2), x_1 \in E_1 , x_2 \in E_2\}$ ordonné par la relation d'ordre : $(x_1,x_2) \leqq (y_1,y_2) \iff x_1 \leqq_1 y_1$ et $x_2 \leqq_2 y_2$ .

Réciproque

Soit $R$ une relation sur un ensemble; la relation réciproque de $R$ est la relation notée $R^r$ définie par $x R^r y$ si et seulement si $y R x$ . Dans le cas d'une relation d'ordre, l'ordre réciproque est souvent appelé l'ordre dual.

Successeur

Soient $(E,\leqq)$ un ensemble ordonné et $x \in E$ ; l'élément $y$ est un successeur de $x$ , si $x < y$ et s'il n'existe pas $z$ tel que $x < z < y$ . Dans ce cas on dit aussi que $y$ couvre $x$ .

Treillis

Un ensemble ordonné $(E,\leqq)$ est un treillis si deux éléments quelconques $x$ et $y$ de $E$ admettent toujours un infimum et un supremum; l'infimum noté $x \wedge y$ est le plus grand des éléments $z$ tels que $z \leqq x$ et $z \leqq y$ ; le supremum noté $x \vee y$ est le plus petit des éléments $t$ tels que $x \leqq t$ et $y \leqq t$ .

Treillis distributif

Un treillis est distributif si ses opérations d'infimum et supremum vérifient les règles de distributivité :

$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ et $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ .