MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

H. BRENY

Quelques propriétés générales des systèmes sériels de représentation proportionnelle

Mathématiques et sciences humaines, tome 94 (1986), p. 33-44

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1986__94__33_0>

Math. Sci. hum. (*24*^{e}année, n°94, *1986*, p.33-44)

QUELQUES PROPRIETES GENERALES DES SYSTEMES SERIELS DE REPRESENTATION PROPORTIONNELLE

H. BRENY *

Résumé

Les systèmes "sériels" de représentation proportionnelle partent d'une table de quotients (des chiffres électoraux par une suite croissante de diviseurs) et attribuent les sièges disponibles aux plus grands de ces quotients. Le système Dhondt, pour lequel le n-ième diviseur vaut n, occupe une place centrale dans l'ensemble des systèmes sériels ; d'une part, il est le seul qui attribue toujours à chaque liste au moins la partie entière de son quotient électoral ; d'autre part, il sert d'étalon "naturel" pour départager les systèmes qui avantagent soit les listes "faibles" soit les listes "fortes".

---

* Chaire de probabilités et statistique mathématique, Université de l'Etat à Liège (Belgique)

1. POSITION DU PROBLÈME

1,1. Définitions

1,11. La situation considérée ici (représentation proportionnelle *simple*) met en jeu une circonscription totalement autonome, où T votes valides doivent servir à désigner S représentants parmi les candidats présentés par L listes (chacune de S candidats). Le diviseur électoral de la circonscription est

$$Q = \frac{T}{S} .$$

Les chiffres électoraux des listes sont $v_1,\dots,v_L$; on admet que les listes sont numérotées de telle façon que

$$v_1 > v_2 > \dots > v_L \quad . \qquad (1)$$

On note $s_1,\dots,s_L$ les nombres d'élus des L listes (ils dépendent évidemment du système électoral utilisé).

1,12. La représentation serait idéalement proportionnelle si on avait

$$\frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2} = \dots = \frac{s_L}{v_L}$$

c.à d.

$$s_i = \frac{v_i}{Q} \quad (i = 1,\dots,L); \qquad (2)$$

cela est impossible car les quotients électoraux v_i/Q ne sont jamais tous entiers : $v_i = e_i Q + x_i \quad e_i$ entier $\geqq 0$

$$(i = 1,\dots,L) \qquad 0 \leqq x_i < Q \quad .$$

1,13. Le principe même de la représentation proportionnelle veut que $s_i \geqq e_i \quad (i=1,\dots,L)$; car si une liste a "droit", par proportionalité, à e_i sièges plus une fraction, il serait inique qu'elle reçoive moins que e_i sièges.

Les entiers e_i sont les *dus proportionnels* des listes en présence; il est clair que

$$\sum_1^L e_i = S - K, \qquad 1 \leqq K \leqq L-1.$$

Dire d'un système électoral qu'il est *régulier*, c'est dire que, en toute circonstance, selon ce système

$$s_i \geqq e_i \quad .$$

1,14. Les systèmes *directs* attribuent avant tout à chaque liste son dû proportionnel; les K sièges restants sont attribués selon des règles diverses (plus grands restes,plus forte moyenne,etc). Ces systèmes sont ipso facto réguliers.

1,2. Systèmes sériels

1,21. Les systèmes dits *sériels* ne partent pas des dus proportionnels; bien plutôt partent-ils d'une table de S.L quotients

$$q_i(n) = \frac{v_i}{d(n)} \qquad \begin{array}{l} i=1,\dots,L \\ n=1,\dots,S \end{array}$$

où les diviseurs strictement positifs

$$d(1) \quad d(2) \quad \dots \quad d(n) \quad \dots$$

forment une suite strictement croissante. Les S plus grands quotients sont dits *utiles*. Chaque quotient utile provoque l'attribution d'un siège à la liste à laquelle il se rapporte.

La suite $\qquad q_i(1) \quad q_i(2) \quad \dots \quad q_i(S)$

comporte donc s_i ($\geqq 0$) quotients utiles.

1,22. Il est clair que,sans la moindre restriction de la généralité,on peut supposer $d(1) = 1$ (les diviseurs sont alors dits *normés*); on supposera dans la suite qu'il en est ainsi.

1,23. Il est clair que

- tout quotient utile est plus grand que tout quotient non-utile
- tout quotient plus petit qu'un quotient non-utile est lui-même non-utile
- tout quotient plus grand qu'un quotient utile est lui-même utile.

1,24. Les principaux systèmes sériels sont

- le système Dhondt (noté Dh),largement utilisé (Belgique, R.F.A.,Israel,Japon),pour lequel $d(n) = n$; il jouit de la propriété suivante :

$$\min\left(\frac{v_1}{s_1},\dots,\frac{v_L}{s_L}\right) = \max\left\{ \min\left(\frac{v_1}{u_1},\dots,\frac{v_L}{u_L}\right) \lesseqgtr u_i \geqq 0 \ , \ u_1+\dots+u_L=S\right\}$$

(les u_i sont entiers,bien entendu)

- le système Sainte-Laguë (noté S.L.),qui n'est actuellement utilisé nulle part,pour lequel $d(n) = 2n-1$; il jouit

de la propriété suivante :

$$\sum_{i=1}^{L} \frac{1}{v_i}\left(\frac{v_i}{Q} - s_i\right)^2 = \min\left\{ \sum_{i=1}^{L} \frac{1}{v_i}\left(\frac{v_i}{Q} - u_i\right)^2 \,\middle|\, u_i \geqq 0,\ u_1+\ldots+u_L=S \right\}$$

- le système Imperiali (Im),utilisé en Belgique pour les élections locales,pour lequel $d(n) = n+1$
- le système "danois" (Dan),utilisé au Danemark au 2ème stade d'un processus étagé de R.P.,pour lequel $d(n) = 3n-2$
- les modifications "u.SL" du système Sainte-Laguë,pour lesquelles les diviseurs non-normés sont

$$d'(1) = u\ ,\ d'(2) = 3\ ,\ \ldots\ ,\ d'(n) = 2n-1\ \ldots (1<u<3)$$

et,donc,les diviseurs normés sont

$$d(1) = 1\ ,\ d(2) = 3/u\ ,\ \ldots\ ,\ d(n) = (2n-1)/u\ \ldots$$

(le système 1,4.SL est utilisé dans les pays scandinaves).

1,3. Densité. Comparabilité

1,31. Si le système sériel X' utilise la suite de diviseurs normés $d'(n)$, et le système X" la suite $d''(n)$,dire que X" est *moins dense* que X',c'est dire que

$$\text{pour tout } n\ ;\quad \frac{d''(n+1)}{d''(n)} \geqq \frac{d'(n+1)}{d'(n)} \tag{3}$$

(l'inégalité étant stricte au moins une fois).

1,32. Il est clair que,si X" est moins dense que X',alors

- si $m > n$: $\dfrac{d''(m)}{d''(n)} \geqq \dfrac{d'(m)}{d'(n)}$, $\dfrac{d''(m)}{d'(m)} \geqq \dfrac{d''(n)}{d'(n)}$
- si $\dfrac{d''(n+1)}{d''(n)} > \dfrac{d'(n+1)}{d'(n)}$ et $m \geqq n$:

$$\frac{d''(m+1)}{d''(n)} > \frac{d'(m+1)}{d'(n)}\ .$$

1,33. Si,de deux systèmes sériels,l'un est moins dense que l'autre,ces systèmes sont dits *comparables*.

On note que la comparabilité n'est pas transitive (exemple contraire : les systèmes Dh,SL,et u.SL avec $1,5<u<3$).

1,35. Dire d'un système sériel qu'il est *concordant*, c'est dire qu'il est comparable au système Dhondt.

Le rôle d'étalon ainsi attribué à ce système tient à ses propriétés particulières, illustées aux parag. 2 et 3 ci-après.

1,4. <u>Proportionnement</u>

1,41. Il est une opération, préalable à l'élection, par laquelle les sièges à pourvoir à l'assemblée élue sont répartis entre les circonscriptions électorales; souvent, la loi électorale prévoit que cette répartition doit être proportionnelle à la population; on la nomme alors "proportionnement". En Europe occidentale, cette opération, confiée au pouvoir exécutif, se passe dans la plus totale indifférence. Aux Etats-Unis, par contre, le proportionnement (entre les Etats de l'Union) des sièges de la Chambre des Représentants donne lieu à de rudes discussions après chaque recensement décennal (voyez p.ex. Willcox, 1954; Balinski & Young, 1975, pp.702-705; 1982, chap.2 à 6). On y admet généralement que la Constitution veut qu'il repose sur le choix d'un diviseur, D, commun à tous les Etats. Si $v_1, \ldots, v_L$ sont les populations de ceux-ci, on doit donc considérer les quotients

$$q_i = v_i/D$$

et les arrondir chacun à une valeur entière. Pour ce faire, on utilise une suite de "seuils d'arrondi" : d(1), d(2), ..., d(n)... tels que

$$n-1 \leqq d(n) \leqq n; \qquad (4)$$

on définit le d-arrondi du **réel** positif **x** par

$$d.\mathrm{arr}(x) = \begin{cases} n-1 & \text{si } n-1 \leqq x \leqq d(n) \\ n & \text{si } d(n) \leqq x \leqq n \end{cases} \qquad (5)$$

et on prend $s_i = d.\mathrm{arr}(q_i)$ (si x est entier, d.arr(x)=x).

1,42. Lorsque d(n) = n, l'arrondi se fait à l'entier immédiatement inférieur : c'est la *méthode de Jefferson* (1791); lorsque d(n) = n-1/2, l'arrondi se fait à l'entier le plus proche; c'est la *méthode de Webster* (1832). Dans ces méthodes (et d'autres analogues), S n'est pas considéré comme une donnée, mais comme résultat du choix de D. Les hærésiologues modernes complètent la définition par l'imposition d'une règle liant D à S, à savoir,

$$D = \sup \{V \lessgtr \sum_i d.\mathrm{arr}(v_i/V) = S\} \qquad (6)$$

On a alors affaire à une *méthode d'arrondiement*.

1,43. PROPOSITION. La méthode définie par (4), (5), et (6) est identique en ses résultats au système sériel dont les diviseurs

sont les seuils d'arrondi.
En effet, si cette méthode attribue aux listes (ou aux circonscriptions) $s_1,\ldots,s_L$ sièges, c'est que l'on a (pour tout i, avec égalité au moins une fois)

$$d(s_i) \leqq v_i/V < d(s_i+1)$$

et donc (pour autant que $s_i \geqq 1$)

$$\frac{v_i}{d(1)} > \frac{v_i}{d(2)} > \ldots > \frac{v_i}{d(s_i)} \geqq V > \frac{v_i}{d(s_i+1)}$$

de sorte que les S sièges disponibles sont bien attribués aux S plus grands quotients du système sériel susdit.

Ainsi, les méthodes de Jefferson et Webster, *complétées par la règle (6)*, sont équivalentes aux systèmes de Dhondt et de Sainte-Laguë.

1,44. COROLLAIRE. Le système sériel de diviseurs d(.) est identique en ses résultats à une méthode d'arrondiement si et seulement si il existe un réel a tel que, pour tout n,

$$n-1 \leqq a.d(n) \leqq n \quad .$$

1,45. COROLLAIRE. Aucun système sériel plus dense que le système Dhondt n'est équivalent à une méthode d'arrondiement.

Cela s'applique, entre autres, au système Imperiali. Bien entendu, il existe aussi des systèmes moins denses que Dh qui ne sont pas des méthodes d'arrondiement.

On note que la méthode de Jefferson est à l'un des extrêmes des méthodes d'arrondiement, alors que le système Dhondt est central parmi les systèmes sériels.

2. DUS PROPORTIONNELS

2,1. PROPOSITION. De tous les systèmes sériels, le seul qui soit régulier est le système Dhondt.

Que ce système soit régulier est une conséquence immédiate des relations

$$v_i/e_i \geqq q > v_i/(e_i+1)$$

et des remarques du parag. 1,23 (il résulte clairement de là qu'il est identique en ses résultats au système (direct) dit "de la plus forte moyenne"). Qu'il soit le seul système sériel régulier est un cas particulier d'un énoncé beaucoup plus général démontré par Balinski & Young (1982). Cette démonstration se simplifie nettement si on la restreint aux seuls systèmes sériels. Il en résulte clairement que, sous tout système sériel autre que Dh,une liste peut se voir frustrée d'un siège (au moins); comme elle n'utilise,pour la liste "frustrée",que le seul quotient v_i/e_i,il ne paraît guère possible d'arriver, par la même méthode,au résultat suivant.

2,2. PROPOSITION. Si le système sériel X est *uniformément* moins dense que Dh,en ce sens que l'inégalité (3) est stricte pour tout n : $\frac{d(n+1)}{d(n)} > \frac{n+1}{n}$ (7)

(de sorte que la suite n/d(n) est strictement décroissante), alors,sous ce système,une liste peut être frustrée d'un nombre quelconque de sièges.

Soit en effet n,M,V des entiers non nuls,et r un entier; soit

$$L = nM + 1 .$$

Une liste "forte",pour laquelle $v_L = V.Q$ est opposée à nM listes "faibles",pour chacune desquelles

$$v_i = (r + \frac{n-1}{n}).Q \qquad (i = 1,\dots,nM) .$$

On a donc

$$S = Mnr + M(n-1) + V. \qquad .$$

Si le quotient $v_L/d(V-M+1)$ est non-utile,alors que chacun des quotients $v_i/d(r+1)$ est utile,alors $s_L \leqq V-M$, et la liste forte est frustrée de M sièges au moins. Or,il en est ainsi dès lors que

$$\frac{r + (n-1)/n}{d(r+1)} > \frac{V}{d(V-M+1)} \quad . \tag{8}$$

Mais,en vertu de (7),si V > M+r,on a

$$\frac{V}{d(V-M+1)} = \frac{V}{V-M+1}\,\frac{V-M+1}{d(V-M+1)} < \frac{V}{V-M+1}\,\frac{r+1}{d(r+1)}$$

l'inégalité étant stricte; on peut donc prendre V et n assez grands pour que (8) soit satisfaite. (Un calcul explicite montre que,pour le système S.L.,on peut prendre

$$r = 0 \quad , \quad n > 2 \quad , \quad V > (2M-1)\,\frac{n-1}{n-2} \quad .)$$

2,3. Il est digne de remarque qu'un résultat de semblable généralité ne peut pas être démontré pour les systèmes plus denses que Dh. Ainsi,sous le système Imperiali -qui est pourtant uniformément plus dense que Dh- une liste ne peut être frustrée que d'un siège au plus.

2,41. L'extrême généralité du résultat de Balinski & Young mentionné ci-dessus ne doit pas laisser croire qu'aucun système "raisonnable" autre que Dh ne peut être régulier. Voici un exemple contraire. Si $s_1,\dots,s_L$ sont les attributions de sièges selon le système Imperiali ($d(n) = n+1$),on a nécessairement

$$s_i \geqq e_i - 1.$$

Ainsi,des listes,en nombre k,sont "frustrées",chacune de 1 siège; k' reçoivent exactement leur dû; k" sont "bien servies": $s_i = e_i + q_i, q_i \geqq 1$; il est clair que $0 \leqq k < \Sigma q_i$. On peut supprimer les allocations attachées aux k plus petits quotients des listes "bien servies",et transférer un de ces k sièges à chacune des listes frustrées. On définit ainsi la "méthode Imperiali écrêtée"; ce n'est pas un système sériel à proprement parler,mais c'est de toute évidence un système régulier. Elle n'est pas équivalente au système Dhondt,comme le montre l'exemple suivant :

L = 6 S = 19 Q = 100

v_i =	646	531	402	133	99	89
e_i =	6	5	4	1	0	0
$(s_i)_{Imp}$ =	8	6	5	0	0	0
$(s_i)_{écr.}$ =	8	6	4	1	0	0
$(s_i)_{Dh}$ =	7	5	4	1	1	1

2,42. Ce système échappe à la démonstration de B. & Y. parce qu'il n'est pas "cohérent",en ce sens que deux quotients égaux n'y sont pas nécessairement traités de façons symétriques (l'un peut être écrêtable,l'autre non). Mais cette circonstance n'est pas nécessairement un défaut de la méthode; ainsi,si on modifie l'exemple précédent en prenant

$$v_3 = 401 \qquad v_4 = 134 ,$$

les quotients de rangs 19 et 20 s'échangent; il n'y a plus d'écrêtement,mais les allocations finales sont inchangées : le manque de "cohérence" favorise la continuité.

3. RELATIONS DE DENSITÉ

3,0. Le but de ce paragraphe est de démonter que,de deux systèmes comparables,le moins dense est aussi,globalement,"le plus favorable aux listes faibles". Il faut,en premier lieu,donner un sens précis à cette dernière expression.

3,1. <u>Énoncé</u>

Voici un système sériel X',utilisant la suite de diviseurs normés d'(n) pour allouer aux listes $P_1,\dots,P_L$,à partir des chiffres électoraux $v_1,\dots,v_L$, des sièges en nombres $s'_1,\dots,s'_L$ déterminés par les quotients $q'_i(n) = v_i/d'(n)$ de la table Q'; et un système X'', d'éléments $s''_i, q''_i(n), Q''$. On suppose que

X'' est moins dense que X'.

On considère les différences des nombres de sièges, en allant du faible au fort :

$$D_L = s''_L - s'_L,\quad D_{L-1} = s''_{L-1} - s'_{L-1},\ \dots\quad D_1 = s''_1 - s'_1 .$$

L'énoncé en cause est que, dans cette suite, les différences strictement positives sont toutes du côté faible, les différences strictement négatives toutes du côté fort :

$$\exists\, k : c_1 \leqq 0,\dots,c_k \leqq 0, c_{k+1} \geqq 0,\dots,c_L \geqq 0 .$$

(Balinski & Young (1982, p.198) ont démontré cet énoncé pour les méthodes d'arrondiement.)

3,2. LEMME. Si $q'_j(n)$ avec $1 \leqq j < i \leqq L$ est un quotient non-utile de Q' $(n > s'_j)$ alors $q''_j(n) < q''_i(s'_i)$. (9)

En effet, on a

$$n > s'_j \qquad \text{et} \qquad s'_j \geqq s'_i \quad (\text{car } v_j > v_i)$$

donc $\quad n > s'_i$

et, par conséquent,

$$\frac{d''(n)}{d'(n)} \geqq \frac{d''(s'_i)}{d'(s'_i)}$$

donc

$$\begin{aligned} q''_j(n) = \frac{v_j}{d''(n)} &= q'_j(n)\,\frac{d'(n)}{d''(n)} \\ &< q'_i(s'_i)\,\frac{d'(n)}{d''(n)} \qquad (\text{utile et non-utile}) \\ &= \frac{v_i}{d''(s'_i)}\,\frac{d'(n)}{d''(n)}\,\frac{d''(s'_i)}{d'(s'_i)} \\ &\leqq \frac{v_i}{d''(s'_i)} = q''_i(s'_i) \end{aligned}$$

3,3. Dès lors, si on suppose $j < i$ et $D_i < 0$ alors, d'une part (en vertu du lemme)

$$q''_j(s'_j+1) < q''_i(s'_i)$$

et, d'autre part,

$q''_i(s'_i)$ est non-utile $(s'_i > s''_j)$;

donc

$q''_j(s'_j+1)$ est non-utile

et

$s''_j < s'_j+1$ c.q.f.d.

ELECTIONS DE 1983 AU JAPON

Listes									
LDP	JSP	Kom	JKP	DSP	SMP	FTO	USD	Niin	MR
Quotients électoraux				(v_i/Q)					
17,66	8,16	7,86	4,47	4,18	2,15	1,70	1,33	1,23	0,55

TABLE 1

Attributions :				Imperiali					
22	9	9	4	4	1	1	0	0	0
				Dhondt					
19	9	8	5	4	2	1	1	1	0
				Sainte-Laguë					
18	8	8	5	4	2	2	1	1	1
Différences :				Dh - Imp					
-3	0	-1	1	0	1	0	1	1	0
				SL - Imp					
-4	-1	-1	1	0	1	1	1	1	1
				SL - Dh					
-1	-1	0	0	0	0	1	0	0	1
Diff. cumulées :				Dh - Imp					
0	3	3	4	3	3	2	2	1	0
				SL - Imp					
0	4	5	6	5	5	4	3	2	1
				SL - Dh					
0	1	2	2	2	2	2	1	1	1

TABLE 2

Attributions :				2.SL					
18	9	8	5	4	2	2	1	1	0
Différences :				SL - 2.SL					
0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1
				2.SL - Dh					
-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
				2.SL - Imp					
-4	0	-1	1	0	1	1	1	1	0
Diff. cumulées :				SL - 2.SL					
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
				2.SL - Dh					
0	1	1	1	1	1	1	0	0	0
				2.SL - Imp					
0	4	1	5	4	4	3	2	1	0

3,4. Un système moins dense que le système Dhondt mérite d'être dit "divisif"; un système plus dense,"cohésif"; et ce en raison de leurs effets respectifs sur l'existence d'une majorité forte au sein de l'assemblée élue.

3,5. Exemple

Lors des élections de 1983 au Japon,50 membres de la Chambre Haute ont été élus au scrutin proportionnel. Les données de ce scrutin et les attributions par les systèmes Imperiali,Dhondt, et Sainte-Laguë sont reprises à la table 1 ci-contre. Les relations de densité y sont clairement visibles.

La suite des différences $D_1,\dots,D_L$ n'est pas nécessairement monotone : cet exemple le montre bien.

Dans cet exemple-ci,les différences cumulées ne s'annulent qu'aux extrémités : il n'en est pas nécessairement ainsi.

4. SYSTEMES NON-CONCORDANTS

4,0. Des systèmes sériels qui ne sont pas comparables au système Dhondt,il paraît malaisé de dire quoi que ce soit de tant soit peu général.

4,1. La Table 2 ci-contre analyse les attributions qui seraient faites,dans les conditions de la Table 1,par le système 2.SL ($d(1)=1$, $d(n) = n-1/2$ si $n>1$; c'est un système d'arrondiement). Il est comparable au système SL (et plus dense que lui); il est comparable aussi au système Imp (et moins dense que lui). Les résultats du parag. 3 sont donc applicables aux comparaisons SL - 2.SL et 2.SL - Imp. Par contre,il n'est pas comparable au système Dh; on constate que,dans ce cas particulier,il se comporte comme un système divisif.

4,2. Le système 2.SL ne diffère du système SL que par le premier diviseur (non normé : $d(1)=2$ au lieu de $d(1)=1$);par conséquent,les seules listes à pouvoir perdre un siège en passant de SL à 2.SL sont celles qui,sous SL,n'ont qu'un seul siège. Ces listes qui n'ont qu'un siège sous SL et n'en ont aucun sous 2.SL n'en ont qu'un au plus sous Dh; mais peut-être en ont-elles un en effet.

Voici un exemple de cette sorte :

	T = 1900		S = 19		Q = 100	L = 6
v_i =	1065	185	184	183	182	101

attributions : Dhondt

Dhondt	11	2	2	2	1	1
2.SL	11	2	2	2	2	0
différences (Dh - 2.SL) :	0	0	0	0	-1	1

Les différences se comportent ici comme si 2.SL était un système cohésif.

4,3. Voilà donc un système qui avantage tantôt les listes faibles,tantôt les listes moins faibles. Or,il est comparable à chacun des systèmes Imp, u.SL ($1 \leq u < 3$),Dan. : ce ne sont donc pas les comparaisons à ces systèmes qui pourraient expliquer son comportement variable. En ces matières,le système Dhondt occupe une position centrale,c'est bien lui qui doit servir de base de comparaison.

BIBLIOGRAPHIE

Beaufays,J. & Breny,H.,"La représentation proportionnelle dans les systèmes électoraux belges",*Ann.Fac.Droit,Liège*, (1971),529-560.

Balinski,M. & Young,H.,"The quota method of apportionment", *Amer.Math.Monthly*,82 (1975),701-730.

Balinski,M. & Young,H.,"The Jefferson method of apportionment", *Siam Review*,20 (1978),701-730.

Balinski,M. & Young,H.,*Fair representation*,New Haven,Yale University Press,1982.

Bogdanor,V. & Butler,D.,*Democracy and elections*,Cambridge,Cambridge University Press,1983 (*vide* pp. VIII,37,139)

Bundeswahlgesetz, §6 in *Grundgesetz für die Bundesrepublik Deutschland*,Bonn,Bundeszentrale für politische Bildung, 1984.

Carstairs,A.,*A short history of electoral systems in western Europe*,London,Allen & Unwin,1980 (*vide* pp.18-21 , 50).

Dhondt,V.,*Exposé pratique du système de représentation proportionnelle*,Gand,1885.

Sainte-Laguë,A.,"La représentation proportionnelle et la méthode des moindres carrés",*Ann.scient.Ec.norm.sup.*,(3) XXVII (1910),529-542.

Willcox,W.,"Methods of apportioning seats in the House of Representatives",*J.Amer.Stat.Ass.*,49/268 (1954) 685-695.