MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

JEAN-PAUL GRÉMY

Sur l'utilisation d'indices numériques pour mesurer les inégalités sociales

Mathématiques et sciences humaines, tome 93 (1986), p. 7-40

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1986__93__7_0>

Math. Sci. hum. (*23*^{e} année, n°93, *1986*, p.7-40)

SUR L'UTILISATION D'INDICES NUMÉRIQUES POUR MESURER LES INÉGALITÉS SOCIALES

Jean-Paul GRÉMY *

Les sociologues ont souvent recours à un indice numérique pour mesurer les inégalités sociales en vue de les comparer. Comme l'a montré Jean-Claude COMBESSIE, les indices utilisés sont assez disparates, et peuvent conduire à des conclusions opposées. Cet article part de l'analyse de la notion même d'inégalité pour proposer quelques règles pratiques permettant, sinon de construire de "bons" indices d'inégalité, du moins d'écarter les indices présentant des contradictions avec l'objet qu'ils prétendent mesurer.

---

* Institut de Sociologie, Université des Sciences et Techniques de Lille (Lille I).

Cet article est le développement d'une brève intervention faite à la table ronde sur la mesure et la comparaison des inégalités sociales (Marseille, 28 juin 1985). Il a bénéficié des critiques et suggestions de Marc BARBUT et Henry ROUANET, à qui l'auteur adresse ici ses vifs remerciements.

Dans un article récent de la *Revue Française de Sociologie*, Jean-Claude COMBESSIE [3] a posé le problème de l'utilisation d'indices pour mesurer les inégalités, et, corrélativement, celui de la comparaison des valeurs prises par ces indices pour estimer l'évolution dans le temps de ces inégalités. A partir d'un exemple concret relatif au taux d'accès à l'enseignement secondaire long en Grande-Bretagne, il a montré que les principaux indices simples utilisés par les sociologues conduisaient à des appréciations contradictoires de ces inégalités. L'objet de cet article est de définir les conditions de base auxquelles devrait satisfaire toute mesure de l'inégalité. L'examen, à la lumière de l'axiomatique ainsi définie, conduit à rejeter dix-sept indices sur les dix-huit recensés par COMBESSIE.

I. POSITION DU PROBLÈME

Soit le tableau suivant ([3], page 233) :

Profession du père	Date de naissance	
	avant 1910	entre 1935 et 1940
Profession libérale, cadre, personnel de direction	37 %	62 %
Ouvrier semi-qualifié ou non qualifié	1 %	10 %

Tableau n° 1. Pourcentages d'accès à l'enseignement secondaire long des enfants anglais selon leur date de naissance et leur origine sociale

Les propositions qu'il est possible d'inférer de ces données sont évidemment limitées dans leur portée par la pauvreté des informations présentées ici : il serait par exemple utile de disposer de l'ensemble des données brutes à partir desquelles ces pourcentages ont été calculés (cf. [5], pages 396-403), afin de connaître la taille respective des populations concernées et, s'il y a lieu, les caractéristiques des autres populations exclues du tableau. Afin de rester autant que possible dans le cadre de l'énoncé du problème, on conviendra provisoirement que les deux populations étudiées ont des effectifs du même ordre de grandeur, et qu'elles rassemblent la totalité des individus concernés par l'étude (les raisons de ces conventions seront précisées plus loin). Au vu de telles données, que peut-on dire de l'évolution de l'inégalité entre ces deux catégories sociales ? En une trentaine d'années, l'inégalité d'accès à l'enseignement secondaire a-t-elle augmenté, est-elle restée stable, ou a-t-elle diminué ? En d'autres termes, la seconde inégalité (62 % > 10 %) est-elle supérieure, égale, ou inférieure à la première (37 % > 1 %) ?

Pour élucider le sens de la question ainsi formulée, un détour par l'analyse du concept d'inégalité est nécessaire, puisque le problème posé porte sur l'existence d'une inégalité hypothétique entre deux inégalités de fait. Sous une forme plus générale, soient :

- un ensemble de deux populations : $P = \{a,b\}$
- un ensemble de deux moments d'observation : $T = \{i,j\}$
- un ensemble de quatre observations sur $P \times T$, relatives par conséquent à chaque population pour chacun des moments considérés, et prenant leurs valeurs dans une échelle ordinale (sinon numérique) :

$M = \{m_i^a, m_i^b, m_j^a, m_j^b\}$.

Sans être nécessairement des mesures *stricto sensu*, les observations $m_t^p \in M$ sont comparables entre elles, en ce sens que, sur tout couple $(m_t^p, m_{t'}^{p'}) \in M^2$, on peut définir une relation R prenant ses valeurs dans $\{<,=,>\}$. Cette relation détermine un préordre total sur M.

Dans l'exemple proposé par COMBESSIE (tableau n° 1), au préordre total illustré par la figure n° 1 correspondent les relations sur M^2 figurant dans le tableau n° 2. Parmi celles-ci, les quatre relations situées dans la diagonale (de la forme : $m_t^p = m_t^p$) n'apportent aucune information utile, et peuvent par conséquent être négligées. Les douze relations restantes présentent une certaine redondance, puisque les valeurs de R sont "complémentaires" pour deux couples orientés distincts comportant les mêmes éléments (dont les positions sont donc symétriques par rapport à la diagonale dans le tableau n° 2) : $(m_t^p = m_{t'}^{p'}) \Leftrightarrow (m_{t'}^{p'} = m_t^p)$, et : $(m_t^p > m_{t'}^{p'}) \Leftrightarrow (m_{t'}^{p'} < m_t^p)$. Il suffit donc de considérer dans M^2 six relations binaires ne s'impliquant pas mutuellement (comme par exemple les six relations situées d'un même côté de la diagonale dans le tableau n° 2) pour disposer de toute l'information "utile" apportée par R. En outre, la relation R étant par définition transitive (préordre), on peut éventuellement ne considérer que les trois relations entre éléments adjacents dans le préordre (fermeture transitive de R). Dans l'exemple ci-dessous, on obtient un ordre strict total : $m_j^a > m_i^a > m_j^b > m_i^b$.

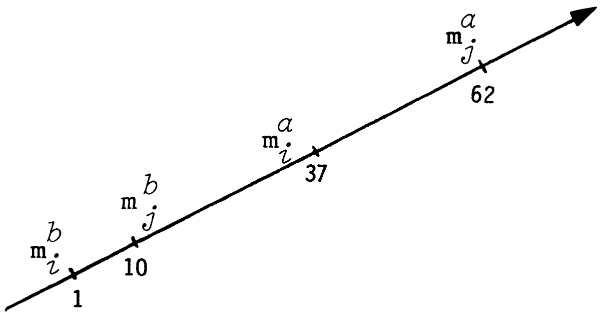

Figure n° 1. Exemple de représentation des éléments de M (données du tableau n° 1)

R →	m^a_i	m^b_i	m^a_j	m^b_j
m^a_i	=	>	<	>
m^b_i	<	=	<	<
m^a_j	>	>	=	>
m^b_j	<	>	<	=

Tableau n°2. Exemple de relations formelles définies sur M^2 (données du tableau n° 1).

Pour suivre l'usage des sociologues, on conviendra d'appeler *inégalité au moment t*, sans autre précision, la relation $R(m^a_t, m^b_t)$, que, par souci de brièveté, on désignera par R_t . Dans cette acception, sur les six relations "utiles" définies sur M^2 , deux seulement sont des inégalités : $R(m^a_i, m^b_i)$, et : $R(m^a_j, m^b_j)$, que l'on désignera respectivement par : R_i, et : R_j. Cette convention conduisant à l'extension abusive de la notion d'inégalité au cas particulier : $m^a_t = m^b_t$, on conviendra de dire alors que l'inégalité est nulle.

Chercher à répondre à la question sur l'évolution des inégalités impose de définir sur le couple (R_i, R_j) une relation R^* prenant ses valeurs dans $\{ \overset{*}{<}, \overset{*}{=}, \overset{*}{>} \}$. Si le moment i précède le moment j , la relation R^* s'interprète comme suit :

- $R_i \overset{*}{<} R_j$: l'inégalité a augmenté ;
- $R_i \overset{*}{=} R_j$: l'inégalité est restée stable ;
- $R_i \overset{*}{>} R_j$: l'inégalité a diminué.

En outre, la comparaison des inégalités entraîne pour le sociologue une question supplémentaire, totalement indépendante de la précédente : les deux inégalités sont-elles de même sens, ou de sens contraire ?

Un préalable nécessaire consiste à établir dans quelle mesure il est possible de répondre à ces deux questions *à partir des seules propriétés formelles de R* , c'est-à-dire quelles que soient la nature des observations m^p_t, et la manière dont est calculé un éventuel indice mesurant la "force" de R_t.

Dans une telle perspective, la réponse à la seconde question est immédiate ; R_{i} et R_{j} sont :

- *de même sens*, ssi l'on a soit : $m_{i}^{a} < m_{i}^{b}$ & $m_{j}^{a} < m_{j}^{b}$, soit : $m_{i}^{a} > m_{i}^{b}$ & $m_{j}^{a} < m_{j}^{b}$.

- *de sens contraire*, ssi l'on a soit : $m_{i}^{a} < m_{i}^{b}$ & $m_{j}^{a} > m_{j}^{b}$, soit : $m_{i}^{a} > m_{i}^{b}$ & $m_{j}^{a} < m_{j}^{b}$.

La question est *indécidable* ssi l'on a : $m_{i}^{a} = m_{i}^{b} \vee m_{j}^{a} = m_{j}^{b}$, c'est-à-dire si l'on sort du problème posé initialement par COMBESSIE.

Pour répondre à la première question, il est par contre nécessaire de passer en revue l'ensemble des cas de figures possibles (1). On verra toutefois que la définition d'une structure sur cet ensemble permet de limiter cet examen systématique à un sous-ensemble de cas présentant certaines propriétés, sans pour autant restreindre la portée des observations ainsi faites.

II. DÉFINITION D'UN PRÉORDRE SUR LES INÉGALITÉS

Il est facile de dénombrer l'ensemble des préordres totaux possibles sur M : pour chacune des $P_{4,k}$ k-partitions possibles d'un ensemble de quatre éléments ([1], tome 2, pages 100-101), il y a $k!$ permutations possibles ; on a donc : $\sum_{k=1}^{4} k!\ P_{4,k} = 75$ préordres totaux possibles sur M. Pour construire cet ensemble, il est commode d'énumérer ses éléments en procédant en trois étapes : pour chaque valeur de k ($1 \geqslant k \geqslant 4$), faire la liste des types de partition, ou *partages*, possibles (cf. [1], tome 2, pages 104-108) ; pour chaque partage, faire la liste des partitions correspondantes ; pour chaque partition, énumérer les permutations possibles des classes de cette partition. Cette procédure conduit au dénombrement détaillé dans le tableau n° 3 page suivante.

---

(1) Comme le souligne COMBESSIE, θεωρεῖν a pour sens premier : "examiner, passer en revue" ; l'examen systématique des cas possibles est une étape préalable nécessaire à l'explicitation théorique ([3], page 254).

Nombre de classes (k)	(*) Type de partition (partage)	Nombre de partitions possibles (n)	Nombre de préordres totaux possibles (n x $k!$)
1	(α) 4	1	1
2	(β) 3,1	4	8
	(γ) 2,2	3	6
3	(δ) 2,1,1	6	36
4	(ε) 1,1,1,1	1	24

Tableau n° 3. Dénombrement des préordres totaux sur M
(*les lettres grecques désignant les partages renvoient à la suite du texte)

Cet ensemble peut être structuré de diverses manières. Il est possible par exemple de définir une relation de contiguïté (faible) entre préordres totaux : deux préordres totaux seront dits *(faiblement) contigus* si l'un est obtenu à partir de l'autre par substitution d'une relation d'ordre strict entre deux éléments adjacents à une relation d'équivalence (ou inversement). Ainsi, l'ordre strict pris comme exemple par COMBESSIE : $m^{a}_{.j} > m^{a}_{.i} > m^{b}_{.j} > m^{b}_{.i}$, est contigu aux trois préordres (tri-partitions δ) :

$$\left\{\begin{array}{l} m^{a}_{.j} = m^{a}_{.i} > m^{b}_{.j} > m^{b}_{.i} \\ m^{a}_{.j} > m^{a}_{.i} = m^{b}_{.j} > m^{b}_{.i} \\ m^{a}_{.j} > m^{a}_{.i} > m^{b}_{.j} = m^{b}_{.i} \end{array}\right.$$

La structure ainsi obtenue peut être représentée par un graphe analogue au permutoèdre de degré 4 ([2], tome 2, page 78). Ce dernier peut d'ailleurs être pris comme base de construction du graphe (cf. [2], tome 2, page 130, exercice 9.16). En effet, sur chacune des trente-six arêtes joignant deux ordres stricts (ε) sur le permutoèdre, on peut placer un préordre à trois classes (δ), ne présentant qu'une relation d'équivalence entre deux adjacents et donc contigu à deux ordres stricts seulement. Au centre de chacune des six faces carrées du permutoèdre, un préordre à deux classes de même dimension (γ) est contigu aux quatre préordres à trois classes (δ) situés sur les arêtes délimitant les carrés, puisque présentant deux relations d'équivalence entre éléments adjacents. De même, au centre de chacune des huit faces hexagonales du permutoèdre, un préordre à deux classes inégales (β) est contigu aux six préordres (δ) situés sur les arêtes délimitant les hexagones. Seule, l'unipartition (α) ne peut être située sur la surface du polyèdre, et doit être placée au centre de celui-ci, en relation de contiguïté avec les quatorze bi-partitions (β et γ) situées au centre de chacune des faces.

On peut adopter une définition plus restrictive de la contiguïté, en décidant que deux préordres totaux seront dits *fortement contigus* si l'un est obtenu à partir de l'autre par substitution, parmi les six relations "utiles" choisies précédemment, d'une relation d'ordre strict à une relation d'équivalence (ou inversement). A partir de leur formule "développée", il est aisé de constater que l'ordre strict examiné ci-dessus est fortement contigu aux trois préordres cités. Par contre, aucun de ces préordres ne conserve l'ensemble des relations de contiguïté définies précédemment. Par exemple, le préordre : $m_{.j}^{a} > m_{.i}^{a} = m_{.j}^{b} > m_{.i}^{b}$ n'est fortement contigu qu'à deux ordres stricts, et n'est plus que faiblement contigu à deux préordres à deux classes inégales (β), comme on le voit sur le tableau n° 4. Sur l'ensemble

Formule condensée	Formule "développée" (relations "utiles")					
	$m_{.i}^{a}, m_{.j}^{a}$	$m_{.i}^{b}, m_{.j}^{b}$	$m_{.i}^{a}, m_{.i}^{b}$	$m_{.j}^{a}, m_{.j}^{b}$	$m_{.i}^{a}, m_{.j}^{b}$	$m_{.j}^{a}, m_{.i}^{b}$
$m_{.j}^{a} > m_{.i}^{a} = m_{.j}^{b} > m_{.i}^{b}$	$<$	$<$	$>$	$>$	$=$	$>$
$m_{.j}^{a} > m_{.i}^{a} > m_{.j}^{b} > m_{.i}^{b}$	$<$	$<$	$>$	$>$	$>$	$>$
$m_{.j}^{a} > m_{.j}^{b} > m_{.i}^{a} > m_{.i}^{b}$	$<$	$<$	$>$	$>$	$<$	$>$
$m_{.j}^{a} > m_{.i}^{a} = m_{.j}^{b} = m_{.i}^{b}$	$<$	$=$	$=$	$>$	$=$	$>$
$m_{.j}^{a} = m_{.i}^{a} = m_{.j}^{b} > m_{.i}^{b}$	$=$	$<$	$>$	$=$	$=$	$>$

Tableau n° 4. Exemple de relations de contiguïté entre préordres totaux

des relations de contiguïté (faible) définies précédemment, seules subsistent les contiguïtés entre ordres stricts et tri-partitions (ε - δ), et entre tri-partitions et bi-partitions équitables (δ - γ). Il faut en effet deux substitutions pour passer d'une tri-partition à une bi-partition non

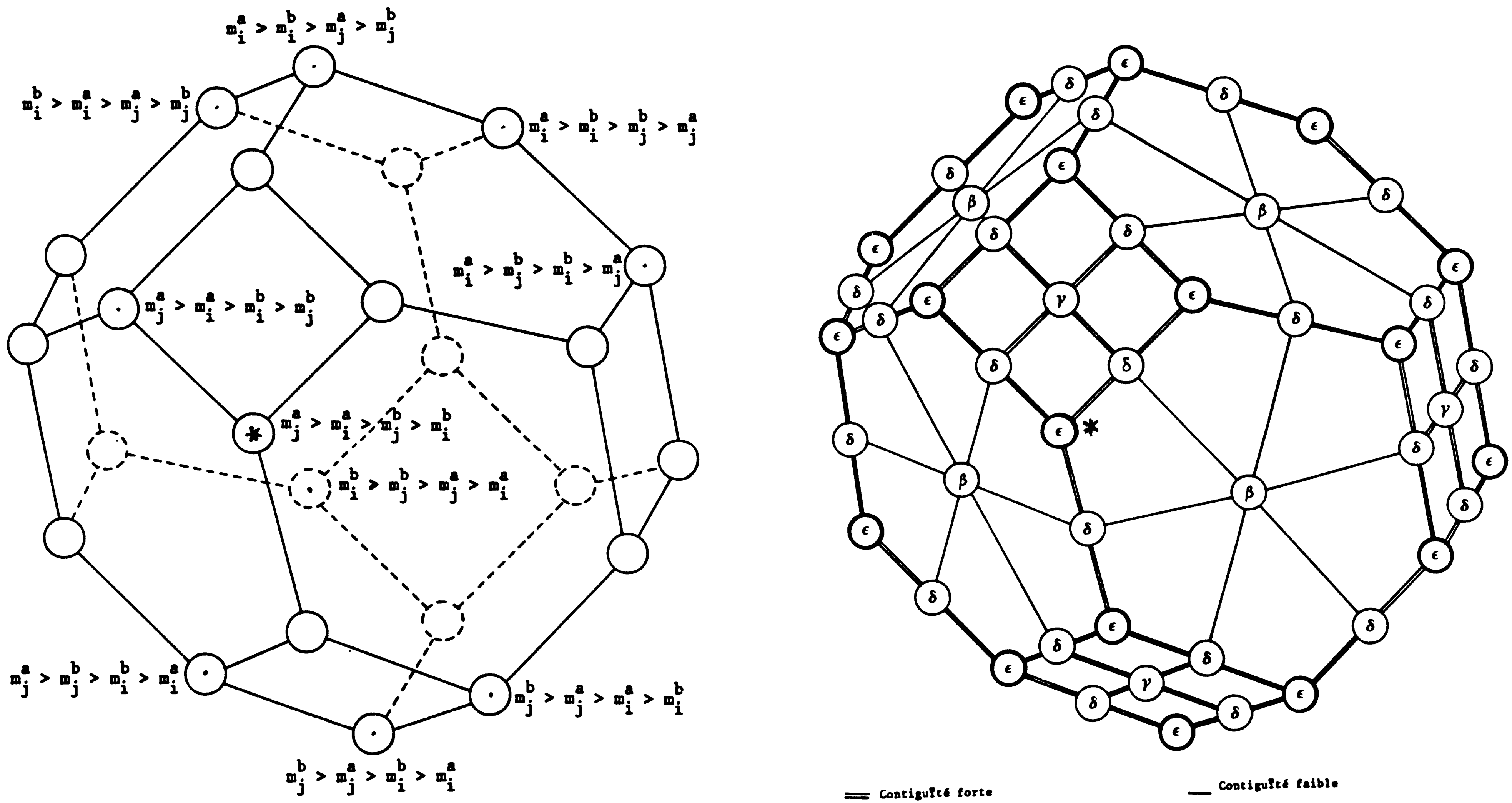

Figure n° 2. Construction du polyèdre des préordres totaux à partir du permutoèdre de degré 4
(L'exemple choisi est repéré par un astérisque)

équitable (δ - β), trois pour passer d'une bi-partition non équitable à l'uni-partition (β - α), et quatre pour passer d'une partition équitable à l'uni-partition (γ - α). La figure n° 2 montre la forme générale des relations de contiguïté sur l'une des faces de la surface du polyèdre obtenu à partir du permutoèdre des ordres stricts totaux de degré 4 (le point α, placé du centre, n'est pas visible, non plus que les relations de contiguïté faible le reliant aux points β et γ).

On peut négliger le point α, correspondant à l'uni-partition : $m_i^a = m_i^b = m_j^a = m_j^b$, puisque ce cas particulier ne présente aucun intérêt relativement au problème posé. La notion de contiguïté sur la surface du polyèdre permet de définir une distance entre préordres : la distance entre deux préordres donnés est égale au nombre minimum de substitutions (parmi les six relations "utiles") nécessaires pour passer de l'un à l'autre. Deux préordres tels que la distance entre eux soit maximum sont des préordres duaux ; ils se caractérisent par une inversion du préordre (ex. : $m_i^a > m_j^b > m_j^a = m_i^b$ et : $m_i^b = m_j^a > m_j^b > m_i^a$). Sur le polyèdre, deux préordres duaux sont aux deux extrémités d'un même diamètre. Par conséquent, un plan de symétrie quelconque (passant par α) définit deux sous-ensembles duaux sur les préordres. Comme les propriétés d'un préordre donné sont transposables, *mutatis mutandis*, à son dual, il devrait donc suffire, pour traiter le problème posé, de passer en revue les trente-sept configurations d'un sous-ensemble dual quelconque.

En outre, la structure postulée sur M (produit cartésien de deux ensembles) permet de définir sur les préordres totaux une relation d'équivalence à une permutation près des éléments de P, ou à une permutation près des éléments de T. Par exemple (figure n° 3), le préordre : $m_i^a > m_j^b > m_j^a = m_i^b$ est équivalent, à une permutation sur P près, à : $m_i^b > m_j^a > m_j^b = m_i^a$; il est équivalent, à une permutation sur T près, à : $m_j^a > m_i^b > m_i^a = m_j^b$. Les applications correspondant aux relations de dualité (D) et d'équivalence à une permutation près sur les populations (P) ou les moments d'observation (T) peuvent être composées pour définir une classe de préordres dont les éléments présentent des propriétés équivalentes à certaines permutations près. La figure n° 3 représente la classe de huit préordres de type δ obtenue en partant du préordre choisi comme exemple ci-dessus. Il est aisé de constater que seules les classes obtenues à partir d'une bi-partition non équitable (β), ou d'une tripartition (δ) située en bordure d'une face carrée du polyèdre, sont des classes de huit éléments. Les classes

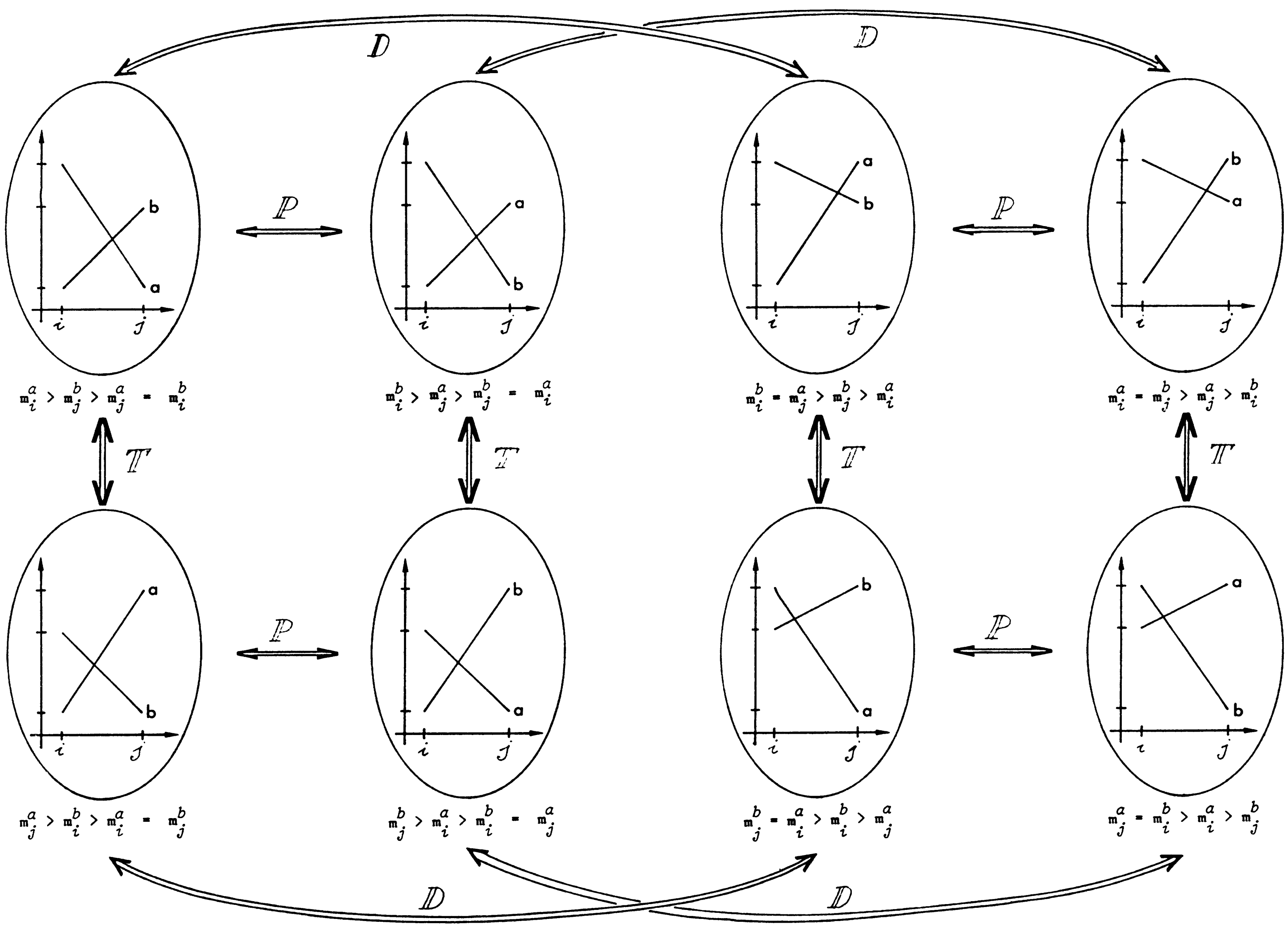

Figure n° 3. Exemple de composition des applications sur les préordres totaux (δ 3) obtenues à partir d'une tripartition (δ) située entre deux faces hexagonales, ou à partir d'un ordre strict (ε), n'ont que quatre éléments : on vérifierait aisément que, pour ces préordres, les compositions $P * T$ et $T * P$ équivalent à l'application D. Les classes obtenues à partir d'une bipartition équitable (γ) n'ont que deux éléments ; en effet, selon les cas, on a ou bien T = transformation identique et $P = D$ (cas $\gamma 1$ ci-après), ou bien P = transformation identique et $T = D$ (cas $\gamma 2$), ou bien $P * T = T * P$ = transformation identique et $P = T = D$ (cas $\gamma 3$). Il suffit donc de passer en revue seize préordres choisis judicieusement (cf. p. ex. figure n° 4) pour déterminer les propriétés des soixante-quatorze préordres de la surface du polyèdre.

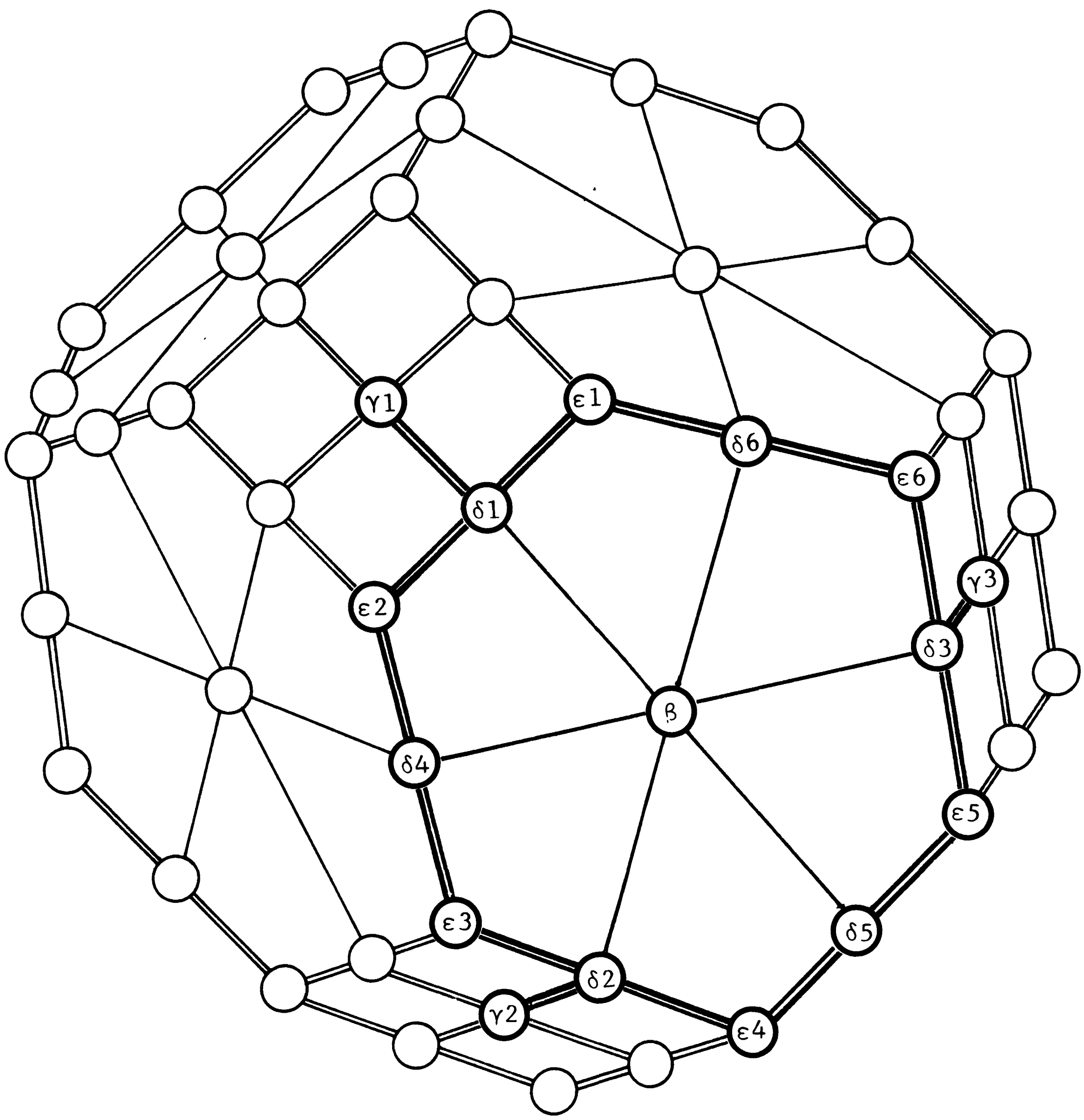

Figure n° 4. Localisation sur le polyèdre des seize préordres sélectionnés

L'examen des préordres ainsi sélectionnés a pour objet de déterminer quelle conclusion il est possible de tirer de la comparaison de deux couples (m_i^a, m_i^b) et (m_j^a, m_j^b). Un support commode pour le raisonnement consiste à supposer que M a été appliqué sur une échelle numérique quelconque par une fonction monotone croissante, qui conserve par conséquent l'ordre sur M. On peut donc représenter chaque configuration par un schéma analogue à celui de la figure n° 1. Le problème posé peut alors s'énoncer ainsi : quelle relation de préordre peut-on définir sur le couple d'intervalles $([m_i^a, m_i^b], [m_j^a, m_j^b])$ sans connaître la métrique utilisée ? On retrouve ainsi le problème posé par Clyde H. COOMBS à propos des "échelles métriques ordonnées" (*ordered metric scales* ; cf. p.ex. [4], pages 82-92). Le principe de résolution se fonde sur deux règles simples ; quels que soient i et j :

1) si les extrémités des deux intervalles coïncident, ceux-ci sont égaux ; on en déduira que $R_i \overset{*}{=} R_j$.

2) si l'intervalle i est inclu strictement dans l'intervalle j, alors j est plus grand que i ; on en déduira que $R_i \overset{*}{<} R_j$.

Dans tous les autres cas, le problème est indécidable en l'absence d'axiomes supplémentaires.

L'examen systématique des seize préordres-types et les conclusions auxquelles il conduit sont résumés dans le tableau n° 5. Pour étendre ces conclusions aux autres éléments d'une même classe, il suffit d'appliquer les règles suivantes :

- lorsque le cas est indécidable (R_i ? R_j), ou lorsque l'égalité est restée stable ($R_i \overset{*}{=} R_j$), la conclusion est valable pour tous les éléments de la classe ;

- lorsque l'inégalité a évolué (on a : $R_i \overset{*}{<} R_j$ ou : $R_i \overset{*}{>} R_j$), si deux préordres sont équivalents à une permutation près sur P , ils conduisent à la même conclusion ; s'ils sont équivalents à une permutation près sur T , ils conduisent à des conclusions contraires ; enfin, s'ils sont duaux, ils conduisent à des conclusions contraires si $D = P * T = T * P$, et à la même conclusion sinon.

Le bilan de cet examen montre que, sur les soixante-quinze préordres totaux sur M , vingt-quatre seulement sont indécidables(cf. le

Classe	Nombre d'éléments	Préordre-type	Conclusion
β	8	$m_i^a = m_j^a = m_j^b > m_i^b$	$R_i \overset{*}{>} R_j$
γ1	2	$m_i^a = m_j^a > m_i^b = m_j^b$	$R_i \overset{*}{=} R_j$
γ2	2	$m_j^a = m_j^b > m_i^a = m_i^b$	$R_i \overset{*}{=} R_j$
γ3	2	$m_i^a = m_j^b > m_j^a = m_i^b$	$R_i \overset{*}{=} R_j$
δ1	8	$m_i^a = m_j^a > m_j^b > m_i^b$	$R_i \overset{*}{>} R_j$
δ2	8	$m_j^a = m_j^b > m_i^a > m_i^b$	$R_i \overset{*}{>} R_j$
δ3	8	$m_i^a = m_j^b > m_j^a > m_i^b$	$R_i \overset{*}{>} R_j$
δ4	4	$m_j^a > m_i^a = m_j^b > m_i^b$	?
δ5	4	$m_j^b > m_i^a = m_j^a > m_i^b$	?
δ6	4	$m_i^a > m_j^a = m_j^b > m_i^b$	$R_i \overset{*}{>} R_j$
ε1	4	$m_i^a > m_j^a > m_j^b > m_i^b$	$R_i \overset{*}{>} R_j$
ε2	4	$m_j^a > m_i^a > m_j^b > m_i^b$	?
ε3	4	$m_j^a > m_j^b > m_i^a > m_i^b$	?
ε4	4	$m_j^b > m_j^a > m_i^a > m_i^b$	?
ε5	4	$m_j^b > m_i^a > m_j^a > m_i^b$	?
ε6	4	$m_i^a > m_j^b > m_j^a > m_i^b$	$R_i \overset{*}{>} R_j$

Tableau n° 5. Examen des préordres sélectionnés de la figure n° 4 tableau n° 6). Pour résumer l'ensemble des constatations auxquelles conduit

Type de préordre	Ordre strict(ε)		Tri-partition (δ)			Bi-partition équitable(γ)			bi-p. n-e(β)	Uni-p (α)	Total
Conclusions	même sens	sens contr.	même sens	sens contr.	?	même sens	sens contr.	?	?	?	
$R_{\cdot i} \overset{*}{<} R_{\cdot j}$	2	2	4	4	6	-	-	-	4	-	22
$R_{\cdot i} \overset{*}{>} R_{\cdot j}$	2	2	4	4	6	-	-	-	4	-	22
$R_{\cdot i} \overset{*}{=} R_{\cdot j}$	-	-	-	-	-	2	2	2	-	1	7
$R_{\cdot i}\ ?\ R_{\cdot j}$	8	8	4	4	-	-	-	-	-	-	24
Total	12	12	12	12	12	2	2	2	8	1	75

Tableau n° 6. Dénombrement des conclusions

un examen systématique, si l'on appelle *max* la valeur du plus grand élément de M, et *min* la valeur de son plus petit élément, on dira que :

- l'inégalité a augmenté ($R_{\cdot i} \overset{*}{<} R_{\cdot j}$) ssi :

$$m^a_{\cdot i} = m^b_{\cdot i} \ \& \ m^a_{\cdot j} \neq m^b_{\cdot j} \ \vee \ (m^a_{\cdot i} \neq m^a_{\cdot j} \ \vee \ m^b_{\cdot i} \neq m^b_{\cdot j}) \ \& \ (m^a_{\cdot j} = max \ \& \ m^b_{\cdot j} = min \ \vee \ m^a_{\cdot j} = min \ \& \ m^b_{\cdot j} = max) \ ;$$

- l'inégalité a diminué ($R_{\cdot i} \overset{*}{>} R_{\cdot j}$) ssi :

$$m^a_{\cdot i} \neq m^b_{\cdot i} \ \& \ m^a_{\cdot j} = m^b_{\cdot j} \ \vee \ (m^a_{\cdot i} \neq m^a_{\cdot j} \ \vee \ m^b_{\cdot i} \neq m^b_{\cdot j}) \ \& \ (m^a_{\cdot i} = max \ \& \ m^b_{\cdot i} = min \ \vee \ m^a_{\cdot i} = min \ \& \ m^b_{\cdot i} = max) \ ;$$

- l'inégalité est restée stable ($R_{\cdot i} \overset{*}{=} R_{\cdot j}$) ssi :

$$m^a_{\cdot i} = m^b_{\cdot i} \ \& \ m^a_{\cdot j} = m^b_{\cdot j} \ \vee \ m^a_{\cdot i} = m^a_{\cdot j} \ \& \ m^b_{\cdot i} = m^b_{\cdot j} \ \vee \ m^a_{\cdot i} = m^b_{\cdot j} \ \& \ m^a_{\cdot j} = m^b_{\cdot i} \ ;$$

- le problème est indécidable [2] dans tous les autres cas.

(2) Indécidable dans le cadre de cette axiomatique minimale ; il peut devenir décidable si l'on ajoute des axiomes supplémentaires (Ce point sera examiné plus loin).

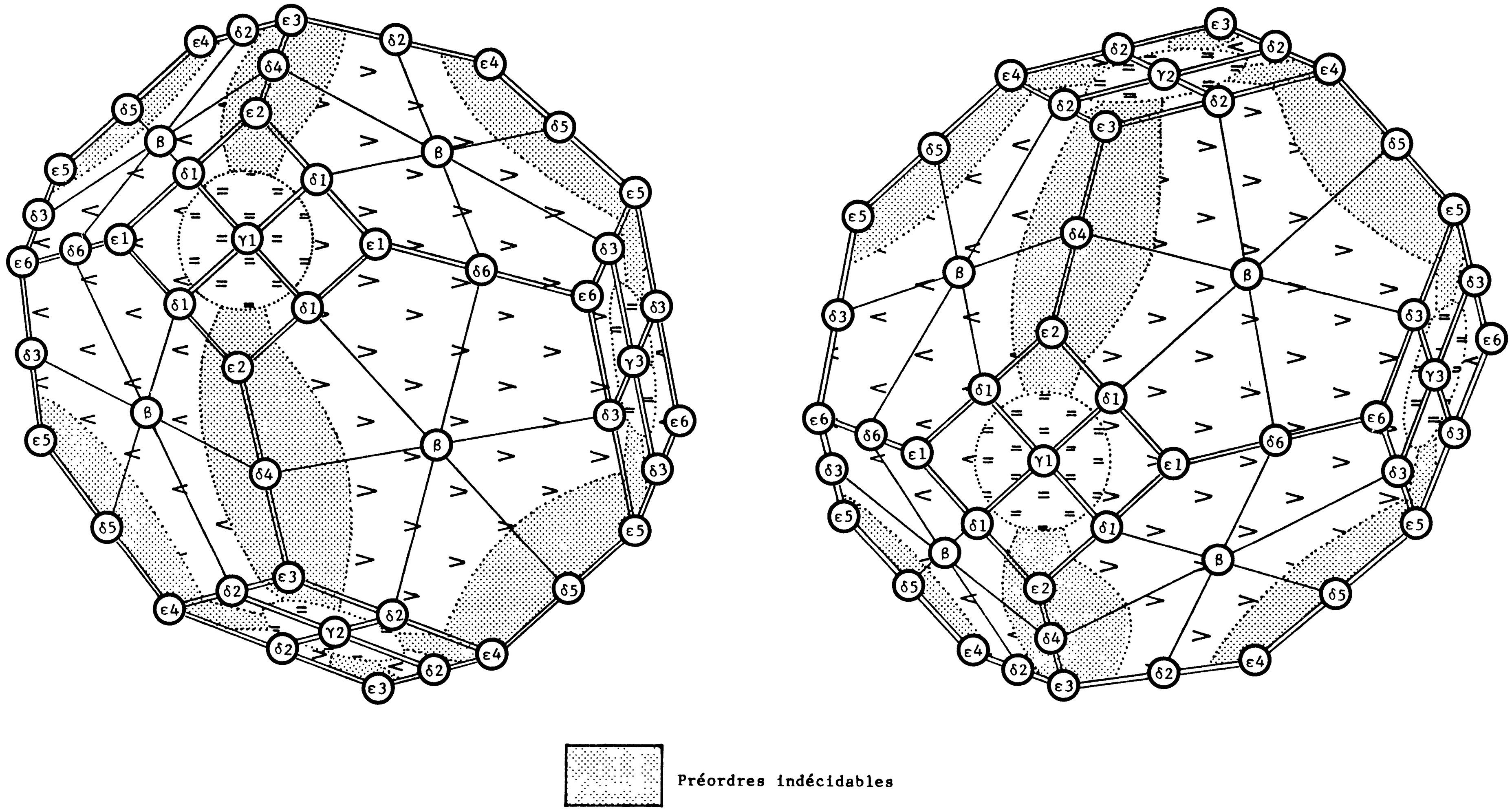

Figure n° 5. Localisation sur le polyèdre des préordres décidables et des conclusions auxquelles ils conduisent.

Pour que le problème de la comparaison des inégalités soit décidable sans axiomes supplémentaires, il suffit donc que l'une des deux conditions suivantes ait été vérifiée. Pour un moment d'observation donné t :

- les deux observations sont égales : $\exists t \in T : m_t^a = m_t^b$,

- l'une des observations est le plus grand élément de M et l'autre le plus petit : $\exists t \in T : \exists p \in P \;\&\; \exists p' \in P : (p \neq p') \;\&\; (m_t^p = max \;\&\; m_t^{p'} = \min)$.

La figure n° 5 situe sur le polyèdre les cas décidables, et la solution qu'ils apportent au problème posé. On constate qu'à partir des deux pôles $\gamma 2$, quatre méridiens passant par les autres configurations γ découpent la surface du polyèdre en quatre zones de décidabilité alternées. Les configurations indécidables forment huit triades situées sur ces méridiens, de part et d'autre du point $\gamma 3$ (configurations avec changement de sens de l'inégalité), ou du point $\gamma 1$ (pas de changement de sens). Il faut remarquer que toute configuration indécidable est contiguë à une configuration décidable conduisant à $R_i \overset{*}{<} R_j$, et à une autre conduisant à $R_i \overset{*}{>} R_j$. Comme les cas de stabilité γ (pour lesquels on a $R_i \overset{*}{=} R_j$), les configurations indécidables apparaissent donc comme des cas intermédiaires entre deux solutions contraires.

Bien que le problème posé initialement se révèle décidable dans plus des deux tiers des cas possibles, le bilan de cette démarche formelle peut sembler assez décevant pour le sociologue. En effet, les cas décidables correspondent à des situations de fait que l'on ne rencontre qu'assez rarement en pratique ; certains d'entre eux ne présentent d'ailleurs que peu d'intérêt pour les recherches sur les inégalités (cf. les configurations α, β, et γ). En outre, les situations indécidables sont d'autant plus probables en réalité que les observations m_t^p peuvent prendre un plus grand nombre de valeurs. A titre d'exemple, la proportion de situations indécidables sur l'ensemble des situations possibles *a priori* passe de 0 % pour 2 valeurs possibles à approximativement 10 %, 20 %, et 25 % pour respectivement 3, 4, et 5 valeurs possibles. D'ailleurs, à la situation prise comme exemple par COMBESSIE correspond justement une configuration indécidable.

D'autre part, et ceci découle de la nature même des règles de définition d'un préordre sur les intervalles, les situations décidables sont telles que le simple bon sens suffit au diagnostic. Par exemple (figure n° 6), pour que l'on puisse affirmer que l'inégalité a augmenté, il faut

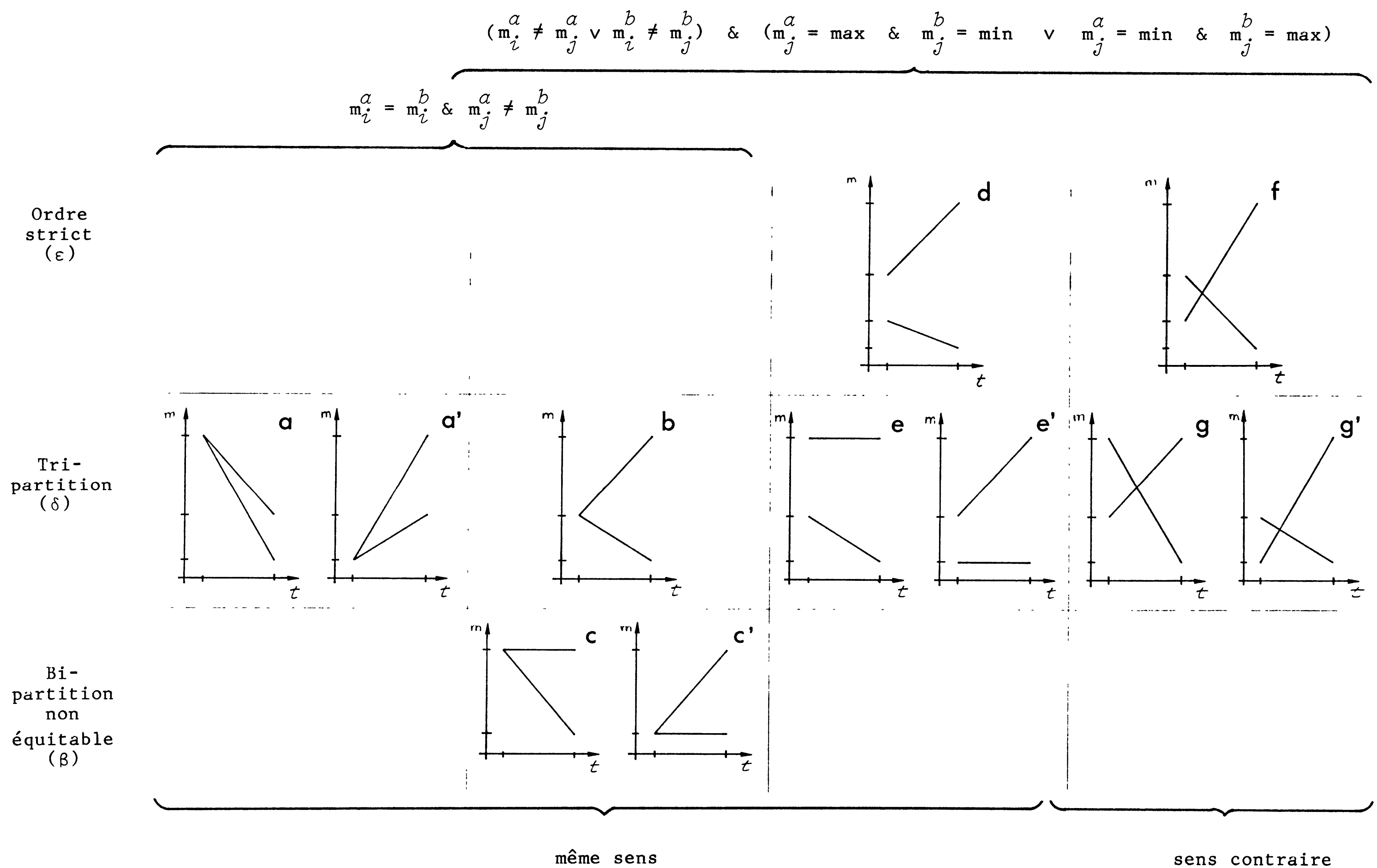

Figure n° 6. Typologie des configurations conduisant à la conclusion : "l'inégalité a augmenté".

(et il suffit) soit que l'inégalité soit nulle au moment i et non nulle au moment j (exemples a à c), soit que l'une au moins des deux populations ait évolué et que les valeurs observées au moment j soient les valeurs extrêmes dans M (exemples b à g). En pratique, les situations concrètes répondant à ces conditions ne suscitent évidemment aucune difficulté d'interprétation.

Il est donc nécessaire, pour résoudre les cas qui font effectivement problème, et qui sont d'ailleurs les plus fréquents dans la pratique, de dépasser le niveau ordinal. La solution généralement adoptée consiste à concevoir un indice d'inégalité, la comparaison des inégalités se trouvant ainsi ramenée à une simple comparaison numérique.

III. LES MESURES DE L'INÉGALITÉ

Tel qu'il est posé initialement, le problème de la comparaison des inégalités permet le recours à des indices numériques, puisque M est le résultat d'une application des valeurs brutes observées sur le segment [0,100] des nombres décimaux. L'ensemble des indices possibles est pratiquement illimité ; il est donc hors de question de les passer tous en revue. Il est par contre intéressant d'examiner les indices recensés par COMBESSIE, dans la mesure où ceux-ci correspondent à la pratique des sociologues. Pour éprouver leur cohérence avec l'objectif en vue duquel ils ont été conçus, on devra s'assurer que, pour une famille donnée de cas décidables (par exemple l'ensemble des cas tels que $R_i \overset{*}{<} R_j$), l'indice examiné conduit à une même conclusion (ici : "l'inégalité a augmenté") quelle que soit la configuration et quelles que soient les valeurs particulières prises par les éléments de M.

Jean-Claude COMBESSIE décrit deux procédures distinctes visant à diagnostiquer l'évolution des inégalités : mesurer l'inégalité à chacun des moments d'observation i et j, ou mesurer l'évolution de chacune des populations a et b.

La première procédure consiste à calculer, pour un moment donné $t \in T$, un indice I_t dépendant du couple de mesures (m_t^a, m_t^b). Parmi les neuf indices de ce type recensés, il est commode de distinguer trois catégories, selon les opérations arithmétiques utilisées : valeur absolue de la différence, et rapport (tableau n° 7).

$\mid - \mid$	$\mid m_t^a - m_t^b \mid \; = \; \mid (100-m_t^a) - 100-m_t^b) \mid$	
$\mid - \mid /$	(17) $\mid m_t^a - m_t^b \mid / m_t^a$	(18) $\mid m_t^a - m_t^b \mid / (100-m_t^a)$
	(19) $\mid m_t^a - m_t^b \mid / m_t^b$	(20) $\mid m_t^a - m_t^b \mid / (100-m_t^b)$
$/$	(5) m_t^a / m_t^b	(7) $(100 - m_t^a) / (100-m_t^b)$
	(6) m_t^b / m_t^a	(8) $(100 - m_t^b) / (100-m_t^a)$

Tableau n° 7. Exemples d'indices du premier type (I_t) d'après [3], pages 237 à 240 (la numérotation renvoie à l'article cité).

La valeur absolue de la différence entre m_t^a et m_t^b satisfait aux conditions énoncées précédemment : quelles que soient les valeurs numériques associées à une configuration décidable, la relation observée entre $I_i = |m_i^a - m_i^b|$ et $I_j = |m_j^a - m_j^b|$ est la même que celle qui lie R_i à R_j (c'est-à-dire que : $R_i \overset{*}{\text{rel}} R_j \Rightarrow I_i \text{ rel } I_j$). Cet indice est donc cohérent, et sa signification claire (3).

On peut "relativiser" cet indice en le rapportant à une valeur liée au moment d'observation t , servant de référence. Dans les quatre exemples d'indice choisis par COMBESSIE pour illustrer cette possibilité (cf. Tableau n° 7, indices n^{os} 17 à 20), le diviseur est soit l'un des pourcentages observés au moment t , soit son complément à 100. Formellement, les indices de cette catégorie ne satisfont aux conditions de cohérence énoncés précédemment que pour les cas décidables sans changement de sens de l'inégalité initiale. Lorsqu'il y a, au moment j , renversement de l'inégalité observée au moment i , les conclusions auxquelles conduit la comparaison des indices peuvent être en contradiction avec celles qui découlent des propriétés formelles des inégalités. Un exemple particulièrement clair est celui où l'on a :

$$m_i^a = m_j^b \quad \& \quad m_j^a = m_i^b \quad \Rightarrow \quad R_i \overset{*}{=} R_j \, .$$

(3) Jean PRÉVOT arrive à la même conclusion par une démarche différente (cf. [6]).

Il s'ensuit évidemment : $|m_i^a - m_i^b| = |m_j^a - m_j^b|$. Lorsque l'inégalité est non nulle ($m_i^a \neq m_i^b$), le fait de diviser la même différence absolue par des valeurs différentes aux moments i et j entraîne $I_i \neq I_j$ pour tout indice de cette catégorie. Cette contradiction devrait suffire à écarter les indices de cette forme (4).

L'idée de "relativiser" la valeur absolue de la différence mériterait cependant d'être retenue, dans la mesure où elle correspond à un besoin exprimé par certains sociologues. Une solution commode, mais peu satisfaisante sur le plan conceptuel, serait de restreindre l'usage des indices de la catégorie précédente aux seules situations (d'ailleurs les plus fréquentes) dans lesquelles il n'y a pas de changement de sens de l'inégalité. Une démarche plus rigoureuse consisterait, considérant que la valeur absolue de la différence est en soi un indice satisfaisant, à rechercher quels diviseurs n'altèrent pas les qualités de cet indice, tout en ayant une signification sociologique. On s'apercevrait alors que la somme et la moyenne des deux observations (m_t^a , m_t^b), par exemple, répondent à ces conditions (5).

La troisième catégorie d'indices de ce type suscite plus de réserves encore que la catégorie précédente. On voit immédiatement que les quatre indices proposés sont interdépendants par construction : lorsque les indices n° 5 et 8 du tableau n° 7 croissent, les indices n° 6 et 7 décroissent, et réciproquement. Il est vrai que cette difficulté pourrait être levée par un simple changement de signe, à condition toutefois que les règles en soient complètement explicitées. Car il est pour le moins paradoxal que, dans des cas aussi clairs que ceux représentés figure 6 a - c' (l'inégalité, nulle en i , non nulle en j , a augmenté), on aboutisse à : $I_i < I_j$ ou : $I_i > I_j$ selon le choix que l'on fait, comme valeur de référence, entre deux pourcentages ayant *a priori* le même statut. D'autre part, les indices de cette catégorie ne satisfont pas aux conditions de cohérence lorsque l'inégalité a changé de sens.

L'autre procédure, qui consiste à mesurer l'évolution de chacune des deux populations, conduit à calculer, pour une population donnée $p \in P$, un

---

(4) Il est toutefois intéressant de pousser plus avant l'examen de ces indices, en considérant leurs variations pour chacun des cas décidables. Par exemple, pour l'indice n° 17, dans le cas décidable f de la figure n° 6, si l'on a : $m_j^a > m_i^b > m_i^a > m_j^b$, on voit que l'on obtient des conclusions erronées ssi : $|m_i^a - m_i^b| / m_i^a \geqslant |m_j^a - m_j^b| / m_j^a$.

(5) Mais non une valeur ne dépendant pas de ces seules observations, telle que la moyenne générale de plus de deux valeurs observées, proposée dans [3], pages 244-246.

indice E_p dépendant du couple de valeurs observées (m^p_i , m^p_j). On peut comme précédemment classer en trois catégories les indices de ce type recensés par COMBESSIE (Tableau n° 8).

$\mid - \mid$	$\mid m^p_j - m^p_i \mid = \mid (100-m^p_j) - (100-m^p_i) \mid$	
$\mid - \mid /$	9 13 $\mid m^p_j - m^p_i \mid / m^p_i$	10 14 $\mid m^p_j - m^p_i \mid / (100-m^p_i)$
	11 15 $\mid m^p_j - m_i \mid / m^p_j$	12 16 $\mid m^p_j - m^p_i \mid / (100-m^p_j)$
$/$	1 $m^p_j \ / \ m^p_i$	2 $(100-m^p_j)/(100-m^p_i)$
	3 $m^p_i \ / \ m^p_j$	4 $(100-m^p_i)/(100-m^p_j)$

Tableau n° 8. Exemples d'indices du deuxième type (E_p), d'après [3], pages 237 à 239 (la numérotation renvoie à l'article cité).

Ce type d'indice, qui vise à évaluer l'accroissement de la variable mesurée sur p, ne répond pas directement à la question posée : sachant que la population a a eu une évolution plus importante que la population b, il est impossible de déterminer si l'inégalité initiale a augmenté, est restée stable, ou a diminué. Pour ce faire, il serait en outre nécessaire de connaître au moins les positions respectives des populations a et b soit au moment i, soit au moment j. A partir de l'analyse formelle des préordres sur les inégalités, il est possible de construire une table de décision visant à diagnostiquer l'évolution de l'inégalité. On constate alors (Tableau n° 9) que, quel que soit le moment de référence choisi (i ou j), des zones d'incertitude subsistent. En effet, si l'on prend le moment i comme référence, on ne peut en aucun cas affirmer que l'inégalité a diminué, puisque les indices E_p ne tiennent pas compte par construction des cas particuliers où l'inégalité au moment j est nulle ou de sens contraire ; pour des raisons analogues, si l'on prend comme référence le moment j, on ne peut en aucun cas affirmer que l'inégalité a augmenté. Si l'on considère simultanément les moments i et j, on peut construire deux tables de décision complémentaires (Tableaux n° 10a et 10b), qui réduisent ces zones d'incertitude sans toutefois les supprimer complètement. La lourdeur de

moment i :	$m_i^a < m_i^b$	$m_i^a = m_i^b$	$m_i^a > m_i^b$
$E_a < E_b$	$R_i \overset{*}{<} R_j$	$R_i \overset{*}{<} R_j$	?
$E_a = E_b$	$R_i \overset{*}{=} R_j$	$R_i \overset{*}{=} R_j$	$R_i \overset{*}{=} R_j$
$E_a > E_b$	?	$R_i \overset{*}{<} R_j$	$R_i \overset{*}{<} R_j$

moment j:	$m_j^a < m_j^b$	$m_j^a = m_j^b$	$m_j^a > m_j^b$
$E_a < E_b$	?	$R_i \overset{*}{>} R_j$	$R_i \overset{*}{>} R_j$
$E_a = E_b$	$R_i \overset{*}{=} R_j$	$R_i \overset{*}{=} R_j$	$R_i \overset{*}{=} R_j$
$E_a > E_b$	$R_i \overset{*}{>} R_j$	$R_i \overset{*}{>} R_j$	?

Tableau n° 9. <u>Tables de décision pour les indices du deuxième type (E_p)</u>

j \ i	$m_i^a < m_i^b$	$m_i^a = m_i^b$	$m_i^a > m_i^b$
$m_j^a < m_j^b$	$R_i \overset{*}{<} R_j$	$R_i \overset{*}{<} R_j$	?
$m_j^a = m_j^b$	impossible	impossible	$R_i \overset{*}{>} R_j$
$m_j^a > m_j^b$	impossible	impossible	$R_i \overset{*}{>} R_j$

Tableau n° 10a. <u>Table de décision pour $E_a < E_b$</u>

j \ i	$m_i^a < m_i^b$	$m_i^a = m_i^b$	$m_i^a > m_i^b$
$m_j^a < m_j^b$	$R_i \overset{*}{>} R_j$	impossible	impossible
$m_j^a = m_j^b$	$R_i \overset{*}{>} R_j$	impossible	impossible
$m_j^a > m_j^b$	?	$R_i < R_j$	$R_i < R_j$

Tableau 10b. <u>Table de décision pour $E_a > E_b$</u>

cette procédure de diagnostic montrerait, s'il en était besoin, que l'information sélectionnée pour le calcul de l'indice ne correspond pas au minimum d'information pertinente requis pour décrire et comparer les inégalités.

Ce rapide examen conduit donc à rejeter catégoriquement tous les indices de ce type en tant qu'indices d'inégalité. Pourtant, les indices du type E_p ne sont pas sans intérêt pratique pour le sociologue ; ils devraient en effet permettre de répondre à la question : à laquelle des deux populations a et b l'évolution a-t-elle profité le plus ? Dans cette perspective, on voit immédiatement que les cinq premiers indices du Tableau n° 8 ne conviennent que dans le cas particulier où les mesures effectuées sur les deux populations sont toutes deux croissantes. En effet, la valeur absolue de la différence mesure l'ampleur de l'évolution, indépendamment du sens de celle-ci. Or, le sens de l'évolution importe ici au sociologue autant, sinon plus, que son amplitude. La comparaison de deux valeurs d'un même indice d'évolution basé sur la valeur absolue de la différence ne permet pas, à elle seule, de répondre à la question ci-dessus. En effet, si l'on a : $E_a > E_b$, cela signifie que a est la population la plus favorisée si les deux évolutions sont croissantes, et qu'elle est au contraire la plus défavorisée si les deux évolutions sont décroissantes ; lorsque les deux évolutions sont de sens contraire, c'est évidemment la population dont l'évolution est croissante qui est la plus favorisée, quelle que soit la relation définie sur le couple d'indices (E_a, E_b). Il est donc clair que, pour les indices de type E_p, la valeur algébrique de la différence doit être préférée à sa valeur absolue. Tel n'était pas le cas pour les indices du premier type (I_t). Ces divergences dans le choix des opérateurs pertinents s'expliquent par les différences entre les relations postulées sur les couples de mesures servant au calcul de l'indice. Dans l'évaluation de l'inégalité au moment t, les deux populations a et b ont, *a priori*, le même statut épistémologique ; c'est pourquoi seule une opération commutative sur le couple (m_t^a, m_t^b) est compatible avec la propriété de symétrie postulée sur celui-ci. Par contre, les indices d'évolution d'une population p présupposent par définition un ordre strict sur les moments d'observation (i précède j), donc sur le couple de mesures (m_i^p, m_j^p) ; d'où l'intérêt d'opérations non commutatives préservant la propriété d'antisymétrie sur ces mesures.

Un examen plus poussé des indices de ce deuxième type nécessiterait une analyse formelle analogue à celle qui a été réalisée pour les indices d'inégalité *stricto sensu* ; ceci dépasserait largement le cadre de cet article. En revanche, l'ensemble des considérations qui précèdent permet d'esquisser une axiomatique de la mesure des inégalités.

IV. CONDITIONS PRÉALABLES À LA CONSTRUCTION D'INDICES D'INÉGALITÉ

La construction d'un indice d'inégalité présuppose que les observations qui permettent d'établir l'existence de l'inégalité, voire de la mesurer, soient effectivement comparables ; la comparaison doit en effet satisfaire à des conditions de légitimité et de faisabilité.

Pour que la comparaison soit légitime, il faut tout d'abord que l'on puisse considérer les populations à comparer comme identiques selon toutes les caractéristiques essentielles qui servent à les définir, sauf une, cette dernière étant justement la caractéristique dont on désire examiner la relation avec le phénomène étudié. Dans l'exemple présenté par COMBESSIE, les deux populations d'enfants scolarisés ne diffèrent pour l'essentiel que par la profession de leur père ; et cette caractéristique est utilisée ici comme indicateur de l'origine sociale, dont on désire examiner la relation avec les possibilités de passage dans l'enseignement secondaire. Il faut ensuite que les observations soient faites dans des conditions identiques, et aient le même objet. Dans l'exemple cité, la procédure utilisée (6) est l'enquête biographique par sondage aléatoire auprès de l'ensemble des adultes de Grande-Bretagne en 1949, et l'un des objets de cette enquête avait trait au cursus scolaire. Enfin, si les populations étudiées diffèrent également par d'autres caractéristiques, et si ces caractéristiques risquent d'avoir un effet ("parasite") sur les observations, il faut que cet effet soit annulé. On peut par exemple annuler les différences de taille entre les populations en transformant les nombres d'admissions dans l'enseignement secondaire en pourcentages de l'ensemble de chaque population.

Pour que la comparaison soit faisable, il faut qu'il ne puisse y avoir de cas indécidables, et que par conséquent, pour tout couple d'observations, il soit possible de dire si la première est supérieure, égale, ou inférieure à la seconde. En particulier, la comparaison est toujours faisable lorsque les observations ont été appliquées sur une échelle numérique ; on postule en effet que la relation d'ordre définie sur les images des observations sur cette échelle est transposable aux observations elles-mêmes. Mais toute comparaison faisable n'est pas nécessairement légitime. Dans l'exemple cité, la comparaison des effectifs d'enfants d'une origine sociale donnée ayant eu accès à l'enseignement secondaire est faisable ; elle n'est cependant légitime que si les populations comparées sont de même taille. Sinon, pour que

(6) Au moins pour la première colonne du tableau n° 1 (cf. sur ce point [5], pages 400-401).

la comparaison soit à la fois faisable et légitime, il est nécessaire qu'aux valeurs extrêmes possibles des observations, propres à chacune des populations, une application fasse correspondre les extrémités d'un segment donné de cette échelle (par exemple, l'intervalle $[0,100]$ de $\mathbb{D}$). En outre, lorsqu'un ordre est défini sur les observations, l'application doit préserver cet ordre ; si les observations sont des valeurs numériques (dénombrements ou mesures, p.ex.), l'application doit donc être une fonction monotone croissante (mais non nécessairement linéaire).

L'intérêt d'un indice d'inégalité étant de rendre possible la comparaison des inégalités, les règles de sa construction doivent également être subordonnées aux conditions de légitimité et de faisabilité de cette seconde forme de comparaison. En pratique, le problème de la faisabilité ne se pose pas, puisqu'un indice est par définition une valeur numérique. Par contre, la question de la légitimité de cette comparaison est relativement complexe. En effet, les différentes valeurs d'un indice d'inégalité se rapportent à des situations qui diffèrent les unes des autres par le moment (recherches sur l'évolution des inégalités) ou le lieu (comparaisons interculturelles) considéré. Pour que la comparaison ait un sens, il faut donc s'assurer au préalable soit que les disparités géographiques ou historiques n'altèrent sensiblement ni la nature du phénomène étudié, ni les caractéristiques essentielles des populations, soit qu'il est possible de corriger les effets de ces altérations. Après annulation éventuelle de ces "effets parasites", on doit disposer de populations identiques à deux caractéristiques près : celle dont on désire examiner la relation avec le phénomène étudié, et celle qui détermine la diversité (géographique ou historique) des situations d'observation. En outre, ces populations doivent être appariées : pour tout couple de situations d'observation (historiques ou géographiques), à une population donnée dans l'une des situations doit correspondre une population et une seule dans l'autre situation, ces deux populations étant considérées comme identiques à la situation d'observation près [7].

D'autre part, pour que l'interprétation de la comparaison de deux valeurs d'un même indice soit faisable, il importe que la signification de l'indice soit claire. Cela conduit à bien distinguer entre l'*amplitude* (la "force") de l'inégalité, et le *sens* de l'inégalité. En effet, si l'on peut

(7) L'une des critiques que l'on peut faire aux indices du type du coefficient de GINI, calculés à partir d'une fonction de concentration, est de ne pas tenir compte de cet appariement, puisque des variations dans les positions respectives des populations d'une situation à une autre sont permises.

admettre qu'un indice renseigne à la fois sur le sens et sur l'amplitude de l'inégalité, un tel indice se prête mal aux comparaisons, et son usage peut conduire à des absurdités. Par exemple, un indice de la forme $I_t = m_t^a - m_t^b$ entraînera des appréciations contradictoires selon que l'on aura : $m_t^a > m_t^b$ ou : $m_t^a < m_t^b$. Si l'on postule qu'un indice d'inégalité mesure l'amplitude et elle seule, cet indice doit être compatible avec l'analyse formelle, développée au § II, de la notion d'inégalité. Cela implique que, pour un cas décidable donné, la relation d'ordre observée sur les valeurs de l'indice reste stable quelles que soient les valeurs des observations ; et que cette relation soit identique pour tous les cas décidables conduisant à la même conclusion, et pour ceux-ci seulement. Il paraît en outre souhaitable, pour des raisons de commodité, que la relation observée pour tous les cas décidables conduisant à la même conclusion soit identique à la relation contenue dans la conclusion (fût-ce au prix d'un changement de signe de l'indice). Il paraît également souhaitable que les limites de variation des valeurs de l'indice soient connues *a priori*.

Ces conditions préalables étant posées, l'analyse du problème énoncé par Jean-Claude COMBESSIE débouche sur la description des postulats auxquels devrait satisfaire tout indice mesurant l'amplitude de l'inégalité entre deux populations en vue d'une comparaison ultérieure. Rien n'interdit d'étendre ces considérations à des ensembles de populations ou de situations d'observation comportant plus de deux éléments. A condition de se borner à des comparaisons binaires, on peut appliquer sans modification l'analyse qui précède à des sous-ensembles de deux éléments extraits d'ensembles plus vastes. On conservera donc la symbolique utilisée ci-dessus, en convenant que $T = \{i,j\}$ est un sous-ensemble de situations d'observation différant entre elles selon le moment ou le lieu de l'observation ; et que $P = \{a,b\}$ est un sous-ensemble de familles de populations appariées, chaque élément servant à désigner une famille de populations considérées comme identiques à la situation d'observation près. On y ajoutera toutefois un symbole supplémentaire, n_t^p, pour désigner l'observation brute (ici : dénombrement des individus) à partir de laquelle a été obtenue l'observation normalisée m_t^p (ici : pourcentages de l'ensemble des individus de la population p dans la situation d'observation t).

Les postulats, au nombre de quatre, sont énumérés par ordre d'importance décroissante.

<u>Postulat 1</u>. Tout indice d'inégalité doit être compatible avec les propriétés générales (énoncées au § II) qui sont déductibles de la définition même du concept d'inégalité. Dans tous les cas où la comparaison des inégalités est possible directement (c'est-à-dire sans utiliser un indice numérique), la relation observée sur un couple de valeurs de l'indice doit être la même que celle qui découle des propriétés des inégalités :

$$R_i \overset{*}{\text{rel}} R_j \Rightarrow I_i \text{ rel } I_j$$

(rel prenant ses valeurs dans $\{<,=,>\}$). Ce postulat engendre les règles plus spécifiques suivantes : quels que soient $(a,b) \in P^2$, quels que soient $(i,j) \in T^2$,

Règle 1 : $m_i^a = m_i^b \;\&\; m_j^a = m_j^b \Rightarrow I_i = I_j$

Règle 2 : $m_i^a = m_j^a \;\&\; m_i^b = m_j^b \Rightarrow I_i = I_j$

Règle 3 : $m_i^a = m_j^b \;\&\; m_j^a = m_i^b \Rightarrow I_i = I_j$

Règle 4 : $m_i^a = m_i^b \;\&\; m_j^a \neq m_j^b \Rightarrow I_i < I_j$

Règle 5 : $(m_i^a \neq m_i^b \;\vee\; m_j^a \neq m_j^b) \;\&\; (m_j^a = max \;\&\; m_j^b = min) \Rightarrow I_i < I_j$

$$\text{avec : } m_j^a = max \Leftrightarrow m_j^a \geqslant m_i^a \;\&\; m_j^a \geqslant m_i^b \;\&\; m_j^a \geqslant m_j^b$$

$$m_j^b = min \Leftrightarrow m_j^b \leqslant m_i^a \;\&\; m_j^b \leqslant m_j^a \;\&\; m_j^b \leqslant m_i^b$$

Un corollaire de ce postulat est que deux indices différents ne peuvent conduire à des appréciations différentes que pour les cas indécidables *a priori*. Comme les configurations indécidables sont toujours contiguës, sur la surface du polyèdre, à deux configurations décidables conduisant à des conclusions contraires, on peut s'attendre à ce que deux indices différents, appliqués à une situation donnée correspondant à une configuration indécidable *a priori*, conduisent éventuellement à des conclusions contradictoires.

Postulat 2. Pour une situation d'observation donnée t , tout indice d'inégalité est une fonction d'un ensemble de paramètres liés à cette situation d'observation ; cet ensemble contient au moins soit le couple de valeurs (m_t^a , m_t^b) , soit les paramètres permettant de les calculer.

Il est naturel que la valeur de l'indice dépende des deux observations qui fondent l'inégalité. Cette exigence minimale peut d'ailleurs se révéler suffisante, comme le montre l'exemple de la valeur absolue de la différence entre pourcentages. Toutefois, deux correctifs doivent être apportés à cette affirmation. En premier lieu, il peut être commode de calculer l'indice I_t directement à partir des observations brutes n_t^p ; il est alors indispensable que figurent dans la formule de calcul non seulement le couple de valeurs (n_t^a, n_t^b) , mais également les paramètres qui auraient été nécessaires pour effectuer une transformation qui les rende comparables (par exemple : les effectifs des populations a et b). En second lieu, la théorie sociologique à laquelle se réfère le chercheur peut se traduire par un modèle explicatif des inégalités ou de leur évolution incluant divers paramètres que l'on désire intégrer au calcul de l'indice.

Postulat 3. Pour une situation d'observation donnée t , la valeur de l'indice ne change pas si l'on permute les deux populations a et b. En d'autres termes, les observations relatives à chaque population jouent dans le calcul de l'indice un rôle symétrique.

Dans le cas de figure le plus simple, c'est-à-dire lorsque la valeur de l'indice I_t dépend du seul couple de valeurs (m_t^a, m_t^b), on a, quelle que soit la fonction f :

$$I_t = f\ (m_t^a, m_t^b) = f\ (m_t^b, m_t^a).$$

La justification de ce postulat est que la comparabilité de ces deux populations leur confère un statut épistémologique identique. Il n'y a donc aucune raison de privilégier *a priori* l'une de ces populations, si l'on désire disposer d'un indice de portée générale. Ce corollaire prohibe par conséquent l'utilisation, dans le calcul de l'indice I_t , d'opérations non commutatives sur le couple (m_t^a, m_t^b) , comme d'ailleurs sur (n_t^a , n_t^b). Cette règle a pour conséquence l'interdiction d'indices basés sur la différence algébrique ou sur le rapport entre ces deux valeurs ; demeurent par contre légitimes des opérations telles que l'addition ou la multiplication de ces valeurs, ainsi que la valeur absolue de leur différence.

Ce troisième postulat est en opposition avec l'usage de la plupart des sociologues, comme l'article de COMBESSIE le montre bien. De même que toute autre méthode de description condensée de résultats d'observation, un indice numérique peut, dans le déroulement d'un travail de recherche, assurer trois fonctions distinctes : heuristique, illustrative, et démonstrative. La fonction *heuristique* correspond aux exigences formelles les plus faibles: tout indice, si insolite qu'il puisse être, peut aider à la découverte ; mais en contrepartie, un indice dont le rôle n'est qu'heuristique est à l'usage personnel du chercheur qui l'utilise ; et, n'ayant pas à être fondé en théorie, il n'a pas non plus à être rendu public. La fonction *illustrative*, ou argumentative, suppose par contre une certaine rigueur ; un indice remplissant cette fonction est souvent un indice *ad hoc*, conçu pour attirer l'attention du lecteur sur un aspect des données que l'on décrit, ou pour étayer une argumentation portant sur un point particulier. Dans la littérature relative à la comparaison des inégalités sociales, de tels indices sont d'un usage courant (cf. [5], pages 411-414). Leur valeur suggestive est certaine ; mais leur portée est restreinte, en ce sens que le raisonnement qui les fonde peut également servir à mettre en évidence des phénomènes contraires. C'est le cas par exemple lorsque l'indice mesurant l'inégalité se fonde sur le rapport m_t^a / m_t^b (cf. Tableau n° 7, indices 5 et 6). La fonction *démonstrative* correspond au souci d'édifier un modèle théorique cohérent du phénomène étudié. Un indice conçu dans ce but doit satisfaire à des exigences formelles d'autant plus rigoureuses que le degré de généralité visé est plus élevé, et la valeur probante souhaitée, plus forte. On doit en particulier pouvoir en faire un usage systématique, quelles que soient les données utilisées, et les intentions de l'auteur de la recherche. Comme ce type d'indice repose sur une axiomatique plus forte que les indices à visée illustrative ou heuristique, il peut éventuellement en assurer les fonctions, mais dans un contexte assez restrictif. C'est bien entendu aux indices à visée démonstrative que s'applique impérativement le troisième postulat.

<u>Postulat 4</u>. Afin que sa signification soit claire pour l'utilisateur, les conditions de variation de l'indice doivent être connues *a priori*. Ce postulat débouche sur deux règles pratiques.

1) Les limites de variation de l'indice doivent être fixées *a priori*, et la formule de calcul définie en conséquence. On peut par exemple convenir que I_t variera dans l'intervalle [0,1], que la valeur *zéro* correspon-

dra au cas d'inégalité nulle et à ce cas seulement, et que la valeur *un* correspondra au cas d'inégalité la plus forte possible, et à ce cas seulement. La conception de l'inégalité la plus forte possible peut varier selon les auteurs, et sa définition est liée à certains présupposés théoriques. Par contre, la notion d'inégalité nulle est claire (absence d'inégalité), et l'on peut poser :

$$I_t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m_t^a = m_t^b$$

D'autre part, une fois défini ce que l'on entend par la "force" d'une inégalité, l'indice doit être une fonction monotone croissance de cette "force".

Par ailleurs, il n'est pas sans intérêt pour le sociologue d'examiner à quels types de situations concrètes peuvent correspondre certaines valeurs remarquables de l'indice (p.ex. : la valeur médiane = 0,5).

2) Comme la raison d'être un indice mesurant l'amplitude des inégalités est de faciliter la comparaison de ces inégalités, il est utile de déterminer à quels types de situations concrètes peuvent correspondre certaines valeurs de la comparaison. Si l'indice satisfait aux conditions du postulat 1, la question ne se pose que pour les situations correspondant aux vingt-quatre configurations indécidables *a priori*. Compte-tenu des relations formelles existant entre certaines de ces configurations, l'examen peut être limité à six configurations choisies judicieusement (8) (cf. le tableau n°11 ci-après). Enfin, il n'est pas nécessaire de passer en revue les trois résultats possibles de la comparaison des inégalités ; il suffit d'examiner le cas particulier : $R_i \overset{*}{=} R_j \quad \Leftrightarrow \quad I_i = I_j$, dont les autres cas sont déductibles.

L'examen des situations concrètes, correspondant à une situation indécidable donnée, pour lesquelles on a : $I_i = I_j$, s'il doit être systématique, ne peut évidemment être exhaustif (à moins que les m_t^p ne prennent qu'un très petit nombre de valeurs). Dans l'exemple proposé par COMBESSIE, où m_t^p varie dans l'intervalle $[0,100]$, et où l'on a la configuration indécidable *a priori* : $m_j^a > m_i^a > m_j^b > m_i^b$, on peut éprouver la signification d'un indice simple, de la forme $I_t = f(m_t^a, m_t^b)$, en posant par exemple

(8) On peut sélectionner deux triplets de cas indécidables contigus, reliés sur le polyèdre par l'arête d'une face carrée. Ces triplets, de la forme : ($\varepsilon 2$, $\delta 4$, $\varepsilon 3$), ou : ($\varepsilon 4$, $\delta 4$, $\varepsilon 5$), ont un élément fortement contigu à un même préordre de forme : $\delta 1$, $\delta 2$, ou $\delta 3$.

$m_i^b = x$, et en donnant aux trois autres éléments de M des valeurs numériques choisies judicieusement. Un tel choix ne doit pas seulement respecter le préordre défini sur M ; il doit également favoriser une exploration du champ des possibles. On pourra par exemple commencer par sélectionner dans [0,100] trois triplets de valeurs numériques, le premier situé d'un côté de la médiane (comme : (45,20,10), p.ex.), les deux autres de part et d'autre de la médiane, l'un étant très dispersé (comme : (95,45,10), p.ex.), et l'autre très peu (comme : (60,55,45), p.ex.). Pour chaque triplet, on résoudra l'équation : $f(m_i^a , x) = f(m_j^a, m_j^b)$ chaque fois que cette équation a au moins une solution. On procèdera de même pour les cinq autres configurations sélectionnées (cf. le tableau n° 11, construit à partir du tableau n° 5). Au vu des résultats, on pourra ensuite procéder à d'autres essais sur d'autres triplets choisis en conséquence. Enfin, si on l'estime indispensable, il sera possible d'étendre ces résultats aux autres configurations indécidables en appliquant les transformations P et T.

$\varepsilon 2 : m_j^a > m_i^a > m_j^b > x$	$\varepsilon 4 : m_j^b > m_j^a > m_i^a > x$
$\delta 4 : m_j^a > m_i^a = m_j^b > x$	$\delta 5 : m_j^b > m_i^a = m_j^a > x$
$\varepsilon 3 : m_j^a > m_j^b > m_i^a > x$	$\varepsilon 5 : m_j^b > m_i^a > m_j^a > x$

Tableau n° 11. Exemple d'une sélection de configurations indécidables, avec $m_i^b = x$.

Cette exploration du champ des possibles peut présenter un caractère fastidieux, même si l'on a pris soin au préalable de résoudre algébriquement l'équation : $f(m_i^a,x) = f(m_j^a, m_j^b)$. Pourtant, seule une procédure de ce type peut permettre à l'utilisateur non mathématicien de percevoir la signification concrète d'un indice, ou de comprendre les implications des différences formelles entre deux indices. En outre, une telle procédure peut éventuellement entraîner la découverte de certaines propriétés de l'indice, non toujours perçues *a priori*. Par exemple, un indice de la forme : $I_t = | m_t^a - m_t^b |$, qui satisfait aux quatre postulats ci-dessus, révèle à l'examen deux caractéristiques pouvant présenter des inconvénients. La première est que l'équation a toujours deux solutions ; pour le triplet : (60,55,45) et la configuration ε2, on a : $x = 40$ et : $x' = 50$. Mais cet inconvénient est mineur, puisque la seconde solution, x', correspond toujours à une autre configuration (ici : $m_{.j}^{a} > m_{.i}^{a} > m_{.i}^{b} > m_{.j}^{b}$). La seconde caractéristique est que la solution correspondant à la configuration étudiée peut aboutir à une valeur de x extérieure à l'intervalle de variation de m_{t}^{p} ; pour le triplet : (45,20,10) et la configuration ε2, on obtient : $x = -15$. Ce second inconvénient pose à nouveau le problème de l'intelligibilité de la signification concrète de l'indice. Lorsque l'on cherche à valider un modèle explicatif, une procédure tout à fait classique consiste à examiner quelles conséquences concrètes (*output*) peuvent être déduites de la théorie lorsque l'on modifie les conditions initiales (*input*) ; ce qui revient à s'interroger sur : "ce qui aurait pu se passer si ...", en faisant évidemment l'hypothèse que le modèle théorique est correct. On admet généralement que, si des conditions initiales plausibles entraînent des conséquences concrètes invraisemblables, le modèle explicatif doit être rejeté. En transposant ce raisonnement à la validation d'un indice d'inégalité, il y aurait donc lieu de rejeter la valeur absolue de la différence entre pourcentages.

On voit sur cet exemple que l'étude des indices d'inégalité portant sur deux éléments seulement est loin d'être achevée. Si l'on admet la validité de la méthode utilisée et la pertinence des postulats proposés, les recherches ultérieures pourraient emprunter trois directions : (9)

1) Examiner à quelles conditions la mesure de l'inégalité peut présenter au minimum les propriétés d'une "échelle métrique ordonnée", et en particulier satisfaire à l'axiome suivant : si a, b, et c sont trois éléments donnés de $(M, \succcurlyeq)$, il existe un élément x de $(M,\succcurlyeq)$ et un seul qui est à c comme b est à a (cf. [2], tome 1, page 118, §6). On a vu que la valeur absolue de la différence entre pourcentages ne vérifie pas ces deux conditions, puisque l'élément x n'est pas unique, et qu'il peut être extérieur à l'intervalle $[0,100]$ de $\mathbb{D}$.

2) En poussant plus avant l'explicitation des présupposés théoriques de la notion d'inégalité sociale, et la clarification de l'opération de comparaison des inégalités, faire la liste du minimum d'informations dont on doit disposer pour tenir un discours cohérent sur ce sujet. Il n'est pas impossible que l'on soit alors contraint de sortir du cadre de l'énoncé pro-

---

(9) Certaines de ces suggestions doivent beaucoup à un entretien avec Marc BARBUT.

posé par Jean-Claude COMBESSIE. En effet, le problème posé initialement considérait comme donnés les seuls pourcentages, indépendamment des effectifs ayant servi à les calculer, et ne tenant compte que des deux populations "extrêmes" dans un ensemble plus vaste (cf. [3], page 244). Il est vrai que ce cadre très restrictif est souvent imposé au chercheur analysant une publication aux données de base de laquelle il n'a pas eu accès ; par conséquent, il peut être extrêmement utile d'évaluer ce que l'on peut raisonnablement affirmer à partir d'informations aussi pauvres. Mais cette évaluation sera facilitée si l'on a défini par ailleurs le minimum d'information pertinente nécessaire pour une analyse approfondie. On peut d'ailleurs considérer que les effectifs des populations étudiées font partie de cet ensemble minimum. Ces effectifs permettent en effet d'estimer les limites de confiance des observations dans le cas d'enquête auprès d'un échantillon aléatoire, et surtout de tenir compte, dans l'évaluation d'une inégalité, du poids respectif des populations comparées : on peut par exemple juger déraisonnable de bâtir un long développement théorique sur une inégalité constatée entre deux populations de tailles très dissemblables (10). C'est pourquoi il peut paraître plus judicieux de calculer l'indice d'inégalité directement à partir des effectifs n_t^p, et des totalisations (marges du tableau de dénombrement), lorsque ces informations sont disponibles.

3) Étendre l'analyse qui précède aux coefficients portant sur plus de deux éléments, en veillant en particulier à leur compatibilité avec les propriétés des comparaisons binaires.

---

(10) Soient par exemple deux populations d'enfants d'âge scolaire, i et j. L'origine sociale des enfants partage la population i en deux sous-populations de même taille, $|a_i| = |b_i| = 500$; elle partage la population j en deux sous-populations de tailles très dissemblables, $|a_j| = 100$ et $|b_j| = 900$. On observe sur ces deux populations des taux d'accès à l'enseignement secondaire identiques : $m_i^a = m_j^a = 40\%$ et : $m_i^b = m_j^b = 15\%$. Doit-on, au vu de ces taux, considérer que l'inégalité d'accès à l'enseignement secondaire selon l'origine sociale est la même en i et en j, ou au contraire estimer, en se basant sur les effectifs d'enfants scolarisés, que l'une de ces sociétés est plus inégalitaire que l'autre ? Et si oui, laquelle ? Ce point est encore, actuellement, l'objet de controverses parmi les sociologues. La réponse que ceux-ci apportent à cette question conditionne évidemment le choix de la définition de l'inégalité la plus forte possible, évoqué ci-dessus à propos du quatrième postulat.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARBUT, Marc, MONJARDET , Bernard, *Ordre et classification. Algèbre et combinatoire*. Paris, Hachette, 1970.

[2] BARBUT, Marc, D'ADHEMAR, Claude, LECLERC, Bruno, JULLIEN, Pierre, *Mathématiques élémentaires. Applications à la statistique et aux sciences sociales*. Paris, Presses Universitaires de France, 1973.

[3] COMBESSIE, Jean-Claude, "L'évolution comparée des inégalités : problèmes statistiques", *Revue Française de Sociologie*, 25(2), 1984, 233-254.

[4] COOMBS, Clyde H., *A Theory of Data*. New-York, Wiley, 1964.

[5] GRÉMY, Jean-Paul, "Sur les différences de pourcentages et leur interprétation", *Revue Française de Sociologie*, 25(3), 1984, 396-420.

[6] PRÉVOT, Jean, "A propos d'indices et de comparaison de proportions", *Revue Française de Sociologie*, 26(4), 1985, 601-628.