D. LACAZE

Gens de R^n

Mathématiques et sciences humaines, tome 87 (1984), p. 83-96

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1984__87__83_0>

Math. Sci. hum. (*22*^{e} année, n°87, *1984*, p.83-96)

GENS DE R^n

D. LACAZE *

On oppose souvent discours mathématique et discours littéraire. Il s'agit de réserver au premier quelques comptes d'usurier ou d'apothicaire. Pourtant l'enjeu des mathématiques peut être tout autre : créer des espaces, les peupler d'êtres dont on va dire les moeurs et les rapports.

Le texte qui suit invite à une telle lecture de l'algèbre linéaire dont il reprend les notions essentielles : vecteurs, multiplication par un nombre, norme, addition, sous-espace engendré par un ensemble de vecteurs, dépendance base, matrice, dimension d'un espace, ordre naturel de R^n, opérations sur les matrices, non commutativité de la multiplication, transposition, noyau, injectivité, matrices régulières et inverses, vecteurs propres. En fait cet essai peut être poursuivi et inclure, au gré de l'imagination de chacun, des notions et des résultats de plus en plus nombreux.

La lecture ainsi proposée, anthropomorphique et très platonicienne, semble la plus naturelle. Mais bien sûr, l'édifice mathématique peut servir de support à d'autres discours si l'on interprête autrement ses définitions de base, ce qui a lieu, par exemple, lorsqu'on l'applique à telle ou telle discipline. C'est même là toute la richesse de l'abstraction mathématique. Encore faut-il apprendre à traduire.

* *

---

* Université de Paris-X.

Des contes, non pas des comptes ou des décomptes, voilà ce que nous offrent les mathématiques. Soit un espace localement convexe E, soient x et y appartenant à E, par définition x + y = ... Comme dans les romans de science-fiction, des univers apparaissent, des peuples se lèvent dont on va dire les rapports, les activités. Travail de démiurge.

Soit donc l'espace R^n. Des êtres-vecteurs l'habitent, définis par n facultés possédées chacunes avec plus ou moins d'intensité. D'où la notation ordinaire de l'un d'eux.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les niveaux atteints, chez l'individu x, par ces diverses facultés. Il peut s'agir de bonté, d'intelligence, de la perception des couleurs ou de l'acuité du toucher, ceci pour prendre quelques exemples dans le registre des caractéristiques humaines. On trouve d'ailleurs l'amorce de ce genre de description, à quelques quantifications près, dans les annonces matrimoniales. D'autre part, certains résumés bien plus elliptiques - âge et revenu mensuel par exemple - jouent déjà un grand rôle. De toute façon, on ne donne là que quelques points de repère empruntés à notre vie courante. L'avantage de la construction mathématique est de permettre au lecteur d'imaginer des aptitudes plus originales.

Comme dans notre humanité, les facultés sont ici inégalement réparties. Chacune d'elles se distribue autour d'une valeur moyenne de part et d'autre de laquelle on peut parler de qualité et de défaut pour employer un vocabulaire de notre monde. Aussi la bonté et la méchanceté sont-elles les manifestations positive et négative d'une même faculté. Le standard moyen qui fait frontière est qualifié de zéro. En fait, l'idée de mort est associée à celle moyenne : l'individu dont toutes les facultés sont au niveau zéro est appelé vecteur nul et incarne cette mort. Dans R^n, on considère ainsi la médiocrité (au sens latin) et ses comportements stéréotypés comme une léthargie qui est même un anéantissement.

Pour décrire maintenant la vie des habitants de R^n, nous parlerons d'abord de leurs états d'âme. Car l'émotion, parfois de brusques tempêtes, modifient les vecteurs sans qu'ils perdent pourtant leur identité. Ainsi peuvent-ils s'exalter, mouvement de tout l'être où l'ensemble des facultés se trouvent proportionnellement augmentées. "y_o est en grande forme, il s'est multiplié la nuit dernière par 13,7" dit quelqu'un de son voisinage. Car les commérages vont bon train dans R^n. A l'inverse, la dépression guette. Toutes les facultés d'un individu se trouvent alors proportionnellement réduites, le multiplicateur étant toujours positif, mais inférieur à 1.

Ces manifestations - exaltation ou dépression - peuvent prendre une grande ampleur. Ainsi certaines crises mystiques provoquent un énorme accroissement des facultés et peuvent conduire un individu aux confins de l'infini. Un multiplicateur très petit conduit par contre à un affaissement de l'être qui approche du zéro de la vie végétative*. Mais des mutations bien plus surprenantes pour un étranger, peuvent survenir. Celles-ci combinent un effet de multiplication avec un changement de signe des facultés : les qualités deviennent défauts, les défauts des qualités. Ainsi les êtres de R^n ont avec leur négatif - leur opposé disent-ils - des rapports étroits. Sans doute ont-ils le sentiment de rester encore eux-mêmes dans ce changement de polarité puisque les intensités relatives de leurs facultés restent inchangées. Il suffit d'entendre les gens de R^n se flatter de leurs proportions pour comprendre que leur identité profonde réside bien dans ce jeu de proportions**.

---

* La notion de norme caractérise l'énergie vitale des vecteurs. On prend le plus souvent la norme euclidienne qui tient compte des niveaux de toutes les facultés, soit

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Une autre façon de faire consiste à ne considérer que la faculté "dominante", d'où

$$\|x\| = \max_i \|x_i\|$$

Ces indicateurs sont quelque peu arbitraires, mais on voit que si les niveaux des facultés sont tous multipliés par un même nombre, il en est de même de la norme.

** Toutes les transformations précédentes peuvent se ramener à la multiplication des facultés par un même nombre qui sera négatif en cas de retournement. Pour définir un vecteur x indépendamment de ces variations d'état, on convient généralement de le normer, c'est-à-dire de diviser le niveau de chacune de ses facultés par sa norme. On obtient ainsi un vecteur $\frac{1}{|x|}.x$ de norme unité exprimant l'identité du vecteur initial au-delà des vicissitudes de son existence.

Ces dispositions peuvent sembler étranges. Pourtant, un tel jugement n'est peut-être, de notre part, que le produit du refoulement. Ecoutons le docteur Jeckyll nous parler de sa part d'ombre, Mister Hyde : "Les deux faces de mon moi étaient également d'une sincérité parfaite ; je n'étais pas plus moi-même quand je rejetais la contrainte et me plongeais dans le vice, que lorsque je travaillais, au grand jour, à acquérir le savoir qui soulage les peines et les maux... J'appris à discerner l'essentielle et primitive dualité de l'homme ; je vis que si je pouvais passer pour l'une et l'autre des deux personnalités qui se disputaient le champ de ma conscience, cela venait de ce que j'étais foncièrement toutes les deux". Ainsi le retournement des êtres de R^n apparaîtra à beaucoup d'entre nous comme la mise en oeuvre explicite d'une alchimie qui nous concerne aussi.

* *

Si les humeurs des habitants de R^n sont parfois violentes, leurs rapports sont simples et sans réserve. Les rencontres se traduisent par une fusion des êtres dont les facultés sont mises en commun, additionnées comme on dit. On peut trouver une telle opération de fusion dès l'aube de la science-fiction dans le "Voyage aux Etats du Soleil" de Cyrano de Bergerac. Un autre exemple est fourni par le beau roman de Sturgeon "Les plus qu'humains" où la mise en commun par quatre hommes, de leurs facultés permet la constitution d'un être supérieur. Bien sûr, on reconnaît aussi dans ce type de relation, l'idéal de l'amour total tel qu'on peut le trouver dans notre littérature ou dans nos rêves. Ecoutons Hephaïstos s'adresser aux amants de Platon : "N'est-ce pas ceci dont vous avez envie ? Vous rapprocher le plus possible l'un de l'autre au point de ne plus vous quitter ni nuit ni jour ? Si c'est bien de cela que vous avez envie, je ne demande pas mieux que de vous fondre ensemble et, avec mon soufflet de forgeron, de faire de vous un alliage ; de sorte que de deux, vous ne fassiez plus qu'un, que jusqu'à la fin de vos jours vous meniez une vie commune, comme si vous n'étiez qu'un". Et Platon nous dit que ces amants pensent ainsi "avoir entendu exprimer ce qu'ils désiraient depuis longtemps : joindre l'aimé, se fondre avec lui et ne plus faire qu'un au lieu de deux".

La fusion des êtres de R^n réalise donc parfaitement les aspirations platoniciennes : ce qui n'est, pour nous, qu'un schéma idéal est, pour les vecteurs, le mode de liaison le plus banal. D'ailleurs les fables platoniciennes se réalisent dans R^n d'une autre manière encore. A l'opposé de la fusion, par une sorte de renversement du temps, les vecteurs peuvent se scinder en deux vecteurs dont ils sont la somme. Ils ont ainsi des descendants. On se souvient que, chez Platon, Zeus avait aussi coupé en deux les hommes primitifs, d'où naquit l'humanité actuelle.

A côté des relations amoureuses, les habitants de R^n ont entre eux des rapports de simple affinité qui ne sont d'ailleurs pas sans liens avec les précédents. On distingue donc des groupes formant communauté de pensée, ou du moins d'être. Ces groupes se constituent à partir d'un ensemble d'individus qu'on peut qualifier de leaders. Ils rassemblent les vecteurs qui pourraient être obtenus par fusion de ces leaders pris à leurs divers stades d'extension. C'est pourquoi on parle de sous-espace engendré par x,y, et z. A vrai dire, une telle appellation peut prêter à confusion. En effet, lorsqu'un vecteur u appartient à un tel sous-espace, la filiation qui conduit de x, y et z à u n'est que virtuelle. Les vecteurs x, y et z pris chacun dans un état convenable, c'est-à-dire duement multipliés, n'ont pas vraiment fusionné pour produire u ; ils pourraient le faire* ... On décrit ainsi ce qu'on peut appeler leur conjointe zone d'influence, pour employer une locution spatiale capable d'évoquer, pour nous, cette notion de sous-espace. On songe, par exemple, à nos partis politiques qui seraient alors définis par la donnée de leurs principaux chefs de file. Les divers courants se réclamant plus spécialement de chacun de ces hommes, peuvent également être définis dans le cas d'un sous-espace de R^n : ils regroupent les vecteurs pour lesquels le poids de tel ou tel leader est le plus grand**.

---

* On dit, dans notre cas, que u est dépendant de x, y et z. Des vecteurs dont aucun n'est dépendant des autres, sont dits indépendants.

** Les vecteurs appartenant au sous-espace engendré par x, y et z s'écrivent

$$u = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

où α, β et γ sont des nombres quelconques qui permettent de tenir compte des divers états que peuvent prendre x, y et z. Si l'on veut distinguer le poids de la structure des vecteurs x, y et z indépendamment de leur état actuel, il est bon de normer ces vecteurs. Si x', y' et z' sont les vecteurs normés, on a

$$u = \underbrace{\alpha . |x|}_{\alpha'} .x' + \underbrace{\beta . |y|}_{\beta'} .y' + \underbrace{\gamma . |z|}_{\gamma'} .z'$$

Alors u appartiendra au courant défini par x si le poids α' est supérieur aux deux autres β' et γ'.

La notion de sous-espace permet donc de décrire certains groupes sociaux de R^n. Ceux qui interviennent ici reposent sur une totale personnalisation de leurs principes (c'est pourquoi nous avons évoqué nos partis politiques)*. Or l'espace R^n tout entier est susceptible d'être ainsi décrit en termes de clientèles puisqu'il peut être engendré à partir de n vecteurs très particuliers :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On voit que chacun de ces vecteurs ne possède, à un niveau non nul, qu'une seule faculté apparaissant pour sa part à un niveau unité. Or ces êtres extrêmes, éminemment disproportionnés, ont dans R^n un caractère sacré. En effet, comme les dieux de la mythologie grecque figuraient la force, la sagesse ou la sensibilité artistique, ils incarnent chacun une des facultés par lesquelles tous les vecteurs se définissent. On dit qu'ils forment une base** de l'espace R^n. En fait, d'autres groupes de vecteurs pourraient engendrer l'espace R^n et servir de base. Certaines coalitions entre leaders de sous-espaces y prétendent parfois. Mais ces tentatives de redéfinition ont toujours été éphémères. Les vecteurs $e_1,\ldots,e_n$, incarnations des principes purs constitutifs de la société de R^n, fournissent toujours la référence de base, donc la base de référence. On parlera à leur sujet de base canonique puisque notre dictionnaire Larousse définit ainsi l'adjectif canonique : "Relatif aux canons de l'Eglise. Fam. Conforme aux bonnes règles". Ceci rend bien compte du caractère profondément religieux du choix de ces vecteurs et aussi de déterminations plus pratiques relatives à leur commodité d'emploi.

* *
*

---

* Les groupes sociaux peuvent aussi se définir par la donnée d'une propriété relative au niveau des facultés de ses membres. Ainsi l'ensemble des vecteurs dont la faculté de plus haut niveau est la ième ou l'ensemble des vecteurs normés dont la ième composante est supérieure à un certain seuil, peuvent constituer une association où l'on cultivera cette faculté.

** La notion de base suppose non seulement que les vecteurs qui la constituent engendrent l'espace, mais encore que ceux-ci soient indépendants. On exclut ainsi la présence de vecteurs qui ne seraient qu'un reflet d'autres vecteurs de l'ensemble générateur.

Après cette première description des moeurs des habitants de R^n, il est temps de prendre quelque recul. Le panorama va s'étendre considérablement. Car les espaces R^n sont aussi nombreux que nos étoiles et leurs planètes : on en dénombre une infinité, autant que de valeurs entières positives données au nombre n. Chacun de ces espaces R^4, R^{39} ou R^{421} abrite un peuple de vecteurs dont la description fait intervenir 4, 39 ou 421 facultés. Or ces peuples communiquent par l'entremise d'êtres nouveaux avec qui ils ont commerce : les matrices. Celles-ci peuvent faire passer un vecteur d'un espace à un autre par une opération qui est plus qu'un simple transport puisqu'elle implique, en général, une profonde transformation des êtres qui y recourent. Bien sûr, dans notre monde déjà, tout voyage est formateur, voire transformateur, mais les conséquences seront, dans R^n, bien plus systématiques.

L'activité matricielle est donc d'abord une activité nautonière. Telle matrice fera passer par exemple de l'espace R^n - espace de départ - à R^p - espace d'arrivée. Mais ce passage est aussi une adaptation aux conditions de vie de R^p. Tout vecteur de R^n, qui se décrit par la donnée de n facultés, est en effet transformé en un être de R^p dont la description comporte p facultés. Ceci implique la recomposition des facultés, chaque nouvelle faculté de R^p étant obtenue à partir des facultés de R^n selon un système de n pondérations propres à la matrice considérée. Pour transformer un être de R^n en un être de R^p, une matrice utilise donc p systèmes de n pondérations. Si on dispose ces systèmes de nombres en lignes, on obtient un tableau rectangulaire à p lignes et n colonnes qui décrit la matrice *.

Ainsi définies, les matrices forment une multitude de flottes effectuant chacune le trafic entre deux espaces : de R^n à R^p, c'est-à-dire de R^{12} à R^{24} pour l'une, de R^{17} à R^4 pour une autre, de R^{362} à R^{39} pour une autre encore. Or si toutes les matrices d'une même flotte conduisent à un même espace, chacune le fait à sa manière. Par leur entremise, les vecteurs d'un espace

* Le transformé d'un vecteur x par la matrice A s'écrit alors :

$$A.x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{p1} & a_{p2} \cdots\cdots & a_{pn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n \end{pmatrix}$$

renaissent dans un autre espace, mais le mode d'adaptation qu'elles proposent leur est propre. D'où le nom de matrice qui rappelle la gestation particulière qu'elles exercent. Si voyage il y a, il s'agirait plutôt du trip que provoque, dans notre société, l'usage des drogues. Elles aussi refaçonnent la personne pour lui donner de nouvelles dimensions, expression qu'on peut reprendre ici au pied de la lettre. On dit en effet couramment que l'espace R^n, dont les êtres sont décrits par la donnée de n facultés, est un espace à n dimensions. Lors d'un transfert matriciel de R^n à R^p et si p est supérieur à n, un vecteur voit donc s'ouvrir à lui un plus grand nombre de dimensions. C'est dire qu'il est décrit par un plus grand nombre de facultés, ce qui est souvent vécu comme un épanouissement de l'individu. L'accès à un espace comportant un nombre de dimensions inférieur à celui de l'espace de départ peut être, au contraire, vécu comme une sclérose. De ce point de vue, le transfert dans l'espace R par une matrice ne comportant qu'une ligne est un cas d'aliénation extrême. L'être-vecteur devenu unidimensionnel se réduit alors à un nombre.

Pour bien comprendre la nature d'une telle aliénation, duement dénoncée par de nombreux philosophes des espaces R^n, il faut analyser ici quel type d'ordre social règne dans ces espaces. A vrai dire de nombreux classements sont proposés, qui privilégient telles ou telles facultés. Mais le seul qui s'impose vraiment consiste à juger qu'un être est supérieur à un autre si le niveau de chacune de ses facultés est supérieur ou égal au niveau atteint chez cet autre. Evidemment, l'ordre ainsi obtenu, appelé ordre naturel de R^n, n'est que très partiel. Bien des êtres restent incomparables. Celui qui supplante l'un au titre d'une faculté peut lui être inférieur pour une autre de ses facultés, ce qui ne conduit à aucune dominance globale. Chez nous déjà, le mauvais élève se console par ses succès sportifs ou son aptitude au dessin. Mais dans R^n, la quantification systématique des facultés permet au phénomène de jouer pleinement et d'autant plus que le nombre des facultés est plus grand. Aussi les espaces les plus dimensionnés correspondent aux sociétés les plus anarchiques. Les êtres y ont mille facettes : on s'égare à vouloir les parcourir et plus encore à les comparer. D'ailleurs une telle absence d'ordre social n'est pas sans déconcerter la plupart des nouveaux arrivants et seuls des tempéraments un peu particuliers s'acclimatent à des conditions de vie aussi débridées.

Les espaces peu dimensionnés conduisent par contre à des sociétés fortement hiérarchisées. A l'extrême, la population de R - espace à une dimension - est totalement ordonnée puisque tous les individus deviennent alors comparables.

Voilà de quoi faire rêver les gens d'ordre qui viennent en effet, par matrices, s'implanter massivement en ces lieux. En fait, ces déplacements vers des espaces plus ou moins dimensionnés présentent quelque analogie avec certaines dérives mentales observables dans notre humanité. On songe par exemple à la récupération marchande par laquelle les facultés humaines n'ont plus d'existence que par le gain qu'elles procurent. Cette opération de conversion monétaire agit comme le ferait, dans R^n, une matrice ligne. L'homme se réduit à une somme, celle de ses gains annuels. On obtient, là encore, une société totalement ordonnée. Ce qui était pour les vecteurs de R^n un changement d'espace n'est pour nous qu'un déplacement mental, mais non moins réel.

* *

Instruments de déplacement et de transformation au service des vecteurs des espaces R^n, les matrices forment un peuple qui côtoie celui des vecteurs sans lui être asservi. A vrai dire, les matrices sont tenues en une curieuse suspicion. A première vue pourtant, leurs moeurs semblent se rapprocher beaucoup de celles des vecteurs. Comme eux, les matrices s'exaltent ou entrent en dépression. Les éléments numériques qui forment leurs tableaux sont alors tous augmentés ou réduits dans les mêmes proportions. Le retournement s'observe aussi. De même les matrices fusionnent par addition deux à deux des éléments de leurs tableaux si elles ont même format, c'est-à-dire si elles exercent leur trafic entre deux mêmes espaces. Mais d'autres opérations interviennent.

Nous avons dit qu'une matrice comportant p lignes et n colonnes permet de passer de l'espace R^n à R^p. En fait, une telle matrice effectue aussi un retour sur R^n en changeant de configuration : ses lignes deviennent colonnes et ses colonnes lignes. Elle prend alors la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes qui fait passer de R^p à R^n. Par cette opération dite de transposition, chaque matrice assure le trafic aller et retour entre deux espaces [*]. La fonction sociale des matrices et leur pleine utilisation rendaient ces dispositions nécessaires et il n'y a encore là rien d'inquiétant.

Un grand sentiment de malaise envahit par contre les habitants des

---

* Ce qui ne veut pas dire qu'un vecteur effectuant un tel aller retour redevienne lui-même. Ce périple l'aura généralement transformé en un autre vecteur de R^n : les voyages sont rarement réversibles (voir ci-dessous).

espaces R^n quand on évoque le mode spécifique d'accouplement connu sous le nom de multiplication matricielle. Celle-ci concerne deux matrices se rencontrant en un espace qui sera espace d'arrivée de l'une et espace de départ de l'autre. C'est dire que le nombre de lignes de la première, soit A, est égal au nombre de colonnes de la seconde, soit B. L'opération se fait alors, à grand bruit, par combinaison deux à deux des colonnes de A et des lignes de B *. Ainsi le produit de cette union fracassante comporte autant de colonnes que A et autant de lignes que B. La matrice obtenue emprunte donc ses caractéristiques à ses deux géniteurs. Elle hérite même de leur fonction sociale puisqu'elle fait passer, mais sans escale, de l'espace de départ de A à l'espace d'arrivée de B. Qui plus est, la transformation qu'elle exerce sur un vecteur est la même que celle qui résulterait de l'emploi successif des matrices A et B.

On peut s'étonner qu'un tel rapport soit considéré comme vulgaire et, pour tout dire, bestial, par les populations des espaces R^n. Cela est dû aux rôles dissymétriques qu'assument les deux matrices impliquées dans cette affaire, ce qui rappelle les rapports hétérosexuels de notre humanité. Nous avons vu en effet que la première des matrices agissait par ses colonnes et la seconde par ses lignes. Dans une symbolique fréquente associant la verticalité à l'homme et l'horizontalité à la femme, on peut dire que la première matrice joue le rôle du père, la seconde de la mère. Mais il ne s'agit que de rôles. Car une même matrice peut assumer l'un ou l'autre de ces rôles au gré des rencontres. Pourtant cette non commutativité des matrices lors de leur multiplication reste pour les vecteurs extrêmement choquante, attachés qu'ils sont à la symétrie qui préside aux opérations de fusion.

* *

---

* Plus précisément, l'élément c_{ij} de la matrice produit C = B.A est obtenu à partir de la ième ligne de B et de la jième colonne de A de la façon suivante :

$$
\begin{array}{cccc}
 & & \boxed{\begin{matrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{matrix}} & A \\
 & & \vdots & \\
B & \boxed{b_{i1} \dots\ b_{im}} & \dots & c_{ij} = a_{1j}.b_{i1} + \dots + a_{mj}.b_{im}
\end{array}
$$

Cependant la méfiance des vecteurs envers les matrices se nourrit de motifs bien plus objectifs. En effet l'usage d'une matrice peut provoquer la mort, c'est-à-dire la transformation en le vecteur zéro de l'espace d'arrivée. Et il ne faut pas s'imaginer que ce qu'une matrice a défait, une autre matrice puisse le refaire. La prise en charge d'un vecteur zéro par une matrice redonne un vecteur zéro puisque la recombinaison de facultés nulles redonne des facultés nulles. La mort est bien définitive.

En principe, toute matrice doit afficher la liste des vecteurs ainsi menacés. Cette liste qui est propre à chaque matrice est appelée son noyau. Mais la réglementation est peu respectée par ces créatures quelque peu sauvages, en déplacements constants entre les espaces qu'elles joignent, et qui ne reconnaissent en fait aucune loi. Les interroger ne sert à rien. Elles prétendent toutes, effrontément, être inoffensives, c'est-à-dire injectives *.

Indépendamment de ce danger de mort, l'usage des matrices implique en général, pour un vecteur, la perte de son identité originelle. En effet, après un voyage de R^n à R^p, le retour de R^p à R^n est possible (sauf cas de décès) par emprunts de matrices convenables. Mais les vecteurs qui se livrent à un tel aller-retour ne retrouvent qu'exceptionnellement leurs proportions initiales. C'est ainsi qu'on peut voir nombre d'entre eux tâtonner longuement, par voyages successifs, pour retrouver, au moins approximativement, la structure de leur enfance.

Or tous ces risques se trouvent considérablement réduits si on accepte de rester dans un même espace. La circulation se fait alors par des matrices carrées assujetties à cet espace et qui se plient bien mieux à la réglementation. Pour éviter toute issue fatale, il suffit donc de vérifier le contenu des noyaux ou d'utiliser les matrices injectives qui sont inoffensives pour tous. En fait, les vecteurs préfèrent ces dernières qui ont, dans des conditions d'utilisation intraspatiales, une propriété remarquable, celle de posséder chacune une matrice "inverse" capable de ramener le voyageur à son état initial. Dès lors plus de crise d'identité. On peut toujours, après les transformations les plus variées, redevenir soi-même. A condition, bien sûr de ne pas quitter son espace et de toujours utiliser ce type de matrices qui, pour marquer leur sûreté d'emploi, sont dites régulières.

---

* On désigne ainsi les matrices dont le noyau se réduit au vecteur zéro de l'espace de départ.

L'attitude des vecteurs face aux dangers des transformations matricielles est un élément discriminatoire essentiel pour toute analyse de la société de R^n. Nous avons déjà décrit les voyages vers d'autres espaces plus ou moins dimensionnés et leurs motivations. Mais par désir de ne pas perdre leur identité, ou du moins d'en contrôler les variations, bien des vecteurs ne quittent pas leur espace. Ceux qu'effraie le trip aveugle et irréversible, peuvent en effet, par le jeu des matrices régulières, modifier leur structure en gardant toujours la possibilité de revenir aux états antérieurs. Or certains sont plus prudents encore et ne veulent à aucun moment perdre leurs proportions. Ceci est encore possible s'ils empruntent des matrices adéquates. En effet de très nombreuses matrices carrées ont la propriété de transformer certains vecteurs qui sont dits vecteurs propres associés à cette matrice, en des vecteurs proportionnels. La transformation matricielle se confond alors avec une simple saute d'humeur et l'emprunt d'une matrice est au fond bien inutile. Mais l'engouement général pour ce genre de véhicules, le désir de ne pas se singulariser pousse les plus timorés à cet expédient. Sans parler de ceux qui empruntent la matrice identité. C'est d'ailleurs, dans R^n, un mode classique de plaisanteries que de s'accuser mutuellement de pareilles couardises.

On me dit : "Pourquoi tant de méfiance de la part des vecteurs ? S'ils veulent savoir où peut les conduire une matrice, il leur suffit de calculer leurs transformés à partir de ses éléments numériques". A cela la réponse est simple : les vecteurs savent comparer des nombres, mais ne savent pas calculer. Faut-il leur apprendre ? Mais veulent-ils savoir où ils vont ?

SCENE DE GENRE

Je me remémore souvent ces esplanades immenses des espaces R^n, plates et comme abstraites, où déambulent des foules de vecteurs à la recherche d'une matrice à leur convenance. Ils s'attroupent, fluets, face aux masses matricielles parfois hautes comme des gratte-ciels lorsqu'elles conduisent à des espaces fortement dimensionnés. Il faut les voir, faussement badauds, approcher l'air de rien, un peu craintifs, cherchant à lire sur chacune, les écriteaux mentionnant la destination, le noyau, la liste des vecteurs propres. Vont-ils conclure ? Les matrices tachent de décider leurs chalands en décrivant l'effet qu'elles peuvent avoir sur leurs composantes :
"Par ici, ceux qui veulent une bonne douzième".
"Toi, là-bas, t'as comme un creux à la cinquième. Je soigne ça aussi".
Elles sont parfois rassurantes :
"Noyau garanti !"
Parfois goguenardes :
"Venez à moi, mes petits vecteurs propres".
Parfois lyriques :
"Dans R^{239}, vous serez incomparables. A bas l'ordre social".

De temps à autre, la foule reflue. Une matrice vient de débarquer un nouvel arrivant et se transpose pour reprendre du service : angoisse de la voir se dresser, un instant, sur l'un de ses angles. Ou bien un grand tumulte signale quelque accouplement matriciel. Un peu à l'écart, deux vecteurs se contemplent, s'approchent lentement, bien droits, l'un de l'autre, pour fusionner.

BLUETTE DANS R^n

Les étudiants devront s'exercer à "lire" des systèmes d'équations matricielles. Si on note (m,n) le "format" d'une matrice ou d'un vecteur, ce qui indique le nombre m de ses lignes et le nombre n de ses colonnes, soit le système :

$$D(\frac{1}{2} BAx + Cy) = z_1 + z_2$$

$$G.z_1 = 0$$

$$4G.z_2 = d_1 + d_2 + d_3$$

avec $x(5,1)$, $A(8,5)$, $B(32,8)$, $y(21,1)$, $C(32,21)$, $D(21,32)$, $G(5,21)$ $d_1(5,1)$, $d_2(5,1)$, $d_3(5,1)$.

Un tel système, dans sa concision, peut fournir le thème d'un feuilleton télévisé. Qu'on en juge.

x était un vecteur de R^5. Il rêvait d'une société plus diversifiée, d'espaces nouveaux capables de lui ouvrir d'autres dimensions. Il prit la matrice A qui le conduisit en R^8, puis s'enhardit et emprunta la matrice B pour parvenir en R^{32} * . La vie dans un espace aussi multiplement dimensionné le déconcerta d'abord grandement. Il fut l'objet d'une sévère dépression réduisant de moitié ses diverses facultés. Il eut cependant la chance de rencontrer y, originaire de R^{21}, qui venait de débarquer en R^{32} par la matrice C. Ils fusionnèrent, et partirent en voyage de noces par la matrice D jusqu'en R^{21}, l'espace d'origine de y. Ils eurent là deux descendants z_1 et z_2.

Ceux-ci décidèrent d'aller visiter l'espace d'origine de leur premier parent. Ils prirent tous deux la matrice G. Celle-ci, mal balisée comme cela est malheureusement fréquent, coûta la vie à z_1 qui appartenait au noyau G. Par contre, z_2 débarqua en R^5. Il fut séduit par cet espace mieux ordonné où ses facultés s'épanouirent. z_2 eut là trois descendants d_1, d_2 et d_3.

---

* Si on avait eu $\frac{1}{2}$ (B.A)x, cela aurait signifié que x était passé directement de R^5 à R^{32} par les services d'une matrice issue de l'accouplement de A et de B.