MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

ZOUHIR ABID

Semi-valuation et métrique associée

Mathématiques et sciences humaines, tome 87 (1984), p. 67-82

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1984__87__67_0>

Math. Sci. hum. (*22*^{e} année, n°87, *1984*, p.67-82)

SEMI-VALUATION ET METRIQUE ASSOCIEE.

Zouhir ABID*

La notion de *semi-valuation* [1] permet d'harmoniser sous un même formalisme un bon nombre d'exemples : le cardinal d'un ensemble, la dimension d'un espace vectoriel, le logarithme d'un entier naturel non nul, l'entropie de Shannon d'un système fini de variables aléatoires ...
Elle permet aussi d'énoncer quelques définitions telles que *intervaluation* et *H-indépendance* qui trouvent dans la pratique différentes applications. Par exemple, on peut, moyennant un choix adéquat de la semi-valuation, identifier l'intervaluation soit à l'inertie inter-classes, soit à l'information entre sous-systèmes [2] ..., et la H-indépendance soit à l'indépendance ensembliste [11] , soit à l'indépendance vectorielle, soit à l'indépendance stochastique...

La présentation de la semi-valuation et de ses propriétés fait l'objet de la première section. Dans la deuxième, on étudie de près un exemple particulier de semi-valuation : la *semi-valuation conditionnelle*. On verra, dans la troisième et dernière section, qu'elle possède les propriétés métriques de la valuation supérieure ([7] [3] et [12]).

---

* Centre de Calcul, Faculté des Sciences Economiques et de Gestion de Sfax
BP.69 Sfax - Tunisie.

Je tiens à exprimer tous mes remerciements à Mr B. Monjardet pour l'attention qu'il a portée à mes travaux en cours et pour n'avoir refusé à aucun moment de me prodiguer aides et conseils.

I. SEMI-VALUATION.

Un ensemble D muni d'une relation d'ordre $\leq$ est dit ensemble ordonné. C'est une structure de sup-demi-treillis (inf-demi-treillis) si à toute paire d'éléments $\{x,y\}$ correspond un supremum (infimum) qu'on note $x \vee y$ $(x \wedge y)$. Il forme un treillis s'il possède les deux structures. Le plus grand et le plus petit élément s'ils existent sont désignés par 1 et 0.

Soit y un élément d'un sup-demi-treillis D. Un *recouvrement* de y est tout sous-ensemble fini R de D, $R = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tel que le supremum égale y.

$$R = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \text{ recouvrement de } y \Longleftrightarrow y = \vee R = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$$

Un recouvrement R de y est dit *quasi-partition* de y si le supremum de toute partie non vide R' strictement contenue dans R est strictement inférieur à y.

$$R \text{ quasi-partition de } y \Longleftrightarrow \begin{cases} \vee R = y \\ \forall R' \subset R,\ R' \neq \phi\ ,\ \vee R' < y \end{cases}$$

Une application réelle H définie sur un sup-demi-treillis D est par définition une *semi-valuation* si, Abid [1],

$$\forall\, x,y \in D,\ H(x \vee y) \leq H(x) + H(y)$$

Elle est à valeurs positives ou nulles. La vérification est immédiate en prenant y égal à x.

L'intervaluation entre deux éléments x et y de D, notée $I(x,y)$, est définie par

$$I(x,y) = H(x) + H(y) - H(x \vee y)$$

C'est une quantité à valeurs positives ou nulles. Elle se généralise à une famille finie non vide R d'éléments de D, $R = \{x_1, \ldots, x_n\}$, comme suit

$$I(x_1, x_2, \ldots, x_n) = H(x_1) + H(x_2) + \ldots + H(x_n) - H(x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n)$$

Si la famille R se réduit à un singleton, on convient d'égaler l'intervaluation à zéro.

$$I(\{x\}) = 0$$

L'intervaluation d'un recouvrement désignera l'intervaluation entre les éléments du recouvrement.

Soit R un ensemble fini non vide d'éléments de D, $R = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Considérons (P_j) $j=1,\ldots,r$ une partition de l'ensemble R. Un calcul simple permet de décomposer l'intervaluation totale $I(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en une somme d'intervaluation intra-classes et d'intervaluation inter-classes.

Intervaluation totale		Intervaluations intra-classes		Intervaluation inter-classes

$$I(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{r} I(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_i}) + I(P_1, P_2, \ldots, \ldots P_r)$$

où $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots x_{j_i}$ sont les éléments de la classe P_j.

Deux éléments x et y de D sont dits *H-indépendants* si leur intervaluation est égale à zéro. En général, une famille finie d'éléments de D est dite H-indépendante si son intervaluation est égale à zéro.

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \text{ H-indépendant} \iff I(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

Par *recouvrement H-indépendant* on désignera tout recouvrement dont l'intervaluation est égale à zéro.

Si la semi-valuation H est à valeurs strictement positives alors tout recouvrement H-indépendant de y est une quasi-partition de y, Abid [1].

Si la semi-valuation H est strictement croissante et si le sup-demi-treillis est l'ensemble $\mathcal{P}^*(E)$ des parties non vides d'un ensemble donné non vide E alors tout recouvrement H-indépendant d'une partie non vide A de E est une partition de A, [1].

Une partition est dite H-indépendante si l'intervaluation entre ses classes est égale à zéro. Si P et Q sont deux partitions H-indépendantes d'une partie non vide A alors la partition supremum $P \vee Q$ est aussi H-indépendante, [1].

Exemples de semi-valuation.

A) La fonction cardinal, notée card, représente une semi-valuation sur la structure sup-demi-treillis de l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ d'un ensemble fini E.

$$\forall\ A,B \in \mathcal{P}(E)\ ,\ \mathrm{card}\ (A \cup B)\ \leq\ \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B)$$

L'intervaluation entre deux parties A et B coïncide avec le cardinal de leur partie intersection.

$$I(A,B) = \mathrm{card}(A \cap B)$$

On en déduit que deux parties sont H-indépendantes si et seulement si elles sont disjointes.

B) La fonction log définit une semi-valuation sur la structure sup-demi-treillis des entiers naturels non nuls, $\mathbb{N}^*$, muni de la relation d'ordre divise, /.

$$\forall\ p,q \in \mathbb{N}^*,\ \log(\mathrm{ppcm}(p,q)) \leqq \log p + \log q$$

L'intervaluation entre deux entiers p et q non nuls est égale au logarithme de leur pgcd.

$$I(p,q) = \log\ (\mathrm{pgcd}(p,q))$$

Il en résulte que deux entiers non nuls sont H-indépendants si et seulement si ils sont premiers entre eux.

C) Les deux fonctions citées ci-dessus représentent des valuations. Une application réelle v définie sur un treillis T est une *valuation* si, Birkhoff [6],

$$\forall\ x,y \in T\ ,\ v(x \vee y) + v(x \vee y) = v(x) + v(y)$$

Si l'application v est à valeurs positives ou nulles alors elle constitue une semi-valuation sur la structure sup-demi-treillis de T. L'intervaluation entre deux éléments x et y coïncide avec la valuation de leur élément infimum, soit $v(x \wedge y)$.

$$\forall\ x,y \in T\ ,\ x \text{ et } y \text{ H-indépendants} \iff v(x \wedge y) = 0$$

D) Comme exemple de semi-valuation qui ne soit pas une valuation citons la fonction M définie comme suit. Soit S un ensemble de n points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'un espace affine $\mathbb{R}^m$. Soit $\mathcal{P}^*(S)$ le sup-demi-treillis des parties non vides de S.

$$\begin{aligned} M :\quad & \mathcal{P}^*(S) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & F \longmapsto M(F) = \mathrm{card}(F)\ \| G_F - T \|^2 \end{aligned}$$

où T est un point de $\mathbb{R}^m$ et G_F le centre de gravité de la partie F,

$$G_F = \frac{1}{\mathrm{card}(F)} \left(\sum_{x_i \in F} x_i \right)$$

Le produit scalaire $\| G_F - T \|^2$ représente le carré de la distance euclidienne entre les points G_F et T.

$$\| G_F - T \|^2 = (G_F - T) \, . \, (G_F - T) = \sum_{j=1}^{m} (g_j - t_j)$$

où g_j et t_j , j=1,...,m sont les coordonnées de G_F et T.
En choisissant un point T assez distant du centre de gravité G_S du nuage de points S, par exemple

$$\| G_S - T \| \geqq n \operatorname{Max} \{ \| x_i - x_j \| \ , \quad 1 \leqq i, \ j \leqq n \}$$

L'application M forme une semi-valuation, Abid [1].
L'intervaluation entre deux parties non vides disjointes F_1 et F_2 est égale à l'inertie inter-classes.

$$I(F_1, F_2) = \mathrm{card}(F_1) \, \| G_1 - G \|^2 + \mathrm{card}(F_2) \, \| G_2 - G \|^2$$

où G_1, G_2 et G sont les centres de gravité de F_1, F_2 et $F_1 \cup F_2$.
Il en découle que deux parties non vides disjointes sont H-indépendantes si leurs centres de gravité sont confondus.

Soit (F_i)i=1,...r une partition de l'ensemble S. L'inertie totale de S se décompose en une somme d'inertie intra-classes et d'inertie inter-classes (cf., par exemple, Bertier et Bouroche [5]).

II. SEMI-VALUATION CONDITIONNELLE.

Une application réelle H définie sur un sup-demi-treillis D est dite *semi-valuation conditionnelle* si elle est une semi-valuation sur D et si pour tout élément t de D l'application H_t définie par

$$H_t : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto H_t(x) = H(x \vee t) - H(t)$$

forme une semi-valuation sur D.
Elle vérifie la propriété suivante :

$\forall\, x,y,t \in D,$

$$H_t(x \vee y) \leqq H_t(x) + H_t(y)$$

$$H(x \vee y \vee t) - H(t) \leqq H(x \vee t) - H(t) + H(y \vee t) - H(t)$$

$$H(x \vee y \vee t) + H(t) \leqq H(x \vee t) + H(y \vee t)$$

La quantité $H_t(x)$ sera appelée *semi-valuation conditionnelle* ou simplement *valuation conditionnelle* de x par rapport à t.

L'intervaluation conditionnelle entre deux éléments x et y par rapport à un élément t est l'intervaluation entre ces deux éléments suivant la semi-valuation H_t. Cette quantité, notée $I_t(x,y)$, est égale à

$$\begin{aligned} I_t(x,y) &= H_t(x) + H_t(y) - H_t(x \vee y) \\ &= H(x \vee t) + H(y \vee t) - H(x \vee y \vee t) - H(t) \end{aligned}$$

PROPOSITION 1. Soit H une semi-valuation conditionnelle définie sur un sup-demi-treillis D. Soient x_1, x_2, y_1 et y_2 quatre éléments de D tels que $x_1 \leqq y_2$ et $x_2 \leqq y_2$. On a,

$$I(x_1,x_2) \leqq I(y_1,y_2)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} I(y_1,y_2) &= H(y_1) + H(y_2) - H(y_1 \vee y_2) \\ &= H(x_1 \vee y_1) + H(x_2 \vee y_2) - H(x_1 \vee y_1 \vee x_2 \vee y_2) \\ &= H(x_1 \vee y_1) - H(x_1) + H(x_1) + H(x_2 \vee y_2) - H(x_2) + H(x_2) - \\ &\quad H(x_1 \vee y_1 \vee x_2 \vee y_2) + H(x_1 \vee x_2) - H(x_1 \vee x_2) \\ &= H_{x_1}(y_1) + H(x_1) + H_{x_2}(y_2) + H(x_2) - H_{x_1 \vee x_2}(y_1 \vee y_2) - H(x_1 \vee x_2) \\ &= H(x_1) + H(x_2) - H(x_1 \vee x_2) + H_{x_1}(y_1) + H_{x_2}(y_2) - H_{x_1 \vee x_2}(y_1 \vee y_2) \\ &= I(x_1,x_2) + H_{x_1}(y_1) + H_{x_2}(y_2) - H_{x_1 \vee x_2}(y_1 \vee y_2) \\ &= I(x_1,x_2) + H_{x_1}(y_1) + H_{x_1}(x_2) - H_{x_1}(x_2 \vee y_1) - H_{x_1}(x_2) + H_{x_1}(x_2 \vee y_1) \\ &\quad + H_{x_2}(y_2) + H_{x_2}(x_1) - H_{x_2}(x_1 \vee y_2) - H_{x_2}(x_1) + H_{x_2}(x_1 \vee y_2) - \\ &\quad H_{x_1 \vee x_2}(y_1 \vee y_2) \end{aligned}$$

$$= I(x_1,x_2) + I_{x_1}(x_2,y_1) - H_{x_1}(x_2) + H_{x_1}(x_2 \vee y_1) + I_{x_2}(x_1,y_2) - H_{x_2}(x_1) + H_{x_2}(x_1 \vee y_2) - H_{x_1 \vee x_2}(y_1 \vee y_2)$$

$$= I(x_1,x_2) + I_{x_1}(x_2,y_1) + I_{x_2}(x_1,y_2) + (H_{x_1}(x_2 \vee y_1) - H_{x_1}(x_2)) + (H_{x_2}(x_1 \vee y_2) - H_{x_2}(x_1)) - H_{x_1 \vee x_2}(y_1 \vee y_2)$$

$$= I(x_1,x_2) + I_{x_1}(x_2,y_1)+ I_{x_2}(x_1,y_2) + H_{x_1 \vee x_2}(y_1) + H_{x_1 \vee x_2}(y_2) - H_{x_1 \vee x_2}(y_1 \vee y_2)$$

$$= I(x_1,x_2) + I_{x_1}(x_2,y_1) + I_{x_2}(x_1,y_2) + I_{x_1 \vee x_2}(y_1,y_2)$$

Comme l'intervaluation est à valeurs positives ou nulles, il vient

$$I(x_1,x_2) \leqq I(y_1,y_2) \ . \quad \text{(c.q.f.d.)}$$

Généralisation de la proposition 1.

Si $(x_i)i=1,\dots,n$ et $(y_i)i=1,\dots,n$ sont deux familles d'éléments de D telles que

$$x_i \leqq y_i \qquad \text{pour tout } i,\ i=1,\dots,n$$

Alors,

$$I(x_1,x_2,\dots,x_n) \leqq I(y_1,y_2,\dots,y_n)$$

Démonstration.

D'après la proposition 1, la propriété est vraie lorsque l'indice n est égal à deux. Supposons qu'elle soit vraie à un ordre p supérieur ou égal à deux et démontrons qu'elle l'est aussi à l'ordre p+1.
Décomposons l'intervaluation entre les éléments $y_1,y_2,\dots,y_{p+1}$ comme suit,

$$I(y_1,y_2,\dots,y_p,y_{p+1}) = I(y_p,p_{p+1}) + I(y_1,y_2,\dots,y_{p-1},y_p \vee y_{p+1})$$

D'après l'hypothèse de la récurrence, on a

$$I(y_p,y_{p+1}) \geqq I(x_p,x_{p+1})$$

$$I(y_1,y_2,\dots,y_{p-1},y_p \vee y_{p+1}) \geqq I(x_1,x_2,\dots,x_{p-1},x_p \vee x_{p+1})$$

D'où,

$$I(y_1,y_2,\dots,y_p,y_{p+1}) \geqq I(x_p,x_{p+1}) + I(x_1,x_2,\dots,x_{p-1},x_p \vee x_{p+1})$$
$$\geqq I(x_1,x_2,\dots,x_p,x_{p+1}) \qquad \text{(c.q.f.d.)}$$

PROPOSITION 2. Soit une semi-valuation conditionnelle définie sur le sup-demi-treillis $P^*(E)$. Soit S une partie non vide de E munie de deux partitions P et Q H-indépendantes. La partition infimum $P \wedge Q$ est aussi H-indépendante.

Démonstration.

Soient $(A_i)i=1,\dots,p$ les classes de P , $(B_j)j=1,\dots,q$ celles de Q et, (C_k) $k=1,\dots,r$ celles de $P \wedge Q$. Désignons par (A_{i_t}) l'ensemble des parties non vides qui résultent de l'intersection de la classe A_i avec les classes de la partition Q.

$$(A_{i_t}) = \{A_i \cap B_j \ , \ A_i \cap B_j \neq \phi \ , \ j=1,\dots,q\}$$

La proposition 1 généralisée permet d'écrire,

$$I(A_{i_1},A_{i_2},\dots,A_{i_t}) \leqq I(B_{j_1},B_{j_2},\dots,B_{j_t})$$

Comme la partition (B_j) est H-indépendante, il vient

$$I(A_{i_1},A_{i_2},\dots,A_{i_t}) \leqq 0 \Longrightarrow I(A_{i_1},A_{i_2},\dots A_{i_t}) = 0$$

Donc la famille (A_{i_t}) est H-indépendante.
Décomposons l'intervaluation entre les classes C_k, $k=1,\dots,r$ comme suit :

$$I(C_1,C_2,\dots,C_r) = I(A_1,A_2,\dots,A_p) + \sum_{i=1}^{p} (A_{i_1},A_{i_2},\dots A_{i_t})$$

Les partitions (A_i) et (A_{i_t}) étant H-indépendantes, on obtient

$$I(C_1,C_2,\dots,C_r) = 0 \qquad \text{(c.q.f.d.)}$$

COROLLAIRE 1. Soit H une semi-valuation conditionnelle définie sur le sup-demi-treillis $P^*(E)$. L'ensemble des partitions H-indépendantes d'une partie non vide A de E forme un sous-treillis du treillis des partitions de A.

Exemples de semi-valuation conditionnelle.

A) Soit v une valuation sur un treillis T croissante et à valeurs positives ou nulles. On sait qu'elle est une semi-valuation sur la structure sup-demi-treillis de T. Soient x,y et t trois éléments quelconques de T. La propriété de la valuation aux éléments points $x \vee t$ et $y \vee t$ s'écrit

$$v((x \vee t) \vee (y \vee t)) + v((x \vee t) \wedge (y \vee t)) = v(x \vee t) + v(y \vee t)$$

$$v(x \vee y \vee t) + v((x \vee t) \wedge (y \vee t)) = v(x \vee t) + v(y \vee t)$$

La croissance de l'application v implique

$$v(t) \leqq v((x \vee t) \wedge (y \vee t))$$

D'où,

$$\begin{aligned} v(x \vee y \vee t) + v(t) &\leqq v(x \vee y \vee t) + v((x \vee t) \wedge (y \vee t)) \\ &\leqq v(x \vee t) + v(y \vee t) \end{aligned}$$

On en déduit que les valuations croissantes et à valeurs positives ou nulles définies sur un treillis T sont des semi-valuations conditionnelles sur la structure sup-demi-treillis de T.

B) Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de l'espace $\mathbb{R}^m$. Muni de la relation $\subseteq$, il possède la structure d'un treillis où le supremum (infimum) de deux sous-espaces V_1 et V_2 est leur somme (intersection) $V_1 + V_2$ ($V_1 \cap V_2$). Sur cette structure, la fonction dimension, notée dim, est une valuation strictement croissante à valeurs positives ou nulles (cf. par exemple, Godement [10]).

$$\forall\, V_1, V_2 \in \mathcal{V} \;/\; V_1 \subseteq V_2 \;,\quad \dim(V_1) \leqq \dim(V_2)$$

$$\forall\, V_1, V_2 \in \mathcal{V} \;,\quad \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$$

Elle constitue alors une semi-valuation conditionnelle sur la structure sup-demi-treillis de $\mathcal{V}$. La valuation conditionnelle d'un sous-espace V par rapport à un sous-espace W s'écrit

$$\dim_W(V) = \dim(V+W) - \dim(W)$$

Elle est égale à la dimension du sous-espace V' de V orthogonal à W. L'inter-valuation entre deux sous-espaces V_1 et V_2 est égale à la dimension de leur espace intersection.

$$I(V_1,V_2) = \dim(V_1 \cap V_2)$$

Donc, deux sous-espaces V_1 et V_2 sont H-indépendants si et seulement si leur somme est directe (leur intersection se réduit au vecteur nul).

C) Comme exemple de semi-valuation conditionnelle qui ne soit pas une valuation citons la fonction d'entropie de Shannon, Shannon [14]. Soit E un ensemble de n variables aléatoires finies $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Sur l'ensemble $\mathcal{P}^*(E)$ des parties non vides de E la fonction d'entropie est définie comme suit

$$H : \mathcal{P}^*(E) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longmapsto H(A) = -\sum_s p_s \log p_s$$

où $(p_s)_s$ est la loi conjointe des variables qui composent A.

Elle vérifie la propriété

$$\forall A,B \in \mathcal{P}^*(E) \ , \ H(A \cup B) \leq H(A) + H(B)$$

Elle représente donc une semi-valuation sur la structure sup-demi-treillis de $\mathcal{P}^*(E)$. L'intervaluation entre deux parties non vides de E s'identifie avec la notion d'information entre les deux parties, appelée aussi transmission, Ashby [9], Conant [2]. Deux parties non vides de E sont H-indépendantes si et seulement si elles sont stochastiquement indépendantes.

Soit $(A_i)i=1,\ldots,r$ une partition de E. L'information totale entre les éléments de E se décompose en une somme d'information intra-classes et d'information inter-classes (cf. par exemple, Richetin [13]).

Pour toute partie non vide C de E, la fonction H_C définie par

$$H_C : \mathcal{P}^*(E) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longmapsto H_C(A) = H(A \cup C) - H(C)$$

représente une semi-valuation sur la structure sup-demi-treillis de $\mathcal{P}^*(E)$, Toro [15]. La quantité $H_C(A)$ est appelée l'entropie conditionnelle de A relativement à C. Ainsi, la fonction d'entropie de Shannon constitue une semi-valuation conditionnelle sur la structure sup-demi-treillis de $\mathcal{P}^*(E)$.

Le Corollaire 1 permet d'en déduire que l'ensemble des partitions de E en classes stochastiquement indépendantes forme un sous-treillis C(E) du treillis des partitions de E. Il en résulte que l'application à l'ensemble E d'un algorithme de partition (classification descendante hiérarchique, (cf. par exemple, Benzecri [4]) en classes stochastiquement indépendantes aboutit à la partition infimum du sous-treillis C(E). C'est la partition qui décompose l'ensemble E en un nombre maximum de classes stochastiquement indépendantes.

III. SEMI-VALUATION CONDITIONNELLE, VALUATION SUPERIEURE ET METRIQUE ASSOCIEE.

Considérons un sup-demi-treillis D muni d'une semi-valuation H. Soient x et y deux éléments de D. Désignons par d(x,y) la différence entre les deux quantités $H(x \vee y)$ et $I(x,y)$

$$\begin{aligned} d(x,y) &= H(x \vee y) - I(x,y) \\ &= 2\,H(x \vee y) - H(x) - H(y) \end{aligned}$$

Elle vérifie les propriétés suivantes

$$\forall\, x \in D\,, \quad d(x,x) = 0$$

$$\forall\, x,y \in D\,, \quad d(x,y) = d(y,x)$$

Elle est à valeurs positives ou nulles si et seulement si la semi-valuation H est croissante. Elle devient un indice de distance si et seulement si la croissance est stricte.

Soient x,y et t trois éléments quelconques de D. L'inégalité triangulaire s'écrit,

$$d(x,y) \leqq d(x,t) + d(t,y)$$

$$2H(x \vee y) - H(x) - H(y) \leqq 2H(x \vee t) - H(x) - H(t) + 2H(y \vee t) - H(y) - H(t)$$

$$H(x \vee y) + H(t) \leqq H(x \vee t) + H(y \vee t)$$

On obtient ainsi une inégalité caractéristique de la notion de valuation supérieure (cf. par exemple, Monjardet [12]). Une application réelle H définie sur un sup-demi-treillis D est appelée *valuation supérieure* si

$$\forall\, x,y,t \in D \;/\; t \leqq x \text{ et } t \leqq y\,,\; H(x \vee y) + H(t) \leqq H(x) + H(y)$$

D'autres inégalités caractéristiques sont indiquées dans le théorème suivant.

THEOREME 1. Soit H une application réelle définie sur un sup-demi-treillis D.

Désignons par d(x,y) la quantité

$$d(x,y) = 2H(x \vee y) - H(x) - H(y)$$

Les assertions suivantes sont équivalentes.

$A_1 : \forall\, x,y,t \in D \quad , \quad d(x,y) \leqq d(x,t) + d(t,y)$

$A_2 : \forall\, x,y,t \in D \quad , \quad H(x \vee y) + H(t) \leqq H(x \vee t) + H(y \vee t)$

$A_3 : \forall\, x,y,t \in D \quad / \quad t \leqq x \ , \ H(x \vee y) + H(t) \leqq H(x) + H(y \vee t)$

$A_4 : \forall\, x,y,t \in D \quad / \quad t \leqq x$ et $t \leqq y \ , \ H(x \vee y) + H(t) \leqq H(x) + H(y)$

$A_5 : \forall\, x,y,t \in D \quad , \quad H(x \vee y \vee t) + H(t) \leqq H(x \vee t) + H(y \vee t)$

<u>Démonstration.</u>

L'équivalence des propriétés A_1, A_2, A_3 et A_4 est indiquée par Bordes dans [7]. On se limite alors à démontrer l'équivalence entre les deux propriétés A_4 et A_5.

$A_4 \Longrightarrow A_5$

Soient x,y et t trois éléments quelconques de D. Notons x' et y' les éléments $x \vee t$ et $y \vee t$. Ils vérifient $t \leqq x'$ et $t \leqq y'$. D'où,

$$H(x' \vee y') + H(t) \leqq H(x') + H(y')$$

Après substitution, on obtient

$$H(x \vee y \vee t) + H(t) \leqq H(x \vee t) + H(y \vee t)$$

L'implication inverse $A_5 \Longrightarrow A_4$ est immédiate. (c.q.f.d.)

L'équivalence des deux propriétés A_4 et A_5 entraîne qu'une semi-valuation conditionnelle H définie sur un sup-demi-treillis D forme une valuation supérieure sur D. La réciproque n'est vraie que si l'application H constitue une semi-valuation sur D.
Une condition nécessaire pour qu'une valuation supérieure soit une semi-valuation conditionnelle est qu'elle soit à valeurs positives ou nulles. La condition est suffisante si l'ensemble D possède la structure d'un treillis.

COROLLAIRE 2. Une condition nécessaire et suffisante pour que la quantité d associée à une semi-valuation H vérifie l'inégalité triangulaire est que H soit une semi-valuation conditionnelle.

On remarque que si la quantité d possède la propriété de l'inégalité triangulaire, elle constitue un écart :

1) $\forall\, x \in D\ ,\ d(x,x) = 0$

2) $\forall\, x,y \in D\ ,\ d(x,y) = d(y,x)$

3) $\forall\, x,y,t \in D\ ,\ d(x,y) \leqq d(x,t) + d(t,y)$

Il devient une distance si et seulement si la croissance de H est stricte.

Si deux semi-valuations conditionnelles H et H' admettent un même écart d alors elles diffèrent d'une constante. Ainsi, si un écart d provient d'une semi-valuation conditionnelle H alors il peut être associé à une infinité de semi-valuations conditionnelles de la forme H+c où c est une constante positive.

L'écart d possède les propriétés suivantes, Barthelemy [3],

P_1) $\forall\, x,y,t \in D\ /\ x \leqq t \leqq y\ ,\ d(x,y) = d(x,t) + d(t,y)$

P_2) $\forall\, x,y,t \in D\ /\ x \leqq y\ ,\ d(x,y) \geqq d(x \vee t, y \vee t)$

P_3) $\forall\, x,y \in D\ /\ d(x,y) = d(x, x \vee y) + d(x \vee y, y)$

Réciproquement, si le sup-demi-treillis D admet un plus grand élément, noté 1, toute application bornée d définie sur l'ensemble $D \times D$ et vérifiant les trois propriétés P_1, P_2 et P_3 constitue un écart associé à une semi-valuation conditionnelle de la forme $H(x) = 2c - d(1,x)$ où c est un majorant de la fonction d. L'application H représente une valuation supérieure sur D (Monjardet [12]). Reste à s'assurer qu'elle forme une semi-valuation sur D. Soient x et y deux éléments quelconques de D. La somme H(x) + H(y) s'écrit

$$
\begin{aligned}
H(x) + H(y) &= 2c - d(1,x) + 2c - d(1,y) \\
&= 2c - (d(1, x \vee y) + d(x \vee y, x)) + 2c - d(1,y) \\
&= (2c - d(1, x \vee y)) - d(x \vee y, x) + 2c - d(1,y) \\
&= H(x \vee y) + (c - d(x \vee y, x)) + (c - d(1,y))
\end{aligned}
$$

Les quantités $c - d(x \vee y, x)$ et $c - d(1,y)$ étant positives ou nulles, on en déduit

$$H(x) + H(y) \geqq H(x \vee y) \qquad \text{(c.q.f.d.)}$$

On peut associer à l'écart d un écart normalisé δ défini par, [7],

$$\forall\, x,y \in D \quad , \quad \delta(x,y) = 0 \text{ si } H(x \vee y) = 0$$

$$= \frac{d(x,y)}{H(x \vee y)} \text{ si } H(x \vee y) \neq 0$$

L'écart δ varie dans l'intervalle $[0,1]$. C'est une distance si et seulement si la fonction H est strictement croissante.

Comme autres exemples de métriques associées, la proposition suivante présente un résultat immédiat, mais qui fournit une méthode générale de construction d'écarts associés aux semi-valuations conditionnelles bornées.

PROPOSITION 3. Soit H une semi-valuation conditionnelle bornée définie sur un sup-demi-treillis D, Soient m et M les bornes de H

$$m \leqq H \leqq M$$

Soit F une application réelle définie sur l'intervalle $[m,M]$ et vérifiant la propriété,

$$\forall\, a,b,c,d \in [m,M] \quad / \quad c \leqq a \leqq d \ , \ c \leqq b \leqq d \quad \text{et } d+c \leqq a+b,$$

$$F(d) + F(c) \leqq F(a) + F(b)$$

Alors, la quantité d_F définie par

$$\forall\, x,y \in D \quad , \quad d_F(x,y) = 2F(H(x \vee y)) - F(H(x)) - F(H(y))$$

constitue un écart sur D.

Démonstration.

Il suffit de s'assurer que la fonction composée FoH constitue une valuation supérieure sur D. Ce qui est immédiat en prenant $a = H(x \vee t)$, $b = H(y \vee t)$ $c = H(t)$ et $d = H(x \vee y \vee t)$. (c.q.f.d.)

Pour utiliser cette proposition, il faut démontrer qu'une fonction est du type F. C'est immédiat pour les fonctions de la forme x+c où c est une constante positive. C'est le cas aussi pour les fonctions suivantes (cf. Cailliez et Pages [8] , Barthelemy [3]) , $m \leqq x \leqq M$

$F_1(x) = x^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$

$F_2(x) = m^\alpha - x^\alpha$ avec $\alpha < 0$ et $m > 0$

$F_3(x) = (M-m)^\alpha - (M-x)^\alpha$ avec $\alpha > 1$

$F_4(x) = \text{Log } x$ avec $m > 0$

$F_5(x) = \exp(M-m) - \exp(M-x)$

On en déduit que les fonctions suivantes sont des écarts sur D,

$d_1(x,y) = 2H^\alpha(x \vee y) - H^\alpha(x) - H^\alpha(y)$ avec $0 < \alpha < 1$

$d_2(x,y) = H^\alpha(x) + H^\alpha(y) - 2H^\alpha(x,y)$ avec $\alpha < 0$ et $m > 0$

$d_3(x,y) = (M-H(x))^\alpha + (M-H(y))^\alpha - 2(M-H(x \vee y))^\alpha$ avec $\alpha > 1$

$d_4(x,y) = \text{Log } \dfrac{H(x \vee y)^2}{H(x)\ H(y)}$ avec $m > 0$

$d_5(x,y) = \exp(M-H(x)) + \exp(M-H(y)) - 2\exp(M-H(x \vee y))$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ABID Z., *Contribution à l'analyse structurale par la théorie des demi-treillis*, LYON, Université Claude Bernard, Thèse de doctorat de troisième cycle, 1979.

[2] ASHBY W.R., "Measuring the internal information exchange in a system", *Cybernetica (Namur)*, VIII, 1, (1965), 1-22.

[3] BARTHELEMY J.P. "Remarques sur les propriétés métriques des ensembles ordonnés", *Math.Sci.Hum.*, 61 (1978), 39-60. *Propriétés métriques des ensembles ordonnés. Comparaison et agrégation des relations binaires*, Université de Franche-Conté, Thèse de doctorat d'Etat, 1979.

[4] BENZECRI J.P., et Col. *L'analyse des données*, Tome 1 et 2, Paris, Dunod, 1973.

[5] BERTIER P., BOUROCHE J.M., *Analyse des données multi-dimensionnelles*, Paris, Presses universitaires de France, 1975.

[6] BIRKHOFF C., *Lattice theory*, $4^{ème}$ édition, New York, American Mathematical Society, 1964.

[7] BORDES G., " Metriques bornées définies par des valuations sur un demi-treillis ", *Math. Sci. Hum.*, 56 (1976), 89-95.

[8] CAILLIEZ F., PAGES J.P., *Introduction à l'analyse des données*, Paris, Société de Mathématiques Appliquées et de Sciences Humaines, 1976.

[9] CONANT R.C., "Detecting sub-systems of a complex system", *I.E.E.E. Trans. on sys., Man and Cyb.*, September (1972), 550-553.

[10] GODEMENT R., *Cours d'algèbres*, Paris, Herman, 1963.

[11] MARCZEWSKI E., "Ensembles indépendants et leurs applications à la théorie de la mesure", *Fund Math*, 35 (1974), 13-28.

[12] MONJARDET B., "Metrics on partially ordered sets-a survey", *Discrete mathematics*, 35 (1981), 173-184.

[13] RICHETIN M., *Analyse structurale des systèmes complexes en vue d'une commande hiérarchisée*, Université de Toulouse, Thèse de doctorat d'Etat, 1975.

[14] SHANNON C.E., "A mathematical theory of communication", *The bill system technical journal*, XXVII, 3 (1948) 379-423, 623-656.

[15] TORO-CORDOBA V.M., *Contribution à l'analyse structurale de systèmes complexes à l'aide de l'entropie et ses généralisations*, Université de Lille, Thèse de doctorat $3^{ème}$ Cycle, 1982.