MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

LOUIS FREY

Le trésor de Thèbes. Deux modèles pour un monument

Mathématiques et sciences humaines, tome 87 (1984), p. 33-66
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1984__87__33_0>

Math. Sci. hum. (*22*^{e} année, n°87, *1984*, p.33-66)

L E   T R E S O R   D E   T H E B E S
DEUX MODELES POUR UN MONUMENT

Louis FREY *

EXPOSE DES MOTIFS

La curiosité la plus ordinaire est à l'origine du présent travail : ayant un ensemble de données homogènes, peut-on imaginer une raison plausible qui exprime et révèle leur cohérence ?

Les données sont ici de nature archéologique : les diverses mesures relevées sur l'un des édifices de Delphes, le Trésor de THEBES . Il ne s'agit pas pour autant d'un travail d'archéologue mais de l'utilisation de résultats péniblement recueillis et magistralement exploités par un archéologue, Jean-Pierre MICHAUD . Sur ces données, le problème devenait : De quelle manière ces diverses mesures sont-elles reliées entre elles et peut-on, au travers de leurs rapports, imaginer une raison plausible qui aurait conduit l'architecte à tel et tel choix ? En d'autres termes : peut-on inventer un modèle de la conception de cet édifice ? Modèle qui donnerait la raison des choix effectués et décèlerait, peut être, leur signification . La réponse n'est encore que partielle mais les résultats déjà obtenus n'en sont pas pour autant dénués d'interêt .

L'édifice est assez "rustique" et ne pose aucun problème architectonique particulier puisqu'il s'agit uniquement d'un parallélépipède rectangle entourant deux pièces rectangulaires . Pas de colonnade, pas de colonnes en façade et donc pas de problème de "contraction aux angles" . Cependant, que de détails font que cet édifice est fort loin d'être aussi rustique qu'il aurait pu l'être et que, tout au contraire, ses proportions témoignent d'une maîtrise des plus parfaites et d'un jeu fort subtil sur les nombres .

Sans entrer dès à présent dans le détail, il apparaît que le plan horizontal et la façade s'accomodent tous deux fort bien de ce que l'on appellera un modèle géométrique qui repose sur le maniement de la règle et du compas (et éventuellement du cordeau sur le terrain) . En dépit du décalage chronologique ce modèle n'est autre que ce que le corpus euclidien appelle "Partage en extrème et moyenne raison" .

Or, dans un tel partage les deux segments obtenus n'ont pas de commune mesure . Du moins n'en ont-ils pas pour le mathèmaticien qui doit, provoquant ainsi le scandale, démontrer que le rapport de ces deux grandeurs ne peut pas s'énoncer dans le langage ordinairement utilisé, à savoir le rapport de deux entiers .

---

* Université de Provence, Séminaire d'épistémologie comparative, avril 1984.

Comment l'architecte résoudra-t-il ce problème ? Il existe, en effet, maints édifices pour lesquels une dimension paraît bien avoir été obtenue par le rabattement de la diagonale d'un carré ($\sqrt{2}$) ou d'un double-carré ($\sqrt{5}$) construit sur une autre dimension . Ces diagonales rabattues ont pourtant une mesure, report de la même unité que celle qui mesure le côté avec lequel elles sont, en principe, incommensurables ! Dès qu'un architecte recourt à un modèle aussi simple que le carré, il devrait se trouver confronté au problème redoutable de l'indicible . Il lui faut pourtant communiquer son projet et d'une manière aussi simple que faire se peut pour être correctement exécuté . Il recourt donc à des approximations. Certaines, attestées depuis des époques fort reculées et généralement simples ne posent pas de problème particulier . Elles relèvent des traditions ou des secrets d'une corporation .

Il en va tout autrement lorsqu'au lieu d'un seul rapport systèmatiquement utilisé on décèle (ou l'on croit déceler) des suites de rapports constituant des approximations de plus en plus précises de la valeur "exacte" . Ces suites construites selon des règles précises sont nécessairement oeuvre de mathèmaticien . Généralement elles ne sont attestées par écrit qu'à des périodes assez tardives . Il en est notamment ainsi des approximations successives de la valeur d'un partage en extrême et moyenne raison .

L'une de ces suites est constituée par les nombres dits de Fibonacci . Elle n'est connue, dans l'Occident chrétien du moins, qu'au début du XIII° siècle par l'oeuvre de Léonard de PISE publiée au retour d'un séjour à Cordoue . A notre connaisssance aucun texte antèrieur ne la mentionne . Certes Janine BERTIER, traductrice de l'Introduction Arithmétique de NICOMAQUE de Gérase croit pouvoir la reconstituer par une combinaison des médiétés dont traite Nicomaque . Si cette reconstitution est plausible, elle ne figure en tout cas pas explicitement dans le texte même de l'Introduction . Par ailleurs, comme ont essayé de le monter, avec plus de vraissemblance, des auteurs comme ITARD ou FOWLER une utilisation adéquate de l'antipharèse, ou retranchement alterné, permettrait de construire aisément de telles suites d'approximations . Mais il ne s'agit que de conjectures et, en raison du grand effacement dont a été victime la mathématique pré-euclidienne, il ne subsiste aucun témoignage textuel irréfutable .

Certains édifices pourraient-ils alors prendre le relais et en porter un témoignage indirect ?

Question sans doute inopportune après les excès commis naguére en ce domaine . Ceux-ci doivent-ils pour autant condamner toute recherche plus prudente ? En tout cas, et si présomptueux cela puisse-t-il paraître, il semble bien que pour ce Trésor de Thèbes la réponse soit affirmative .

En effet, le modèle géométrique du partage en extrême et moyenne raison est indubitablement complété par un modèle arithmétique non trivial . Essentiellement modèle d'affectation, il indique quelles valeurs - en nombres entiers de dactyles - attribuer à des grandeurs non-commensurables. Or ces valeurs entières sont exactement celles que donnent les suites de Fibonacci .

Il ne peut s'agir d'une coincidence, qui serait encore plus surprenante; pas davantage d'une transmission traditionnelle, dont ce serait la première manifestation . Pour autant que l'on puisse faire preuve de quelqu'assurance en un domaine incertain,ce monument est à considérer comme un reflet de la mathématique de son époque dont il a su utiliser les ressources pour inscrire et transmettre un message qui, lui, demeure encore énigmatique . Hypothèse ?... Sans doute, Du moins est-elle parfaitement compatible avec les données recueillies et reconstituées par l'archéologue .En même temps qu'elle les coordonne d'une manière qui paraît fort adéquate, elle vient aussi confirmer d'une certaine façon les suggestions que des spécialistes de la mathématique grecque proposent à partir des rares indications que fournissent les textes qui ont survécu .

" Deux modèles pour un monument " , géométrique et arithmétique .
Comment les données les suggèrent-elles ?
Quel est leur domaine d'application sur l'édifice ?
Comment estimer leur validité ?

Lecteur curieux, tente aussi l'aventure !

Le TRESOR de THEBES

Présentation

D'après PAUSANIAS, les Thébains auraient entrepris la construction d'un "Trésor" à Delphes pour commémorer leur victoire de LEUCTRES sur les Spartiates en -371 . De cet édifice complétement ruiné il ne subsiste aujourd'hui que des vestiges . Partiellement étudiés par divers auteurs depuis 1897, ces restes ont à nouveau été patiemment collationnés par Jean Pierre MICHAUD en collaboration avec Jean BLECON . Au terme de cette phase préliminaire, suffisamment d'éléments avaient été réunis pour qu'une reconstitution complète de l'édifice puisse être envisagée . Le résultat de cette étude, en tout point remarquable, a été éditée par De BOCCARD en 1973 dans les "Publications de l'Ecole Française d'Athènes, Fouilles de Delphes, Tome II ", sous le titre :

LE TRESOR DE THEBES

par

Jean Pierre MICHAUD

Relevés et restaurations

par

Jean BLECON

Cet ouvrage avec le volume de planches qui l'accompagne constitue le cadre de référence du présent travail . Il serait donc souhaitable que le lecteur critique puisse s'y reporter mais suffisamment d'informations seront données ici pour que cette consultation ne soit pas absolument indispensable .

Cet édifice, qui est assez austère, a été considéré par tous ceux qui l'ont peu ou prou étudié comme étant d'une très grande qualité esthétique et d'une exécution particulièrement soignée . "La réussite architecturale est évidente", déclare J-P MICHAUD dans sa conclusion au cours de laquelle il cite le jugement de LA COSTE-MESSELIERE :
"C'était une simple 'chambre' rectangulaire, sobre, nette comme une épure,
"sans colonnes ni ornements .... rien de plus que les impeccables linéaments
"architecturaux, rien d'autre à admirer que la justesse des proportions,
"la qualité de l'exécution et de la matière."

C'est donc ce monument qui a fait l'objet de la présente étude entreprise dans le but de rechercher si "la réussite architecturale " et la "justesse des proportions" ne reposaient pas sur un principe organisateur sous-jacent pouvant rendre compte d'une manière aussi simple que possible de la plupart des relations observables sur cet édifice .

L'auteur du "Trésor de Cyrène", Jean BOUSQUET, le pensait lorsqu'il estimait que :

" la perfection d'exécution du trèsor de Thèbes se prêterait à
" la découverte de rapports mathématiques complexes . "

au contraire d'ailleurs de J-P MICHAUD qui déclare dans son introduction, page 12

" le maître d'oeuvre n'a pas mobilisé toutes les ressources
" mathèmatiques de son époque ."

Et cependant, certains rapports entre diverses grandeurs ont assez rapidement suggéré qu'ils pouvaient résulter d'un modèle géométrique sous-jacent, plausible pour l'époque . Il est de plus apparu par la suite que cette géométrie implicite s'exprimait par des nombres très spécifiques qui permettaient de supposer qu'un modèle arithmétique avait dû servir à déterminer les grandeurs de l'édifice et de ses constituants . Ce qu'il reste à exposer et à justifier .

Les dimensions principales

Le trésor est un édifice de 7,76 de large et de I2,9I5 mètres de long au niveau de l'assise de réglage, ou euthyntèria . Sa hauteur est de 6,824 m au dessus du lit d'attente des fondations . Il se compose à l'intèrieur de deux pièces d'une largeur commune de 5,94 m et d'une profondeur de 2,55 m pour le "pronaos" et de 7,62 m pour la "cella" .

L'unité de mesure originelle est un pied dont la valeur a été fixée à : 1' = 0,3008 m , ce qui donne au dactyle correspondant une valeur de : 1" = 0,3008 : 16 = 0,0I88 m . Comme les reconstitutions des mesures de l'édifice ont été effectuées sur cette base, toutes les estimations seront ici exprimées en dactyles . Les dimensions précédentes deviennent alors :

Largeur : 413" Longueur : 687" Hauteur : 363"

Pour les autres dimensions, plutôt que d'en donner un relevé fastidieux, il a été jugé préférable de les reporter sur les figures suivantes, 1-a pour la façade et 1-b pour les côtés, reproduction de la planche 71 de l'ouvrage cité et sur laquelle ont été reportées les cotes données par J-P MICHAUD et notamment celles qui sont mentionnées dans l'appendice II, pages 97 à 100 .

Parmi toutes ces dimensions, l'une d'elles se trouve jouer un rôle déterminant dans les deux modèles qui vont être exposés. Il s'agit du niveau de ce que l'auteur dénomme "la partie du larmier visible de l'extérieur" dont la hauteur au dessus de la krépis (l.a.) est de : 275" .

Dès l'abord il apparaît que diverses autres dimensions sont reliées d'une manière simple à cette valeur de 275" :

a - Le demi périmétre au niveau de l'euthyntéria est égal à :
413 + 687 = 1100, soit : 275 . 4

b- Il en est de même du rectangle constitué par la hauteur fondations comprises et le larmier latéral :
420 + 680 = 1100

c- La hauteur du lit d'attente des orthostates sur les fondations(l.p) est égales à sa moitié :
80,5 + 57 = I37,5

d- Il en est de même de la profondeur du pronaos au niveau des assises de parpaings : 137,5

e- La diagonale de rectangle construit sur la base (413) et la hauteur (363) est approximativement égale à son double :
D (413 . 363) = 549,85

Pour ces raisons, et bien d'autres qui apparaîtront par la suite, un statut privilégié a été accordé à cette valeur, considérée comme la "grandeur de référence" du monument . Dans ce qui suit elle est désormais désignée par la lettre "R", avec, par convention :

R = 275" (soit : 5,I70 m)

LE TRESOR DE THEBES

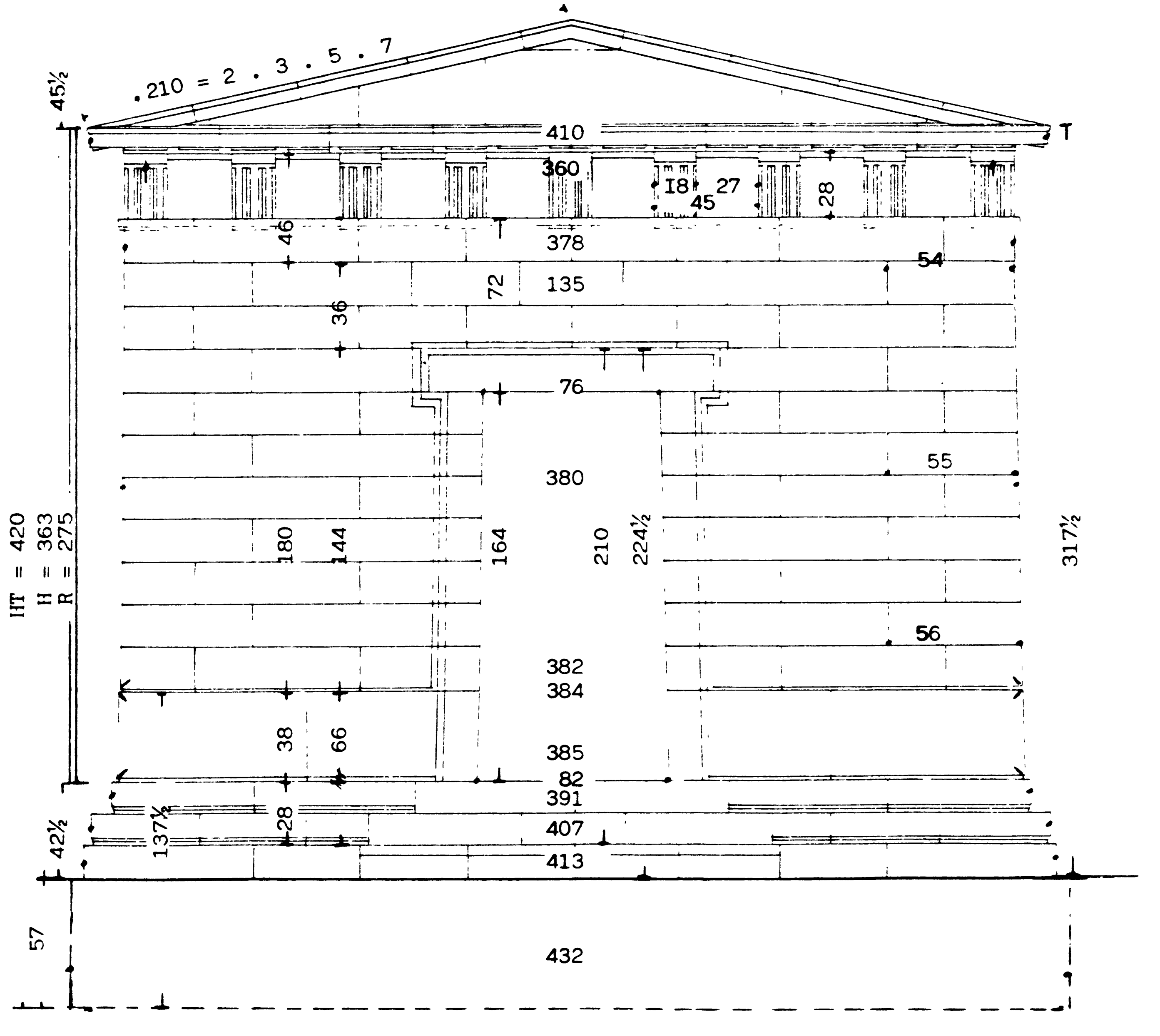


Figure 1-a : Facade Est, restituée et côtée

LE TRESOR DE THEBES

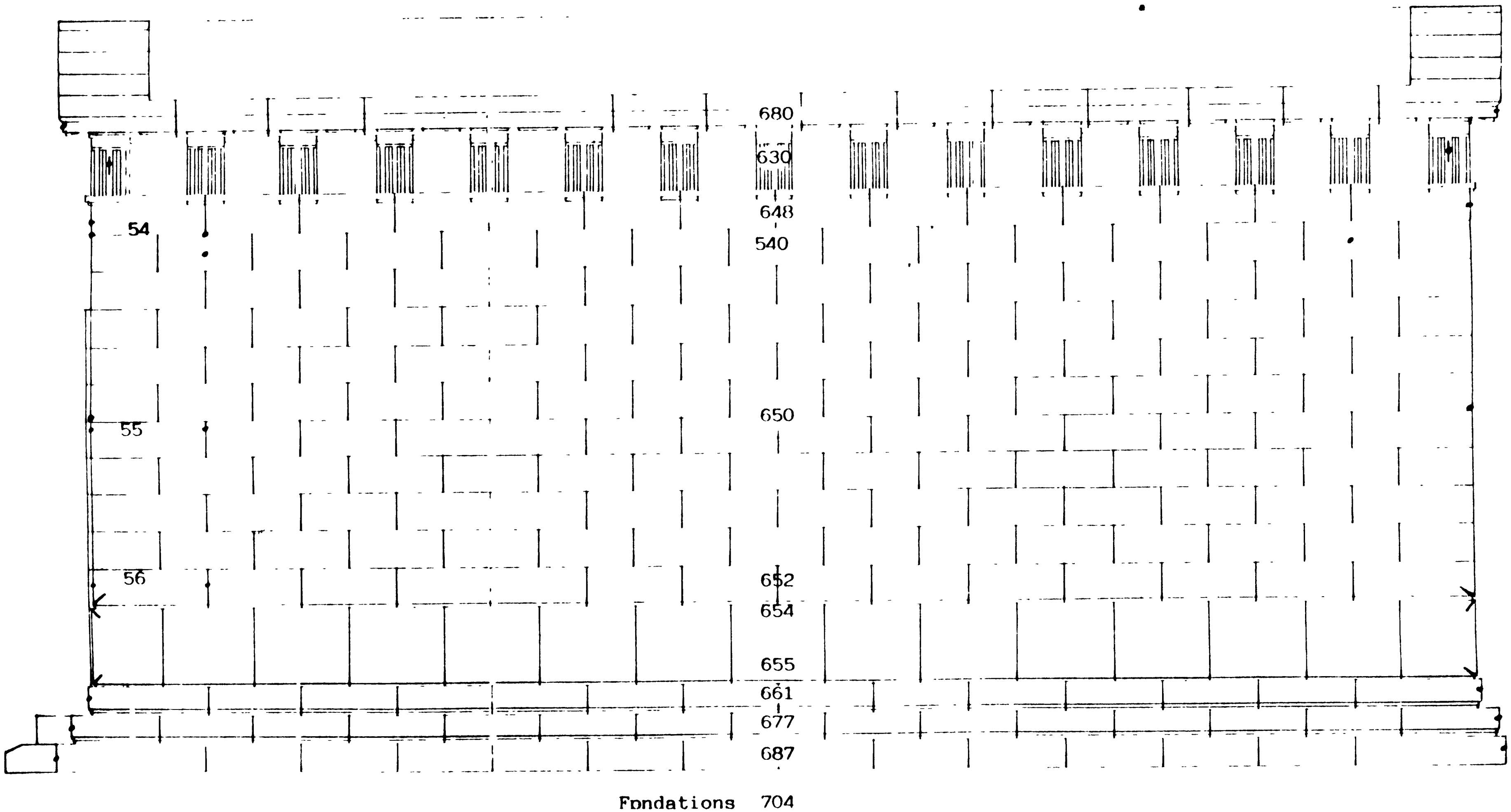
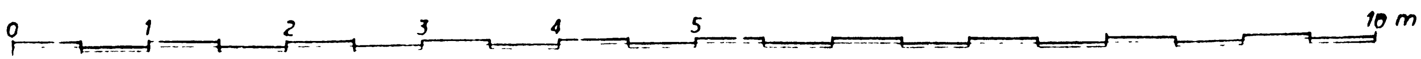


Figure 1-b : Côté Nord, restitué et côté



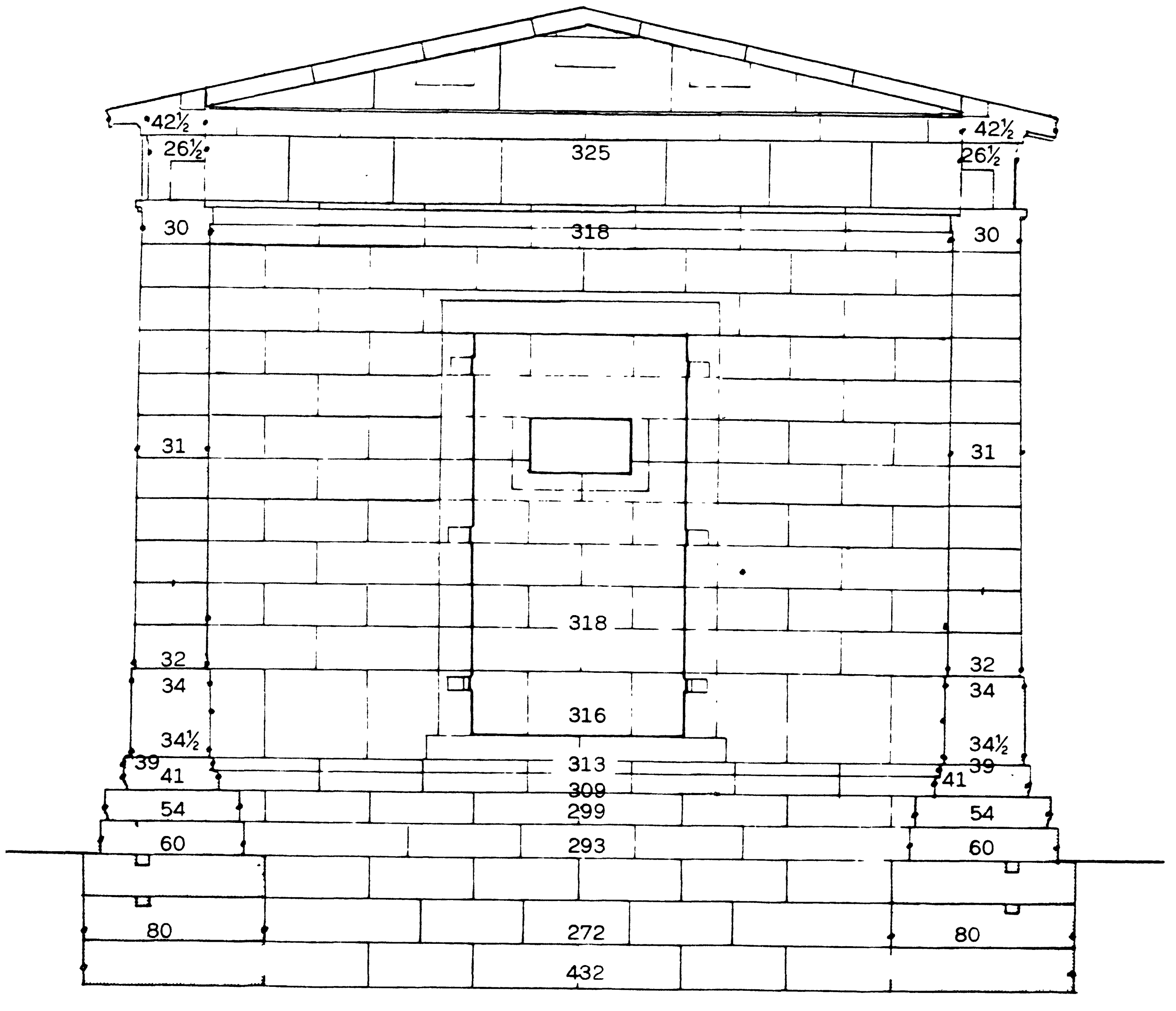


Figure 1-c : Coupe du Trésor et dimensions interieures

I LE PLAN HORIZONTAL ET SON MODELE GEOMETRIQUE

1 Les Dimensions Intérieures

Le trésor est donc composé de deux pièces : une entrée, ou "pronaos" et la salle du trésor proprement dite, ou "cella" . Les dimensions retenues pour l'analyse du plan sont celles du lit d'attente des orthostates . Le détail en est donné sur la planche 65 mais dans le système métrique . Cette base de mesure sera temporairement utilisée tout en indiquant entre parenthèses les équivalents en dactyles . Les dimensions intèrieures de ces deux pièces sont les suivantes :

Largeur commune : 5,9408 (3I6")

Profondeur pronaos : 2,5476 (135,5)

Profondeur Cella : 7,6234 (405,5)

Ces dimensions paraissent, tout d'abord, approximativement fonction de la longueur modulaire qui est fixée à :

Module : 0,846 , soit 45"

En effet, le septième de la largeur commune est presqu'égal au module :

5,9408 : 7 = 0,8487 (+ 2,7 millimétres)

La profondeur du pronaos est égale à trois fois cette valeur et celle de la cella à environ neuf fois :

0,8487 . 3 = 2,546I (- I,6 mm)

0,8487 . 9 = 7,6382 (+14,8mm)

et les deux profondeurs sont donc approximativement dans un rapport de 1 à 3 :

7,6234 : 2,5476 = 2,9924 $\cong$ 3

Cette approximation laisse cependant une marge d'erreur difficilement négligeable car elle conduit à des écarts supérieurs au dactyle et au demi dactyle :

Profondeur "réelle" du pronaos : 2,5476 . 3 = 7,6428 , moins profondeur de la cella = 0,0I84, soit : I",03

Et de même la profondeur théorique de la cella excède de I4,8 mm la profondeur "réelle", soit : 0",787 .

Ces premières relations ne sont donc guère très satisfaisantes . D'une part, elles sont relativement imprécises, d'autre part, elles ne permettent guère d'imaginer pour quelle raison (à supposer qu'il y en ait une !) le constructeur aurait choisi ces rapports approximatifs . Ceci incitait à un autre mode d'approche .

2 Les Dimensions Entre-Axes

La situation se modifie radicalement si, au lieu d'envisager les dimensions intérieures proprement dites, l'on considère les dimensions des deux pièces relativement aux lignes médianes des murs . Ce mode de détermination découle d'une analogie avec la pratique courante pour les temples péristyles pour lesquels les centres des colonnes servent de points de repères pour définir les dimensions "entre-axes" . Dans le cas présent, il se trouve que cette approche fait apparaître des rapports qui suggèrent un <u>modèle géométrique</u> hautement plausible . Les nouvelles dimensions, dites "dimensions entre-axes",sont alors les suivantes :

Largeur commune	:	316" + 34" = 350"	(6,58m)
Profondeur pronaos	:	135,5 + (45 + 34):2 = 175"	(3,29m)
Profondeur cella	:	405,5 + (45 + 34):2 = 445"	(8,36m)
Pronaos + cella	:	115 + 445 = 620"	

3 Premières constatations

En premier lieu, ces nouvelles dimensions s'expriment toutes par un nombre entier de dactyles et ces nombres sont des multiples de 5 comme la grandeur de référence : R = 275 = 11 . 25

En second lieu, le pronaos est très exactement construit sur ce que l'on appelle un double carré de côtés : 175" et 350 " .

En dernier lieu, les rapports avec la grandeur de référence sont les suivants :

Largeur commune	:	350 / 275 =	1,2727
Profondeur cella	:	445 / 275 =	1,6181

Ces nouveaux rapports sont loin d'être quelconques et approximatifs comme l'étaient les précédents . Notamment, la valeur du second est très voisine du carré de la valeur du premier mais celui-ci est à considérer tout d'abord .

Celui-ci est, en effet, l'expression directe de ce que EUCLIDE appelle le "<u>partage en moyenne et extrème raison</u>" , ultèrieurement désignée comme la "Section d'Or" ou la "Divine Proportion" .

Il n'est pas utile de s'étendre ici sur les commentaires dont ce partage particulier a fait l'objet . Il suffit de le définir comme une relation existant entre trois termes, donc d'une proportion, telle que :

le tout (AB) est au plus grand (AC) comme le plus grand
est au plus petit (BC) .

Par référence à une droite AB, coupée en un point C, cette proportion s'exprime aujourd'hui par l'égalité de deux rapports :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}$$

Comme le produit des extèmes est égal au produit des moyens :

$$AC^2 = AB \cdot BC \qquad \text{soit : } AC = \sqrt{AB \cdot BC}$$

Ce qui est encore dire que : AC est <u>moyenne géométrique</u> de AB et de BC, ou, comme l'on disait jadis que : AC est le moyen (ou la médiété) géométrique de AB et BC . Cette moyenne était l'une des trois "anciennes" médiétés pythagoriciennes : arithm-tique, harmonique, géométrique . De ce fait, et par souçi de simplification, ce partage en moyenne et extrème raison sera désigné par l'expression : <u>partage géométrique</u> .

4 La construction euclidienne du partage géométrique

Cette construction est exposée dans la proposition 11 du deuxième Livre des ELEMENTS . Comme la thèorie des proportions est reportée au cinquième livre, la notion de proportion n'y figure pas explicitement mais se trouve formulée d'une manière équivalente en termes d'égalité d'aires de carré et de rectangle :

> "Couper une droite donnée (AB) de manière que le rectangle compris
> "par la droite entière et l'un de ses segments (AT) soit égal au
> "carré du côté restant "

Il s'agit donc bien de couper la droite AB et T de telle sorte que, comme précedemment :

le rectangle $AB \cdot AT = BT^2$ le carré

ce que nous exprimons selon l'égalité des rapports :

$$\frac{AB}{BT} = \frac{BT}{AT}$$

et ceci correspond à la troisième définition du sixième livre :

> "Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison lorsque
> "la droite entière est au plus grand segment comme celui-ci est
> "au plus petit segment ".

La construction géométrique de cette segmentation est des plus élégantes comme des plus simples . Elle consiste uniquement à :

(a) - Construire un carré sur la droite AB, soit ABCD ;

(b) - Prendre le milieu E du côté BD et tracer EA ;

(c) - Rabattre EA sur BD en EZ ;

(d) - Construire sur BZ le carré BZHT .

Il est alors démontré que le point T coupe AB de la manière requise .

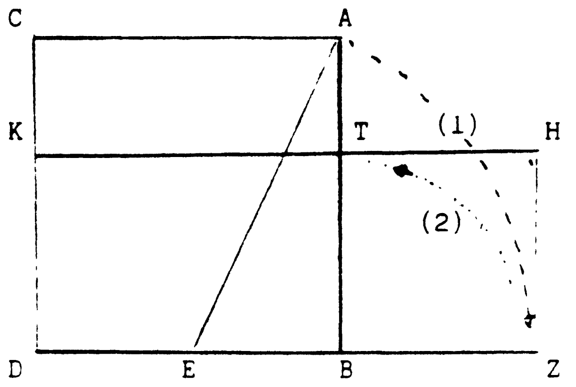


Figure 2 : La procédure euclidienne

Les propriétés métriques de cette construction sont exposées dans les premières propositions du livre XIII . Leur formulation en langage contemporain est la suivante :

1 - $EZ = EA = \frac{1}{2} AB\sqrt{5}$ (XIII, 1 et 2)

2 - $AT + \frac{1}{2} BT = \frac{1}{2} BT\sqrt{5}$ (XIII, 3)

3 - La diagonale AK du petit rectangle ACKT a pour valeur : $BC\sqrt{3}$ (XIII, 4)

4 - Le point B coupe DZ en extrême et moyenne raison (XIII, 5) . De ce fait $KZ = BD\sqrt{3} = AB\sqrt{3}$

Les propriétés 1 et 2 permettent de déterminer les valeurs d'un partage géométrique en fonction de la droite initiale AB :

(a) $DZ = EZ + \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AB\sqrt{5} + \frac{1}{2} AB = AB\,\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

(b) $BZ = EZ - \frac{1}{2} AB = AB\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(c) Il est aisé de vérifier que DZ et BZ sont inverses l'un de l'autre, c'est à dire qu'ils vérifient :

$$DZ \,.\, BZ = AB$$

Négligeant la grandeur AB que l'on considerera comme egale à l'unité, la valeur de la médiété géométrique s'exprime donc par l'un ou l'autre des rapports :

$$\frac{\sqrt{5}-I}{2} \qquad \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Conventionnellement c'est la valeur du second de ces rapports qui a été retenue . Une littérature enthousiaste, parfois aussi quelque peu ésotérique, qualifie cette valeur de "Nombre d'Or" en la désignant par la lettre Ø :

$$Ø \equiv \frac{\sqrt{5}+1}{2} = I{,}6I803...$$

et son inverse $1/Ø = Ø - 1 = 0{,}6I803 ...$

Il convient toutefois de signaler que parler de "nombre" serait ici un anachronisme car pour les Grecs il ne peut s'agir que d'une proportion et qui n'est qu'une médiété parmi d'autres . Cette lettre Ø n'en est que l'abréviation et n'a de sens que par la construction sous-jacente qui permet le partage géométrique d'une grandeur donnée . Cette construction fait, par ailleurs, intervenir d'autres rapports qui sont organisés en un système d'interdépendance que représente la figure ci-après :

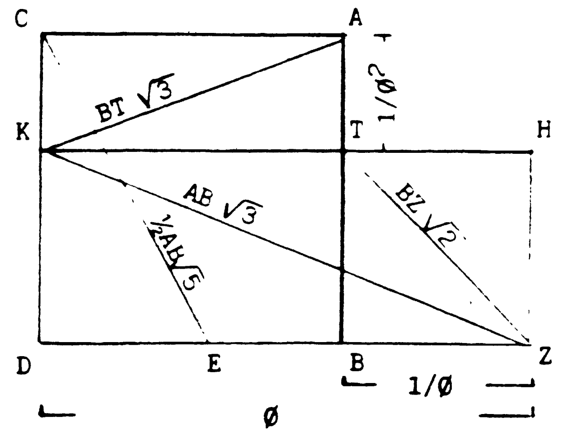


Figure 3 : Droites d'un partage géométrique

Ces divers rapports, exprimés aujourd'hui en termes de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ se retrouveront par la suite . Pour le moment il suffit de relever que la construction euclidienne permet d'envisager comment aurait pu être déterminée par la règle et le compas, ou le cordeau, la profondeur entre-axe de la cella à partir de la grandeur de référence R . En vue d'obtenir un rapport proche de I,6I8, il suffisait de construire un carré de côté 275" et de rabattre sa demie-diagonale . Rien de plus élémentaire et, semble-t-il aussi, de plus courant . Aussi serait -il éxagéré de parler de modèle géométrique si l'on n'aboutissait qu'à cette unique détermination et notamment si, d'une manière ou d'une autre, l'on n'arrivait pas à déterminer aussi, et à tout le moins, la largeur commune entre-axe .

Or il a précédemment été indiqué que le rapport Cella / R était environ égal au carré du rapport Largeur / R . Si le premier est égal à Ø, le second s'exprimera donc par $\sqrt{Ø}$:

Pro-fondeur cella	:	445"	=	275 Ø	======> 445/350 = $\sqrt{Ø}$
Largeur commune	:	350"	=	275 $\sqrt{Ø}$	

Il faudrait donc savoir construire une racine carrée . Euclide en indique la procédure à la proposition 14 du livre II :

"Construire un carré égal à une figure donnée"

Si cette figure est un rectangle - ou un nombre rectangle - le côté du carré correspondra à la racine carrée du produit des deux côtés du rectangle . Adaptée à notre propos, la procédure euclidienne consisterait à poursuivre la contruction de la figure 2 de la manière suivante :

(a)- Rabattre le côté CD du carré construit sur AB en DC'

(b)- Prendre le milieu M de C'Z

(c)- Tracer un demi-cercle de centre M et de rayon MZ

(d)- Prolonger DC jusqu'à son intersection L avec le demi-cercle .

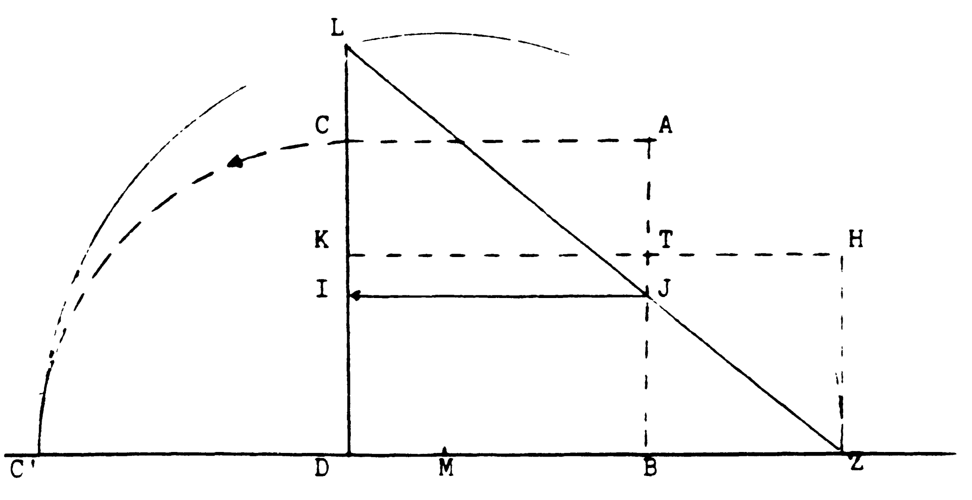


Figure 4 : Construction d'une racine carrée

Dans cette construction, LD est la hauteur du triangle rectangle DLC' inscrit dans le demi-cercle de centre M . Donc :

$$LD^2 = C'D \cdot DZ = AB \cdot AB\, \phi \implies LD = AB \sqrt{\phi}$$

Joignons ensuite LZ et soit J le point d'intersection avec AB et JI parallèle à BC, en raison de la similitude des triangles on montre aisément que :

$$LI = AB \,;\, I/\sqrt{\phi}$$

On aurait donc ainsi la possibilité de déterminer géométriquement la largeur de la cella dont la profondeur (445) est représentée sur la figure précédente par DZ et la largeur (350) par LD . Il ne resterait plus, ensuite, qu'à prendre LD/2 pour obtenir la profondeur du pronaos .

Toutes les dimensions du plan de l'édifice sont maintenant déterminées géométriquement . Dans ces conditions, il paraîtrait moins abusif de parler du "modèle géométrique" de ce plan, et ce d'autant plus que d'autres dimensions de l'édifice qui n'ont pas encore été envisagées se trouvent aussi déterminées par cette construction euclidienne . Toutefois une autre construction , en tout point équivalente à la précédente, peut encore être envisagée . Bien que n'étant pas mentionnée dans le corpus euclidien, elle est d'une telle simplicité qu'il est peu vraissemblable qu'elle ait été ignorée .

5 Le rectangle $\sqrt{\phi}$

Cette nouvelle construction est encore un complément de celle représentée sur la figure 2 donnant :

$$DZ = AB\, \phi$$

Sur cette figure, il suffit alors de :

(a)- Tracer un cercle de centre D et de rayon DZ

(b)- Prolonger AB jusqu'à son intersection G avec le cercle .

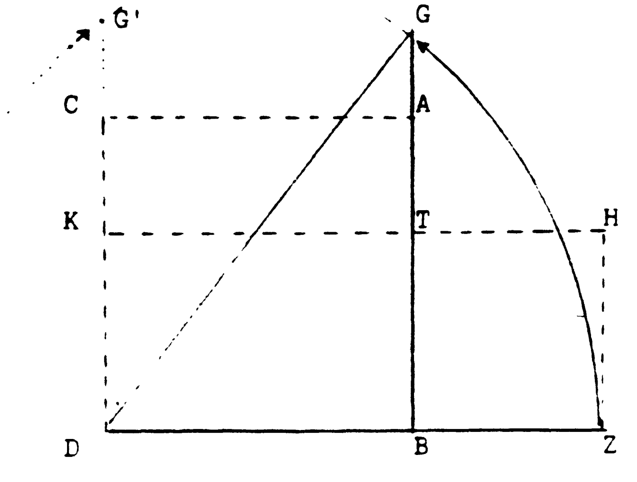


Figure 5 : Construction directe de $\sqrt{\phi}$

Dans le triangle rectangle BGD, l'hypothénuse DG est égale à : AB $\emptyset$, et BD est le côté du carré construit sur AB : BD = AB . On a donc :

$$GB^2 = GD^2 - BD^2 = BA^2\emptyset^2 - BA^2 = BA^2(\emptyset^2 - 1)$$

Or : $\emptyset^2 - 1 = \emptyset$, et donc :

$$GB = AB\sqrt{\emptyset}$$

La même construction effectuée à partir du point B donnerait un point G' qui coinciderait avec le point L de la figure 4 . Le rectangle DBGG', dont les côtés sont dans le rapport : GB / DB = $\sqrt{\emptyset}$, est parfois appelé "Rectangle $\sqrt{\emptyset}$" Ce type de rectangle présente la propriété suivante :

- De l'un des sommets, abaissons la perpendiculaire sur la diagonale opposée, soit BH sur DG . En raison de la similitude de divers triangles rectangles, il est aisé de vérifier que le point H partage la diagonale DG en extrême et moyenne raison, donc :

$$DG / GH = \emptyset$$

et comme : DG = AB $\emptyset$, GH = AB, et : DH = AB / $\emptyset$

- D'autre part, abaissons de H la perpendiculaire HJ sur AB, le point J coupe aussi BG en extrême et moyenne raison, donc :

$$GJ = GB / \emptyset = AB\sqrt{\emptyset} / \emptyset = AB / \sqrt{\emptyset}$$

On retrouve ainsi les rapports $\sqrt{\emptyset}$ et $1 / \sqrt{\emptyset}$.

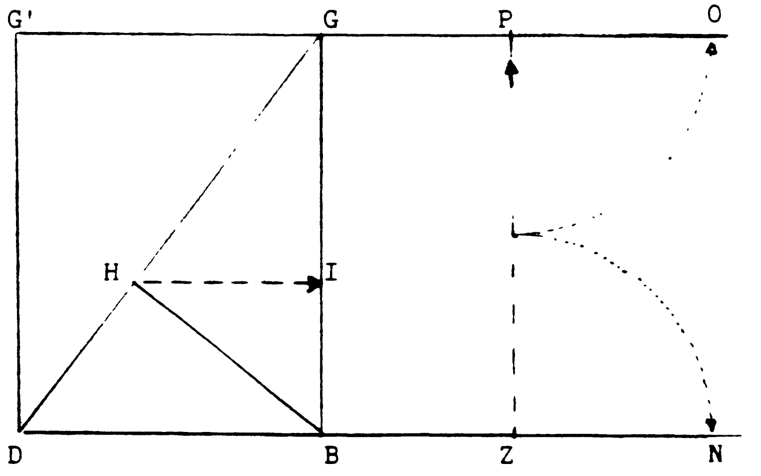


Figure 6 : Le rectangle $\sqrt{\emptyset}$

Pour obtenir les dimensions entre-axes de la cella, il suffit de mener à partir de Z la perpendiculaire à la droite DBZ . Elle coupe la droite G'G en P . Le rectangle DZPG' représente la cella . Prenant ensuite le milieu de ZP, on obtient par rabattement les points N et O . Le rectangle - ou double carré - ZNOP représente le pronaos . Cette construction est techniquement plus simple que celle de la figure 4 car il n'est plus nécessaire de construire des points auxiliaires,tels que C' et M, qui n'ont pas de correspondant dans le plan de l'édifice . Les trois constructions successives du plan du tresor à partir de la grandeur de référence ont été reportées sur la planche 65 de l'ouvrage de J-P MICHAUD (page suivante, figure 6-a)

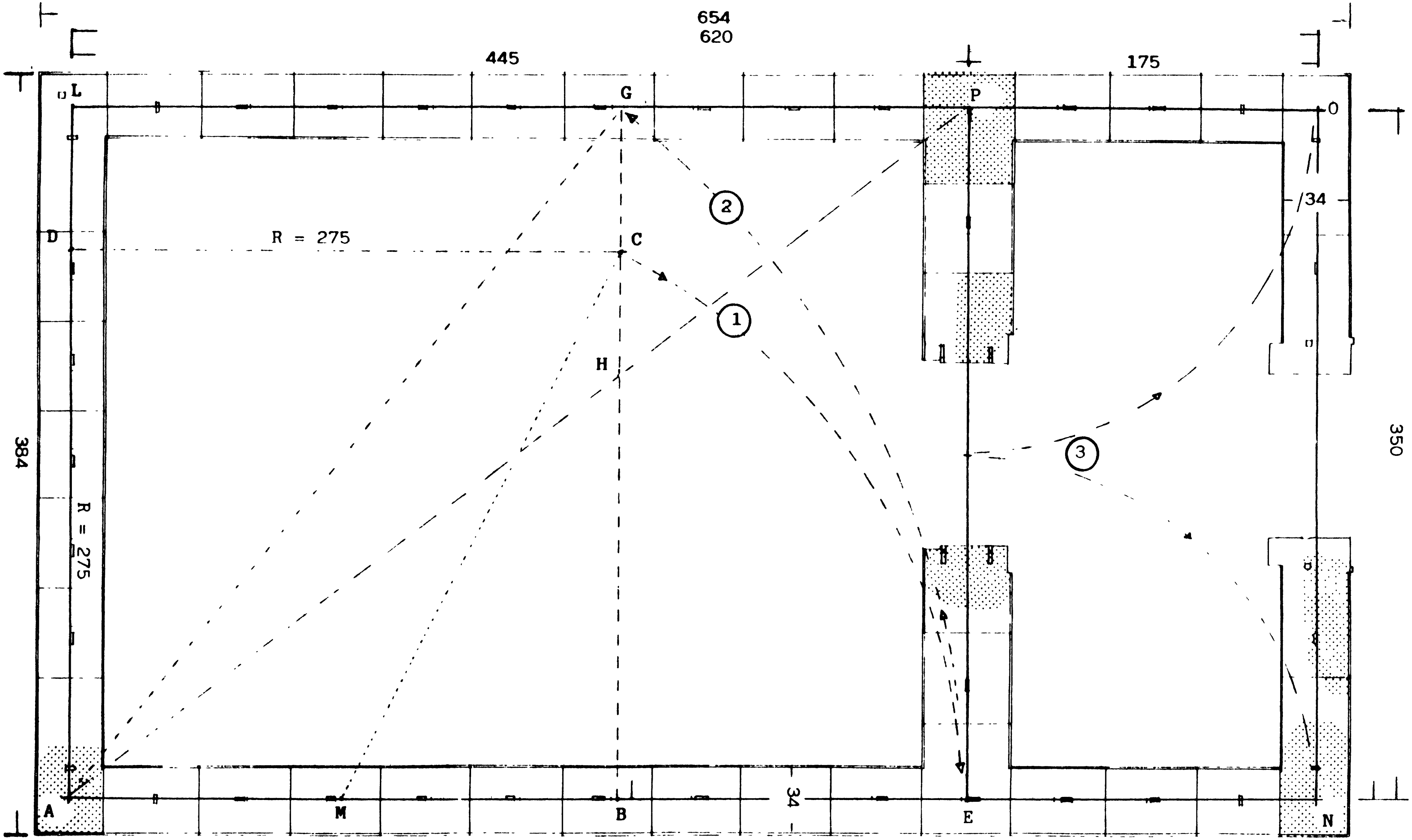


Figure 6-a : *Pl. 65* Plan de l'assise d'orthostates. (1.a)

En raison de leur simplicité, il semble assez raisonnable de considérer que ces dernières constructions consituent Le Modèle Géométrique du plan entre-axe du monument donnant une raison plausible des choix éffectués et indiquant comment ils auraient pu, éventuellement, être mis en oeuvre in situ lors de l'édification du trésor .

Tel cependant ne paraît pas avoir été le cas ! Les cotes en dactyles sont d'une part trop précises et, d'autre part, sont des nombres trop particuliers pour que le maniement du cordeau ait suffi à les obtenir avec cette exactitude. De toute évidence, les dimensions de ce monument ont été, non pas tracées, mais calculées . Pour satisfaisant qu'il paraisse, le modèle géométrique doit, non pas être abandonné, bien au contraire, mais il doit être complété par ce que nous appellerons un "modèle arithmétique" donnant la raison du choix de tel nombre de préférence à tel autre, tout aussi acceptable, attribué à telle ou telle dimension .

II LE MODELE ARITHMETIQUE

1 Les approximations succèssives

Les grandeurs qui viennent d'être construites font toutes intervenir directement ou indirectement la diagonale d'un double carré ($\sqrt{5}$) . Or l'on sait qu'il n'existe pas de mesure commune entre cette diagonale et le côté de son carré . Ces deux grandeurs sont in-commensurables et le rapport qui les exprime est non-rationnel en ce sens qu'il ne peut s'exprimer par le rapport de deux entiers indiquant le nombre de fois que l'unité de mesure commune est reportée en l'une et l'autre grandeur .

Toutefois certains rapports d'entiers peuvent être plus ou moins proches du rapport "exact" entre deux grandeurs incommensurables . Par exemple 17 / 12 = I,4166... est une approximation du rapport de la diagonale d'un carré à son côté ($\sqrt{2}$) plus précise que ne le serait 7/5 = 1,40 .

Il existe de même des suites d'entiers, construites selon certaines règles,qui permettent d'obtenir d'une manière systèmatique des approximations de plus en plus satisfaisantes du rapport de deux grandeurs incommensurables . L'une des plus anciennement attestées est la suite des nombres latéraux et diagonaux, dits "nombres de THEON", donnant les approximations succèssives de $\sqrt{2}$:

A :	1	3	7	17	4I	99	239
B :	1	2	5	12	29	70	169
			1,400	1,4166	1,41379	1,41429	1,41420

Aucun texte ne subsiste portant un témoignage indiscutable de l'existence de telles suites au IV° siècle et les témoignages les plus anciens sont de la période alexandrine . Cependant divers auteurs estiment que la méthode du retranchement alterné, décrite dans le corpus euclidien aux débuts des livres VII et X, permettait, dès cette époque de les construire .

On se reportera, par exemple, au chapitre : "l'algorithme d'Euclide ou anthyparèse" de l'ouvrage de J. ITARD : Les Livres Arithmétiques d'Euclide, ou encore aux divers art-icles de D.H. FOWLER cités en bibliographie . Cette "très remarquable technique" est ainsi exposée par ITARD dans les termes suivants :

> " Soit A et B deux grandeurs de même espèce, ou deux nombres, avec : $A > B$, on forme : $A - B = C$, puis, si $C > B$, $C - B = D$ et celà jusqu'à ce que le reste R soit inférieur à B , ou, en langage antique, on éssaie de mesurer A par B, ce qui en général laisse un reste R : $A = Bm + R$, $R < B$, m entier . On opère alors sur B et sur R comme il vient dêtre fait sur A et sur B . Le
> procédé procédé peut se poursuivre indéfiniment, auquel cas A et B sont incommensurables (Eléments, X , 2) ... On peut <u>définir</u> le rapport de A à B au moyen de la suite limitée ou illimitée des entiers m, quotients partiels, qui apparaissent dans l'algorithme ."

On a donc une succèssion d'opérations de la forme :

$$A = Bm_1 + R_1$$
$$B = R_1 m_2 + R_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et le rapport de A à B est défini par la suite : $(m_1, m_2, \dots , m_i)$.
De plus, cette suite de quotients partiels permet de construire les approximations succèssives de ce rapport, sous la forme $q_i \,/\, p_i$, en posant :

I	$q_1 = m_1$	et	$p_1 = 1$
II	$q_2 = (m_1 m_2) + 1$	et	$p_2 = m_2$
III	$q_i = m_i q_{i-1} + q_{i-2}$		$p_i = m_i p_{i-1} + p_{i-2}$

<u>Exemple</u> :

On peut démontrr géométriquement (cf ITARD, p 41) que le rapport $\sqrt{3} \,/\, 1$ peut se définir par l'anthypharèse :

$$(1, 1, 2, 1, 2, 1, \dots) = (I, \overline{1, 2})$$

A l'aide des règles précédentes, les approximations succèssives de $\sqrt{3}$ se déduiront de cette suite sèlon :

m_i	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	
q_i	1	2	5	7	19	26	71	97	265	362	989		....
p_i	1	1	3	4	11	15	41	56	153	209	571		....
						1,7333	1,73107		1,73203				

2 Anthypharèse et suite de Fibonacci

L'une de ces suite est fort connue ... des spécialistes et ce, en Occident du moins, depuis le début du XIII° siècle . Quoique présentée par Léonard de Pise dans un tout autre contexte, il s'agit bel et bien des approximations successives de la valeur du partage en extrème et moyenne raison . Connue sous le nom de "Suite de FIBONACCI" , elle est constituée de termes dont chacun est la somme des deux termes qui le précèdent immédiatement . En posant les deux premiers égaux à 1 , on obtient :

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 I44 233 ...

et il se trouve que les quotients de deux termes consécutifs donnent les approximations succèssives de la "Divine Proportion" . On aurait ainsi :

21 / 13 = 1,61538	34 / 21 = 1,6I904
55 / 34 = 1,61764	89 / 55 = 1,61818 (*)

Celà ne manquerait pas de surprendre si l'on ne savait par ailleurs que cette suite peut notamment se construire à partir de l'anthyphárèse de Ø dont on démontre géométriquement qu'elle est l'une des plus simples qui soient, puisqu' égale à :

$$\varnothing = (1, 1, 1, 1, \ldots)$$

et selon les règles du paragraphe précédent, les approximations $q_i : p_i$ sont les suivantes :

m_i	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
q_i	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	...
p_i	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Comme les deux suites sont identiques à un simple décalage près, il suffit de retenir la suite des p_i et de faire le rapport de deux de ses termes consécutifs pour obtenir l'une des approximations de Ø .

Or un fait est surprenant, et mérite d'être signalé : le rapport de la longueur entre-axes de la cella avec la grandeur de référence étant voisin de Ø suggère une élaboration du plan de l'édifíce à partir de la procédure euclidienne du partage géométrique . Ce rapport est évidemment indépendant de l'unité de mesure adoptée, mais il se trouve que les dimensions en dactyles sont très exacte-

(*) L'expression en quantièmes de ce rapport est particulièrement simple puisque:

$$89 / 55 = 1, \overline{2}, \overline{10}, \overline{55}$$

ment celles que donne l'anthypharèse :

Grandeur de référence : R = 275 = 55 . 5

Longueur entre-axes : 445 = 89 . 5

Il n'est pas interdit de supposer qu'il ne s'agit que d'une simple coincidence et que, par ailleurs, l'estimation des mesures en dactyles dépend des hypothèses faites sur la valeur du "pied" lors de la reconstitution et que, très vraissemblablement, un autre archéologue , sous d'autres hypothèses, aboutirait à d'autres nombres-dactyles pour les mêmes dimensions ; les rapports demeureraient identiques mais les nombres ne seraient plus dérivés de la suite fibonaccienne .

On peut cependant remarquer que les dimensions entre-axes ne sont aucunement données par l'archéologue (qui ne s'en est absolument pas soucié) mais qu'elles ont été déterminées à partir des mesures intèrieures et exterieures qu'il nous fournit . Première coïncidence : le choix des dimensions entre-axes aboutit à un modèle géométrique simple et notamment à un double-carré pour le pronaos; deuxième coïncidence : les valeurs de ces dimensions sont non seulement un nombre entier de dactyles, mais de plus multiples de 5 ; enfin, troisième coïncidence : ces valeurs se ramènent aux approximations antyphairétiques .

Certes, en ce domaine, on ne saurait faire preuve de trop de prudence et se contenter d'un seul constat qui ne serait que curieux et dont il serait abusif de tirer une quelconque conclusion . Mais justement, pour cet édifice, ces deux nombres, 275 et 445, sont loin d'ête un cas isolé, tout au contraire . De très nombreuses autres dimensions ont des estimations-dactyles dérivées aussi de la suite fibonaccienne . Sans en donner ici la liste exhaustive, qui figure en annexe, on peut dès à présent relever les points suivants :

Tout d'abord le choix même de la valeur de la grandeur de référence : 55 . 5 = 275 accompagné du fait que plusieurs blocs ont une de leurs dimensions égale à 55 alors que pour d'autres elles est égale à 89 ou à 34 . La valeur 144 correspond au niveau du linteau (l.a.) sur les orthostates (l.a.) et ses sous-multiples 72,36 et 18 à des dimensions de blocs . L'édifice et trop petit pour trouver 144 . 5 = 720, mais chacune de ses dichotomies se retrouve sur l'édifice jusqu'au seizième qui est égale au module : 720 / 16 = 45 . La valeur 210 = 21 . 10 correspond à la longeur de la pente du toit et à la hauteur du linteau sur l'euthyntéria, son double à la hauteur totale de l'édifice, fondations comprises et son triple à la longueur entre-axes de la frise sur les côtés .

Ces quelques constatations, que bien d'autres viennent étayer, conduisent à avancer l'hypothèse que le modèle purement géométrique du partage en extrême et moyenne raison est effectivement complété par un modèle arithmétique qui indique, d'une manière raisonnée, quelles approximations, en valeurs entières, retenir pour attribuer une valeur précise à telle dimension reliée à la grandeur de référence .

Il semble bien que ce modèle soit d'une façon ou d'une autre relié à une procédure de retranchement alterné, anthypharèse euclidienne ou antanarèse évoquée par Aristote . Cette procèdure fournit donc des nombres à attribuer aux diverses grandeurs d'un partage géométrique et leur localisation sur le partage de 55 serait la suivante :

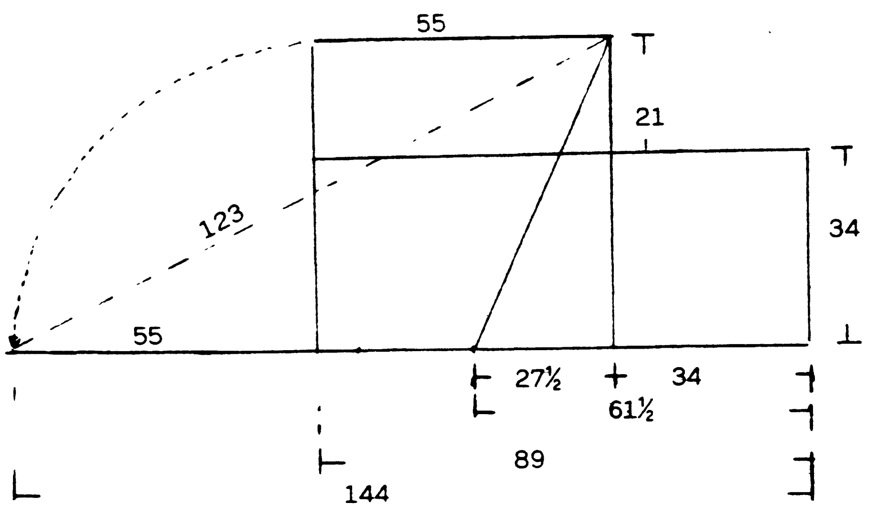


Figure 7 : Valuation du partage géométrique de 55

N.B : Bien qu'il soit hors de question de le développer ici, le Trésor comporte des dimensions qui paraissent reliées à d'autres anthypharèses, et notamment à celle de $\sqrt{3}$ avec les quatre rapports : 19 / 11 , 26 / 15 , 71 / 41 et 97 / 56 .

3 Suites associées

On a indiqué plus haut (I,4) que le rapport du grand au petit segment d'un partage géométrique est égal à :

$$\emptyset = \sqrt{5} + 1 / 2$$

Connaissant donc une approximation de Ø, il est possible de lui associer une approximation de $\sqrt{5}$ selon :

$$\sqrt{5} = 2\,\emptyset - 1$$

Si Ø est estimé par le rapport 89 / 55 , l'estimation associée de $\sqrt{5}$ serait :

$$\frac{(89 \,.\, 2) - 55}{55} = \frac{123}{55}$$

En opérant de même sur chacune des approximations de Ø par la suite fibonaccienn on dérive la suite associée des approximations de $\sqrt{5}$. En désignant par F_1 les termes de la suite initiale, les termes correspondants pour $\sqrt{5}$ seront :

$\sqrt{5}$	:	18	29	47	76	123	199	322
F_1	:	8	13	21	34	55	89	144
						2,23636		2,236111

Il est à relever que si ces approximations sont "bonnes", elles ne sont cependant pas les "meilleures possibles" Ces dernières se dériveraient directement de l'anthypharèse de $\sqrt{5}$ selon :

$\sqrt{5}$ =	2	4	4	4	4	...
q_i	2	9	38	161	682	...
p_i	1	4	17	72	305	...

On notera que certaines des approximations premières donnent exactement les mêmes rapports que les secondes, mais que les nombres qui les expriment sont doubles :

76 / 34 = 38 / 17 = 2,2359...

322 /144 = 161 / 72 = 2,326111 ...

Les secondes sont cependant "meilleures" que les premières car, outre l'approximation de $\sqrt{5}$, elles indiquent aussi la valeur des côtés de deux carrés dont la surface de l'un est pratiquement égale au quintuple de la surface de l'autre, à une unité près . En termes techniques, les deux nombres sont solution de l'équation dite de PELL-FERMAT :

$$X^2 - 5\,Y^2 = \pm 1$$

alors que les nombres de la première suite vérifient l'équation :

$$(2X)^2 - 5\,(2Y)^2 = \pm 4$$

Ainsi pour la première approximation de chacune des suites aurait-on :

38^2	= I444	76^2	= 5776
$5 \,.\, 17^2$	= 1445	$5 \,.\, 34^2$	= 5780
Différence	-1		-4

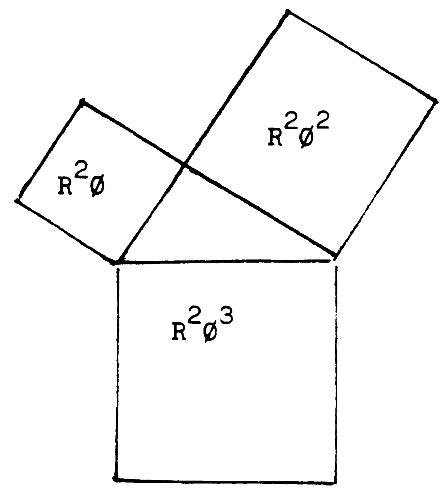
Or, si certaines des dimensions du Trésor suggèrent une interprétation en termes de $\sqrt{5}$, les nombres-dactyles de ces dimensions se dérivent **de ceux de la première** suite et non pas de ceux de la seconde . Par exemple : **largeur de la porte au** linteau : 76 = 34 $\sqrt{5}$.

4 Autres approximations

Comme indiqué plus haut (I, 5), il semble que la largeur entre-axes de la cella (350") puisse se dériver de la grandeur de référence en faisant intervenir $\sqrt{\emptyset}$ puisque :

$$350 / 275 = 1{,}2727\ldots \quad \text{pour} : \quad \sqrt{\emptyset} = 1{,}27018\ldots$$

Dans le cadre de cette hypothèse, les deux côtés entre-axes de la cella et sa diagonale correspondraient aux côtés de carrés dont les surfaces seraient en progression géométrique de raison $\emptyset$ selon le schéma ci-contre :



Le précédent rapport est aussi égal à :

$$350 / 275 = \frac{25 \,.\, 14}{25 \,.\, 11} = \frac{14}{11}$$

er correspond à la quatrième des approximations dérivées de l'anthypharèse de $\sqrt{\emptyset}$:

m_i	1	3	1	2	11
q_i	1	4	5	14	491
p_i	1	3	4	11	386

Or cette approximation se retrouve aussi dans l'anthypharèse de $4 / \pi$:

m_i	1	3	1	1	1	15
q_i	1	4	5	9	14	219
p_i	1	3	4	7	11	172

On se trouve ainsi devant deux interprétations arithmétiquement plausibles d'un même rapport . Cette ambivalence se rencontre fréquemment pour les premières approximations dérivées de l'anthypharèse . Lorsque cette situation se présente seul le contexte offre la possibilité de privilégier l'une des deux interprétations en choisissant celle qui paraît le plus compatible avec les interprétations qui ont été retenues par ailleurs . Dans le cas présent, en raison de l'homogénéité et de la simplicité des constructions géométriques exposées précédemment, il paraît assez légitime de privilégier l'interprétation en termes de $\sqrt{\emptyset}$ et de poser :

$$275 \,.\, \sqrt{\emptyset} = 275 \,.\, 14/11 = 350$$

Par contre la même raison ne peut plus être avancée lorsque paraît intervenir le rapport inverse : 1 //Ø . Il en serait par exemple ainsi du rapport entre la largeur des fondations en façade avec la grandeur de référence dont la valeur décimale est assez voisine de celle de : 2 //Ø :

$$432 / 275 = 1{,}570909\ldots \quad \text{et} \quad 2 / /Ø = 1{,}572304\ldots$$

mais qui ne correspond pas exactement à l'inverse du rapport précédent puisque ce rapport ne se réduit pas à 11 / 7 . Toutefois cette valeur de 432 est le triple de l'un des termes de la suite fibonaccienne F_1 avec :

$$432 = 144 \cdot 3 = 55\, Ø^2 \cdot 3 = \frac{3}{5}\, R\, Ø^2$$

et pour le double on aurait :

$$864 = \frac{6}{5}\, R\, Ø^2$$

Or, en prenant pour $Ø^2$ l'approximation 144 / 55 , le rapport 6 $Ø^2$ / 5 se trouve être égal à :

$$(144 / 55) \cdot (6 / 5) = 3{,}14182\ldots$$

et diffère relativement peu des valeurs actuellement retenues pour l'approximation de π . Si l'on peut reconstituer avec quelque vraisemblance les anthypharèses et les approximations de $\sqrt{N}$ ou de Ø qui auraient été en usage dès le IV° siècle, il est par contre impossible de savoir si le rapport du rayon à la circonférence avait déjà donné lieu à une anthypharèse conduisant à des approximations successives de ce rapport . On ne dispose donc ici d'aucune base arithmétique pour justifier une interprétation du rapport 864 / 275 . Seule intervient sa valeur décimale pour avancer, à titre d'hypothèse, que 864 pourrait être la valeur de la demi-circonférence du cercle de rayon 275 . Quoiqu'il en soit de la validité de cette interprétation, il est à mentionner que nombreux sont les éléments de l'édifice dont l'une des dimensions est un sous-multiple de 432 (cf annexe) et notamment la largeur de la métope qui en est le seizième : 432 / 16 = 27

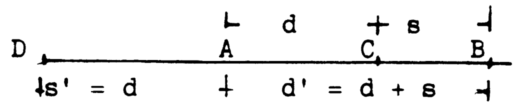
5 Le modèle de valuation

Comment donner des nombres (entiers) à des grandeurs qui, théoriquement n'ont pas de mesure commune et ce tout en respectant au mieux les relations qui existent entre elles ?

Les constructeurs du Trésor de Thèbes semblent avoir parfaitement résolu ce problème de "l'indicible" en choisissant leurs nombres parmi la suite des approximations successives qui se déduisent de l'anthypharèse d'un partage géomètrique . A tout le moins y a-t-il exacte concordance entre les choix de l'architecte et les résultats que le mathématicien obtient par cet algorithme par retranchements successifs . Sans doute ce dernier peut-il aussi parvenir aux mêmes résultats par adjonctions successives, comme on peut le déduire de Euclide XIII, 5 :

> Si une droite est coupée en extrême et moyenne raison et si on lui ajoute une droite égale au plus grand segment, la droite entière sera coupée en extrême et moyenne raison et le plus grand segment sera la droite premièrement exposée .

Soit donc AB coupée en C avec : AB / AC = AC / BC



Adjoignons AD = AC , on aura : BD / AB = AB / AD

Convenons de désigner par s et d le petit et le grand segment du premier partage et par s' et d' les segments correspondants du second partage . On aura

$$s' = d \qquad \text{et} \qquad d' = s + d$$

comme la même procédure peut se réitérer autant que de besoin, on aurait à l'étape suivante :

$$s'' = d' \qquad \text{et} \qquad d'' = s' + d' \qquad \text{et ainsi de suite ...}$$

Dès lors en partant, comme pour les nombres de Théon, de :

$$s = d = 1$$

on construit une suite de nombres s^n et d^n où l'on retrouve la suite fibonaccienne :

	s^n	d^n
n=1	1	1
n=2	1	2
n=3	2	3
n=4	3	5
n=5	5	8
. . . . .	. . . . .	. . . . .

Si les seules données du Trésor ne permettent pas de décider de la procédure suivie pour obtenir la suite fibonaccienne, adjonctions ou retranchement, il n'en demeure pas moins qu'une procédure a été utilisée et que celle-ci est de nature mathématique .

Pour un très grand nombres de dimensions, les valeurs adoptées sont celles de la suite fibonaccienne F_1 et de celle qui lui est associée pour $\sqrt{5}$ ainsi que les multiples entiers de ces nombres et tout spécialement F_5 .
En ne retenant que les nombres rencontrés le plus fréquemment, ceux-ci appartiennent aux suites :

			$1/\varnothing^2$	$1/\varnothing$	*	$\varnothing$	$\varnothing^2$
F_1	8	13	21	34	55	89	144
$\sqrt{5}$	18	29	47	76	123	I99	233
F_5	40	65	105	170	275	445	720
$\sqrt{5}$	90	145	235	380	615	995	

A ces valeurs il convient d'ajouter :

$$R\ .\ (14 : 11) = 350 \qquad \text{et} : \quad 6\ R\ \varnothing^2 / 5 = 864$$

Ce sont donc ces nombres, leurs multiplès par un entier ou leurs sous-multiples qui constituent le modèle arithmétique qui complète le modèle géométrique .

III PROBLEMES DE VALIDATION

1 La procèdure euclidienne

Après avoir décrit deux modèles imaginés pour donner quelque cohérence aux données que nous offre le Trésor de Thèbes, il nous reste à tenter de vérifier leur adéquation et à essayer d'en apprécier la validité .

A commencer par le modèle géométrique, principalement constitué par le partage géométrique de la grandeur de référence, d'autres constructions par règle et le compas aboutiraient à un résultat identique . Il est toutefois assez vraissemblable que c'est la procédure décrite dans le livre II des Eléments qui a été effectivement utilisée et pas seulement en raison de la facilité du rabattement de la demie diagonale d'un carré .

On retrouve, en effet,un deuxième partage en extrême et moyenne raison et cette fois-ci sùr la façade : la hauteur visible de l'édifice (363") est découpée de la sorte par la partie supérieure du linteau (224,5") . Ce deuxième partage présente une propriété particulière : si l'on se reporte à la figure 3 de la première partie, il se trouve que les diagonales KA, KZ, ZT et AH correspondent aussi à des dimensions de l'édifice . Cette particularité fera l'objet d'une analyse ultèrieure détaillée . On ne la mentionne ici que parce qu'elle suggère assez fortement - sans pour autant constituer un critère décisif - un recours à la procèdure décrite dans les Eléments .

Par ailleurs ces deux partages sont effectués sur des bases différentes : 275" pour le premier et 363" pour le second . Or, il est parfaitement possible de les coordonner par l'intermédiaire de cette même procédure et révéler ainsi l'homogénéité de la conception d'ensemble . Sans entrer ici dans trop de détails justificatifs, on retiendra comme grandeurs stratégiques :

- La grandeur de base : 275"
- La hauteur visible du monument : 363"
- La hauteur du linteau : 224,5"
- La demi -hauteur du Larmier : I58,75"
- La profondeur de la Cella : 445"

La coordination de ces grandeurs s'effectue par l'intermédiaire du partage géométrique d'une grandeur auxilaire qui est la demi -diagonale du carré construit sur la hauteur et qui est estimée à : $363 : \sqrt{2} = 256{,}666$. On obtient ainsi ce que nous avions naguère appelé la "structure relationnelle nodale" du Trèsor de Thèbes :

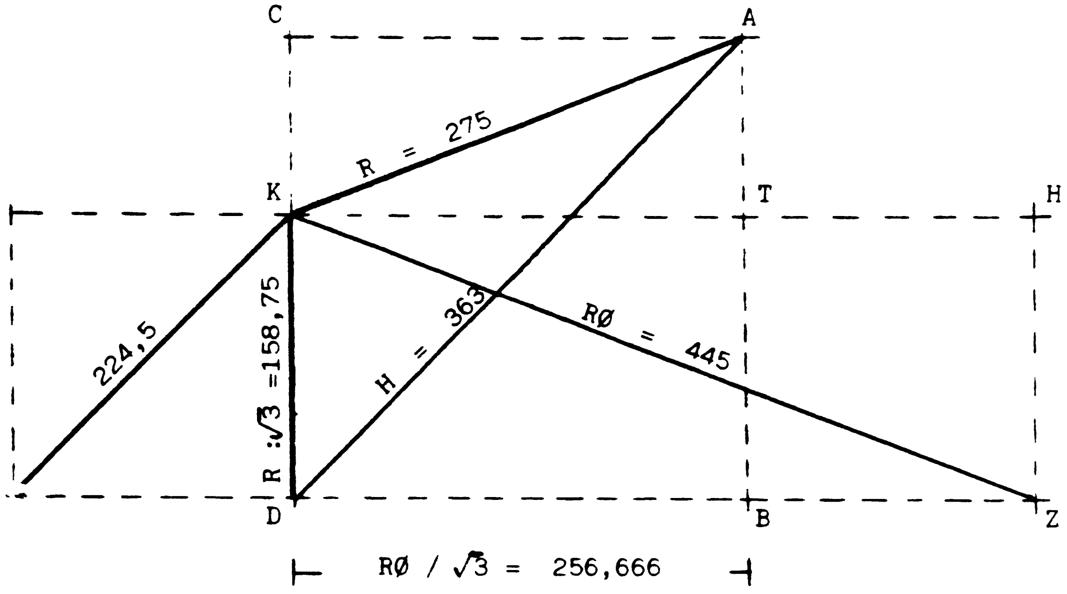


Figure 8 : Structure relationnelle nodale du Trésor

Il semble bien que cette figure révèle un noeud fondamental d'interrelations entre ces grandeurs à partir desquelles les autres se déduisent. Cette figure a-t-elle joué un rôle lors de la conception du Trésor, il est naturellement impossible de l'affirmer . Pour nous, en tout cas, elle résume et structure avec précision et clarté les données dont on dispose tant pour le plan que pour la façade .

2 Le modèle arithmétique

Considéré initialement comme le prolongement du modèle géométrique du plan, le modèle arithmétique était un modèle d'affectation de valeurs qui indiquait quels nombres attribuer aux dimensions entre-axes de l'édifice .
Ce rôle est assez limité puisqu'il ne concerne que trois dimensions et son principal interêt réside dans les valeurs choisies qui coincident avec celles des suites de Fibonacci .

Or, heureusement et assez curieusement d'ailleurs, ces mêmes nombres constituent aussi une part importante des dimensions du Trésor . Constatation inattendue car, hormis le plan, aucune raison géométrique sous jacente ne paraît plus soutenir désormais cette attribution . Le cas est particulièrement net pour la façade : il y a bien partage géométrique, mais sur une base différente 363" et non plus 275" . Malgré celà un grand nombre des mesures relevées sur cette façade dérive toujours des suites de Fibonacci ! C'est, par exemple, le cas pour la hauteur de la krépis, pour celle des orthostates ainsi que pour celle du niveau du linteau au dessus de ces orthostates. Au total, plus d'une trentaine de mesures, aussi bien horizontales que verticales ont été relevées et reportées sur la figure 9 ci-après :

LE TRESOR DE THEBES

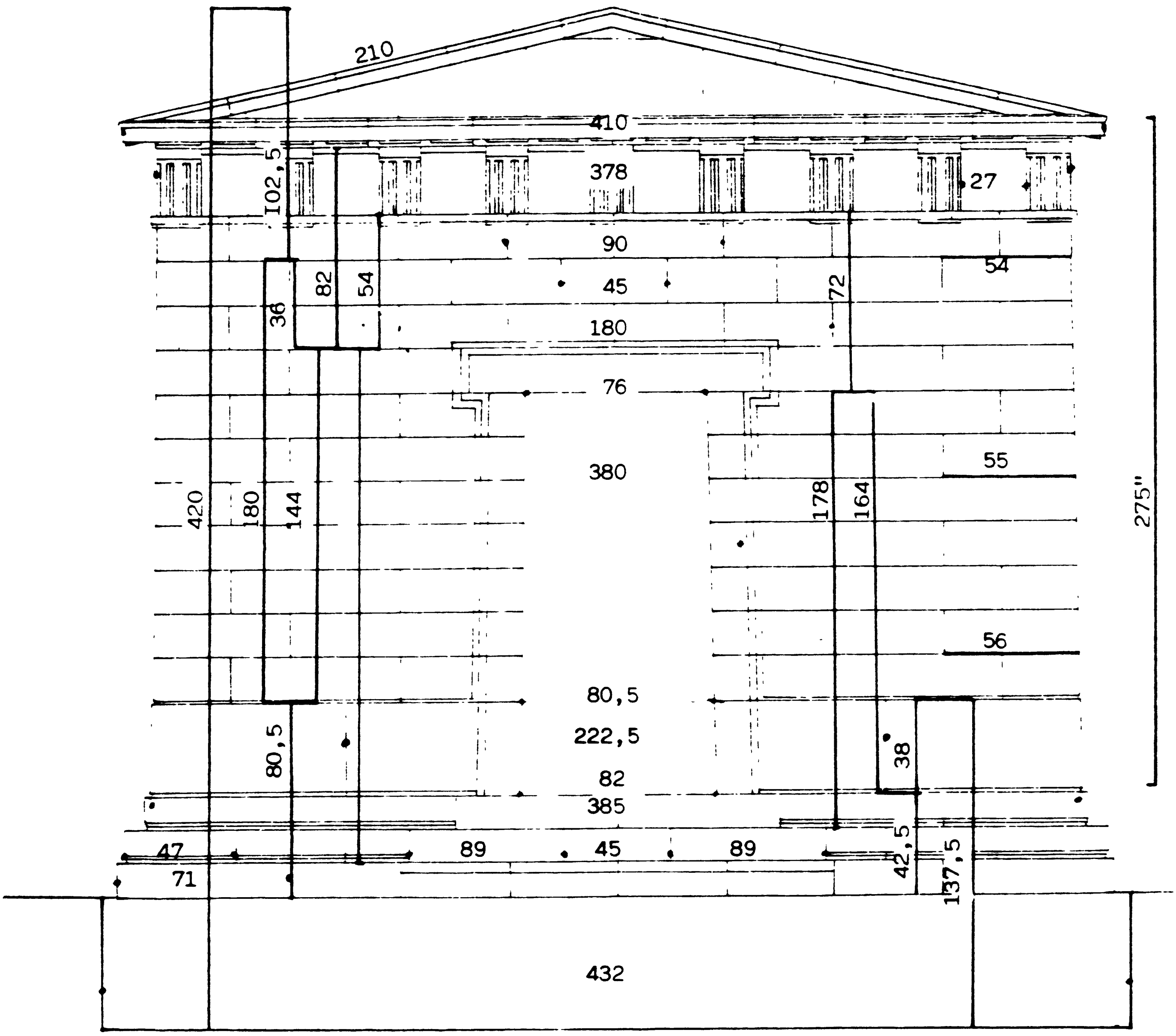


Figure 9 : Mesures sur la façade

Ce qui vaut pour la façade se retrouve sur l'ensemble de l'édifice , qu'il s'agisse de parties visibles (la longueur du larmier est de $4R:\emptyset = 680''$) ou de parties non visibles (tel bloc des assises de support, sous le mur de refend a une profondeur de $R:5 = 55''$) et plus de 90 de ces affectations ont été relevées et reportées dans une table annexe où elles ont été classées en fonction du type de la suite dont elles dérivent . Mais, pour heureuse qu'elle soit de notre point de vue, cette multiplicité d'affectations n'en pose pas moins deux problèmes :

(a) - Est-il légitime de continuer à parler d'approximations alors même qu'on ne décèle aucune construction géométrique qui requèrerait ces approximations ?

(b) - Le modèle arithmétique, tel qu'il est construit, n'est-il pas trop facilement validable, voire même irréfutable ?

Parler d'approximations, certainement pas, mais ces nombres n'ont-ils pas un autre rôle et le modèle ne peut-il pas avoir une existence autonome ? Nous entendons par là que, indépendamment de toute construction géométrique, il fournirait le moyen d'obtenir d'une manière quasi automatique un rapport donné et voulu entre deux grandeurs sans qu'une figure soit indispensable pour construire ce rapport ? En d'autres termes, ne permettrait-il pas de jouer avec des nombres entiers, selon certaines règles, pour aboutir à un ensemble de proportions satisfaisantes et harmonieuses ? Il est certes impossible de démontrer ce qui n'est encore qu'une opinion, cependant nous avons fréquemment eu l'impression que l'analyse du Trésor de Thèbes relevait davantage de l'arithmétique que de la géométrie et donc davantage des nombres que des figures .

Une sorte de confirmation externe nous est apportée par un édifice voisin, construit peu après le Trésor, à savoir le "Temple en Calcaire" d'Athéna sur la terrasse de Marmara . Nettement plus grand que le Trésor, 22 mètres de long au lieu de I2,9 , construit à partir d'un "pied" de base quelque peu plus court, la profondeur des orthostates est cependant identique, 34", alors que l'on s'attendrait à des murs plus épais . Et, en divers endroits de ce monument l'on retrouve encore et toujours les mêmes nombres : 55,275, 216, etc... . Pour ces deux édifices, avec quelqu'habitude des mesures en dactyles, point n'est besoin de calculer le rapport de deux grandeurs , la seule connaissance de leurs mesures suffit à savoir quelle est la nature de leur relation . Ici encore, le modèle arithmétique ne peut être considéré comme destiné à fournir des approximations mais bien plutôt à donner des listes d'entiers tels que deux quelconques d'entre eux soient toujours dans un rapport donné .

De ce point de vue, on peut considérer que le modèle arithmétique joue, en quelque sorte, le rôle d'un <u>réservoir</u> de nombres, réservoir qui est peut être d'une capacité telle qu'il rend le modèle trop aisément validable !

Certes, en considérant qu'il est constitué par tous les multiples des suites F_1 et $\sqrt{5}$, il peut contenir beaucoup de termes . Le plus trivialement du monde, il peut même contenir tous les entiers, puisque la suite F_1 commence à l'unité . Il serait donc irréfutable.

Ce n'est toutefois qu'une très petite partie de ces nombres potentiels qui est effectivement utilisée sur le Trésor et sur le Temple . Il s'agit principalement des voisins immédiats de 55 et 275, soit les quatre nombres qui s'en déduisent par : $\emptyset$, $\emptyset^2$ et leurs inverses, dont les multiples et les sous multiples sont des puissances de 2,ainsi que ceux de $6\ R\emptyset^2 \ /\ 5 \ =\ 864$. En définitive c'est une liste relativement réduite d'entiers qui constitue le fond des affectations . Il n'est donc aucunement invraissemblable de supposer que les retrouver sur ces édifices résulte d'un choix délibéré .

3 En signe de conclusion

La dernière illusion de cette recherche était de percer le secret de la conception de cet édifice, d'en dégager la signification . Au terme temporaire de notre étude force est de reconnaître que ce but demeure encore inaccessible ;

Nos analyses, le lecteur a pu s'en convaincre, sont essentiellement descriptives . Elles retiennent certaines particularités du monument, elles les interprêtent et les coordonnent dans un cadre théorique plausible, mais elles n'arrivent pas à déceler l'intention profonde du constructeur . Elles décrivent comment les choses ont été faites, elles ne découvrent pas pourquoi elles ont été faites ainsi .

Pour autant que la reconstitution proposée par l'archéologue soit une image fidèle de ce que fut jadis le monument, il est indéniable que la procédure euclidienne du partage en extrême et moyenne raison a été mise en oeuvre . Il est non moins indéniable que les suites dites de Fibonacci ont été utilisées pour le choix des dimensions de l'édifice . Si ces deux constatations ne manquent pas d'intérêt pour l'histoire de la mathèmatique pré-euclidienne, pourquoi ces constructions et pourquoi ces nombres ?

Pour quel dessein a-t-on eu recours à ces intermédiaires ? La visée fut-elle simplement esthétique ? Voulut-on aussi figurer des accords musicaux ? Fut-on guidé par une conception du Cosmos ? Ou tout celà ensemble ?

Quel homage, enfin, a-t-on voulu rendre à "ce dieu dont l'oracle est à Delphes, qui ne dévoile pas, ne dissimule pas, mais qui indique" ? Et si "La belle demeure a croulé", souhaitons néanmoins, contrairement à l'ultime oracle de la Pythie, que "ne se taise pas l'eau qui parlait" .

A N N E X E

TABLE DES DIMENSIONS

DU

TRESOR DE THEBES

R/5		R	
R/5 = 55"	Blocs d'angle de la 5° assise de parpaings Blocs sous le refend au 2° degré	R = 275"	Grandeur de référence : niveau du larmier:krépis
. 2 = 110"	Périmètre de la métope Intérieur de la Porte avec l'encadrement	. 2 = 550"	≈ Diagonale du rectangle d'inscription D(363 . 413) = 549,85
		. 4 = 1100"	413 + 687 420 + 680
		. ½ = 137,5	Profondeur du pronaos aux assises de parpaings Niveau des orthostates / Fondations l.p.
.36 = 1980	Périmètre entre-axes de la frise	.7/5= 385"	Largeur de la façade, base des orthostates
55 $\sqrt{5}$ = 123"		R $\sqrt{5}$ = 615"	≈ Diagonale transversale de la cella,e-a D(445 . 350 . 240) = 614,918
. 2 = 246"	Niveau Architrave l.p. / 1° degré l.p.		
.1/3 = 41"	Profondeur blocs 2° degré	.1/3 = 205	
41 . 2= 82"	Largeur de la porte au seuil	205 . 2=410"	Largeur du larmier en façade
.4 = 164"	Hauteur de la Porte d'entrée		
41 / 2= 20,5		205/2 = 102,5	Ecart architrave l.p. / Faît
20,5 . 7 = 348,5	Hauteur du faît / 1° degré l.p.		
41 $\sqrt{3}$ = 71	Longueur des orthostates piedroits Blocs d'angle de l'euthyntéria		
71 . 2= 142"	Niveau 5° assise parpaings / 1° degré l.p.		
55 Ø = 89"	Longueur blocs 2° degré en façade	R Ø = 445"	Profondeur e-a de la cella
. 2 = 178"	Niveau linteau l.p. / 1° degré l.p.		
.½ = 44,5	Longueur de blocs d'euthyntèria	. ½ = 222,5	Ecartement des joints des orthostates
55 / Ø = 34"	Profondeur des orthostates l.a.	R / Ø = 170"	
. 2 = 68"	Longeur de parpaings au refend	170.4 = 680"	Longueur du larmier sur les côtés
		170/4 = 42,5	Hauteur de la krépis (680 / 16) Profondeur des blocs du larmier
34 / 2 = 17			
17^2 = 209"	Niveau larmier / 1° degré l.p.		
17 . 23 = 391"	Largeur du 2° degré en façade		
34 $\sqrt{5}$ = 76"	Largeur de la Porte au linteau	170 $\sqrt{5}$ = 380"	Largeur de la 5° assise de parpaings
72 / 2 = 38"	Hauteur des orthostates Profondeur de blocs du 2° degré		
. 38 . 54 = 2052	Périmètre de la frise		

$55\ \phi^2 = 144"$ Ecart linteau l.a / Orthóstates l.a. .½ = 72" Blocs clés de la frise Ecart linteau l.p, / Architrave l.p. . 1/4 = 36" Ecart linteau l.a. / Architrave l.p. . 1/8 = 18" Largeur des triglyphes Hauteur des parpaings .1/16 = 9" P.G.C.D. (18,27,45) 144 / 3 = 48" Longueur de blocs d'euthyntéria au refend	$R\ \phi^2 = 720"$. ½ = 360" Entre-axes des triglyphes en façade . 1/4 = 180" Ecartement de lignes verticales de joints Les 10 rangées de parpaings du mur . 1/8 = 90" Ecartement de lignes verticales de joints Largeur de la porte intèrieure .1/16 = 45" MODULE Orthostates courants 720 / 3 = 240" Hauteur sous plafond 720 /12 = 60" Profondeur des blocs d'euthyntèria
$55 / \phi^2 = 21$. 3 = 63" Blocs d'angle de la frise . 6 =126" Ecart linteau l.p. / Orthostates l.a. .13 =273" Hauteur du larmier sur les côtés $21\sqrt{5}$ = 47" Blocs d'angle du 1° degré	$R / \phi^2 = 105$. 2 = 210" Pènte du toit Niveau du linteau l.a. / 1° degré l.a. . 4 = 420" Hauteur du faît sur les fondations . 6 = 630" Entre-axe des triglyphes latéraux
$55 / \phi^3 = 13"$. 3 = 39" Profondeur du seuil Profondeur des blocs du 2° degré Retraits sur les côtés : 687 - 648	$R / \phi^3 = 65"$ Longueur d'orthostates de tympan . 5 = 325" Largeur intèrieure au niveau de la frise
54 , 5 = 270" Longueur des triglyphes sur les côtés Ecartement de lignes de joints verticaux 54 . 7 = 378" Somme des métopes sur les côtés Largeur de la frise en façade 54 .12 = 648" Longueur de la frise sur les côtés 54 .22 =1188" Longueur tòtale des métopes 54 .38 =2052" Périmètre de la frise	$\frac{6}{5} R\ \phi^2 = 864"$ Longueur totale des triglyphes .½ = 432" Largeur des fondations .1/4 = 216" Longueur des métopes en façade .1/16 = 54" Orthostates de tympan Total des retraits : 432 - 378 Parpaings d'angle de la 10° assise Ecart linteau l.a./ Architrave l.a. Ecart frise / Faît : 320,5 - 266,5 .1/32 = 27" Largeur de la métope

Bibliographie succinte

Maurice CAVEING

La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque

Thèse de doctorat d'état, chez l'auteur

David H. FOWLER

Ratio in early greek mathematics

Bul.of the A.M.S., I, 1979, 807-846

Book II of Euclid's elements and a pre-eudoxan theory of ratio

Archive for history of exact sciences

1° partie : vol 22, 1980, 4-36

2° partie : vol 26, n° 3, 1982, 193-209

Logos (ratio) and analogon (proportio) in Plato, Aristotle and Euclid

Communication au colloque de Cerisy la Salle,

7 -17 Septembre 1982, non publié .

Jean ITARD

Les livres arithmétiques d'Euclide

Herman 1961

Wilbur R. KNORR

The evolution of the euclidean elements

Reidel, 1975

F. PEYRARD

Les oeuvres d'Euclide

Blanchard 1966